1 Konvergenz von Reihen

Bei der Konvergenz von Reihen kann man oft nicht so intuitiv vorgehen, wie bei Folgen, da man nicht nur den Verlauf einer Folge betrachtet, sondern jedes dieser Folgenelemente aufaddiert. So kann auch eine Reihe mit einer Nullfolge divergieren.

1.1 Definition

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall m \geq n_0 \ :\ |\Sigma_{n=0}^{m} a_n - S| < \varepsilon}$$

1.2 Rechnen

- **absolut konvergent**, wenn Reihe des Betrags konvergiert
- $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent $\Rightarrow$ a_n **Nullfolge**
- Reihen lassen sich summieren, zusammenziehen
  $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n = A,\ \Sigma_{n=1}^{\infty} b_n = B \ \Rightarrow\ \Sigma_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$
- untere Grenze der Summe ist bei Reihen in Bezug auf Konvergenz egal / kann verändert werden um Umformung/Vereinfachung durchzuführen
  (z.B. kann man $\Sigma_{n=5}^{\infty}$ anstatt $\Sigma_{n=0}^{\infty}$ auf Konvergenz untersuchen)

1.3 Wichtige Bezugsreihen

- **harmonische Reihe:** $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert
  $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konvergiert für $\alpha > 1$
- **geometrische Reihe:** $\Sigma_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$
  $\Sigma_{n=0}^{m} q^n = \frac{1-q^{m+1}}{1-q}$
- $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$
- **Exponentialfunktion:** $\Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$

1.4 Trickkiste

- $|\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n| \ \leq\ \Sigma_{n=1}^{\infty} |a_n|$ Folgerung aus der **Dreiecksungleichung**
- **Partialbruchzerlegung** (Summe ist leichter zu untersuchen als ein Produkt)
- **Teleskopsummentrick** (z.B. $\Sigma_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + \ldots + n$)
- Abschätzung $\sqrt[n]{n} \ \leq 2$ da $n \leq n+1 \leq (1+1)^n \leq 2^n$ (**Bernoullische Ungleichung**)
- selbe Exponenten zusammenfassen / ausklammmern

1.5 Konvergenzkriterien

Um die die Konvergenz der Reihe $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ zu zeigen, kann man sich folgenden Kriterien bedienen:

- **Leibnizkriterium:** [Konvergenz; gut bei alternierenden Reihen $(-1)^n$]

  $$\boxed{\Sigma_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n}$$

  Konvergenz, wenn $a_n \to 0$ und $a_n \geq 0$ und a_n monoton fallend

- **Majorantenkriterium:** [absolute Konvergenz]

  $$\boxed{|a_n| \leq b_n \text{ und } \Sigma_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergent}}$$

- **Minorantenkriterium:** [Divergenz]

  $$\boxed{a_n \geq b_n \geq 0 \text{ und } \Sigma_{n=1}^{\infty} b_n \text{ divergent}}$$

- **Quotientenkriterium:** [absolute Konvergenz oder Divergenz; gut bei Fakultät]

  $$\boxed{\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$$

  $b_n < 1 \to$ absolute Konvergenz; $b_n > 1 \to$ Divergenz; $b_n = 1 \to$ keine Aussage

- **Wurzelkriterium:** [absolute Konvergenz oder Divergenz]

  $$\boxed{\lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt[n]{|a_n|}}$$

  $b_n < 1 \to$ absolute Konvergenz; $b_n > 1 \to$ Divergenz; $b_n = 1 \to$ keine Aussage

- **Nullfolgenkriterium:** [Divergenz]

  $$\boxed{a_n \text{ keine Nullfolge} \Rightarrow \text{Reihe divergiert}}$$