1 Komplexe Zahlen

1.1 Definitionen

Eine komplexe Zahl $z = x + iy$ besteht aus dem Realteil x und dem Imaginärteil y.
(x und y sind beides reelle Zahlen; y wird noch mit i multipliziert). Es gilt:

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Außerdem kann eine komplexe Zahl immer in **Polarkoordinaten** dargestellt werden:

$$z = x + iy = r(cos\phi + iSin\phi) = \boxed{re^{i\phi}} \text{ mit } r = |z|$$

Die Phase errechnet sich aus $\phi = arctan(\frac{b}{a})$ mit der Fallunterscheidung:

- **a > 0:** $\phi \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$
- **a = 0 und b > 0:** $\phi = \frac{\pi}{2}$
- **a = 0 und b < 0:** $\phi = \frac{-\pi}{2}$
- **a < 0 und b $\geq$ 0:** $\phi = arctan(\frac{b}{a} + \pi)$
- **a < 0 und b < 0:** $\phi = arctan(\frac{b}{a} - \pi)$

1.2 Rechenregeln

- **Addition:** Realteile addieren; Imaginäreteile addieren
- **Konjugation:** $\overline{z} := x - iy$ (i mit -i ersetzen oder Imaginärteil negieren)
- **Betrag:** $|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$
- **komplexe Wurzel:** Lösungen von $z^n = re^{i\phi}$ sind $z_j = r^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{2\pi j + \phi}{n})}, \quad j \in \mathbb{Z}$

1.3 Tricks

- komplex konjugiert Erweitern
- $\frac{1}{i} = -i$
- komplexe Ebene skizzieren um das Problem zu visualisieren

1.4 Weitere Nützliche Umformungen

- $|z|^2 = z\overline{z} = x^2 + y^2 \geq 0$
- $|\overline{z}| = |z|$
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ und $\overline{zw} = \overline{zw}$

- $|z+w| \leq |z|+|w|$ aber $|zw| = |z||w|$
- $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$
- $Re(z) = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$ und $Im(z) = \frac{1}{2i}(z-\overline{z})$
- $z+\overline{z} = 2Re(z)$ und $zw+\overline{zw} = 2Re(zw)$
- $|z+w|^2 = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \rightarrow$ (Quadrieren um den Betrag wegzubekommen)
- $|w+z|^2 = |w|^2+|z|^2+2Re(w\overline{z})$ und $|wz|^2 = |w|^2|z|^2$
- $max\{|Re(z)|, |Im(z)|\} \leq |z| \leq |Re(z)|+|Im(z)|$