1 Lineare Algebra

1.1 Linearkombination

Die Linearkombination ist ein Vektor, der sich durch **Vektoraddition** und **skalare Multiplikation** durch andere Vektoren darstellen lässt.

$$lin\{V_j\} \;=\; \Sigma_{j=1}^{n}\alpha_j V_j$$

1.2 Basis

Die Basis eines Vektorraums U ist die Menge an Vektoren $V_1, V_2, ..., V_n$, wenn diese linear unabhängig sind und $lin\{V_1, V_2, ...V_n\} \;=\; U$ gilt.
Bei einem n-dimensionalen Vektorraum enthält die Basis also n Elemente.
Die **Standartbasis** enthält nur Vektoren, die nur Nullen und eine Eins enthalten. (z.B. $\{(0,1),(1,0)\}$)

1.3 Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.4 Zeilennormalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithmus für Zeilennormalform:

1. in ZSF bringen
2. teilen, sodass 1er entstehen
3. met unteren Zeilen die 0er über den 1en erzeugen

1.5 Kern einer Matrix

$$\boxed{KernA := \{\vec{x} \in \mathbb{K}^m \;:\; A\vec{x} = \vec{0}\} \subseteq \mathbb{K}^m}$$

- Kern(A) ist Unterraum von $\mathbb{K}^m$
- Lösung + Element des Kerns ist auch Lösung ($\rightarrow$ Def. Unterraum)

Kern bestimmen:

1. $A\vec{x} = 0$ lösen (Gauß / Zeilennormalform)
2. **(-1) - Trick** anwenden (siehe 1.2)

1.6 (-1) - Trick

Der **(-1) - Trick** ist eine **Karlsruher Spezialität**.
Vorgehen:

1. Matrix in **Zeilennormalform** bringen
2. fehlende Zeilen (bei Sprung in ZNF) einfügen mit (-1) an entsprechender Stelle (sonst Nullen)
3. Kern ist linearer Aufspann der **Spalten** in denen die ergänzte(n) (-1) Stehen

1.7 Bild einer Matrix

$$\boxed{BildA := \{A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{K}^m\} \subseteq \mathbb{K}^n}$$

- entspricht der Lösungsmenge der Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$
- $A\vec{x} = \vec{b}$ hat Lösung $\Leftrightarrow$ $b \in$ Bild(A)
- Bild(A) ist Unterraum von K^n (genauer: linearer Aufspann der Spalten von A)

1.8 Dimensionsformel

$$\boxed{dim(Kern(A)) + dim(Bild(A)) = mmitA \in \mathbb{K}^{n\ x\ m}}$$

1.9 Matrizenprodukt

- $(\alpha A + \beta B)C = \alpha AC + \beta BC$
- $(AB)C = A(BC)$
- $AB \neq BA$

1.10 Inverse Matrix

$$\boxed{B = A^{-1} \text{ wenn } AB = BA = I}$$

Die Matrix ist invertierbar (regulaer)
$\Leftrightarrow$ AB = I
$\Leftrightarrow$ Kern(A) = 0
$\Leftrightarrow$ Rang(A) = dim(Bild(A)) = n