

Nachrichtentechnik II – Synchronisation

Holger Jäkel

Communications Engineering Lab (CEL)



Synchronisierung

- Folgende Diskussionen erfolgen gemäß

[PS08]: J. Proakis, M. Salehi, *Digital Communications*, McGraw-Hill, 2008

[Hoe11]: P. Höher, *Grundlagen der digitalen Informationsübertragung*, Springer, 2011. (elektronische Version erhältlich in die KIT-Bibliothek)

[Kro91]: K. Kroschel, *Datenübertragung*, Springer, 1991

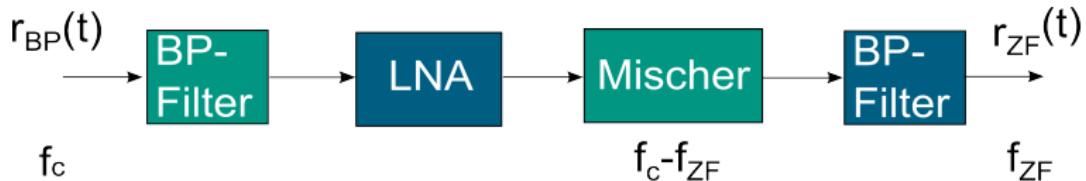


- 4 Synchronisierung
 - Aufbau eines Empfängers; Motivation
 - Signalmodell und ML-Schätzer
 - Frequenz-Schätzung
 - Zeit-Schätzung
 - Phasen-Schätzung
 - Synchronisation bei OFDM
 - Lernziele
 - Literatur



Aufbau eines Empfängers¹

- Evtl. Mischen auf eine Zwischenfrequenz (ZF); *Superheterodyn-Prinzip*



- Ist die Zwischenfrequenz gleich Null, $f_{ZF} = 0$, so spricht man von einem *direktmischenden Empfänger*

¹ Angelehnt an [Hoe11] und [Kam04]



Motivation und Überblick

- Heruntermischen, Matched-Filter und anschließende Signalverarbeitung funktionieren nur bei synchronisiertem Sender und Empfänger optimal; andernfalls entstehen Fehler
- Unterschiedliche Zeitbasen/Oszillatoren? \Rightarrow Rx muss aus Empfangssignal auf die Parameter schließen
- Mögliche Ansätze
 - Pilotton \Rightarrow Sendeleistung „verschwendet“
 - Aus Datensignal schätzen \Rightarrow in der Praxis bevorzugt



■ Bemerkungen:

- Schätzung der Trägerfrequenz f_c muss (relativ) viel genauer sein als die der Zeitverzögerung τ (hier genügt etwa $0,01 \cdot T$) \Rightarrow gemeinsame Schätzung nicht sinnvoll²
- Auswirkungen von Asynchronitäten diskutieren \rightarrow Beispiel drehende Signalraumdiagramme

²Nach [PS08]



Auswirkung falscher Parameter

- Betrachte Sendesignal

$$s_{\text{BP}}(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{I_n\} g(t) \cos(2\pi f_c t) - \sqrt{2} \operatorname{Im}\{I_n\} g(t) \sin(2\pi f_c t)$$

- Mischen mit Schwingungen³ $\sqrt{2} \cos(2\pi(f_c + f_{\text{off}})t + \phi + \phi_{\text{off}})$ und $-\sqrt{2} \sin(2\pi(f_c + f_{\text{off}})t + \phi_{\text{off}})$ ergibt nach TP-Filterung

$$y_I = \operatorname{Re}\{I_n\} \cos(2\pi f_{\text{off}} t + \phi_{\text{off}}) + \operatorname{Im}\{I_n\} \sin(2\pi f_{\text{off}} t + \phi_{\text{off}})$$

$$y_Q = -\operatorname{Re}\{I_n\} \sin(2\pi f_{\text{off}} t + \phi_{\text{off}}) + \operatorname{Im}\{I_n\} \cos(2\pi f_{\text{off}} t + \phi_{\text{off}})$$

- **Beispiel:** Extremfälle?

³ Fehlergrößen für Frequenz und Phase erhalten das Subskript „off“, angelehnt an „offset“.



Konvention

- In Erweiterung der bisherigen Konvention bezeichnen die Signalabfolgen

$$s(t) \rightarrow s_{\text{BP}}(t) \rightarrow r_{\text{BP}}(t) \rightarrow r(t) \rightarrow y(t) \rightarrow y[k]$$
$$s(t) \rightarrow s_{\text{BP}}(t) \rightarrow r_{\text{BP}}(t) \rightarrow r[m] \rightarrow y[m] \rightarrow y[k]$$
$$\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}_{\text{BP}} \rightarrow \mathbf{r}_{\text{BP}} \rightarrow \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{y}$$

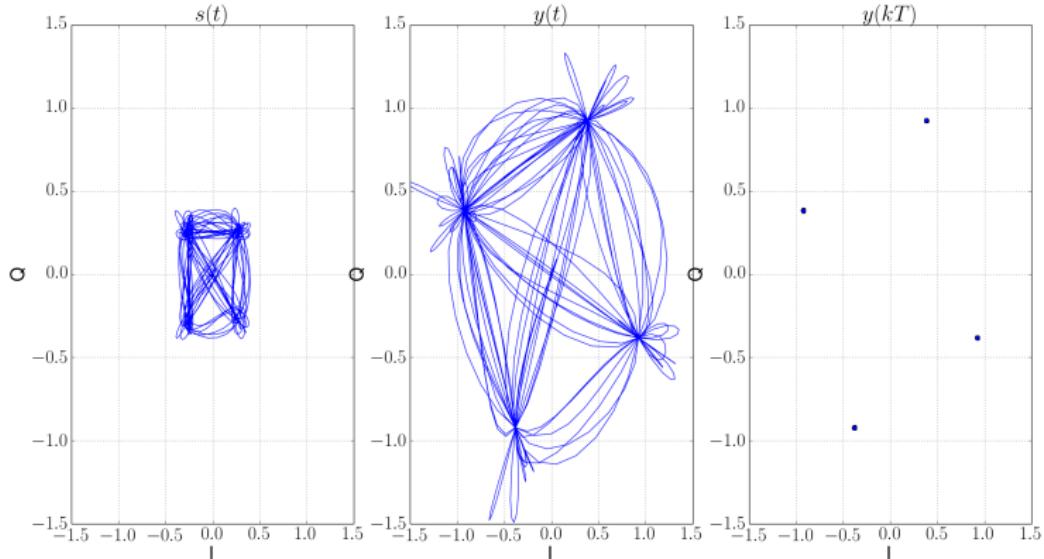
das Sendesignal im Basisband, das Sendesignal im Bandpass, das Empfangssignal in Bandpasslage, das Empfangssignal in Basisbandlage (analog oder digital), den Ausgang des Matched-Filters und dessen Abtastung.⁴

⁴ Der letzte Schritt der zweiten Zeile („Abtastung einer diskreten Größe“) ist als Downampling eines (über-)abgetasteten Signals auf den Symboltakt zu verstehen.



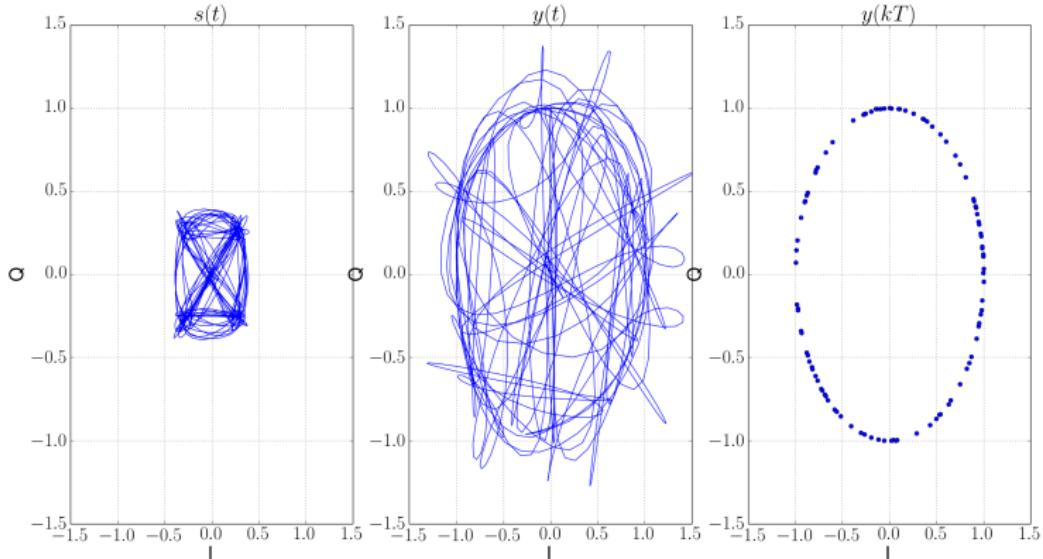
Auswirkung falscher Parameter

- **Beispiel:** RRC-Pulsformung mit $T = 1 \text{ s}$, $n_{\text{up}} = 8$, $\phi_{\text{off}} = \pi/8$, $f_{\text{off}} = 0$; idealer Abtastzeitpunkt



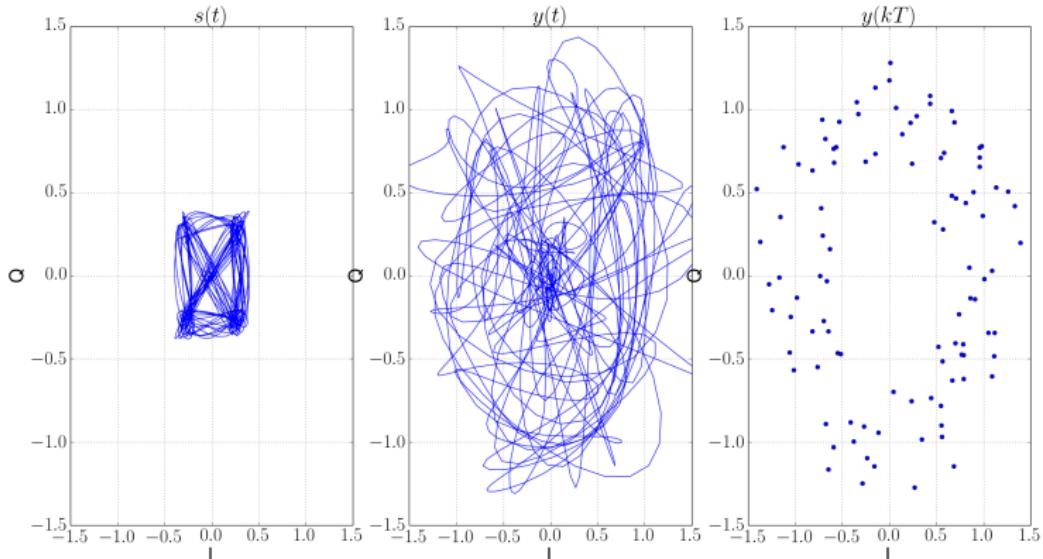
Auswirkung falscher Parameter

- **Beispiel:** RRC-Pulsformung mit $T = 1 \text{ s}$, $n_{\text{up}} = 8$, $\phi_{\text{off}} = 0$, $f_{\text{off}} = 10^{-3}/t_s$; idealer Abtastzeitpunkt



Auswirkung falscher Parameter

- **Beispiel:** RRC-Pulsformung mit $T = 1$ s, $n_{\text{up}} = 8$, $\phi_{\text{off}} = \pi/8$, $f_{\text{off}} = 10^{-3}/t_s$ mit Rauschen bei $E_b/N_0 = 10$ dB; idealer Abtastzeitpunkt



Benötigte Parameter

- Frequenzoffset f_{off}
- Phasenoffset ϕ_{off}
- Offset bzgl. korrektem Abtastzeitpunkt τ_{off} (Symboldauer T und Symbolverzögerung τ)

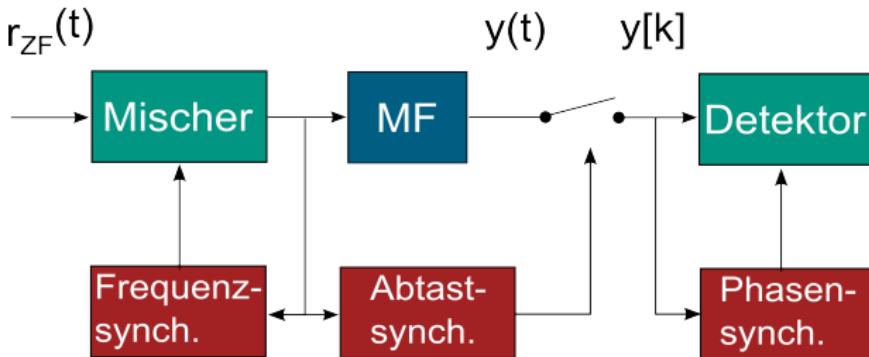
Annahme

Die gesuchten Parameter sind über die Beobachtungszeit konstant.



Aufbau eines Empfängers

- Empfängerstruktur^{5 6} („teil-analog“)



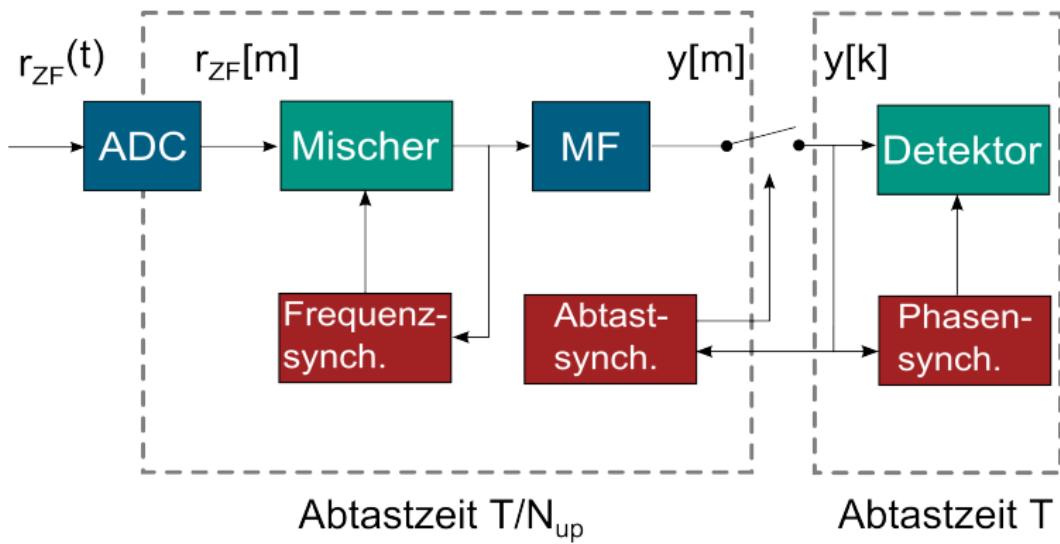
⁵ Angelehnt an [PS08]

⁶ Erinnerung: Bei direkt-mischendem Empfänger ist $f_{ZF} = 0$. Der hier aufgeführte Mischer übernimmt dann nur die Aufgabe der Frequenzregelung.



Aufbau eines Empfängers

- Empfängerstruktur⁷ („digital“)



⁷ Angelehnt an [Hoe11]

4

Synchronisierung

- Aufbau eines Empfängers; Motivation
- Signalmodell und ML-Schätzer
- Frequenz-Schätzung
- Zeit-Schätzung
- Phasen-Schätzung
- Synchronisation bei OFDM
- Lernziele
- Literatur



- Sofern nicht anders aufgeführt: Betrachtung im Basisband \implies

$$\begin{aligned} r(t) &= s(t - \tau_{\text{off}}) e^{j\phi_{\text{off}} + j2\pi f_{\text{off}} t} + n(t) \\ &=: s(t; \Psi) + n(t), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \Psi &:= (\phi_{\text{off}}, \tau_{\text{off}}, f_{\text{off}})^T \\ n(t) &\sim \mathcal{CN}(0, \sigma^2) \end{aligned}$$

⁸ Die folgenden Betrachtungen sind eine Mischung aus [PS08], [Men97] und [Hoe11].



- Seien $f_1(t), \dots, f_N(t)$ orthonormale Basisfunktionen⁹ über der Beobachtungszeit $[0, T_0]$
- Basisdarstellung liefert Koeffizienten

$$r_n := \langle r(t), f_n(t) \rangle$$

$$s_n(\Psi) := \langle s(t; \Psi), f_n(t) \rangle$$

- Für die Dichte des Empfangsvektors (Koeffizienten) in AWGN folgt¹⁰

$$f(\mathbf{r}|\Psi) = \left(\frac{1}{\pi\sigma^2} \right)^N \exp \left(- \sum_{n=1}^N \frac{|r_n - s_n(\Psi)|^2}{\sigma^2} \right)$$

⁹ Hier sind $f_1(t), \dots, f_N(t)$ Basisfunktionen im Basisband und somit komplexwertig. In Kapitel 1 wurden Bandpass-Basen $f_{BP,1}(t), f_{BP,2}(t)$ inkl. Träger und Pulsformung betrachtet.

¹⁰ . . . , da die Koeffizienten des Rauschens bzgl. einer ONB wieder (zeitdiskretes) AWGN ergeben, . . .



- **Beobachtung:** Likelihood-Funktion gegeben durch

$$\Lambda(\Psi) := \left(\frac{1}{\pi\sigma^2} \right)^N \exp \left(-\frac{1}{\sigma^2} \int_0^{T_0} |r(t) - s(t; \Psi)|^2 dt \right)$$

Wegen

$$|r(t) - s(t; \Psi)|^2 = |r(t)|^2 - 2 \cdot \text{Re}\{\langle r(t), s(t; \Psi) \rangle\} + |s(t; \Psi)|^2$$

folgt durch Zusammenfassen aller nicht von Ψ abhängigen Terme:

$$\Lambda(\Psi) = \text{const} \cdot \exp \left(\frac{1}{\sigma^2} \int_0^{T_0} 2 \cdot \text{Re}\{\langle r(t), s(t; \Psi) \rangle\} - |s(t; \Psi)|^2 dt \right)$$



- Es folgt

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_{\text{ML}} &= \arg \min_{\Psi} \|r(t) - s(t; \Psi)\|^2 \\ &= \arg \max_{\Psi} 2 \cdot \operatorname{Re}\{\langle r(t), s(t; \Psi) \rangle\} - \|s(t; \Psi)\|^2\end{aligned}$$

- Nachweis: Übung



■ Bemerkungen:

- ML-Schätzer sind asymptotisch erwartungstreu. [Hoe11]
- ML-Schätzer sind asymptotisch effizient, d. h. sie besitzen asymptotisch kleinstmögliche Varianz und erreichen die Cramer-Rao-Schranke.¹¹
- Dies heißt nicht, dass nicht andere Schätzer, wie z.B. der MMSE-Schätzer, sinnvoll/besser sein können. Insbesondere, falls der ML-Schätzer zu komplex oder die Anzahl der Beobachtungen nicht hinreichend groß ist.

¹¹ Genauer gilt: „[ML-Schätzer ...] konvergieren in Verteilung gegen eine normalverteilte Zufallsvariable, deren Varianz das Inverse der Fisher-Information ist [...] gilt [...] $\sqrt{n}(\hat{\vartheta} - \vartheta) \rightarrow \mathcal{N}(0, I(\vartheta)^{-1})$ “. Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Maximum-Likelihood-Methode>; abgerufen am 20.10.2015.



4

Synchronisierung

- Aufbau eines Empfängers; Motivation
- Signalmodell und ML-Schätzer
- **Frequenz-Schätzung**
- Zeit-Schätzung
- Phasen-Schätzung
- Synchronisation bei OFDM
- Lernziele
- Literatur



Alles Folgende, inkl. Konzept der Bilder, nach [Men97]; dem Klassiker im Hinblick auf Synchronisierung. Die Notation wurde an die in dieser Vorlesung verwendete Notation angepasst.



- [Men97] unterscheidet (wie auch in [Hoe11])
 - „Data-Aided“: Datensymbole werden als bekannt angenommen, beispielsweise mittels einer Präambel
 - „Non Data Aided“: Datensymbole werden als unbekannt angenommen
- **Bemerkung:** Über das hier Dargestellte hinaus analysiert [Men97] eine Vielzahl weiterer Verfahren; die folgende Darstellung beschränkt sich auf einige wenige, um die Vorlesung nicht zu überfrachten.



Annahmen

- Das Sendesignal verwendet lineare Modulation mit Pulsformung $g(t)$.
- Zu schätzende Parameter werden dem Sendesignal zugeordnet:

$$s(t; \Psi) = e^{j\phi_{\text{off}} + j2\pi f_{\text{off}}t} \sum_n I_n g(t - nT - \tau_{\text{off}})$$

- Kanal ergänzt AWGN
- „Clock-aided“: Timing ideal¹²
- $f_{\text{off}} \ll 1/T \rightarrow$ Diskussion¹³
- Der Term $\|s(t; \Psi)\|^2$ ist für die Maximierung nicht relevant.

¹²[Men97]: [...] Actually, good clock recovery is possible even with frequency errors as large as 20 % of the symbol rate. [...]

¹³Ergebnis der Diskussion: Wir nehmen dies zurecht an. In der Übung wird ein Verfahren behandelt, welches Frequenzabweichung im Bereich der Symbolrate schätzt.



Frequenz-Schätzung im Basisband

- Data-Aided: ML-Theorie
 - Einsetzen der Voraussetzungen liefert:

$$\begin{aligned}\langle r(t), s(t; \Psi) \rangle &= \int_0^{T_0} r(t) e^{-j2\pi f_{\text{off}} t} e^{-j\phi_{\text{off}}} \sum_n I_n^* g(t - nT - \tau_{\text{off}}) dt \\ &= e^{-j\phi_{\text{off}}} \sum_n I_n^* \int_0^{T_0} r(t) e^{-j2\pi f_{\text{off}} t} g(t - nT - \tau_{\text{off}}) dt \\ &\approx e^{-j\phi_{\text{off}}} \sum_{n=0}^{L_0} I_n^* \eta[n],\end{aligned}$$

wobei

$$L_0 = \frac{T_0}{T}, \quad \eta[n] = \int_0^{T_0} r(t) e^{-j2\pi f_{\text{off}} t} g(t - nT - \tau_{\text{off}}) dt$$

- **Beobachtung:** Das Integral entspricht dem Ausgang eines auf $g(t)$ angepassten Filters, wobei $r(t)$ frequenzverschoben wird.



- Data-Aided: ML-Theorie (ctd.)

- **Problem:** $\Lambda(\Psi)$ hängt noch von dem unbekannten Parameter ϕ_{off} ab.
- **Lösung:** Beseitigung von ϕ_{off} durch Mittelung unter der Annahme, dass ϕ_{off} gleichverteilt auf $[0, 2\pi]$ ist.

- Ansatz: $\sum_{n=0}^{L_0} I_n^* \eta[n] = ae^{j\alpha}$ liefert

$$\begin{aligned}\Lambda(\Psi) &= \text{const} \cdot \exp \left(\frac{1}{\sigma^2} \cdot 2\text{Re} \left\{ ae^{j\alpha - j\phi_{\text{off}}} \right\} \right) \\ &= \text{const} \cdot \exp \left(\frac{2}{\sigma^2} a \cos(\alpha - \phi_{\text{off}}) \right)\end{aligned}$$



Frequenz-Schätzung im Basisband

- Data-Aided: ML-Theorie (ctd.)
 - Mittelung bzgl. ϕ_{off} ergibt:

$$E_{\phi_{\text{off}}}(\Lambda(\Psi)) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} a \cos(\alpha - \phi_{\text{off}})\right) d\phi_{\text{off}}$$
$$\stackrel{(a)}{=} I_0\left(\frac{2a}{\sigma^2}\right),$$

wobei (a) aus Integraltabellen folgt.

- Da die modifizierte Besselfunktion für positive Argumente monoton steigend ist, folgt die ML-Schätzung durch:

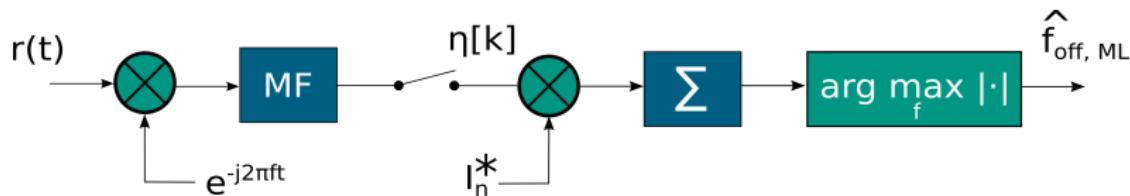
$$\widehat{f_{\text{off}}}_{\text{ML}} = \arg \max_{f_{\text{off}}} \left| \sum_{n=0}^{L_0} I_n^* \eta[n] \right|$$



Frequenz-Schätzung im Basisband

- Data-Aided: ML-Theorie (ctd.)

- Graphische Darstellung der Realisierung von $\left| \sum_{n=0}^{L_0} I_n^* \eta[n] \right|$:



- **Frage:** Wo sehen Sie ein Problem/eine Umständlichkeit?

Frequenz-Schätzung im Basisband

- Data-Aided: Praktisch – ML-Approximation
 - Analysiere die für die ML-Entscheidung relevante Größe:

$$\begin{aligned}\eta[n] &= \int_0^{T_0} r(t) e^{-j2\pi f_{\text{off}} t} g(t - nT - \tau_{\text{off}}) dt \\ &\stackrel{(a)}{\approx} \int_0^{T_0} r(t) e^{-j2\pi f_{\text{off}}(nT + \tau_{\text{off}})} g(t - nT - \tau_{\text{off}}) dt \\ &= e^{-j2\pi f_{\text{off}}(nT + \tau_{\text{off}})} \int r(t) g(t - nT - \tau_{\text{off}}) dt \\ &= e^{-j2\pi f_{\text{off}}(nT + \tau_{\text{off}})} y[n],\end{aligned}$$

wobei (a) wegen $f_{\text{off}} \ll 1/T$ gilt und $y[n]$ den abgetasteten Ausgang des Matched-Filters bezeichnet.



Frequenz-Schätzung im Basisband

- Data-Aided: Praktisch – ML-Approximation (ctd.)

- Somit folgt:

$$\overline{\Lambda(f_{\text{off}})} = \left| \sum_{n=0}^{L_0} I_n^* e^{-j2\pi f_{\text{off}} n T} y[n] \right|$$

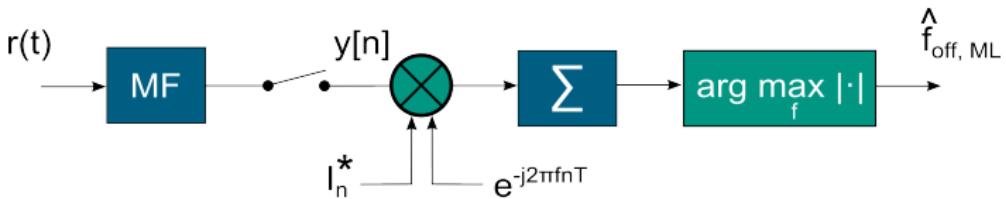
und schließlich

$$\hat{f}_{\text{off}, \text{ML}} = \arg \max_{f_{\text{off}}} \left| \sum_{n=0}^{L_0} I_n^* e^{-j2\pi f_{\text{off}} n T} y[n] \right|$$



Frequenz-Schätzung im Basisband

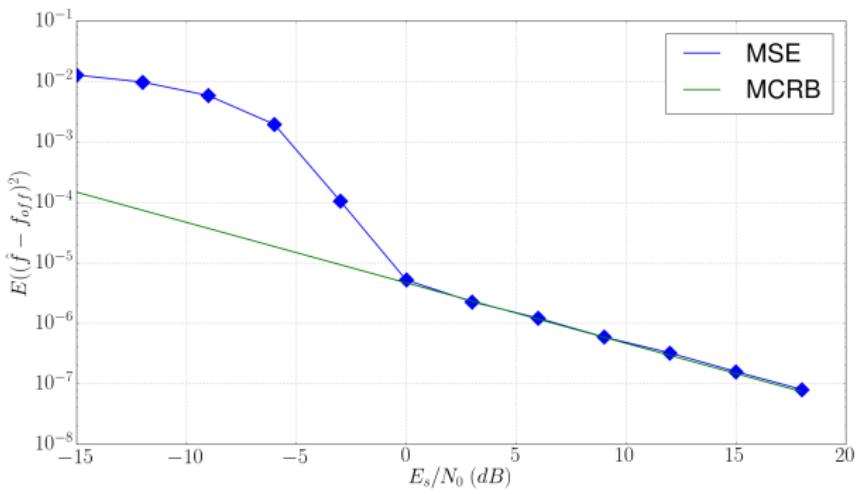
- Data-Aided: Praktisch – ML-Approximation (ctd.)
 - Realisierung:



Frequenz-Schätzung im Basisband

- Data-Aided: Praktisch – ML-Approximation (ctd.)

- **Beispiel:**^{14 15} QPSK mit RRC-Pulsformung mit $\beta = 0.5$, f_{off} gleichverteilt auf $[-\frac{0.15}{T}, \frac{0.15}{T}]$, $L_0 = 32$, Timing und Phase ideal
 10^3 Samples in $[-\frac{0.15}{T}, \frac{0.15}{T}]$ bei Max.-Suche; 10^3 Realisierungen pro Simulationspunkt



¹⁴ Randbedingungen wie in Abschnitt 3.2.7 in [Men97]

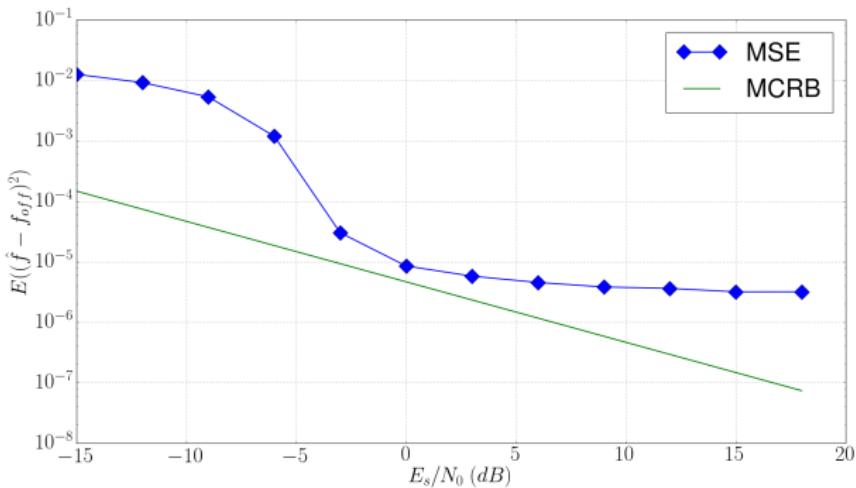
¹⁵ MCRB: „Modified Cramer Rao Bound; CRB: untere Schranke der Varianz eines Schätzers



Frequenz-Schätzung im Basisband

- Data-Aided: Praktisch – ML-Approximation (ctd.)

- **Beispiel:**^{16 17} QPSK mit RRC-Pulsformung mit $\beta = 0.5$, f_{off} gleichverteilt auf $[-\frac{0.15}{T}, \frac{0.15}{T}]$, $L_0 = 32$, Timing und Phase ideal
50 Samples in $[-\frac{0.15}{T}, \frac{0.15}{T}]$ bei Max.-Suche; 10^3 Realisierungen pro Simulationspunkt



¹⁶Randbedingungen wie in Abschnitt 3.2.7 in [Men97]

¹⁷**Übung/Diskussion:** Erklären Sie den Wert des „Error-floors“.



Einschub: Interpolation

■ Problemstellung:

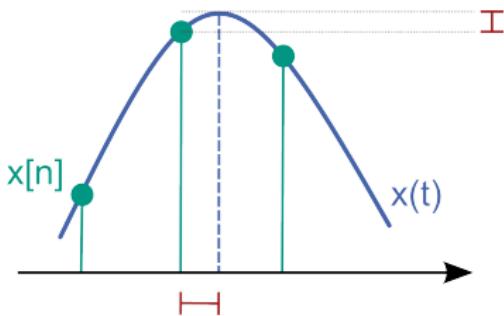
- Suche erfolgt in Variablen, die diskretisiert sind (Auflösung Δ)
- Genauigkeit (MSE) einer Schätzung proportional zur Auflösung ($\Delta^2/12$)

■ Frage: Wie kann dies vermieden/beseitigt werden?

■ Lösung: Interpolation

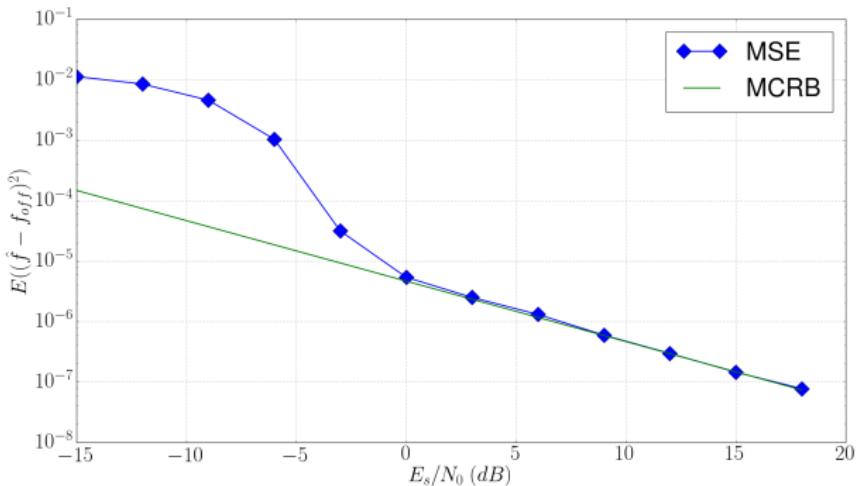
- Ansatz: Samples entstammen einer quadratischen Funktion
- Finde deren Parameter
- Berechne Maximum der Parabel gemäß

$$\hat{f}_{\text{interpol}} = -\frac{b}{2a}$$



Frequenz-Schätzung im Basisband

- Data-Aided: Praktisch – ML-Approximation (ctd.)
 - **Beispiel:**¹⁸ QPSK mit RRC-Pulsformung mit $\beta = 0.5$, f_{off} gleichverteilt auf $[-\frac{0.15}{T}, \frac{0.15}{T}]$, $L_0 = 32$, Timing und Phase ideal
50 Samples in $[-\frac{0.15}{T}, \frac{0.15}{T}]$ mit Interpolation; 10^3 Realisierungen pro Simulationspunkt



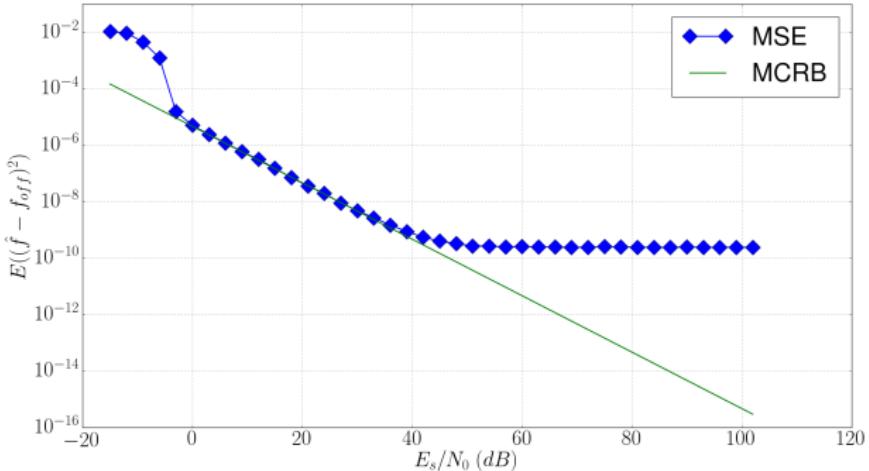
¹⁸ Randbedingungen wie in Abschnitt 3.2.7 in [Men97]



Frequenz-Schätzung im Basisband

- Data-Aided: Praktisch – ML-Approximation (ctd.)

- **Beispiel:**¹⁹ QPSK mit RRC-Pulsformung mit $\beta = 0.5$, f_{off} gleichverteilt auf $[-\frac{0.15}{T}, \frac{0.15}{T}]$, $L_0 = 32$, Timing und Phase ideal
50 Samples in $[-\frac{0.15}{T}, \frac{0.15}{T}]$ mit Interpolation; 10^3 Realisierungen pro Simulationspunkt



¹⁹ Randbedingungen wie in Abschnitt 3.2.7 in [Men97]



- Data-Aided: Praktisch – ML-Approximation (ctd.)

- **Bemerkungen:**

- Auch mit Interpolation ergeben sich Quantisierungsfehler (z.B. der „parabolic mismatch“). Diese sind beschreibbar und analysierbar, was hier aus Gründen der Einfachheit nicht behandelt wird.
 - Neben der quadratischen Interpolation existiert eine Vielzahl weiterer Methoden, auf die hier aus Zeitgründen nicht eingegangen wird.



Frequenz-Schätzung im Basisband

- Non Data-Aided:

- **Idee:** Daten unbekannt \implies Beseitige Daten

- **Ansatz:** Wie zuvor folgt am Ausgang des Samplers nach dem MF:

$$y[k] = I_k e^{j2\pi f_{\text{off}}(kT + \tau)} e^{j\theta} + n[k]$$

- Wurde als Modulation QPSK verwendet²⁰, so folgt

$$y^4[k](y^*[k-1])^4 = e^{j8\pi f_{\text{off}}T} + n'[k]$$

und somit schließlich nach Mittelung

$$\hat{f}_{\text{off}} = \frac{1}{8\pi T} \arg \left\{ \sum_{k=1}^{L_0} (y[k]y^*[k-1])^4 \right\}.$$

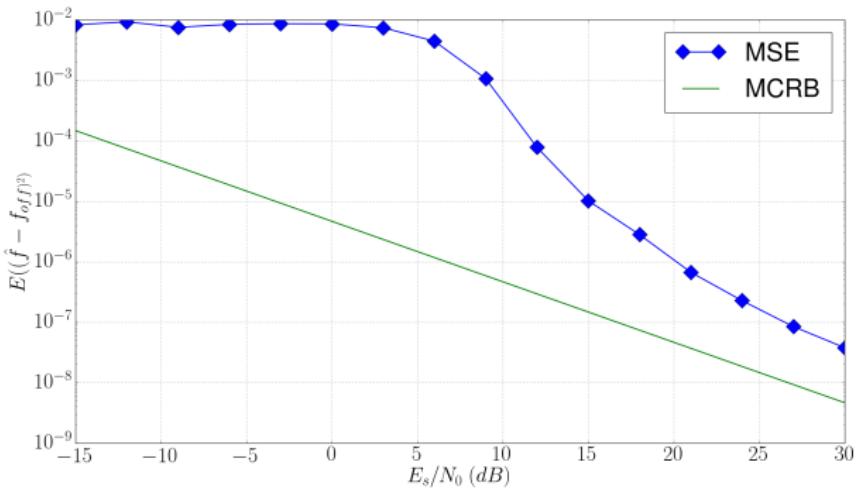
²⁰Anpassung auf andere PSK-Varianten zur Übung



Frequenz-Schätzung im Basisband

- Non Data-Aided (ctd.)

- **Beispiel:**²¹ QPSK mit RRC-Pulsformung mit $\beta = 0.5$, f_{off} gleichverteilt auf $[-\frac{0.1}{T}, \frac{0.1}{T}]$, $L_0 = 32$; Timing und Phase ideal; 10^3 Realisierungen pro Simulationspunkt



²¹ Randbedingungen wie in Abschnitt 3.4.3 in [Men97]

■ Bemerkungen:

- Über die hier aufgeführten Methoden hinaus diskutiert [Men97] eine Vielzahl weiterer Algorithmen und beleuchtet weitere Aspekte, etwa des Verarbeitungsaufwands.
- Eine Methode zur Frequenzschätzung ohne Kenntnis der Timing-Information wird in der Übung besprochen. („Closed-Loop Recovery with No Timing Information“)



4

Synchronisierung

- Aufbau eines Empfängers; Motivation
- Signalmodell und ML-Schätzer
- Frequenz-Schätzung
- Zeit-Schätzung
- Phasen-Schätzung
- Synchronisation bei OFDM
- Lernziele
- Literatur



- Entzerrer und Symbolentscheidung benötigen Abtastzeitpunkt und Takt
- Takt oder Abtastzeitpunkt falsch \Rightarrow man „rutscht“ im Augendiagramm vom idealen Abtastzeitpunkt weg
 - Signalamplitude (und damit SNR) verschlechtert sich
 - ISI entsteht, da ISI-Freiheit – wenn überhaupt – nur im Abtastzeitpunkt gilt
- Abtastung erfolgt zu Zeitpunkten $mT + \tau_{\text{off}}$, wobei
 - T die Symboldauer ist
 - τ_{off} die Verzögerung im Rx relativ zum Tx ist
- **Annahme:** T ist grundsätzlich bekannt, der Wert „läuft“ lediglich weg \Rightarrow schätze τ_{off}



Zeit-Schätzung im Basisband

- **Ansatz:**²² Samples $y[m]$ des MF im Symboltakt verwendet zur Interpolation auf höheren Takt t_n :

$$\begin{aligned}y(t_n) &= \sum_{m=\ell_n-I_2}^{\ell_n+I_1} h_I(\ell_n - mT + \mu_n T)y[m] \\&= \sum_{i=-I_1}^{I_2} h_I(iT + \mu_n T)y[\ell_n - i]\end{aligned}$$

mit

$$t_n = (\ell_n + \mu_n)T, \quad 0 < \mu_n < 1, \ell_n \in \mathbb{Z}.$$

und Interpolationskoeffizienten $h_I(\cdot)$.

²² Wie immer nach [Men97]



- Der Grundgedanke der meisten Verfahren besteht darin einen *Timing Error Detector, TED, $e[k]$* zu verwenden, welcher die Güte der Zeitschätzung bzw. die Schwere der Fehlschätzung bewertet.
- Der Wert der TED wird zurückgeführt und dient als Grundlage zur adaptiven Verbesserung der Schätzung gemäß

$$\hat{\tau}_{k+1} = \hat{\tau}_k + \gamma \cdot e[k].$$

- Für den Fehler wird das Modell

$$e[k] = S(\tau - \hat{\tau}_k) + N[k]$$

angenommen, welches den Fehler über eine deterministische Funktion mit $S'(\cdot) > 0$ (die *S-curve*) und Rauschen beschreibt.



Zeit-Schätzung im Basisband

- *Decision-Directed: ML-based*²³

- **Ansatz:** Linear moduliertes Signal wird angenommen²⁴ als

$$s(t; \tau) = \sum_n I_n g(t - nT - \tau)$$

und liefert die zu maximierende (Likelihood²⁵-)Funktion

$$\begin{aligned}\Lambda(\tau) &= 2 \cdot \operatorname{Re} \{ \langle r(t), s(t, \tau) \rangle \} - \|s(t, \tau)\|^2 \\ &= 2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \sum_n I_n^* \int r(t) g(t - nT - \tau) dt \right\} \\ &\quad - \sum_n \sum_m I_n I_m^* \int g(t - nT - \tau) g(t - mT - \tau) dt\end{aligned}$$

²³Der *Data-Aided*-Ansatz kann als Spezialfall interpretiert werden.

²⁴Ergebnisse von [Men97] wurden auf nicht-reellwertige Modulation und in der Notation angepasst.

²⁵Es handelt sich nicht direkt um die Likelihood-Funktion, sondern um die durch Beseitung für die Maximierung nicht relevanter Anteile entstehende Funktion.



Zeit-Schätzung im Basisband

- *Decision-Directed: ML-based*

- Ableiten liefert

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} \Lambda(\tau) &= -2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \sum_n I_n^* \int r(t) g'(t - nT - \tau) dt \right\} \\ &\quad + 2 \cdot \sum_n \sum_m I_n I_m^* \int g'(t - nT - \tau) g(t - mT - \tau) dt \\ &\approx \sum_{n=0}^{L_0-1} 2 \cdot \operatorname{Re} \{ I_n^* y'(nT + \tau) \} + 2 \cdot I_n^* \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m h'[n - m] \\ &\approx \sum_{n=0}^{L_0-1} 2 \cdot \operatorname{Re} \{ I_n^* y'(nT + \tau) \}\end{aligned}$$



- *Decision-Directed: ML-based*

- **Bemerkungen:**

- Die letzte Abschätzung entsteht durch Weglassen der Summe. [Men97] diskutiert diese Vereinfachung und analysiert den hierbei entstehenden Fehler.
 - Im Sinne der adaptiven Schätzung ist jeder Summand als TED-Wert zu interpretieren. Es wäre somit:

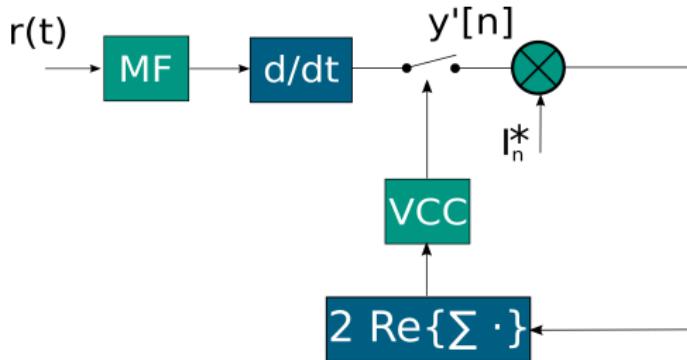
$$e[n] = 2 \cdot \operatorname{Re} \{ I_n^* y'(nT + \tau) \}$$

- Statt der Differenzierung des MF-Ausgangs kann auch das *derivative matched filter* mit der Impulsantwort $-g'(-t)$ verwendet werden. [Men97]



Zeit-Schätzung im Basisband

- *Decision-Directed: ML-based*
 - Graphische Darstellung:



- *Decision-Directed: Early-Late-Synchronisierung²⁶*

- **Grundidee:** Berechnung der Ableitung umständlich; wieso nicht MF abtasten und Ableitung diskret approximieren? Führt auf TDE²⁷

$$e[k] = 2\operatorname{Re} \left\{ I_k^* \cdot \frac{y(kT + \delta_+) - y(kT - \delta_-)}{T} \right\}$$

- **Ansatz/Motivation:** Ausgang des MF entspricht der Korrelationsfunktion → Diskussion mit Hilfe einer Graphik → Tafel

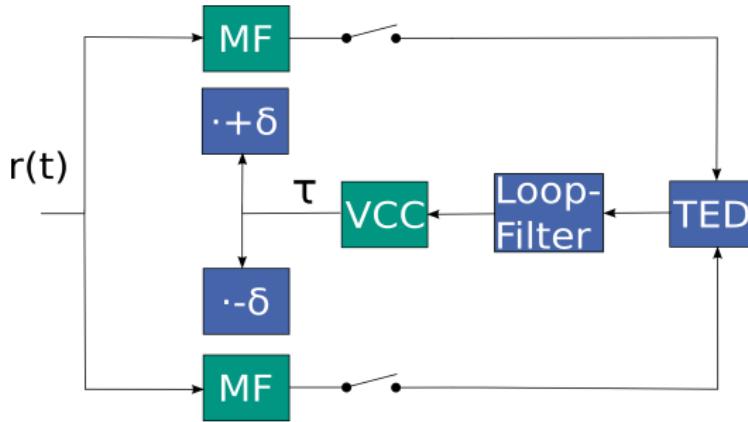
²⁶ Folgendes als Mischung aus [Men97] und [PS08]

²⁷ δ ist eine hier nicht näher spezifizierte Verschiebung; in [Men97] wird z.B. eine Verschiebung um $\delta_+ = \frac{T}{2} + \hat{\tau}_{k+1/2}$ bzw. $\delta_- = \frac{T}{2} - \hat{\tau}_{k-1/2}$ vorgeschlagen.



Zeit-Schätzung im Basisband

- *Decision-Directed: Early-Late-Synchronisierung*
 - Graphische Darstellung:²⁸



²⁸ Angelehnt an [PS08] und [Men97]

- *Decision-Directed*²⁹

- Der *Mueller-and-Mueller-Detector* verwendet die TED

$$e[k] = \hat{I}_{k-1} \cdot y(kT + \hat{\tau}_k) - \hat{I}_k \cdot y((k-1)T + \hat{\tau}_{k-1})$$

Ist die Schätzung $\hat{\tau}$ gut und erfüllt das Gesamt-MF $h(t) = g(t) * g(-t)$ die 1. Nyquistbedingung, so entsteht kein Eigenrauschen. [Men97]

- Der *Zero-Crossing-Detector* nutzt die TED

$$e[k] = (\hat{I}_{k-1} - \hat{I}_k) \cdot y\left(kT - \frac{T}{2} + \hat{\tau}_{k-1}\right)$$

und arbeitet somit mit Zwischensampeln (also einer Überabtastung mit Faktor 2 relativ zum Symboltakt).

²⁹ Nach [Men97]



- *Non-Data-Aided: ML-Detector*

- **Ansatz:** Linear moduliertes Signal wird angenommen³⁰ als

$$s(t; \tau) = \sum_n I_n g(t - nT - \tau)$$

und liefert die zu maximierende (Likelihood³¹-)Funktion

$$\Lambda(\tau, \mathbf{I}) = \exp \left(2\operatorname{Re} \{ \langle r(t), s(t, \tau) \rangle \} - \|s(t, \tau)\|^2 \right)$$

- **Problem:** Likelihood-Funktion abhängig von der Datenfolge

³⁰ Ergebnisse von [Men97] wurden auf nicht-reellwertige Modulation und in der Notation angepasst.

³¹ Es handelt sich nicht direkt um die Likelihood-Funktion, sondern um die durch Beseitung für die Maximierung nicht relevanter Anteile entstehende Funktion.



- *Non-Data-Aided: ML-Detector*

- **Lösung:** Entwicklung der Exp-Funktion in eine Potenzreihe bis zum quadratischen Glied und Beseitigung der Daten durch Erwartungswertbildung ergibt³²

$$\frac{d}{d\tau} \Lambda(\tau) \approx \sum_{n=0}^{L_0-1} 2\operatorname{Re} \{y^*(nT + \tau)y'(nT + \tau)\}$$

- **Erkenntnis:** „Sieht ähnlich aus“ wie im Decision-Directed-Fall; es wurde „lediglich das Datensymbol I_n durch MF-Ausgang $y(nT + \tau_n)$ ersetzt“

³² Details siehe [Men97]



- *Non-Data-Aided: Weitere Methoden*

- Der *Gardner-Detector* entsteht aus dem Zero-Crossing-Detector, indem statt der Datensymbole die MF-Ausgangswerte verwendet werden:

$$e[k] = (y((k-1)T + \hat{\tau}_{k-1}) - y(kT + \hat{\tau}_k)) \cdot y\left(kT - \frac{T}{2} + \hat{\tau}_{k-1}\right)$$



- *Feedforward-Schemes*

- **Ziel:** Schätzung des Timing auf Basis eines überabgetasteten MF-Ausgangs bei Präambel der Länge L_0

- **Vorgehensweise:**

- Nicht-lineare Verzerrung erzeugt im Spektrum Peaks im Abstand $1/T$ (siehe Diskussion der Zyklostationarität in Kapitel 2)
 - Es kann gezeigt werden, dass die Phase des Peaks zur Verzögerung τ_{off} proportional³³ ist. [Men97]
 - Zwei mögliche Schätzverfahren, die diese Tatsache ausnutzen, werden in [Men97] gezeigt. Eines der beiden (*Oerder-Meyr Algorithmus*) wird im Folgenden diskutiert.

³³Erklärung: $\mathcal{F} s(t) \circ \bullet \mathcal{X} S(f) \implies \mathcal{F} s(t - t_0) \circ \bullet \mathcal{F} S(f) e^{-j2\pi f t_0}$



■ *Squaring-Time Recovery*³⁴

- Verfahren zur Zeitsynchronisation für lineare Modulationsverfahren ohne a-priori Wissen.
- Wie bereits des öfteren bezeichne $y[m] = y\left(m \frac{T}{n_{\text{up}}}\right)$ den abgetasteten Ausgang des MF, wobei mit Faktor n_{up} überabgetastet wurde. Es ist also mit der Notation aus Kapitel 2:³⁵

$$y[m] = \sum_n I_n \cancel{x} \left(m \frac{T}{n_{\text{up}}} - nT - \tau_{\text{off}} \right) + n \left(m \frac{T}{n_{\text{up}}} \right)$$

³⁴ Auch Oorder-Meyr-Algorithmus [OM88]

³⁵ Die Funktion $x(t) = \tilde{h}(t) * \tilde{h}(t)$ bezeichnet den Ausgang des MF mit $\tilde{h}(t) = g(t) * h(t)$. Ist der Kanal $h(t)$ unbekannt, so wird auf $g(t)$ gematched und es ist $x(t) = \tilde{h}(t) * g(t)$.



Zeit-Schätzung im Basisband

- *Squaring-Time Recovery* (ctd.)
 - Bildet man das Betragsquadrat

$$\textcolor{red}{\cancel{x}} \, b[m] = |y[m]|^2 = \left| \sum_n I_n \textcolor{red}{\cancel{g}} \, \textcolor{red}{x} \left(m \frac{T}{n_{\text{up}}} - nT - \tau_{\text{off}} \right) + n \left(m \frac{T}{n_{\text{up}}} \right) \right|^2,$$

so ist dieses nicht mehr mittelwertfrei; es entstehen Spektralanteile³⁶ bei $\frac{k}{T}$.

- Anschaulich: Wegen $\textcolor{red}{\cancel{x}} \, b(t - t_0) \circ \rightarrow \textcolor{red}{X} \, B(f) e^{-j2\pi f t_0}$ ist die Phase des Peaks bei $\frac{1}{T}$ gerade $-2\pi t_0$.
- Wenn man also den Peak detektiert³⁷ und dessen Phase bestimmt erhält man eine Schätzung für den Abtastfehler.

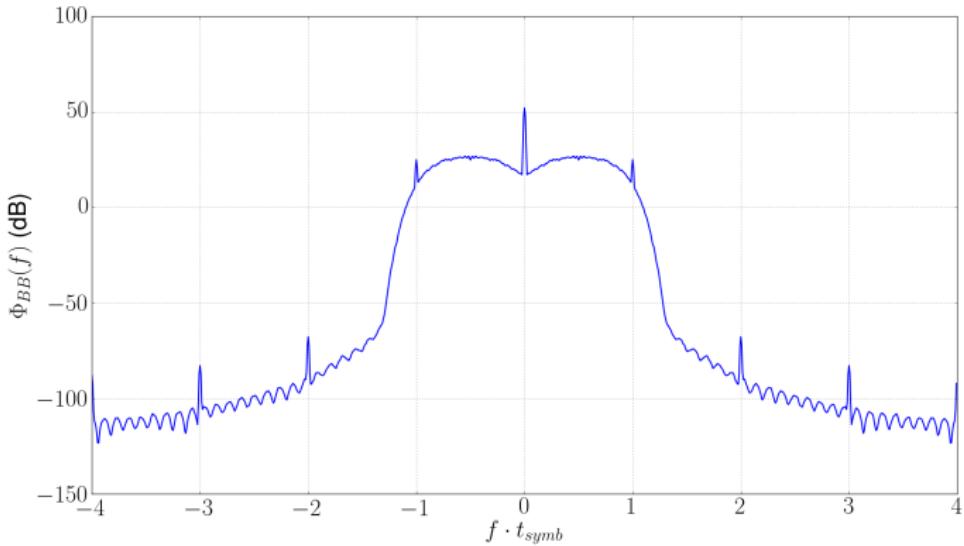
³⁶ Vergleiche das Resultat in Kapitel 2.

³⁷ ... etwa über eine PLL ...



- *Squaring-Time Recovery (ctd.)*

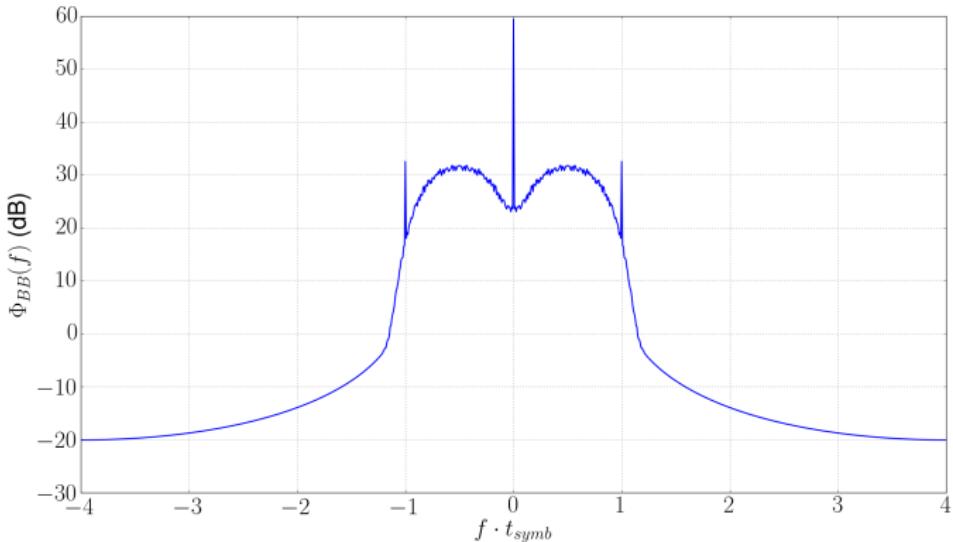
- **Illustration:** Darstellung des Spektrums von $x[m]$ für QPSK und Pulsformung mit Roll-Off-Faktor $\beta = 0.33$ sowie $T = 1 \text{ s}$, $n_{\text{up}} = 8$



Einschub: Fensterung

- *Squaring-Time Recovery (ctd.)*

- **Einschub:** Das gleiche Bild mit Rechteckfensterung bei der Spektralschätzung sieht wie im Folgenden dargestellt aus \Rightarrow *beachten Sie stets SuS*



■ Squaring-Time Recovery (ctd.)

- Quadriere eine Beobachtung von L_0 Symbolen mit Abtastzeit $\frac{T}{n_{\text{up}}}$ und unterziehe die quadrierte Folge einer FFT:

$$\mathcal{X} \mathbf{B}[k] := \text{FFT} \{ \mathfrak{x} \mathbf{b}[m] \}$$

$$= \sum_{m=0}^{n_{\text{up}}L_0-1} \mathfrak{x} \mathbf{b}[m] e^{-j2\pi \frac{km}{L_0 n_{\text{up}}}}, \quad k = 0, \dots L_0 n_{\text{up}} - 1$$

- Die Schätzung ergibt sich wegen³⁸ $k_{\text{ST}} \Delta f \stackrel{!}{=} \frac{1}{T} \implies k_{\text{ST}} = L_0$ zu:

$$\hat{\tau}_{\text{off}} = -\frac{1}{2\pi} \arg \{ \mathcal{X} \mathbf{B}[L_0] \}$$

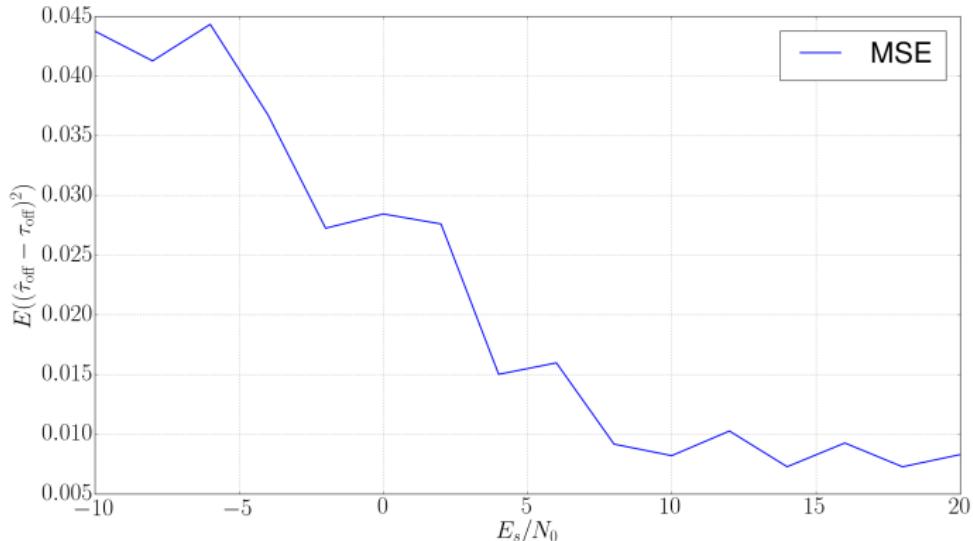
³⁸ Bedenken Sie, dass das Nyquistband bei Überabtastung $[-\frac{n_{\text{up}}}{2T}, \frac{n_{\text{up}}}{2T}]$ ist und $n_{\text{up}}L_0$ Werte beinhaltet.



Zeit-Schätzung im Basisband

- *Squaring-Time Recovery (ctd.)*

- **Beispiel:** Ergebnis der Square-Timing-Recovery für QPSK und Pulsformung mit Roll-Off-Faktor $\beta = 0.33$ sowie $T = 1 \text{ s}$, $n_{\text{up}} = 8$;



- **Ergänzung:** (*Goertzel-Algorithmus*)

- **Aufgabenstellung:** Berechnen von *einigen wenigen* Spektralkomponenten eines Signals
- **Lösung:** Berechnen der FFT und Auswählen der relevanten Anteile
- **Nachteil:** Es müssen N Spektralanteile mit Aufwand $O(N \log_2(N))$ berechnet werden, wovon aber nur $K \ll N$ relevant sind³⁹
- **Alternative:** Goertzel-Algorithmus ([Goe58]); auf den nächsten Folien beschrieben

³⁹ Bei der Squaring-Time-Recovery sogar nur 1 von N



■ Ergänzung: (Goertzel-Algorithmus)⁴⁰ (ctd.)

- Schreibe mit $N := n_{\text{up}}L_0$:

$$X[k] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{-j2\pi \frac{km}{N}} = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{j2\pi \frac{k(N-m)}{N}}$$

- Definiert man $h_k[m] = e^{j2\pi \frac{km}{N}}, k = 0, 1, \dots$, dann ist⁴¹

$$y_k[n] := (x * h_k)[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{j2\pi \frac{k(n-m)}{N}} \implies X[k] = y_k[N];$$

die gesuchte k -te Spektralkomponente entspricht dem Ausgang eines Filters mit der Impulsantwort $h_k[n]$ zum Zeitpunkt⁴² $n = N$

⁴⁰ Nach [PM96, S. 480-481]; hier nun Verwendung von $x[m], X[k]$ als „generische“ Signalbezeichnung.

⁴¹ Übung: Nachvollziehen

⁴² Man könnte auch einen Zeitpunkt $\tilde{N} < N$ wählen; dies entspräche einer „kürzeren Korrelation“ und damit reduzierter Genauigkeit



■ Ergänzung: (Goertzel-Algorithmus) (ctd.)

■ Wegen⁴³

$$h_k[n] \circ \bullet H_k(z) = \frac{1}{1 - e^{j2\pi \frac{k}{N}} z^{-1}} = \frac{1 - e^{-j2\pi \frac{k}{N}} z^{-1}}{1 - 2 \cos(2\pi \frac{k}{N}) z^{-1} + z^{-2}}$$

und durch Einführung einer Zustandgröße $v_k[n]$ folgt schließlich:⁴⁴

$$v_k[n] = x[n] + 2 \cos\left(2\pi \frac{k}{N}\right) v_k[n-1] - v_k[n-2], \quad n = 0, \dots, N$$

$$y_k[n] = v_k[n] - e^{-j2\pi \frac{k}{N}} v_k[n-1]$$

■ Signalflussdiagramm: Tafel

⁴³Übung: Rechnen Sie die beiden Gleichheiten nach.

⁴⁴Mit Initialisierung $v_k[-1] = v_k[-2] = 0$.



■ Ergänzung: (*Goertzel-Algorithmus*) (ctd.)

■ Beobachtungen:

- Nur $N + 1$ Zustandsgleichungen zu berechnen; Ausgangsgleichung nur im letzten Schritt. Multiplikation in Zustandsgleichungen reell.
 \implies Aufwand: $N + 1$ reelle Multiplikationen, 1 komplexe Multiplikation, $2(N + 1) + 1$ komplexe Additionen $\implies O(N)$ pro Spektralkomponente
- Im Vergleich zur FFT effizienter, falls die Anzahl der zu berechnenden Spektralkomponenten $K < \log_2(N)$.



4

Synchronisierung

- Aufbau eines Empfängers; Motivation
- Signalmodell und ML-Schätzer
- Frequenz-Schätzung
- Zeit-Schätzung
- **Phasen-Schätzung**
- Synchronisation bei OFDM
- Lernziele
- Literatur



Annahmen

- Das Sendesignal verwendet lineare Modulation mit Pulsformung $g(t)$.
- Zu schätzende Parameter werden dem Sendesignal zugeordnet:

$$s(t; \Psi) = e^{j\phi_{\text{off}} + j2\pi f_{\text{off}} t} \sum_n I_n g(t - nT - \tau_{\text{off}})$$

- Kanal ergänzt AWGN
- Timing und Frequenz ideal
- Der Term $\|s(t; \Psi)\|^2$ ist für die Maximierung nicht relevant.



■ Data-Aided

- Aus der ML-Herleitung folgt – bei bekanntem τ_{off} und f_{off} – der *ML-Schätzer für die Phase ϕ_{off}* zu

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_{\text{off}, \text{ML}} &= \arg \max_{\phi} \int_0^{T_0} 2\text{Re} \{r(t)s^*(t; \phi)\} dt - \|s(t; \phi)\|^2 \\ &= \arg \max_{\phi} 2\text{Re} \{\langle r(t), s(t; \phi) \rangle\} - \|s(t; \phi)\|^2\end{aligned}$$



Phasen-Schätzung im Basisband

- Data-Aided (ctd.)

- Es folgt

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_{\text{off,ML}} &= \arg \max_{\phi} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{L_0-1} I_n^* e^{-j\phi} \int_0^{T_0} r(t) g(t - nT) dt \right\} \\ &= \arg \max_{\phi} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{L_0-1} I_n^* e^{-j\phi} y[n] \right\}\end{aligned}$$

und schließlich:⁴⁵

$$\operatorname{Im} \left\{ \sum_{n=0}^{L_0-1} I_n^* e^{-j\hat{\phi}_{\text{ML}}} y[n] \right\} \stackrel{!}{=} 0$$

⁴⁵Frage: Wieso?

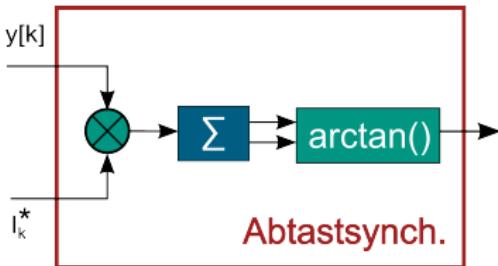


Phasen-Schätzung im Basisband

- Data-Aided (ctd.)
 - Vereinfachen führt auf

$$\hat{\phi}_{\text{ML}} = \arg \operatorname{Im} \left\{ \sum_{n=0}^{L_0-1} I_n^* y[n] \right\} = \arctan \left(\frac{\operatorname{Im} \left\{ \sum_{n=0}^{L_0-1} I_n^* y[n] \right\}}{\operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{L_0-1} I_n^* y[n] \right\}} \right)$$

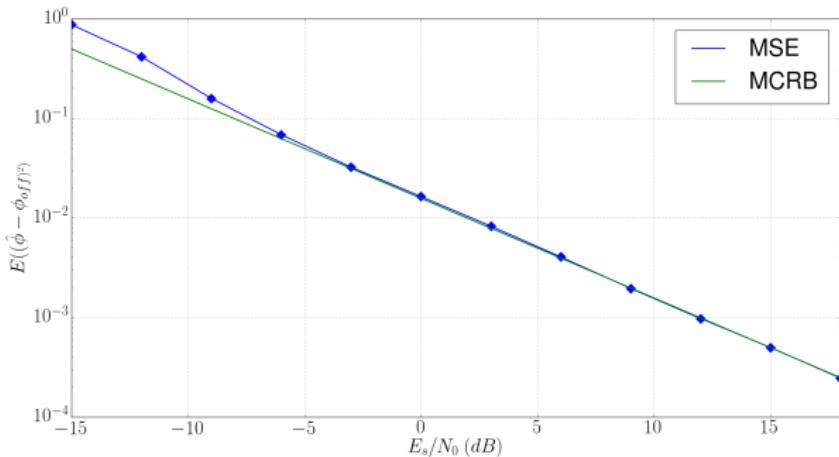
- Schematische Darstellung



Phasen-Schätzung im Basisband

- Data-Aided (ctd.)

- **Beispiel:**⁴⁶ QPSK mit RRC-Pulsformung mit $\beta = 0.5$, $f_{\phi_{\text{off}}}$ gleichverteilt auf $[-\pi, \pi]$, $L_0 = 32$; Timing und Frequenz ideal; 10^3 Realisierungen pro Simulationspunkt



⁴⁶Randbedingungen wie in Abschnitt 3.4.3 in [Men97]



Phasen-Schätzung im Bandpassbereich

- **Annahme:** Sendesignal ist ein unmodulierter Träger:

$$s_{\text{BP}}(t, \phi_c) = \cos(2\pi f_c t + \phi_c)$$

- Dann folgt aus

$$\hat{\phi}_{\text{ML}} = \arg \max_{\phi} \int_0^{T_0} 2\text{Re} \{ r_{\text{BP}}(t) s_{\text{BP}}^*(t; \phi) \} dt$$

für den ML-Schätzer die Bedingung

$$\int_0^{T_0} r_{\text{BP}}(t) \sin(2\pi f_c t + \hat{\phi}_{\text{ML}}) dt \stackrel{!}{=} 0$$

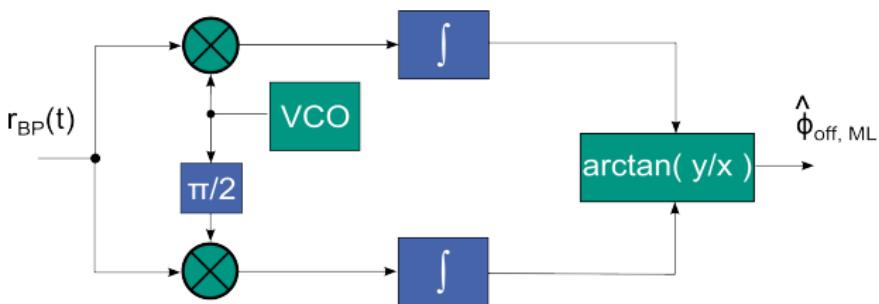


Phasen-Schätzung im Bandpassbereich

- 1. Möglichkeit: Direkte Berechnung („one shot“: Keine Regelstruktur)
 - Auflösen der Gleichung liefert⁴⁷

$$\hat{\phi}_{\text{ML}} = \arctan \left(\frac{\int_0^{T_0} r_{\text{BP}}(t) \sin(2\pi f_c t) dt}{\int_0^{T_0} r_{\text{BP}}(t) \cos(2\pi f_c t) dt} \right)$$

- Graphisch:⁴⁸



⁴⁷ Ausnutzen von $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \sin(y) \cos(x)$

⁴⁸ Bild nach [PS08]

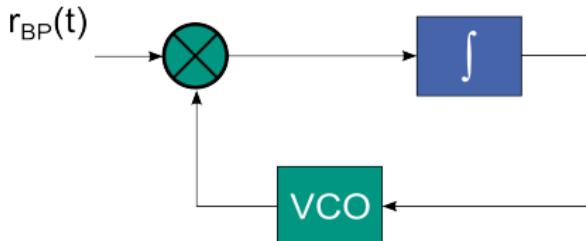
Phasen-Schätzung im Bandpassbereich

- Erinnerung:

$$\int_0^{T_0} r_{\text{BP}}(t) \sin(2\pi f_c t + \hat{\phi}_{\text{ML}}) dt \stackrel{!}{=} 0$$

- 2. Möglichkeit: *Phase-Locked Loop*

- Realisieren der Aufgabe als Regelkreis
- Graphisch:⁴⁹

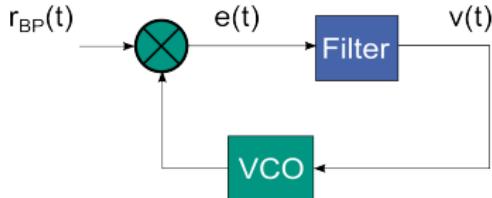


⁴⁹ Bild nach [PS08]

Phasen-Schätzung im Bandpassbereich

- Phase-Locked Loop besteht aus⁵⁰

- Multiplizierer
- Filter (ersetzt Integrator)
- Spannungsgesteuerter Oszillator (engl.: voltage controlled oscillator, VCO)



- **Annahme:** Eingang ist ein Cosinus, dann folgt⁵¹

$$\begin{aligned}e(t) &= \cos(2\pi f_c t + \phi) \sin(2\pi f_c t + \hat{\phi}) \\&= \frac{1}{2} \sin(\hat{\phi} - \phi) + \frac{1}{2} \sin(4\pi f_c t + \hat{\phi} + \phi)\end{aligned}$$

und damit, falls das Filter TP-Charakter hat:

$$v(t) = \frac{1}{2} \sin(\hat{\phi} - \phi)$$

⁵⁰ Bild und folgende Ansätze nach [PS08]

⁵¹ Ausnutzen von $\cos(x) \sin(y) = \frac{1}{2}(-\sin(x - y) + \sin(x + y))$

Phasen-Schätzung im Bandpassbereich

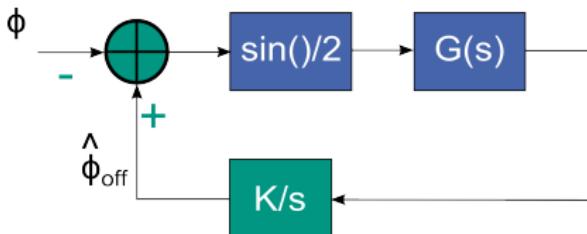
- VCO erzeugt ein Sinussignal mit Momentanphase

$$2\pi f_c t + \hat{\phi}(t) = 2\pi f_c t + K \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau$$

und schätzt⁵²

$$\hat{\phi}(t) = K \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau.$$

- Die PLL wird zu:⁵³



⁵² Beachte: Der Parameter K ist inhärent negativ, da für ein positives Fehlersignal eine Reduktion der geschätzten Phase resultieren sollte.

⁵³ Bild nach [PS08]

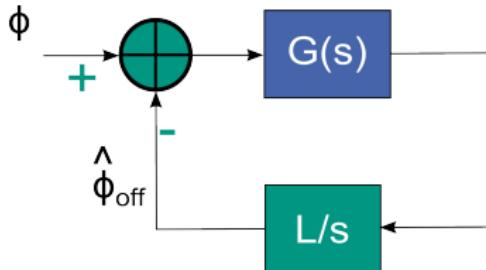
Phasen-Schätzung im Bandpassbereich

- Ist die Phasenschätzung genau, so ist der Fehler klein und es folgt⁵⁴

$$\sin(\hat{\phi} - \phi) \approx \hat{\phi} - \phi \Rightarrow H_{\text{ges}}(s) = \frac{-\frac{1}{2}KG(s)}{s - \frac{1}{2}KG(s)}$$

- Schreibt man $L = -\frac{K}{2}$, so ergibt sich:

$$H_{\text{ges}}(s) = \frac{LG(s)}{s + LG(s)}$$

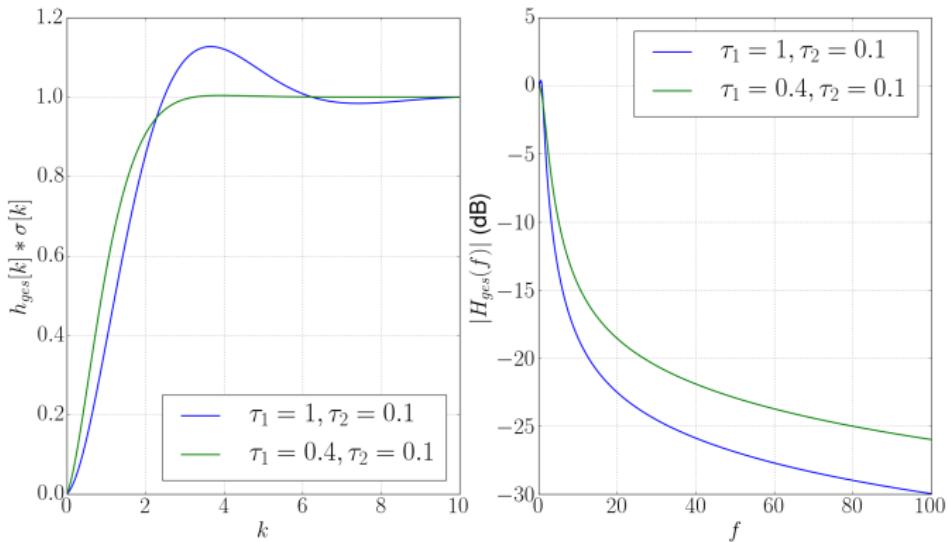


⁵⁴Übung: Nachvollziehen!



Phasen-Schätzung im Bandpassbereich

- **Beispiel:** Sprungantwort und Betragsfrequenzgang der PLL für $G(s) = \frac{1+\tau_2 s}{1+\tau_1 s}$ und $L = 1$



■ Bemerkungen:

- Das Ergebnis unterscheidet sich von [PS08] durch die Vorzeichen bei der Addition. Dies wurde so gewählt, um der Gestalt von Standardregelkreisen zu entsprechen. Das Vorzeichen wurde in $L > 0$ des Integrators übernommen, während in [PS08] inhärent $K < 0$ ist.
- In praktischen Systemen ergibt sich ein Kompromiss zwischen Reaktionsgeschwindigkeit der PLL und Rauschen der Phasenschätzung. [PS08]



4

Synchronisierung

- Aufbau eines Empfängers; Motivation
- Signalmodell und ML-Schätzer
- Frequenz-Schätzung
- Zeit-Schätzung
- Phasen-Schätzung
- **Synchronisation bei OFDM**
- Lernziele
- Literatur



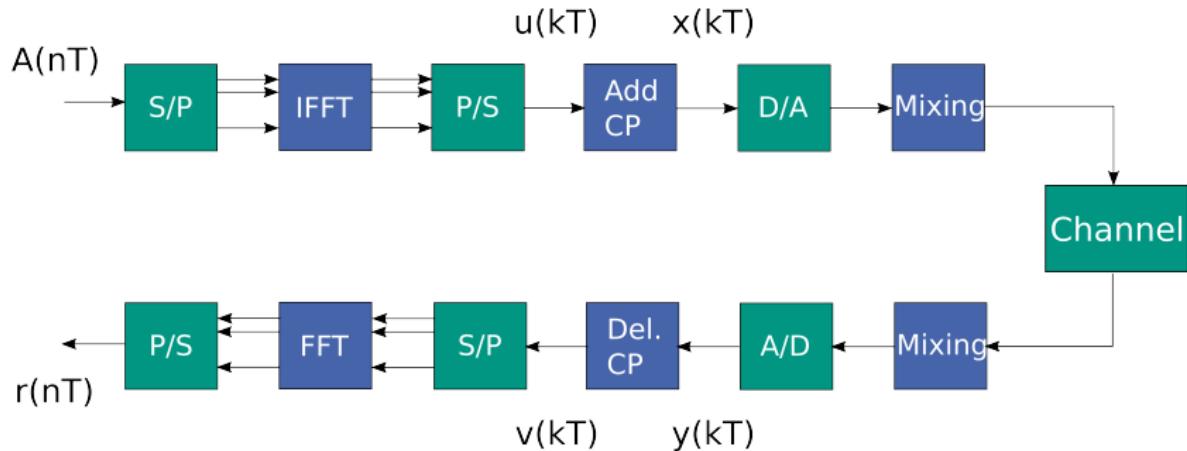
Synchronisation bei OFDM

- Kurze Wiederholung: OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplex)
 - Basis vieler aktueller Kommunikationsstandards (WLAN, LTE, ...)
 - Mehrträgerverfahren mit minimalem Unterträgerabstand
 - Erzeugung effizient realisierbar mittels (I-)FFT
 - Pulsformer ist ein Rechteckfilter



Synchronisation bei OFDM

■ Illustration: OFDM-System



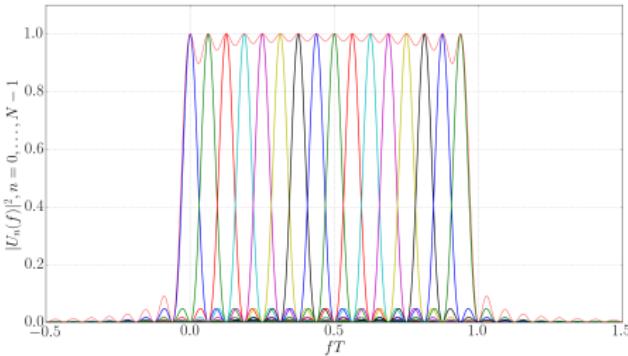
■ Vorteile von Mehrträgerverfahren

- Frequenzselektive (Mehrwege-)Kanäle werden in Subkanäle zerlegt, die (näherungsweise) zu flat-fading Kanälen werden.
- Erheblich reduzierter Aufwand für die Entzerrung („One-Tap-Equalizer“ → Kapitel 5)
- Verlängerung der Symboldauer erlaubt das Einfügen von Schutzintervallen mit moderatem Verlust für die Datenrate zur Vermeidung von ISI. → Länge des Schutzintervalls entsprechend der Länge der Kanalimpulsantwort gewählt



Synchronisation bei OFDM

- Anforderungen an die Synchronisation
 - Signaldetektion
 - Symboltakt
 - Frequenz
 - Hohe Robustheit
 - Geringer Overhead
 - Geringe Komplexität



- Besonderheiten bei OFDM
 - Bereits geringe Frequenzoffsets führen zum Verlust der Orthogonalität
 \rightarrow *Inter-Channel-Interference (ICI)*
 - Relativ große Toleranz bei der Symboltaktsynchronisation durch Cyclic Prefix



Synchronisation bei OFDM

- Synchronisations-Algorithmus von Schmidl und Cox⁵⁵
 - Sehr populäres Verfahren
 - Datengestützter Ansatz („data-aided“)
 - Übertragung einer Präambel bestehend aus zwei OFDM-Symbolen
 - Ermöglicht Detektion, Zeit- und Frequenzsynchronisation sowie Entzerrung
 - Niedrige Komplexität, geringer Overhead
- Annahmen:
 - Anzahl Unterträger (entspr. FFT-Länge): N
 - Keine Überabtastung: $f_s = 1/T$

⁵⁵ Nach [SC97]



Synchronisation bei OFDM

- Synchronisations-Algorithmus von Schmidl und Cox (ctd.)

- Erstes Symbol⁵⁶

- Belegung jedes *zweiten* Unterträgers mit einer PN-Sequenz $c_{1,k}$
 - Führt zu zwei identischen Hälften im Sendesignal
 - Um die Energie trotz der geringeren Symbolzahl konstant zu halten, werden die Symbole mit $\sqrt{2}$ gewichtet

- Zweites Symbol

- Alle Unterträger werden mit einer PN-Sequenz $c_{2,k}$ belegt
- Zusammenhang zwischen $c_{1,k}$ und $c_{2,k}$:

$$v_k = \sqrt{2} \frac{c_{2,k}}{c_{1,k}}$$

Entspricht dem Faktor zwischen aufeinanderfolgenden Symbolen auf dem Unterträger k

⁵⁶ „Symbol“ bezeichnet stets ein OFDM-Symbol.



Synchronisation bei OFDM

- Synchronisations-Algorithmus von Schmidl und Cox (ctd.)
 - Detektion und Symboltaktsynchronisation
 - Ausnutzung der identischen Symbolhälften des ersten Symbols
 - Durchführung einer *Fixed Lag Correlation* mit Länge und Verschiebung $L = N/2$
 - **Timing-Metrik:**

$$M(d) = \frac{|P(d)|^2}{(R(d))^2}$$

mit

$$P(d) = \sum_{m=0}^{L-1} (r_{d+m}^* r_{d+m+L}), \quad R(d) = \sum_{m=0}^{L-1} |r_{d+m} r_{d+m+L}|^2$$

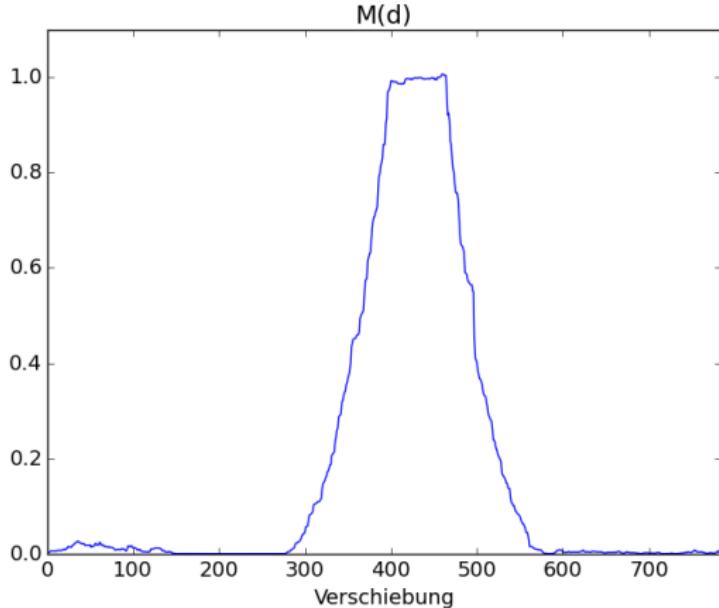
- Sehr robust, da Verzerrungen des Kanals auf beide Hälften gleich wirken⁵⁷
- Durch Cyclic Prefix bildet sich für $M(d)$ ein Plateau statt eines scharfen Maximums
- Jeder Punkt des Plateaus ist ein gültiger Schätzwert für τ_{off} → Diskussion

⁵⁷ Sofern man slow fading annehmen kann.



Synchronisation bei OFDM

- Synchronisations-Algorithmus von Schmidl und Cox (ctd.)
 - Symboltaktsynchronisation (Forts.)
 - $N = 256$, Länge Cyclic Prefix: 64 Samples, $\tau_{\text{off}} = 400$ Samples



Synchronisation bei OFDM

- Synchronisations-Algorithmus von Schmidl und Cox (ctd.)
 - Unterteilung des Frequenzoffsets in Fractional und Integer Carrier Frequency Offset in Bezug auf den Unterträgerabstand $\Delta f = \frac{1}{TN}$
 - *Fractional Carrier Frequency Offset*
 - Berechnung aus erstem Präambelsymbol:

$$\hat{f}_F = \frac{\angle(P(\hat{t}_{\text{off}}))}{\pi} \cdot \Delta f$$

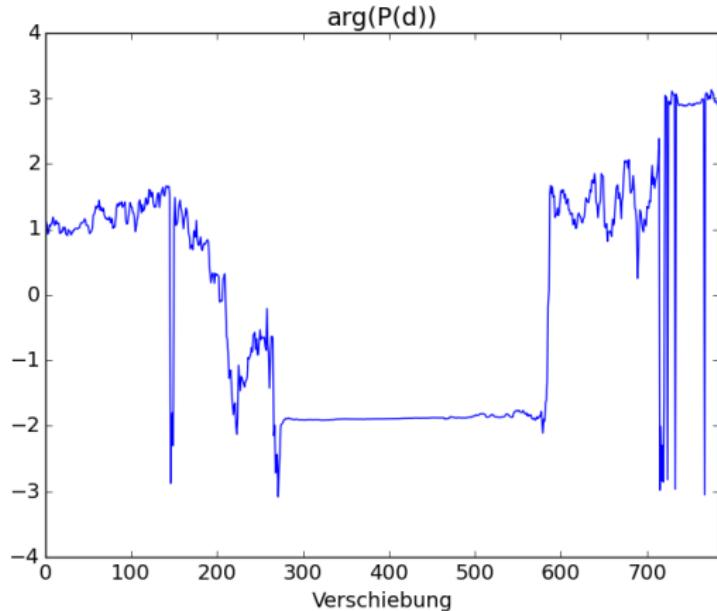
- Bei einem bestimmten Frequenzoffset haben zwei Samples mit Abstand L innerhalb des ersten Symbols immer konstanten Phasenoffset. $P(d)$ stellt eine gewichtete Mittelung dieses Phasenoffsets dar.⁵⁸
- Der Eindeutigkeitsbereich beträgt $2 \cdot \Delta f$
- Korrektur durch Multiplikation im Zeitbereich mit $e^{-j2\pi\hat{f}_F t}$
- Ermöglicht ICI-freie Abtastung im Frequenzbereich

⁵⁸Übung: Nachvollziehen



Synchronisation bei OFDM

- Synchronisations-Algorithmus von Schmidl und Cox (ctd.)
 - *Fractional Carrier Frequency Offset* (ctd.)
 - $N = 256$, Länge Cyclic Prefix: 64 Samples, $\tau_{\text{off}} = 400$ Samples, $f_{\text{off}} = 17.4 \cdot \Delta f$



Synchronisation bei OFDM

- Synchronisations-Algorithmus von Schmidl und Cox (ctd.)
 - *Integer Carrier Frequency Offset*
 - Berechnung aus den Phasendifferenzen zwischen den Präambelsymbolen im Frequenzbereich:

$$B(g) = \frac{\left| \sum_{k \in X} x_{1,k+2g}^* v_k^* x_{2,k+2g} \right|^2}{2 \left(\sum_{k \in X} |x_{2,k}|^2 \right)^2}$$

mit $X = \{-K/2, -K/2 + 2, \dots, -4, -2, 2, 4, \dots, K/2 - 2, K\}$

K : Anzahl belegter Unterträger

- Ähnelt durch Multiplikation mit v_k der Autokorrelation einer PN-Sequenz
→ scharfes Maximum an der richtigen Verschiebung
- Frequenzverschiebung um gerade Anzahl an Unterträgern:

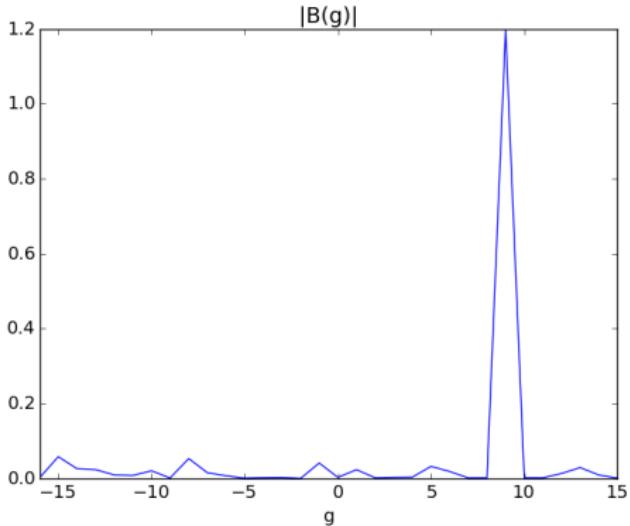
$$\hat{f}_I = 2 \cdot \operatorname{argmax}_g(B(g)) \cdot \Delta f$$

- Korrektur im Frequenzbereich durch einfache Verschiebung um $-2g$
- Maximaler korrigierbarer Frequenzoffset \propto Anzahl freier Randträger



Synchronisation bei OFDM

- Synchronisations-Algorithmus von Schmidl und Cox (ctd.)
 - *Integer Carrier Frequency Offset*
 - $N = 256$, Länge Cyclic Prefix: 64 Samples, $\tau_{\text{off}} = 400$ Samples, $f_{\text{off}} = 17.4 \cdot \Delta f$



4

Synchronisierung

- Aufbau eines Empfängers; Motivation
- Signalmodell und ML-Schätzer
- Frequenz-Schätzung
- Zeit-Schätzung
- Phasen-Schätzung
- Synchronisation bei OFDM
- **Lernziele**
- Literatur



- Die folgende Aufstellung fasst die zentralen Punkte zusammen.
- Es wird aufgezeigt, welche Punkte nach Bearbeitung des Kapitels klar sein sollten.

■ Hinweise:

- Die Auflistung ist nicht vollständig, sondern führt die wichtigsten Aussagen auf; nicht erwähnte Inhalte sind dennoch bedeutsam.
- Oft enthalten die Nachweise wichtige Ideen; diese also nicht vernachlässigen.
- Stets versuchen, Gleichungen in Verbindung mit Interpretationen und Anwendungen zu sehen
- Des weiteren sollten alle kleinen nützlichen Ergänzungen verstanden sein.
- Es ist immer eine gute Idee, etwas Gelerntes im Rechner umzusetzen. Dies hilft beim Verständnis und schärft das Bewusstsein für mögliche Probleme.



Nach diesem Kapitel sollten als zentrale Punkte klar sein:

- Notwendigkeit und Nutzen der Synchronisierung; Auswirkung bei Schätzfehlern
- Idee der Herleitung von ML-Schätzern mittels Signalmodellen
- Begriff der Zwischenfrequenz
- Frequenzschätzung
 - ML und Anwendung
 - Data-Aided ML und dessen Approximation
 - Grundgedanke der Interpolation
 - Non-Data-Aided Verfahren: Beseitigung der Daten
 - Derivative MF (\rightarrow Übung)



Nach diesem Kapitel sollten als zentrale Punkte klar sein:

- Timing-Schätzung
 - ML-Schätzer
 - Idee des Early-Late
 - Prinzip der Decision-Directed-Verfahren
 - Prinzip der Schmidl-Cox-Synchronisation (\rightarrow Übung)
 - Squaring-Time-Recovery (\rightarrow Übung)
- Phasenschätzung
 - ML und Anwendung im Basisband
 - ML im Bandpass, PLL
 - Systemtheoretische Betrachtungen bei Schleifenfiltern
- Synchronisation bei OFDM



4

Synchronisierung

- Aufbau eines Empfängers; Motivation
- Signalmodell und ML-Schätzer
- Frequenz-Schätzung
- Zeit-Schätzung
- Phasen-Schätzung
- Synchronisation bei OFDM
- Lernziele
- Literatur



- [PS08] J. Proakis, M. Salehi, *Digital Communications*, McGraw-Hill, 2008
- [Hoe11] P. Höher, *Grundlagen der digitalen Informationsübertragung*, Springer, 2011. (elektronische Version erhältlich in die KIT-Bibliothek)
- [Kro91] K. Kroschel, *Datenübertragung*, Springer, 1991
- [Men97] U. Mengali, A. N. D'Andrea, *Synchronization Techniques for Digital Receivers*, Plenum Press, 1997
- [Kam04] K.-D. Kammeyer, *Nachrichtenübertragung*, Teubner, 2004
- [OM88] Oerder M., Meyr H., *Digital Filter and Square Timing Recovery*, IEEE Transactions on Communications, Mai 1988
- [Goe58] Goertzel G., *An Algorithm for the Evaluation of Finite Trigonometric Series*, American Math. Monthly, Vol. 65, 1958
- [PM96] Proakis J., Manolakis D., *Digital Signal Processing – Principles, Algorithms, and Applications*, Prentice-Hall, 1996



Literatur II

[SC97] Schmidl T., Cox D., *Robust Frequency and Timing Synchronization for OFDM*, IEEE Transactions on Communications, December 1997

