НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

ГРАВИТАЦИОННАЯ ДИНАМИКА КЛАСТЕРА ПЕРВИЧНЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР

Выпускная квалификационная работа

Выполнил:

студент группы Б13-401

Лунов М.М.

Научный руководитель

к.ф.-м.н., доц. каф. 40:

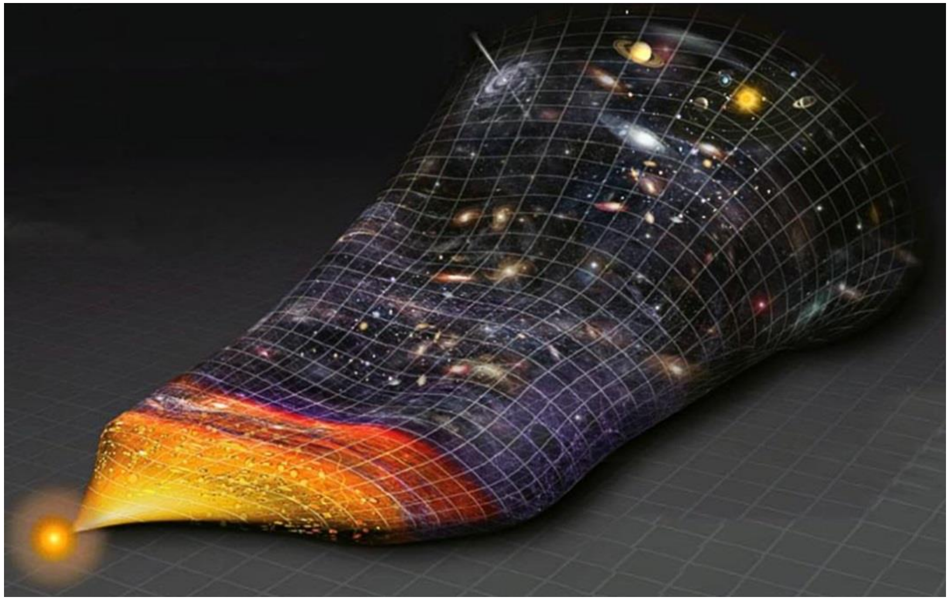
Кириллов А.А.

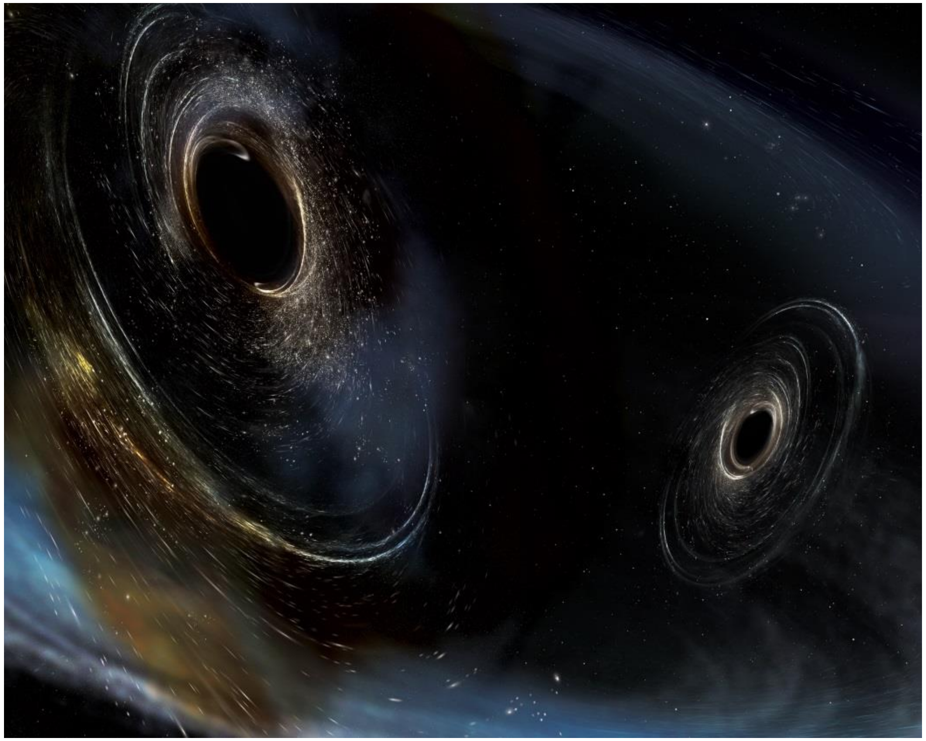
г. Москва

2017

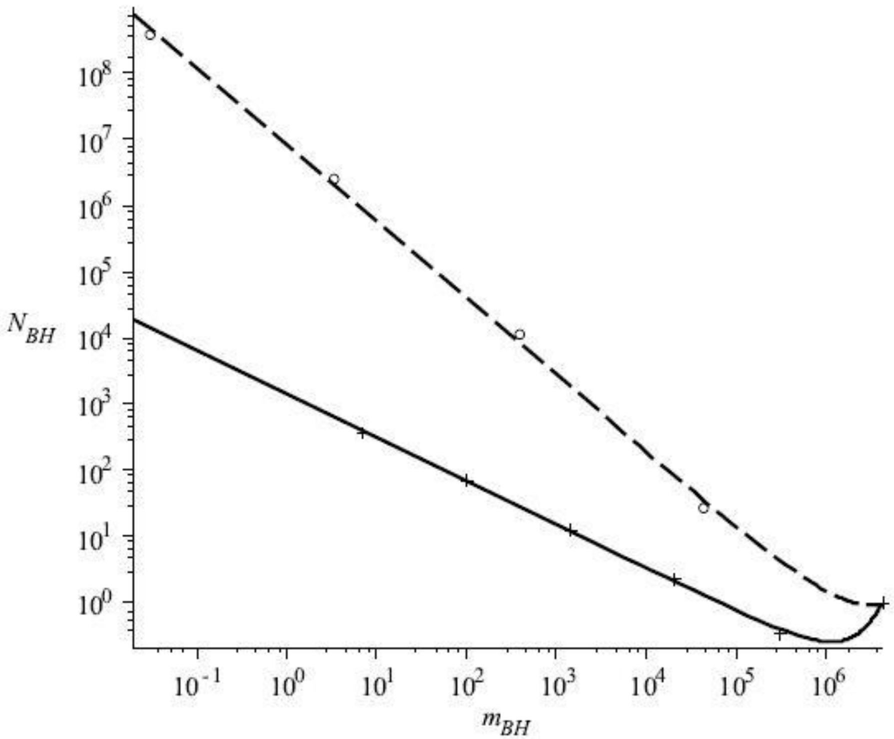
ПЕРВИЧНЫЕ ЧЁРНЫЕ ДЫРЫ (ПЧД)

ПЧД - гипотетический тип чёрной дыры, которая образовывалась не за счёт гравитационного коллапса крупной звезды, а в сверхплотной материи в момент начального расширения Вселенной.





ПЕРВИЧНЫЕ ЧЁРНЫЕ ДЫРЫ (ПЧД)



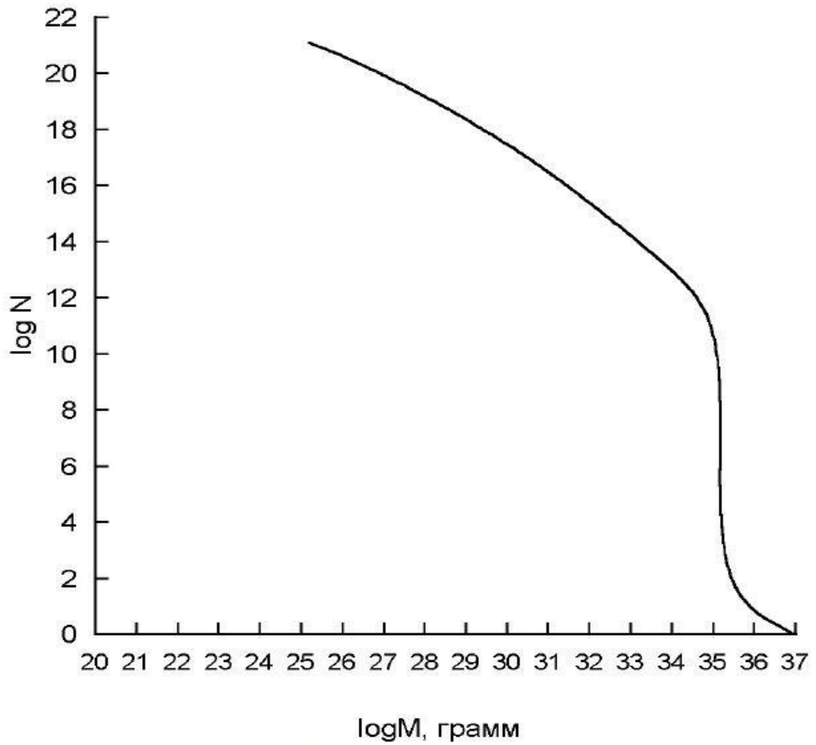


Рис.1. Типичные массовые спектры ПЧД в различных диапазонах (на рис. слева $m_{BH} = M/M_{\odot}$) [Рисунок слева взят из[1], справа из[2]]

[1] - arXiv: 1010.5325v1; [2] - arXiv:hep-ph/0005271v3

ПРЕИМУЩЕСТВО МОДЕЛИ РОЖДЕНИЯ КЛАСТЕРА ПЧД

Позволяет объяснить:

- появление квазаров в ранней Вселенной при больших красных смещениях $z > 6$ [Grav. Cosmol. 11 (2005) 99–104];
- природу скрытой массы (тёмной материи)[Mod. Phys. Lett. A 29 (2014)];
- причину возникновения реионизации во Вселенной[JCAP 01 (2015) 041];
- недавние случаи слияния ЧД, зарегистрированные с помощью гравитационных волн эксперимента LIGO[Phys. Rev. Lett. 116 (2016)];
- природу неидентифицированных точечных источников гамма-излучения, обнаруженных в большом количестве космическими гамма-телескопами CGRO EGRET и Fermi/LAT[Astropart. Phys. 35 (2011) 28–32].

ИЗУЧАЕМАЯ ПРОБЛЕМА

ГЛАВНАЯ ЗАДАЧА: рассмотреть качественно динамическую устойчивость кластера ПЧД [см. пункт 1) и 2)]

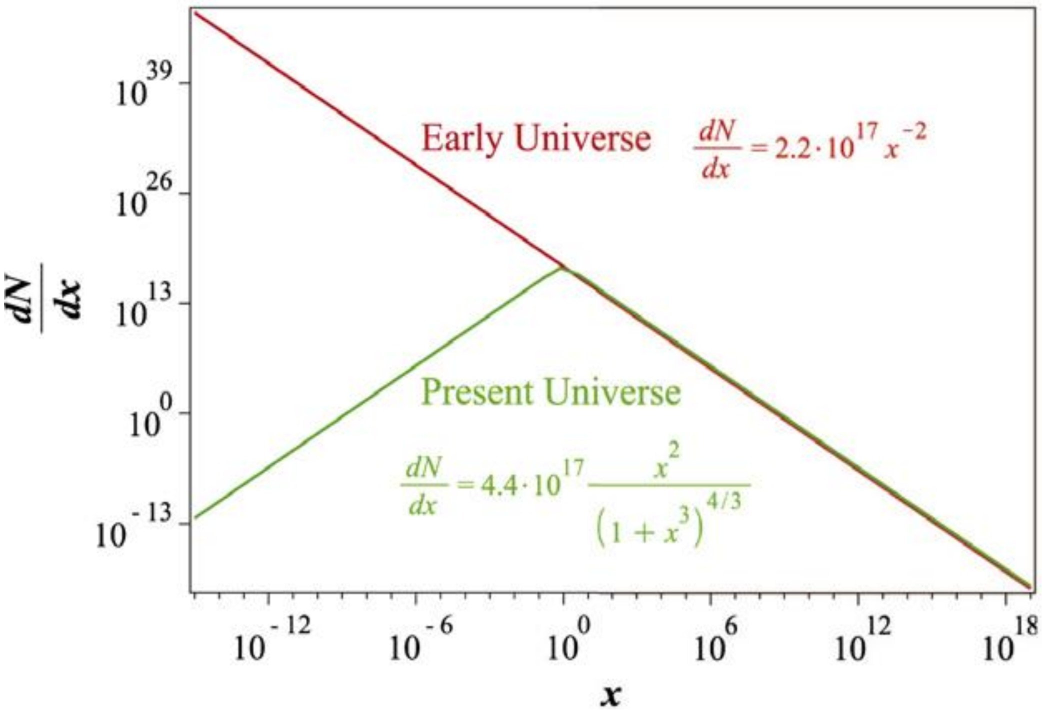


Рис. 2. Изменение массового распределения первичных черных дыр в кластере за счет излучения Хокинга, $x = M/10^{15}$ г . [рисунок взят из [3]]

ЧТО БЫЛО ИЗУЧЕНО - вопрос спектра масс ПЧД за счёт хокинговского испарения

ЧТО НЕ ИЗУЧЕНО ???
- изменение спектра масс в результате эволюции системы ПЧД: **1)слияния ПЧД** и **2)возможного их вылета из кластера**

[3] - AstropartPhys 35 (2011) 28-32

СПОСОБ РЕАЛИЗАЦИИ ЗАДАЧИ

Существуют 2 подхода при изучении динамики многочастичных гравитирующих объектов:

построение и последующее решение эволюционных кинетических уравнений

моделирование взаимодействия N-тел

При моделировании использовались следующие приближения:

- абсолютно неупругое столкновение ПЧД*
- в законах сохранения не учитывается потеря энергии на излучение гравитационных волн
- не учитывается собственное вращение ЧД

время слияния ЧД, зафиксированное в экспериментах LIGO и Virgo [Phys. Rev. Lett. 118 (2017) 221101], меньше 1 секунды, а потери энергии на гравитационное излучение составляет ~ 5% !

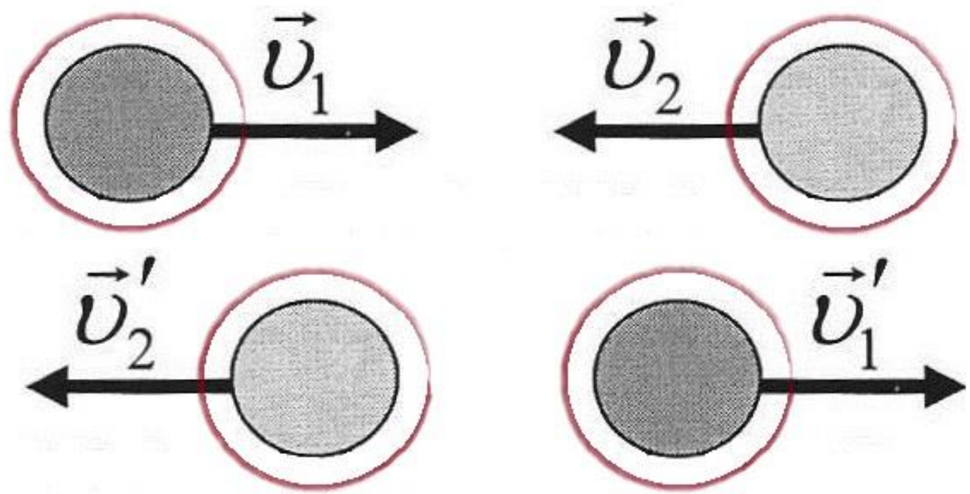
*при их сближении на расстояние ближе суммы $3r_g$ (3-х шварцшильдовских радиусов) [Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теор. физика: Т II. Теория поля. (2003) 414–421].

ПРОБЛЕМЫ РЕАЛИЗАЦИИ

1. интегрирование уравнений движения вблизи точки столкновения приводит к приобретению телами нефизичных ускорений, что при недостаточно малом временном шаге **T** приводит к разлету тел;
2. время, необходимое для расчета силы, растёт как $\frac{N(N-1)}{2} \sim \frac{N^2}{2}$ (где **N** – число тел).

T = 1

T = 2



Вместо того чтобы слиться в одно тело они пролетают “сквозь” друг друга

СХЕМА АХМАДА-КОЭНА

Данная схема предлагает разделить силу, действующую на каждое тело, на **регулярную** (от далёких тел) и **иррегулярную** (от близких тел) составляющие. Соответственно, регулярную силу можно вычислять с гораздо большим шагом, чем иррегулярную.

ПЛЮСЫ СХЕМЫ:

- **Существенно ускоряет процесс вычислений**.
- **Устраняет проблему разлета частиц.**

НЕ ВСЕ ТЕЛА В СИСТЕМЕ ФАКТИЧЕСКИ НЕБХОДИМЫ НА КАЖДОМ ВРЕМЕННОМ ШАГЕ ДЛЯ ПЕРЕРАСЧЕТА СИЛЫ НА КОНКРЕТНО РАССМАТРИВАЕМОМ ТЕЛЕ

ПРИНЦИП РАБОТЫ СХЕМЫ

окружаем каждое *i*-ое тело сферой радиуса R_i, разделив общую силу $\mathbf{F}_i$ на $\mathbf{S}_i$ и $\mathbf{K}_i$

отбор соседей для каждой частицы

Вычисляем t_i для каждого тела у которого есть соседи

отбор всех тел с min t_i фиксируя их соседей, образуя подкластеры до тех пор пока не останется тел без соседей

Вычисление $\mathbf{K}_i$ для всех тел на момент T и $\mathbf{S}_i$ для каждого тела с min t_i и его соседей на момент t_i

обновление r_i и V_i тел в подкластерах, а после и $\mathbf{S}_i$ до тех пор пока

$$\sum_{i=1}^{N} t_i = T$$

$\mathbf{S}_i$ – иррегулярная сила - является суммой сил от тел-соседей в пределах R_i

t_i – иррегулярный шаг времени

$\mathbf{K}_i$ – регулярная сила - сумма сил от тел остальной части системы

T – регулярный шаг времени

ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЁТЫ

ЭФФЕКТЫ ОТО ПРОЯВЛЯЮТСЯ НА РАССТОЯНИЯХ $< 3r_g$: $\frac{\mathbf{F}_E}{\mathbf{F}_N} \propto \left(\frac{v}{c}\right)^2$ - [*]

($\mathbf{F}_E$ — сила, создаваемая поправками ОТО, $\mathbf{F}_N$ — ньютоновская сила.)

$\mathbf{F}_E$ становится существенным при достижении скоростей ЧД порядка c, что происходит при $\mathbf{r}_{ij} \to r_g$

на расстояниях больше чем $3r_g$ эволюция системы *N* гравитирующих тел описывается следующей системой уравнений:

$$\mathbf{a}_i = G \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{m_j}{\left|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\right|^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i),$$

$$\mathbf{r}_i(T_{n+1}) = \mathbf{r}_i(T_n) + \mathbf{V}_i(T_n)(\Delta T) + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{F}_i(T_n)}{m_i}(\Delta T)^2 + \sum_{k=1}^{3} \frac{\mathbf{F}_i^{(k)}(T_n)(\Delta T)^{k+2}}{m_i(k+2)!},$$

$$\mathbf{v}_i(T_{n+1}) = \mathbf{v}_i(T_n) + \frac{\mathbf{F}_i(T_n)}{m_i}(\Delta T) + \sum_{k=1}^{3} \frac{\mathbf{F}_i^{(k)}(T_n)(\Delta T)^{k+1}}{m_i(k+1)!},$$

$$\Delta T = T_{n+1} - T_n.$$

[*] - Владимиров Ю.С. Классическая теория гравитации: (2009) 264 с.

ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЁТЫ

Полином силы определяется как:

$$\mathbf{F}_i(T_{n+1}) = \mathbf{F}_i(T_n) + \mathbf{D}[T_n, T_{n-1}](T_{n+1} - T_n)$$
$$+ \mathbf{D}^2[T_n, T_{n-2}](T_{n+1} - T_n)(T_{n+1} - T_{n-1})$$
$$+ \mathbf{D}^3[T_n, T_{n-3}](T_{n+1} - T_n)(T_{n+1} - T_{n-1})(T_{n+1} - T_{n-2})$$

$T_n, T_{n-1}, T_{n-2},$ – моменты времени последних трёх точных расчетов силы.

Разделенные разности определяются следующим образом:

$$\mathbf{D}[T_n, T_{n-1}] = \frac{\mathbf{F}_i(T_n) - \mathbf{F}_i(T_{n-1})}{T_n - T_{n-1}}$$
$$\mathbf{D}^2[T_n, T_{n-2}] = \frac{\mathbf{D}[T_n, T_{n-1}] - \mathbf{D}[T_{n-1}, T_{n-2}]}{T_n - T_{n-2}}$$
$$\mathbf{D}^3[T_n, T_{n-3}] = \frac{\mathbf{D}^2[T_n, T_{n-2}] - \mathbf{D}^2[T_{n-1}, T_{n-3}]}{T_n - T_{n-3}}$$

ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЁТЫ

Сравнивая с разложением силы в ряд Тейлора

$$\mathbf{F}_i(T_{n+1}) = \mathbf{F}_i(T_n) + \sum_{k=1}^{3} \mathbf{F}^{(k)} \frac{(T_{n+1} - T_n)^k}{k!}$$

получим производные от силы в терминах разделенных разностей

$$\mathbf{F}^{(1)} = \mathbf{D}[T_n, T_{n-1}] + T_1' \mathbf{D}^2[T_n, T_{n-2}] + T_1' T_2' \mathbf{D}^3[T_n, T_{n-3}]$$

$$\mathbf{F}^{(2)} = 2!\{\mathbf{D}^2[T_n, T_{n-2}] + (T_1' + T_2')\mathbf{D}^3[T_n, T_{n-3}]\}$$

$$\mathbf{F}^{(3)} = 3!\,\mathbf{D}^3[T_n, T_{n-3}]$$

где $T_k' = T_n - T_{n-k}$, для $k = 1,2,3$.

КРИТЕРИЙ ОБРАЗОВАНИЯ СТАБИЛЬНОГО КЛАСТЕРА

Соотношение для характерного времени изменения количества ЧД в кластере:

$$\tau_{\text{хар}} = \left(\frac{N_i}{\dot{N}_i}\right)_k > t_{\text{с.в.}}$$

где:

- $t_{\text{с.в.}} \approx 14$ млрд лет – время жизни современной Вселенной;
- k – число временных шагов;
- N_i – число ЧД в *i*-й момент времени;
- $\dot{N}_i$ – скорость изменения количества ЧД от времени:

$$\dot{N}_i = \frac{N_i - N_{i-k}}{k\Delta T}$$

При уменьшении $\dot{N}_i \to 0$, $\tau_{\text{хар}} \to \infty$ (см. рис.3-4), и, соответственно, будет превышать $t_{\text{с.в.}}$, что говорит о том, что сформирование кластера произошло.

РЕЗУЛЬТАТЫ

N = 50

РЕЗУЛЬТАТЫ

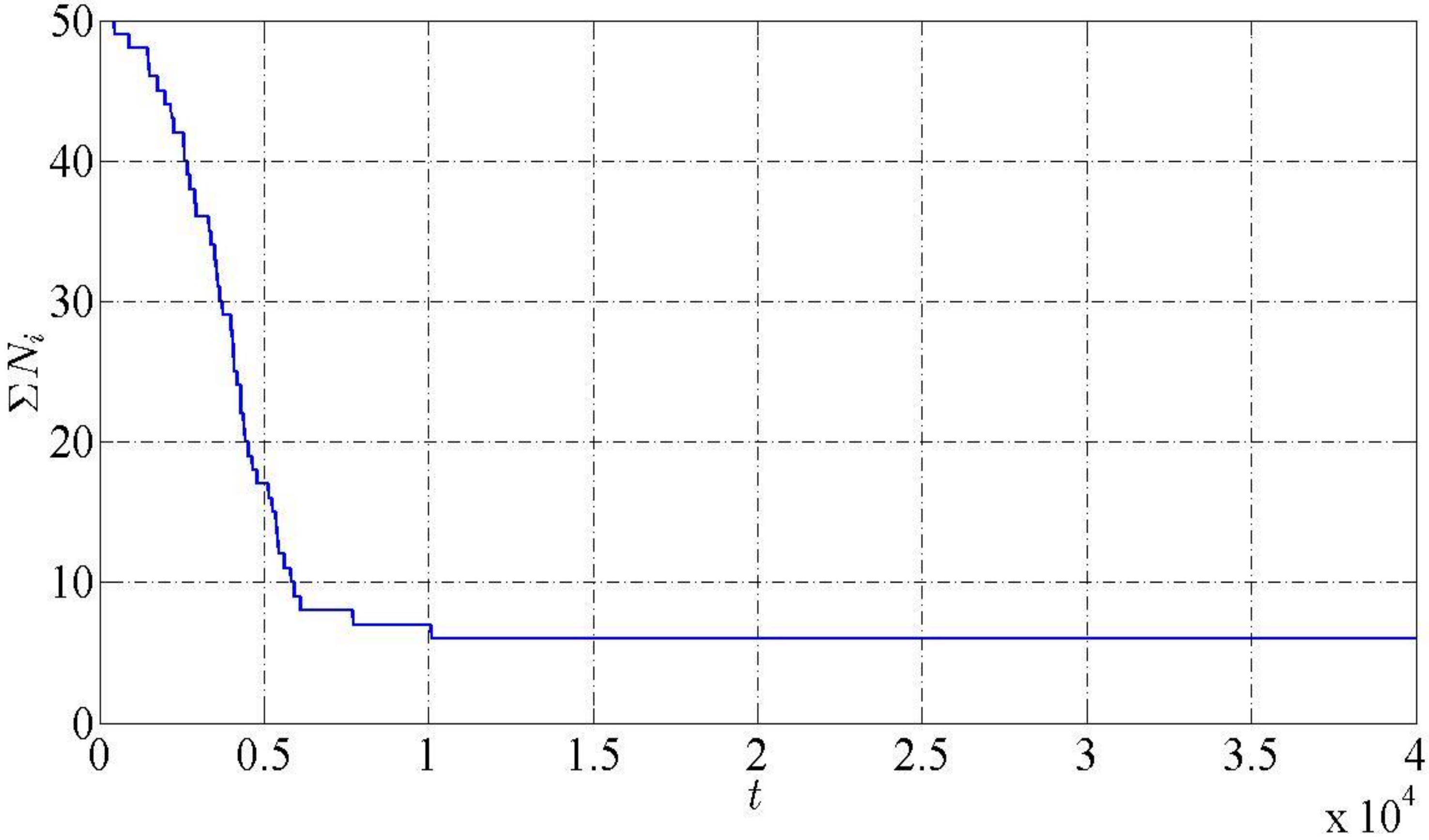


Рис.3. Изменение числа ПЧД в кластере в зависимости от времени (Для 50 ПЧД в кластере радиуса 10^{-5}[пк] с массой центральной ЧД $10^6[M_\odot]$)

РЕЗУЛЬТАТЫ

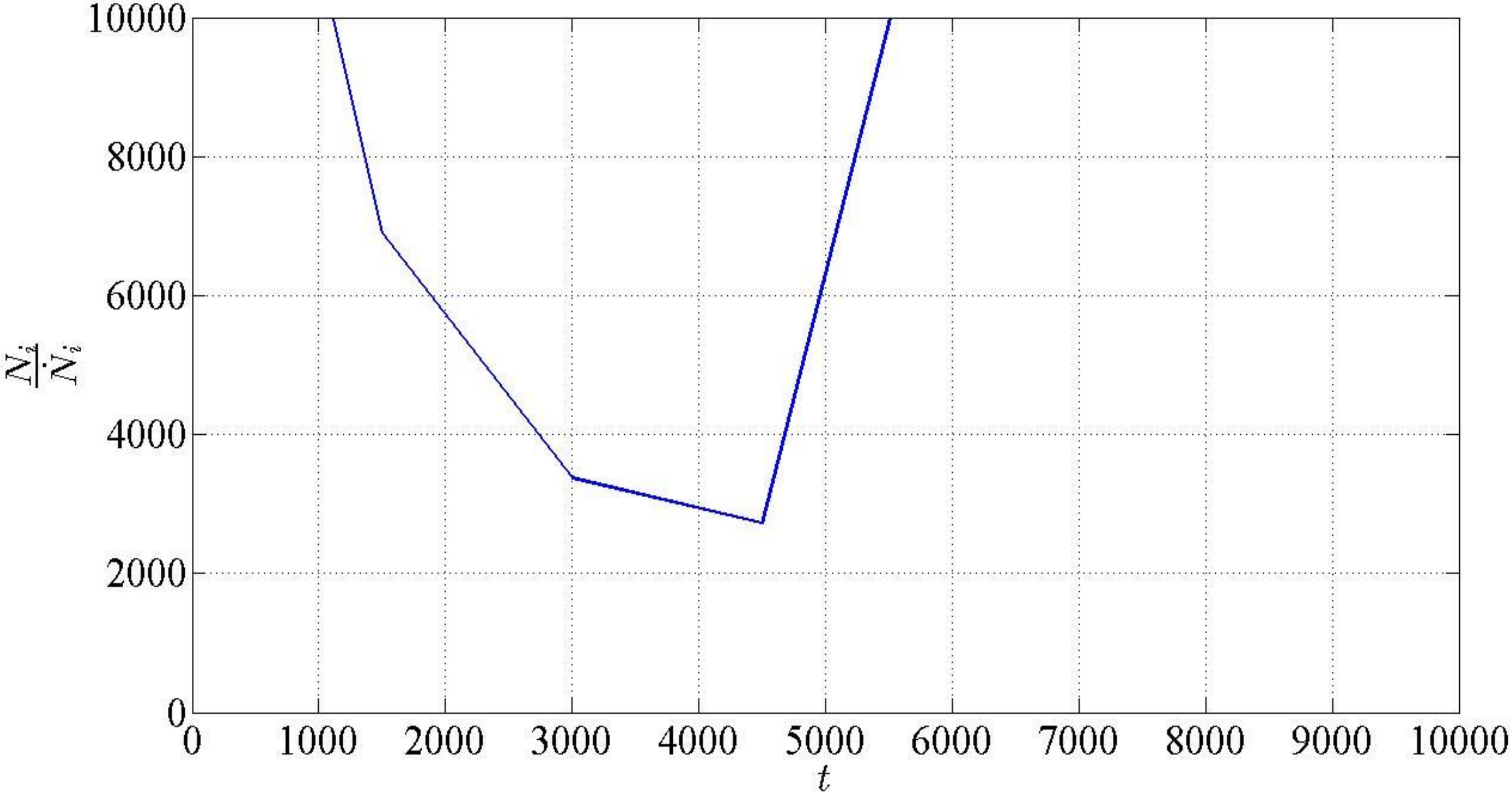


Рис.4. Изменение $\tau_{\text{хар}}$ ЧД в кластере в зависимости от времени (Для 50 ПЧД в кластере радиуса $10^{-5}[\text{пк}]$ с массой центральной ЧД $10^6[M_\odot]$)

РЕЗУЛЬТАТЫ

В зависимости от начальных параметров было оценено время образования стабильного кластера*:

M_1 **[M$_\odot$]**	$\sum_{i=1}^{N} M_i\ [M_\odot]$	R **[пк]**	$\tau_{\text{хар}}$ [с]	N
10^6	2.0e6	10^{-5}	<15000	50
10^5	2.0e5	10^{-5}	<35000	50
10^4	2.0e4	10^{-5}	<80000	50

*В таблице приведены усредненные данные по полученным результатам.

$M_1\ [M_\odot]$ – масса центральной ПЧД

$\sum_{i=1}^{N} M_i\ [\mathrm{M}_\odot]$ – суммарная масса кластера ПЧД

R [пк] – радиус кластера

$\boldsymbol{\tau}_{\text{хар}}$ [c] – среднее время образования стабильного кластера

N – число ПЧД

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- образование кластера имеет однотипный характер (образуются центральная массивная ЧД, поглощающей основную часть маломассивных ЧД, и черные дыры промежуточных масс обращающихся вокруг неё);
- для всех рассматриваемых случаев время образования кластера не превышает 2-х дней;
- вылет в результате многочастичного взаимодействия оказывается не существенным для разыгранного числа частиц.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЁТЫ

Для того чтобы перейти к 3-мерной картине требуется ввести зенитный и азимутальный углы:

$$\begin{cases} \varphi^n = \tan^{-1}\left|\dfrac{\mathbf{y}_j^n - \mathbf{y}_i^n}{\mathbf{x}_j^n - \mathbf{x}_i^n}\right|, \\ \theta^n = \tan^{-1}\left|\dfrac{\mathbf{z}_j^n - \mathbf{z}_i^n}{\sqrt{\left(\mathbf{x}_j^n - \mathbf{x}_i^n\right)^2 + \left(\mathbf{y}_j^n - \mathbf{y}_i^n\right)^2}}\right|. \end{cases}$$

после чего получаем для ускорения, спроецировав на оси координат, такую систему разностных по времени уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{\mathbf{x}i}^n = G \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{N} \dfrac{m_j}{\left|\mathbf{r}_{\boldsymbol{ij}}^{\mathbf{n}}\right|^2} \cos\theta^n \cos\varphi^n, \\ \mathbf{a}_{\mathbf{y}i}^n = G \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{N} \dfrac{m_j}{\left|\mathbf{r}_{\boldsymbol{ij}}^{\mathbf{n}}\right|^2} \cos\theta^n \sin\varphi^n, \\ \mathbf{a}_{\mathbf{z}i}^n = G \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{N} \dfrac{m_j}{\left|\mathbf{r}_{\boldsymbol{ij}}^{\mathbf{n}}\right|^2} \sin\theta^n. \end{cases}$$

ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЁТЫ

Эволюция системы *N* гравитирующих тел описывается следующей системой уравнений:

$$\mathbf{a}_i = G \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{m_j}{\left|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\right|^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)$$

$$\mathbf{r}_i(T_{n+1}) = \mathbf{r}_i(T_n) + \mathbf{V}_i(T_n)(\Delta T) + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{F}_i(T_n)}{m_i} (\Delta T)^2 + \sum_{k=1}^{3} \frac{\mathbf{F}_i^{(k)}(T_n)(\Delta T)^{k+2}}{m_i(k+2)!}$$

$$\mathbf{v}_i(T_{n+1}) = \mathbf{v}_i(T_n) + \frac{\mathbf{F}_i(T_n)}{m_i} (\Delta T) + \sum_{k=1}^{3} \frac{\mathbf{F}_i^{(k)}(T_n)(\Delta T)^{k+1}}{m_i(k+1)!}$$

В случае абсолютно неупругого столкновения:

$$\mathbf{V}_i^{n+1} = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i^n \mathbf{V}_i^n}{\sum_{i=1}^{k} m_i^n} \qquad \mathbf{r}_{i'}^{n+1} = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i^n \mathbf{r}_i^n}{\sum_{i=1}^{k} m_i^{n-1}} \qquad m_{i'}^{n+1} = \sum_{i=1}^{k} m_i^n$$