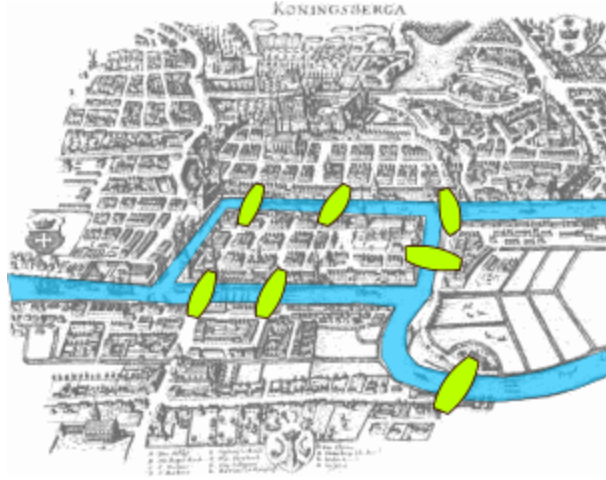


Tarea sobre grafos

Moises Omare León Pineda

Problema de los puentes de Königsberg



El problema de los puentes de Königsberg, también llamado más específicamente problema de los siete puentes de Königsberg, es un célebre problema matemático resuelto por Leonhard Euler en 1736 y cuya resolución dio origen a la teoría de grafos. Su nombre se debe a Königsberg, la ciudad de Prusia Oriental y luego de Alemania que desde 1945 se convirtió en la ciudad rusa de Kaliningrado.

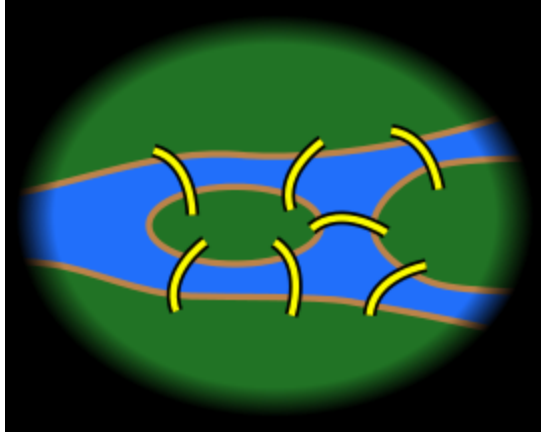
Esta ciudad está atravesada por el río Pregolia. Este se bifurca y rodea con sus brazos a la isla Kneiphof, de forma que el terreno queda dividido en cuatro regiones distintas, que entonces estaban unidas mediante siete puentes llamados puente del herrero, Puente Conector, Puente Verde, Puente del Mercado, Puente de Madera, Puente Alto y Puente de la Miel. El problema se formuló en el siglo XVIII y consistía en encontrar un recorrido para cruzar a pie toda la ciudad pasando solo una vez por cada uno de los puentes y regresando al mismo punto de inicio.

El problema, formulado originalmente de manera informal, consistía en responder a la siguiente pregunta:

"Dado el mapa de Königsberg, con el río Pregel dividiendo el plano en cuatro regiones distintas, que están unidas a través de los siete puentes, ¿es posible dar un paseo comenzando desde cualquiera de estas regiones, pasando por todos los puentes, recorriendo solo una vez cada uno, y regresando al mismo punto de partida?"

Solución de Euler

Para dicha demostración, Euler recurre a una abstracción del mapa y se enfoca exclusivamente en las regiones terrestres y las conexiones entre ellas. Cada puente quedó representado mediante una línea que unía a dos puntos, y cada uno de estos puntos representaba una región diferente. Así, el problema se reduce a decidir si existe o no un camino que comience por uno de los puntos, recorra todas las líneas una sola vez y regrese al mismo punto de partida.



Euler determinó, en el contexto del problema, que los puntos intermedios de un recorrido posible necesariamente han de estar conectados a un número par de líneas. En efecto, si llegamos a un punto desde alguna línea, entonces el único modo de salir de ese punto es por una línea diferente. Esto significa que tanto el punto inicial como el final serían los únicos que podrían estar conectados con un número impar de líneas. Sin embargo, el requisito adicional del problema dice que el punto inicial debe ser igual al final, por lo que no podría existir ningún punto conectado con un número impar de líneas.

En particular, como se ve en este diagrama, los cuatro puntos tienen un número impar de líneas (tres de ellos tienen tres líneas y el restante tiene cinco). Por lo tanto, se concluye que es imposible definir un camino con las características buscadas que son los siete puentes de Königsberg.

NOTA:

En la actualidad solo existen cinco puentes en Kaliningrado, distribuidos de tal manera que ahora sí es posible definir un "camino euleriano", es decir, una ruta que comienza en una isla y termina en otra; pero no todavía un "ciclo euleriano", es decir, que la ruta comience y termine en el mismo lugar, lo cual era necesario para cumplir con las condiciones iniciales del problema.

Algoritmo de Kamada Kawai- Método gráfico de fuerzas

Kamada y Kawai proponen en 1989 un método gráfico el cual tiene como finalidad realizar representaciones gráficas de estructuras computacionales complejas entre las que podemos encontrar redes de Petri y diagramas de estado. Para realizar estas representaciones gráficas, Kamada y Kawai proponen un algoritmo el cual está basado en el método de fuerzas.

Los algoritmos que se basan en el método de las fuerzas, llevan a cabo la gráfica de los parámetros deseados usando la información contenida y despreciando la información de la gráfica inicial; Lo anterior es completamente opuesto al algoritmo de Kruskal que tiene como objetivo buscar el sub grafo contenido dentro del grafo principal.

Para los algoritmos de fuerza al conjunto de nodos y vértices que conforman la gráfica se le otorga un valor de energía, este valor es la energía acumulada del sistema. Los sistemas con un nivel de energía baja corresponden a nodos subyacentes que cuentan con distancias especificadas y que se encuentran cerca unos de otros, los nodos no subyacentes se encuentran a distancias muy grandes.

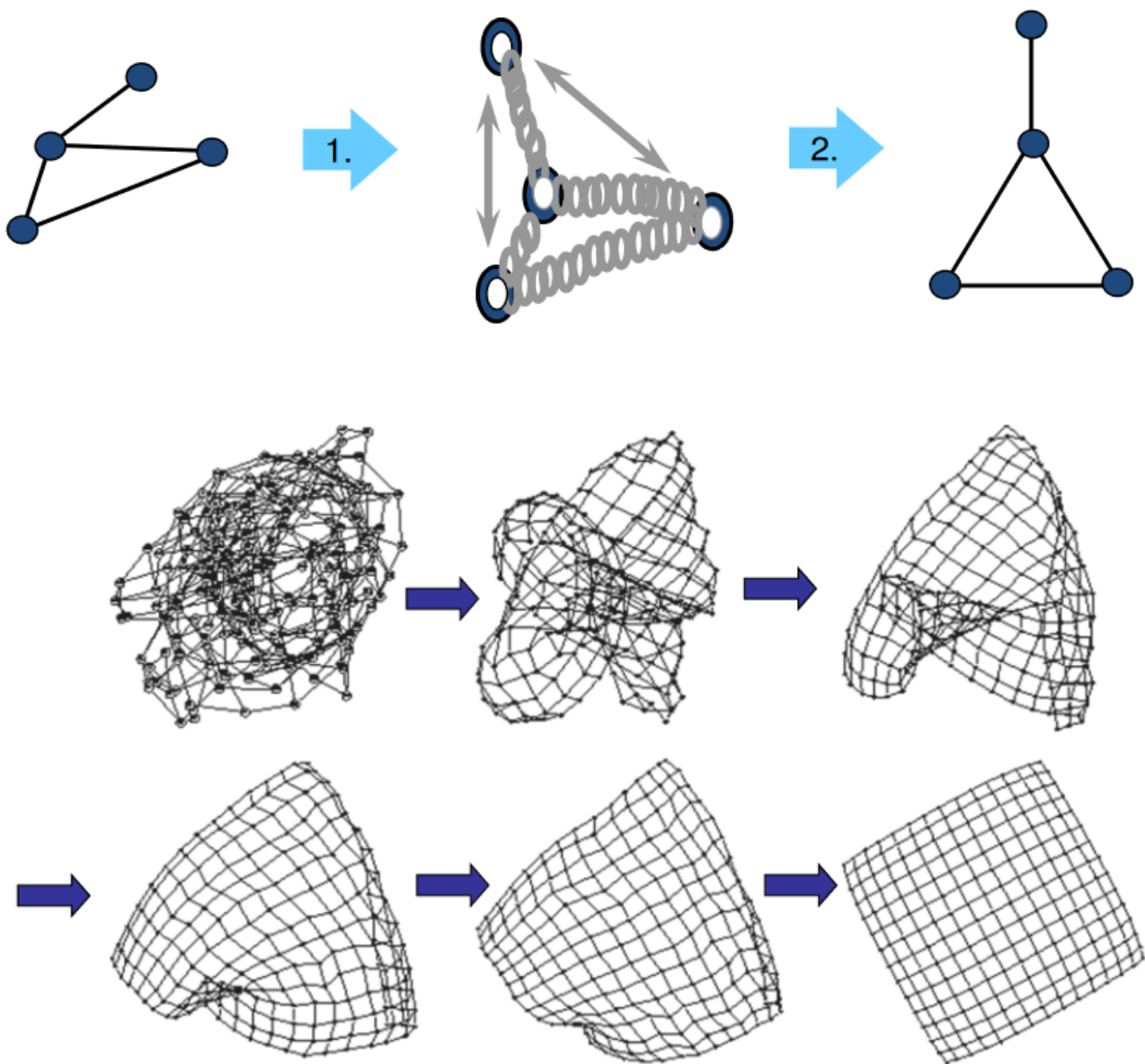
El algoritmo de Kamada- Kawai funciona tomando en cuenta las distancias más cortas entre los vértices. Este algoritmo simula fuerzas de resortes, tomando como base la ley de Hook, asignando un valor de fuerza

dependiendo de la distancia teórica y relativa entre los nodos que componen al sistema. Los pasos que utiliza el algoritmo de Kamada- Kawai son:

- 1.- Se consideran la distancia Euclidiana entre los nodos
- 2.- Se considera un sistema virtual en el que cada nodo se encuentra unido mediante un resorte.
- 3.- Posteriormente se posicionan los nodos de manera que el estado total de la energía en el sistema de resortes sea mínimo.

Por tanto, las fuerzas asociadas a los muelles son tanto atractivas como repulsivas para conseguir que la localización de los nodos respete las distancias teóricas que existen en el grafo

- 1.-Ejercen una fuerza atractiva si el muelle es más largo que su longitud natural en el grafo
- 2.-Ejercen una fuerza repulsiva si el muelle es más corto que su longitud natural en el grafo



© Sander

En general, todos los métodos pertenecientes a esta familia presentan dos componentes:

1. Modelo de fuerzas o de energía: Sistema de fuerzas, definido por nodos y enlaces, que especifica la calidad de la distribución

2. Algoritmo de optimización: Técnica para encontrar el estado de equilibrio, es decir, para calcular la distribución de nodos:

- en la que la suma de fuerzas de los nodos es cero (equilibrio), o
- que presenta la mínima energía local

Modela la distancia teórica del gráfico con la distancia Euclídea en el plano:

• Las fuerzas tratan de localizar los nodos de forma que su distancia geométrica en el gráfico sea proporcional a su distancia teórica en el grafo

Para cada par de nodos (i,j) , d_i, d_j es la distancia teórica en el grafo entre ellos:

• Número de enlaces o suma de los pesos en el camino geodésico entre i y j

La longitud ideal del muelle entre i y j se define como $l_{i,j} = L \cdot d_{i,j}$ donde L es la longitud deseable para una distancia de 1 en el gráfico

L se obtiene a partir del diámetro de la red y la longitud en pixels del lado más grande del área de visualización

$$L_0: L = \frac{L_0}{\max_{i < j} (d_{i,j})}$$

• $p_i = (x_i, y_i)$ y $p_j = (x_j, y_j)$ son las posiciones de los nodos i y j en el gráfico

• $d(p_i, p_j) = |p_i - p_j|$ es la distancia Euclídea entre dichas posiciones

• $l_{i,j}$ es la distancia teórica en el grafo entre dichos nodos

Objetivo : Encontrar una distribución tal que para cada par de nodos i y j , $d(p_i, p_j)$ sea aproximadamente igual a $l_{i,j}$

• Es decir, el sistema tiene una fuerza proporcional a $d(p_i, p_j) - l_{i,j}$ con la siguiente función de energía global, que se debe minimizar:

$$E = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{1}{2} k_{i,j} (|p_i - p_j| - l_{i,j})^2$$

• La energía potencial en el muelle que conecta i y j es: $\frac{1}{2} \cdot k_{i,j} \cdot (d(p_i, p_j) - l_{i,j})^2$

• $k_{i,j}$ es un parámetro de rigidez, que indica la fuerza del muelle en cuestión. Los muelles que unen nodos con una distancia teórica pequeña son más fuertes: $k_{i,j} = (K/l_{i,j})^2$ (K es una constante)

• Considerando las coordenadas 2D de los nodos en el gráfico, la función de energía E se reescribe como:

$$E = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{1}{2} k_{i,j} \left((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + l_{i,j}^2 - 2l_{i,j} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \right)$$

• El mínimo de esta ecuación se alcanza cuando las derivadas parciales son cero y es muy difícil de obtener. Hay que resolver $2 \cdot n$ ecuaciones no lineales

• Alternativamente, el método usa un enfoque iterativo que obtiene un mínimo local (y no el mínimo global) de la ecuación anterior

• En cada paso, sólo se mueve un nodo a una posición estable que minimice la energía global. El resto de nodos se pueden fijar

- El nodo escogido es aquel sobre el que tiene que actuar la mayor fuerza (el peor posicionado)
- Se obtiene como el nodo m que maximiza la siguiente fórmula basada en las derivadas parciales:

$$\Delta_m = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial x_m}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial y_m}\right)^2}$$

- El algoritmo finaliza cuando la mejora es menor que un umbral

Algoritmo

```

compute  $d_{i,j}$  for  $1 \leq i \neq j \leq n$ ;
compute  $l_{i,j}$  for  $1 \leq i \neq j \leq n$ ;
compute  $k_{i,j}$  for  $1 \leq i \neq j \leq n$ ;
initialize  $p_1, p_2, \dots, p_n$ ;
while ( $\max_i \Delta_i > \epsilon$ ) {
    let  $p_m$  be the particle satisfying  $\Delta_m = \max_i \Delta_i$ ;
    while ( $\Delta_m > \epsilon$ ) {
        compute  $\delta x$  and  $\delta y$  by solving the following system of equations:
        
$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_m^2}(x_m^{(t)}, y_m^{(t)})\delta x + \frac{\partial^2 E}{\partial x_m \partial y_m}(x_m^{(t)}, y_m^{(t)})\delta y = -\frac{\partial E}{\partial x_m}(x_m^{(t)}, y_m^{(t)});$$


$$\frac{\partial^2 E}{\partial y_m \partial x_m}(x_m^{(t)}, y_m^{(t)})\delta x + \frac{\partial^2 E}{\partial y_m^2}(x_m^{(t)}, y_m^{(t)})\delta y = -\frac{\partial E}{\partial y_m}(x_m^{(t)}, y_m^{(t)})$$

         $x_m := x_m + \delta x;$ 
         $y_m := y_m + \delta y;$ 
    }
}

```

Ejemplo de implementación

In []: https://github.com/MLeon8/Teoria-de-Juegos-MCSB/blob/main/Ejemplo%20Kumada_Kuwai.ipynb

Referencias

- 1.- <https://repositorio.tec.mx/bitstream/handle/11285/629169/33068001048921.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- 2.- <https://www.clubensayos.com/Negocios/Redes-de-Optimizacion-Algoritmo-de-Kruskal/5351965.html>
- 3.- <https://sci2s.ugr.es/sites/default/files/files/Teaching/GraduatesCourses/RedesSistemasCompu2-VisualizaciondeRedes-13-14.pdf>