1 Konvergenz von Folgen

1.1 Definition der Konvergenz

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon}$$

1.2 Folgerungen

- a_n ist konvergent, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ existiert (a ist Grenzwert)
- Die Folge ist eine Nullfolge, wenn $a = 0$
- Konvergente Folgen sind immer beschränkt $(|a_n| \leq c) \to limsup/liminf$
- Konvergente Folgen haben nur einen Häufungswert (jede Teilfolge konvergiert gegen a)
- konvergent, wenn monoton (wachsend/fallend) und beschränkt
- **Satz von Bolanzo-Weierstraß:** Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge und damit mindestens einen Häufungswert
- Folge hat zwei unterschiedliche Häufungswerte $\Rightarrow$ Divergenz
- $a_n(konvergent) + b_n(divergent) \Rightarrow a_n + b_n(divergent)$

1.3 Rechnen

Egal was für ein Verfahren man für den Nachweis der Konvergenz nutzt, ist es wichtig, dass man alle n in der Folge **gleichzeitig** gegen unendlich gehen lässt.

- **Grenzwertsätze** zur Vereinfachung nutzen
  $(a_n + b_n \to a + b;\ \ a_n * b_n \to a * b;\ \ \frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ für $b_n \neq 0\ \ und\ \ b \neq 0)$
- $a_n \to$ inf und $\frac{1}{a_n} \to 0$
- $a_n + b_n \to a + b$ und $a_n * b_n \to a * b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\sqrt[n]{n} \to 1$ aber $\sqrt[n]{n!} \to$ inf
- $(1 + \frac{1}{n})^n \to e$
- z^n konvergiert für $|z| < 1$ gegen 0

1.4 Trickkiste

- **Summe 0 Ergänzung:** z.B. +1-1 (um bestimmte Form zu erzwingen)
- **Teilfolgenkriterium:** Wenn jede Teilfolge gegen a konvergiert, konvergiert auch die gesamte Folge gegen a. (a ist einziger Häufungspunkt)
- "Monoton und beschränkt gibt konvergent."
- **Sandwichkriterium:** $a_n \to a, c_n \to a$ und $a_n \leq b_n \leq c_n$ gilt auch $b_n \to a$
- **Kürzungstrick:** bei Quotient mit höchstem Exponenten von n teilen
- **3. Binomische Formel:** $(a-b)*(a+b) = a^2 - b^2$ (bei Termen mit Wurzel)
- a_n mit $e^{ln(a_n)}$ erweitern $\to$ Logarithmusgesetze anwenden
- wenn n als Exponent in Nenner und Zähler (z.B. $\frac{n^n}{(n+1)^n} \Rightarrow (\frac{n}{n+1})^n = (\frac{1}{1+\frac{1}{n}})^n$)
- Bruch umdrehen: $\frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{y}{x}}$

2 Wichtige Abschätzungen und Gleichungen

1. **Bernoullische Ungleichung:** $(1+x)^n \geq 1 + n*x$
2. **geometrische Summenformel:** $u^m - v^m = (u-v) * \sum_{k=0}^{m-1} u^{m-1-k} v^k$
3. **Binominalsatz:** $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
4. **Binominal Koeffizienten:** $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$