1 Potenzreihen

Mit Potenzreihen kann man reellwertige Funktionen beschreiben. Sie spielen eine sehr wichtige Rolle in der Numerik und auch in der Elektrotechnik (z.B. in Signale und Systeme).

$$\boxed{\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}$$

- a_n**:** Koeffizient
- z_0**:** Entwicklungspunkt
- **Konvergenzradius R:** für $|z - z_0| < R$ konvergiert die Reihe (Kreis mit Radius R um Entwicklungspunkt z_0); der Fall $|z - z_0| = R$ muss extra untersucht werden
- **Berechung des Konvergenzradius:**

$$\boxed{R := \frac{1}{limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \quad = \quad lim|\frac{a_n}{a_{n+1}}|}$$

1.1 Wichtige Potenzreihen

- **Exponentialfunktion:** $e^x = \Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
- **Sinus:** $Sin(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- **Cosinus:** $Cos(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
- **Logarithmus:** $ln(1+x) = \Sigma_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$
- **geometrische Reihe:** $\frac{1}{1-x} = \Sigma_{n=0}^{\infty} x^n$ (für $|x| \leq 1$)
- **Ableitung geom. Reihe:** $\frac{1}{(1-x)^2} = \Sigma_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$ (für $|x| \leq 1$)

1.2 Rechnen

- **Cauchy-Produkt:** $(\Sigma \ a_n(z)^n)(\Sigma \ b_n(z)^n) \ = \ \Sigma_{k=0}^{n} \ a_k \ b_{n-k}$

1.3 Tricks

- Ableitung einer Potenzreihe hat den gleichen Konvergenzradius R
- Teile, die unabhängig von n sind, können aus der Summe herausgezogen werden
- Substitution (z.B. bei $x^n x^n$ substituiere $|x| = \sqrt{y}$)
- Reihe in bekannte Reihe (oft die geom. Reihe, R = 1) umformen
- Partialbruchzerlegung