

Министерство образования и науки РФ

**ФГАОУ ВО Национальный исследовательский ядерный университет  
“МИФИ”**

Институт нанотехнологий в электронике, спинтронике и фотонике

Кафедра физики конденсированных сред

## **Гравитационная динамика кластеров первичных чёрных дыр**

Выпускная квалификационная работа бакалавра.

Направление подготовки: 01.03.02, прикладная математика и информатика

Выполнил:  
студент группы Б13-401

Лунов М.М.

Научный руководитель:  
к.ф.-м.н., доц. каф. 40 НИЯУ МИФИ  
Кириллов А.А.

Москва 2017

## Содержание

Введение .....	3
1 Динамическая устойчивость кластера ЧД.....	5
1.1 Постановка задачи .....	6
1.2 Способ реализации задачи .....	6
2 Численный метод решения задачи N-тел и его применение .....	7
2.1 Схема Ахмада-Коэна [Ahmad–Cohen scheme] .....	9
2.1.1 Принцип работы схемы .....	9
2.2 Численные расчёты .....	11
2.2.1 Физические параметры задачи.....	14
3 Результаты моделирования эволюции кластера ПЧД в зависимости от начальных параметров .....	15
3.1 Критерий образования стабильного кластера .....	15
3.2 Результаты.....	17
Заключение .....	20
Список литературы .....	21

# Введение

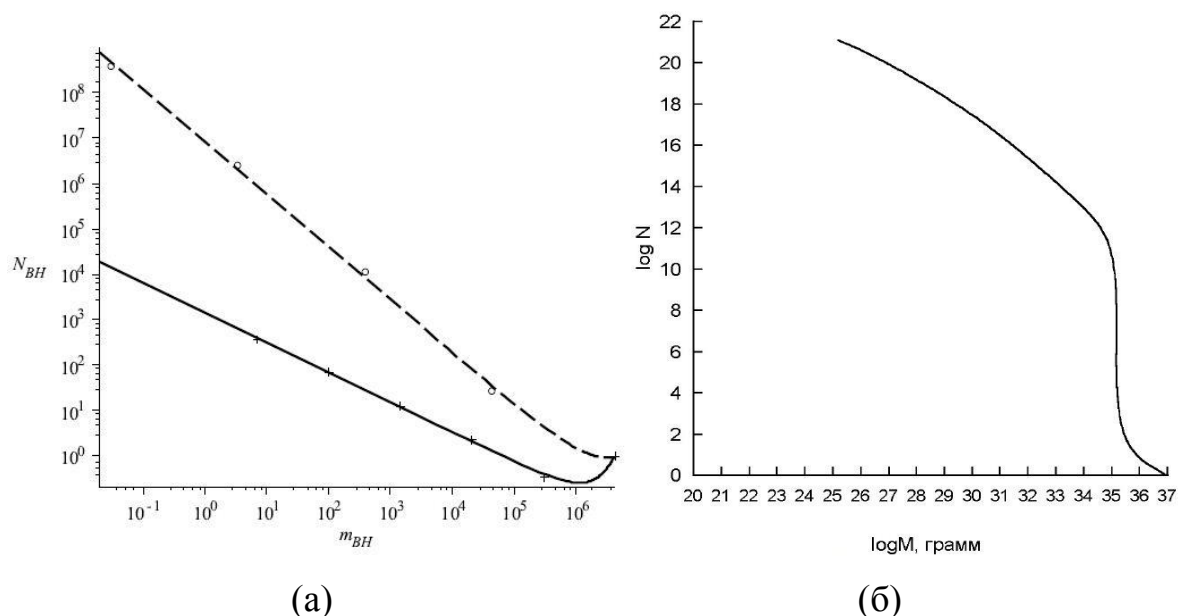
Исследования природы активных галактических ядер привело к общему убеждению о том, что центры галактик содержат сверхмассивные черные дыры (ЧД) с массами  $10^6 - 10^9 M_{\odot}$  [1]. Одно из первых и наиболее очевидных возможных объяснений происхождения подобных ЧД предполагает коллапс и последующее слияние большой совокупности звезд за счет их высокой концентрации в галактических центрах. Однако существуют и другие механизмы их образования. Так, например, согласно [2], имеются серьезные основания полагать, что звездообразование и образование ядер галактик шло одновременно. В статьях [3–4] рассмотрена модель формирования галактик вокруг массивных ЧД и приводятся доводы именно в пользу этой модели.

Таким образом, вопрос о раннем происхождении черных дыр остается открытым. При этом в рамках некоторых моделей, в отличие от тех, в которых черные дыр возникают в результате эволюции массивных звезд и звездных систем, существуют косвенные свидетельства существования «первичных» черных дыр (ПЧД). Так, например, в моделях [5–6], построенных в рамках инфляционных сценариев рождения ПЧД, возможно формирование не одиночных черных дыр, а их кластеров с широким и нестепенным массовым спектром (см., например, рис. 1.). Такие сценарии предсказывают появление сверхмассивных черных дыр в галактических ядрах и черных дыр меньших масс с характерной структурой кластера в галактических гало на больших расстояниях от их центров [7]. Эти модели имеют ряд существенных преимуществ, поскольку позволяют одновременно давать объяснение ряду современных астрофизических и космологических проблем. Например:

- Образование сверхмассивных ПЧД в ранней Вселенной позволяет им стать естественными «зародышами» будущих квазаров [8], что особенно актуально в связи с обнаружением всё большего количества последних в дозвёздный период (на красных смещениях  $z > 6$ ) [9].

- Небольшие кластеры маломассивных ПЧД, которые неминуемо возникают вместе с большими, могут составлять либо всю скрытую массы (тёмную материю), либо её долю [10–12].
- Взаимодействие нейтрального газа с продуктами излучения Хоукинга от маломассивных ПЧД может являться причиной реионизации Вселенной, имевшей место на  $z \sim 8$  [13–14].
- Недавние случаи слияния достаточно массивных ЧД (десятки солнечных масс), зарегистрированные с помощью гравитационно-волнового эксперимента LIGO [15–17], могут быть связаны с их кластерной структурой.
- Излучение Хоукинга может также проявлять кластеры ПЧД в виде неидентифицированных точечных источников гамма-излучения [ссылки на работы], которые были обнаружены в значительном количестве космическими гамма-телескопами CGRO EGRET [18] и Fermi/LAT [19].

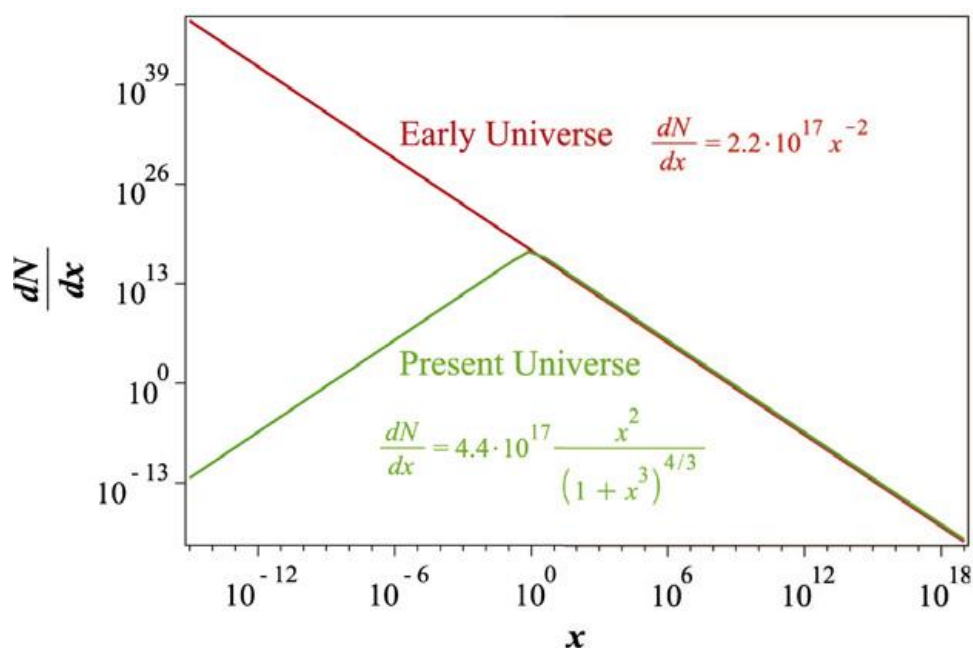
Все это может служить косвенными свидетельствами существования кластеров ПЧД.



**Рис. 1.** Типичные массовые спектры ПЧД (на рис. (а)  $m_{BH} = M/M_{\odot}$  [20],  
рис. (б) [6]).

# 1 Динамическая устойчивость кластера ЧД

Несмотря на отмеченные выше достоинства модели, предсказывающей появление кластеров ПЧД, вопрос их динамической устойчивости в литературе детально не исследовался. В работе [19] приводились качественные оценки времени жизни кластера ПЧД. Оказалось, что оно значительно превышает современный возраст Вселенной. Там же рассматривался вопрос искажения массового спектра за счёт хоукинговского механизма испарения, приводящего к уменьшению маломассивной составляющей части спектра (см. рис. 2.). При этом нерассмотренными остались два важных эффекта: изменение спектра в результате 1) слияния ПЧД и 2) возможного их вылета из кластера (при скоростях ПЧД больших, чем 2-я космическая). Исследованию последних двух вопросов посвящена данная работа.



**Рис. 2.** Изменение массового распределения первичных черных дыр в кластере за счет излучения Хоукинга, где  $x = M/10^{15}$  г [19].

## 1.1 Постановка задачи

Задача состоит в исследовании гравитационной динамики кластера ПЧД, а именно — характер изменения со временем его массового спектра в процессе образования стабильного кластера.

## 1.2 Способ реализации задачи

Существуют 2 подхода при изучении динамики многочастичных гравитирующих объектов: построение и последующее решение эволюционных кинетических уравнений или моделирование взаимодействия N-тел. В настоящей работе рассматривался второй подход.

При моделировании использовались следующие приближения:

- абсолютно неупругое столкновение ПЧД при их сближении на расстояние ближе суммы 3-х шварцшильдовских радиусов  $r_g$  [21];
- не учитывается потеря энергии на излучение гравитационных волн;
- не учитывается собственное вращение ЧД.

Подчеркнем, что в настоящей работе рассматривается качественное изменение массового спектра кластера без учёта “тонких” эффектов, к которым относятся, например, процессы, протекающие на расстояниях  $< 3r_g$  (радиус последней устойчивой орбиты, на меньших расстояниях неизбежно происходит слияние ЧД [21, 22]). Известно, что поправки к силе взаимодействия между гравитирующими объектами, получаемые из ОТО, относятся следующим образом [22]:

$$\frac{\mathbf{F}_E}{\mathbf{F}_N} \propto \left(\frac{v}{c}\right)^2 \quad (1)$$

где  $\mathbf{F}_E$  — сила, создаваемая неньютоновскими поправками,  $\mathbf{F}_N$  — ньютоновская сила,  $v$  — скорость объекта,  $c$  — скорость света. Учет  $\mathbf{F}_E$  становится существенным при достижении скоростей ЧД порядка  $c$ , что происходит при  $r_{ij} \rightarrow r_g$ . Это позволяет не учитывать эффекты искажения траекторий на расстояниях больше чем  $3r_g$ . Так же отметим, что время

слияния ЧД, зафиксированное в экспериментах LIGO и Virgo, меньше 1 секунды, а потери энергии на гравитационное излучение составляет ~5% [15-17]. Таким образом, можно сделать вывод, что учёт эффектов ОТО не оказывает существенного влияния на гравитационную динамику кластера в целом.

## 2 Численный метод решения задачи N-тел и его применение

На данный момент в общем виде задача  $N$ -тел для  $N > 3$  может быть решена только численно, причём для  $N = 3$  аналитическое решение в виде рядов, предложенное Зундманом, даже при современном уровне компьютеров использовать практически невозможно [23]. Остается единственная практическая возможность — численное решение уравнений движения.

В задаче  $N$ -тел взаимодействие вычисляется отдельно между парами частиц,  $\mathbf{f}$  — сила, действующая на каждую частицу ( $i$ -частицу), является суммой вкладов отдельных частиц ( $j$ - частиц), которые на нее действуют. Каждая частица характеризуется набором параметров, таких как масса, гравитационный радиус (в случае черных дыр) и т.п. Кроме того, каждая частица характеризуется скоростью  $\mathbf{v}_i$  и положением  $\mathbf{r}_i$ . Задачей ядра вычисления взаимодействия является расчет ускорения, которое частица испытывает в результате влияния на нее других частиц:

$$\mathbf{a}_i = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{f}_{ij}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{f}_{ij}$  — сила, с которой  $j$ -частица действует на  $i$ -частицу. При этом сила взаимодействия двух частиц зависит, вообще говоря, от их взаимного

положения, скорости, а также характеристик частиц. Для гравитационного взаимодействия на основании предыдущего выражения имеем:

$$\mathbf{a}_i = G \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i). \quad (3)$$

Непосредственные вычисления по этой формуле являются достаточно ресурсоемкими: для  $N$  частиц объем вычислений растет как  $\frac{N(N-1)}{2}$ . Более того, известно, что численные методы сталкиваются с такой проблемой, что при тесных сближениях тел необходимо уменьшать шаг по времени. Это в свою очередь, приводит к быстрому росту времени вычисления. Однако, как было сказано выше, и без уменьшения шага при «прямом» ходе время вычислений силы для каждого шага растёт с ростом числа тел, по крайней мере, как  $O(N^2)$ , что делает практически невозможным моделирование систем, состоящих из десятков и сотен тысяч тел.

Таким образом, при моделировании задачи особое внимание требуется уделить двум проблемам:

- интегрирование уравнений движения вблизи точки столкновения приводит к приобретению телами нереалистичных ускорений, что при недостаточно малом временном шаге приводит к нефизичному разлету тел;
- время, необходимое для расчета силы, растет, по крайней мере, как  $O(N^2)$  (где  $N$  – число тел).

Для решения этих проблем применяют следующий алгоритм, называемый *схемой Ахмада-Коэна* [24]: нужно разделить силу, действующую на каждое тело, на 2 части — иррегулярную (от близких тел — «соседей») и регулярную (от более далёких тел). Соответственно, регулярную силу можно вычислять с гораздо большим шагом, чем иррегулярную. О чём подробнее будет сказано ниже.



## 2.1 Схема Ахмада-Коэна [Ahmad–Cohen scheme]

Было показано [25–27], что не все объекты в системе на каждом шаге времени фактически необходимы для перерасчета силы на конкретно рассматриваемом теле. Данная схема использует этот факт посредством деления силы, действующей на тело, на две составляющие: медленно изменяющуюся, вызванную «дальними» телами — регулярную силу, и — иррегулярную, обусловленную телами в непосредственной близости от рассматриваемого объекта. Понятно, что сильно флуктуировать будет составляющая силы от ближайших соседей. Эффективность схемы заключается в том, что регулярная сила изменяется гораздо медленнее, чем иррегулярная, и поэтому регулярная сила не должна рассчитываться так часто, как сила от близлежащих тел. В системах с большим числом тел преобладают дальние тела, что, следовательно, позволяет значительно сэкономить время при вычислении силы. Более того, так как шаг времени перестает быть фиксированным, устраняется проблема разлета тел.

### 2.1.1 Принцип работы схемы

Мы окружаем каждое  $i$ -е тело сферой радиуса  $R_i$  (радиус отбора соседей), который зависит от массы  $i$ -го тела, разделив общую силу  $\mathbf{F}_i$ , действующую на это тело, на две составляющие: иррегулярную силу и  $\mathbf{S}_i$ , которая является суммой сил от тел-соседей в пределах  $R_i$ , и регулярную силу  $\mathbf{K}_i$  — от тел остальной части системы.

Так как мы разделили силы на две составляющие, мы будем иметь два различных временных шага, связанных с каждым телом. Шаг по времени регулярной силы  $T$  (в данной работе мы берём его фиксированным) — это основной временной шаг.  $t_i < T$  — относится к иррегулярной силе — у каждого тела он свой, и зависит от расстояния до ближайшего соседа.

Для нахождения временных шагов иррегулярной силы мы используем формулу[28]:

$$\delta t_i = \alpha [\min(r_{ij})]^{3/2}, \quad (4)$$

где  $\min(r_{ij})$  есть расстояние между  $i$ -м телом и его ближайшим соседом  $j$ . Константа  $\alpha$  служит в качестве контроля ошибок интегрирования (в настоящей работе  $\alpha=5 \cdot 10^{-3}$ ).

Итак, данная схема действует следующим образом (см. рис. 3). В первую очередь находим все тела, которые должны обновляться с меньшим (по сравнению с основным) шагом разбиения по времени, их мы обнаруживаем путем нахождения минимума  $t_i$ . Для каждого такого  $i$ -го тела с минимальным  $t_i$  формируется подкластер соседей (тел с которыми возможно слияние данного  $i$ -го тела) с присвоением  $t_i$  всему подкластеру. Поиск таких  $i$ -тел ведётся до тех пор, пока не останется тел без соседей. И только после этого, когда все тела разделены на группы с соседями (где необходим перерасчет с разбиением силы на  $\mathbf{K}_i$  и  $\mathbf{S}_i$  составляющие) и без, можно приступить к вычислению ускорений. В результате, как только суммарное иррегулярное время в подкластерах сравняется с шагом регулярного времени, фиксируем полученные положения и скорости всех тел и запускаем цикл заново.

## ПРИНЦИП РАБОТЫ СХЕМЫ



$\mathbf{S}_i$  – иррегулярная сила - является суммой сил от тел-соседей в пределах  $R_i$   
 $t_i$  – иррегулярный шаг времени

$\mathbf{K}_i$  – регулярная сила - сумма сил от тел остальной части системы  
 $T$  – регулярный шаг времени

**Рис.3.** Принцип работы схемы Ахмада-Коэна.

## 2.2 Численные расчёты

Так как при решении задачи  $N$ -тел массы черных дыр, а также положения и скорости в начальный момент времени считаются известными, то вычислив ускорение, которым будет обладать  $i$ -тело в начальный момент, можно вычислить его новые характеристики ( $\mathbf{v}_i$  и  $\mathbf{r}_i$ ) в следующий временной шаг. Реализуется это за счет того, что в течение очень малого промежутка времени ускорение считаем приближено постоянным.

Для того чтобы перейти к 3-мерной картине требуется ввести зенитный и азимутальный углы:

$$\begin{cases} \varphi^n = \tan^{-1} \left| \frac{\mathbf{y}_j^n - \mathbf{y}_i^n}{\mathbf{x}_j^n - \mathbf{x}_i^n} \right|, \\ \theta^n = \tan^{-1} \left| \frac{\mathbf{z}_j^n - \mathbf{z}_i^n}{\sqrt{(\mathbf{x}_j^n - \mathbf{x}_i^n)^2 + (\mathbf{y}_j^n - \mathbf{y}_i^n)^2}} \right|. \end{cases} \quad (5)$$

после чего получаем, спроецировав вычисляемые характеристики на оси координат, такие системы разностных по времени уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{xi}^n = G \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j}{|\mathbf{r}_{ij}^n|^2} \cos \theta^n \cos \varphi^n, \\ \mathbf{a}_{yi}^n = G \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j}{|\mathbf{r}_{ij}^n|^2} \cos \theta^n \sin \varphi^n, \\ \mathbf{a}_{zi}^n = G \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j}{|\mathbf{r}_{ij}^n|^2} \sin \theta^n. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь  $\mathbf{r}_{ij}^n = \sqrt{(\mathbf{x}_j^n - \mathbf{x}_i^n)^2 + (\mathbf{y}_j^n - \mathbf{y}_i^n)^2 + (\mathbf{z}_j^n - \mathbf{z}_i^n)^2}$ .

Эволюция положений и скоростей от  $T_{n-1}$  до  $T_n$  определяется разложением в ряд Тейлора до третьего порядка производных сил

$$\mathbf{r}_i(T_{n+1}) = \mathbf{r}_i(T_n) + \mathbf{v}_i(T_n)(\Delta T) + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{F}_i(T_n)}{m_i} (\Delta T)^2 + \sum_{k=1}^3 \frac{\mathbf{F}_i^{(k)}(T_n)(\Delta T)^{k+2}}{m_i(k+2)!}, \quad (7)$$

$$\mathbf{v}_i(T_{n+1}) = \mathbf{v}_i(T_n) + \frac{\mathbf{F}_i(T_n)}{m_i} (\Delta T) + \sum_{k=1}^3 \frac{\mathbf{F}_i^{(k)}(T_n)(\Delta T)^{k+1}}{m_i(k+1)!}, \quad (8)$$

$$\Delta T = T_{n+1} - T_n.$$

где  $\mathbf{F}_i$  является полной силой, действующей на  $i$ -ую частицу, и  $\mathbf{F}_i^{(k)}$  является  $k$ -ой производной от силы по времени, вычисляемой в момент времени  $T_{n-1}$ .

Силы и их производные состоят из суммы иррегулярной и регулярной частей

$$\mathbf{F}_i^{(k)} = \mathbf{K}_i^{(k)} + \mathbf{S}_i^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, 3. \quad (9)$$

В промежутках между расчетами регулярной силы полиномиальный метод разделенной разности используется для экстраполяции силы и ее производных. Полином силы определяется как

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i(T_{n+1}) = & \mathbf{F}_i(T_n) + \mathbf{D}[T_n, T_{n-1}](T_{n+1} - T_n) \\ & + \mathbf{D}^2[T_n, T_{n-2}](T_{n+1} - T_n)(T_{n+1} - T_{n-1}) \\ & + \mathbf{D}^3[T_n, T_{n-3}](T_{n+1} - T_n)(T_{n+1} - T_{n-1})(T_{n+1} - T_{n-2}) \end{aligned} \quad (10)$$

где  $T_n, T_{n-1}, T_{n-2}$ , – моменты времени последних трёх точных расчетов силы. Разделенные разности определяются следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{D}[T_n, T_{n-1}] &= \frac{\mathbf{F}_i(T_n) - \mathbf{F}_i(T_{n-1})}{T_n - T_{n-1}} \\ \mathbf{D}^2[T_n, T_{n-2}] &= \frac{\mathbf{D}[T_n, T_{n-1}] - \mathbf{D}[T_{n-1}, T_{n-2}]}{T_n - T_{n-2}} \\ \mathbf{D}^3[T_n, T_{n-3}] &= \frac{\mathbf{D}^2[T_n, T_{n-2}] - \mathbf{D}^2[T_{n-1}, T_{n-3}]}{T_n - T_{n-3}} \end{aligned} \quad (11)$$

Преимуществом использования (10) и (11) является их легкость в расчете. Чтобы получить производные от силы в терминах разделенных разностей мы сравниваем (10) с разложением силы в ряд Тейлора

$$\mathbf{F}_i(T_{n+1}) = \mathbf{F}_i(T_n) + \sum_{k=1}^3 \mathbf{F}_i^{(k)} \frac{(T_{n+1} - T_n)^k}{k!} \quad (12)$$

чтобы получить

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(1)} &= \mathbf{D}[T_n, T_{n-1}] + T_1' \mathbf{D}^2[T_n, T_{n-2}] + T_1' T_2' \mathbf{D}^3[T_n, T_{n-3}] \\ \mathbf{F}^{(2)} &= 2! \{ \mathbf{D}^2[T_n, T_{n-2}] + (T_1' + T_2') \mathbf{D}^3[T_n, T_{n-3}] \} \\ \mathbf{F}^{(3)} &= 3! \mathbf{D}^3[T_n, T_{n-3}] \end{aligned} \quad (13)$$

где для  $T'_k = T_n - T_{n-k}$ , для  $k = 1, 2, 3$ . Соседи  $i$ -ой частицы обновляются к моменту  $t_i + \delta t_i$ , используя ряд Тейлора с членами силы только до первого порядка. Эта синхронизация позволяет рассчитать иррегулярную силу и ее производные. Было показано[24], что для этой цели вычисление членов более высокого порядка в ряде Тейлора не так эффективно, как контроль точности через  $\alpha$ .

Таким образом, вид формул для вычисления скоростей и координат:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i^{n+1} = \mathbf{x}_i^n + \mathbf{v}_{xi}^n \tau + \frac{\mathbf{a}_{xi}^n \tau^2}{2} + \sum_{k=1}^3 \frac{(\mathbf{a}_{xi}^n)^{(k)} \tau^{k+2}}{(k+2)!}, \\ \mathbf{y}_i^{n+1} = \mathbf{y}_i^n + \mathbf{v}_{yi}^n \tau + \frac{\mathbf{a}_{yi}^n \tau^2}{2} + \sum_{k=1}^3 \frac{(\mathbf{a}_{yi}^n)^{(k)} \tau^{k+2}}{(k+2)!}, \\ \mathbf{z}_i^{n+1} = \mathbf{z}_i^n + \mathbf{v}_{zi}^n \tau + \frac{\mathbf{a}_{zi}^n \tau^2}{2} + \sum_{k=1}^3 \frac{(\mathbf{a}_{zi}^n)^{(k)} \tau^{k+2}}{(k+2)!}. \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{xi}^{n+1} = \mathbf{v}_{xi}^n + \mathbf{a}_{xi}^n \tau + \sum_{k=1}^3 \frac{(\mathbf{a}_{xi}^n)^{(k)} \tau^{k+1}}{(k+1)!}, \\ \mathbf{v}_{yi}^{n+1} = \mathbf{v}_{yi}^n + \mathbf{a}_{yi}^n \tau + \sum_{k=1}^3 \frac{(\mathbf{a}_{yi}^n)^{(k)} \tau^{k+1}}{(k+1)!}, \\ \mathbf{v}_{zi}^{n+1} = \mathbf{v}_{zi}^n + \mathbf{a}_{zi}^n \tau + \sum_{k=1}^3 \frac{(\mathbf{a}_{zi}^n)^{(k)} \tau^{k+1}}{(k+1)!}. \end{cases} \quad (15)$$

Т.к. шаг  $T$  - фиксированный, то  $\Delta T = \text{const} = \tau$ .

Для однозначного определения положения тел в пространстве достаточно ограничиться знанием их координат, но для выполнения закона сохранения импульса при абсолютно неупругом столкновении требуются также и их скорости. В общем случае, при сближении тел на расстояние ближе заданного порога (суммарного гравитационного радиуса двух черных дыр) и при одновременном столкновении сразу нескольких  $k$  тел, вычисление скорости и координат в следующий шаг по времени будет осуществляться, посредством формул:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{xi'}^{n+1} = \frac{\sum_{i=1}^k m_i^n \mathbf{v}_{xi}^n}{\sum_{i=1}^k m_i^n}, \\ \mathbf{v}_{yi'}^{n+1} = \frac{\sum_{i=1}^k m_i^n \mathbf{v}_{yi}^n}{\sum_{i=1}^k m_i^n}, \\ \mathbf{v}_{zi'}^{n+1} = \frac{\sum_{i=1}^k m_i^n \mathbf{v}_{zi}^n}{\sum_{i=1}^k m_i^n}. \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{x}_{i'}^{n+1} = \frac{\sum_{i=1}^k m_i^n \mathbf{x}_i^n}{\sum_{i=1}^k m_i^{n-1}}, \\ \mathbf{y}_{i'}^{n+1} = \frac{\sum_{i=1}^k m_i^n \mathbf{y}_i^n}{\sum_{i=1}^k m_i^{n-1}}, \\ \mathbf{z}_{i'}^{n+1} = \frac{\sum_{i=1}^k m_i^n \mathbf{z}_i^n}{\sum_{i=1}^k m_i^n}. \end{cases} \quad (16)$$

Для нового образовавшегося после слияния тела  $i'$  координатами являются положения центра масс системы сталкивающихся чёрных дыр. При этом масса полученного объекта есть, очевидно, сумма масс столкнувшихся тел:

$$m_{i'}^{n+1} = \sum_{i=1}^k m_i^n. \quad (17)$$

Как было сказано выше, потерей энергии на гравитационное излучение, которое, вообще говоря, будет вносить определенный вклад при слиянии массивных ПЧД, мы пренебрегаем.

### 2.2.1 Физические параметры задачи

Начальное распределение масс ПЧД задаётся в интервале  $M_{\text{pbh}} \in [1; 10^4][M_{\odot}]$ , где их взаимное расположение меняется в диапазоне  $[10^{-6}; 1][\text{пк}]^3$  ( $1[\text{пк}] \approx 3,1 \cdot 10^{16}[\text{м}]$ ). При этом начальные скорости зависят от средней полной кинетической энергии системы (теорема о вириале).

Для перехода к безразмерным единицам берем:

$$1 [\text{ед. массы}] = M_{\text{pbh}}/M_{\odot} \text{ (при } M_{\text{pbh}} = M_{\odot});$$

$$1 [\text{ед. расстояния}] = 1 \cdot 10^{-8} [\text{пк}];$$

$$1 [\text{ед. времени}] = 1 [\text{с}];$$

Таким образом, для гравитационного радиуса  $r_g = 2 \frac{GM}{c^2} \approx 2950 \cdot \frac{M}{M_{\odot}} [\text{м}]$  в

результате получаем:

$$\tilde{r}_g = \frac{r_g}{1 [\text{ед. расстояния}]} \in 9.56 \cdot [10^{-6}; 1].$$

Аналогично для скорости и ускорения при обновлении координат:

$$\tilde{r}_n = \tilde{r}_{n-1} + \left( v_{n-1} \cdot \tau + \frac{a_{n-1} \cdot \tau^2}{2} \right) / 1 \text{ [ед. расстояния]},$$

где  $\tilde{r} = \frac{r}{1 \text{ [ед. расстояния]}}$ .

### 3 Результаты моделирования эволюции кластера ПЧД в зависимости от начальных параметров

#### 3.1 Критерий образования стабильного кластера

В качестве критерия образования кластера выбиралось следующее соотношение для характерного времени изменения количества ЧД в нём:

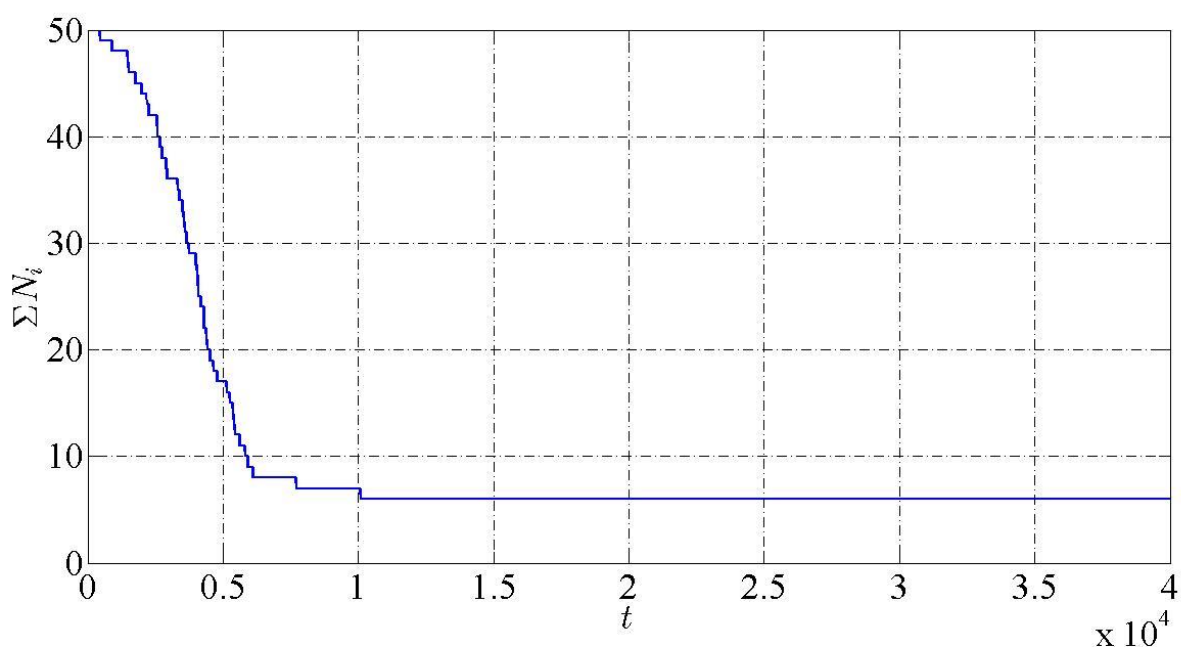
$$\tau_{\text{хар}} = \left( \frac{N_i}{\dot{N}_i} \right)_k > t_{\text{с.в.}}, \quad (18)$$

где  $t_{\text{с.в.}} \approx 14$  млрд лет – время жизни современной Вселенной,  $k$  – число временных шагов,  $N_i$  – число ЧД в  $i$ -й момент времени,  $\dot{N}_i$  – скорость изменения количества ЧД от времени, которое может быть оценено следующим образом:

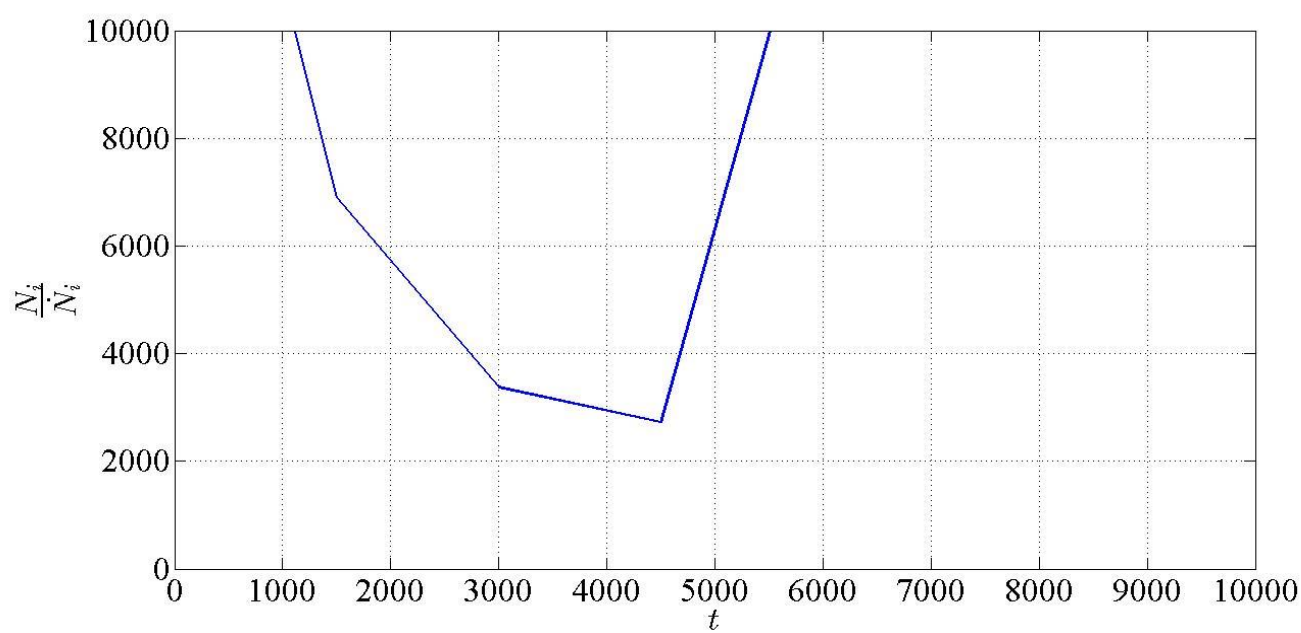
$$\dot{N}_i = \frac{N_i - N_{i-k}}{k\Delta T} \quad (19)$$

Здесь выбирался временной шаг  $k\Delta T = 1500$  с для усреднения  $\dot{N}_i$ . При уменьшении  $\dot{N}_i \rightarrow 0$ ,  $\tau_{\text{хар}} \rightarrow \infty$  (см. рис.4-5), и, соответственно, будет превышать  $t_{\text{с.в.}}$ , что говорит о том, что формирование кластера произошло.

Для 50 ПЧД в кластере радиуса  $10^{-5}$  [пк] с массой центральной ЧД  $10^6 [M_{\odot}]$ :



**Рис.4.** Изменение числа ПЧД в кластере в зависимости от времени.



**Рис.5.** Изменение  $\tau_{\text{хар}}$  ЧД в кластере в зависимости от времени.



## 3.2 Результаты

При гравитационной динамике ПЧД наблюдается образование стабильного кластера вокруг сформировавшегося массивного тела. На рис. 6-7 продемонстрированы типичные начальное и конечное пространственные распределение, а так же их массовые спектры для кластера с  $R = 10^{-5}$ [пк],  $M_1 = 10^6[M_\odot]$ . В зависимости от начальных параметров было оценено время образования стабильного кластера. Для каждого из рассматриваемых в таблице случаев было проделано по 3 моделирования. В таблице приведены усредненные данные по полученным результатам.

$M_1 [M_\odot]$	$\sum_{i=1}^N M_i [M_\odot]$	$R$ [пк]	$\tau_{\text{хар}}$ [с]	$N$
$10^6$	2.0e6	$10^{-5}$	<15000	50
$10^5$	2.0e5	$10^{-5}$	<35000	50
$10^4$	2.0e4	$10^{-5}$	<80000	50

Здесь:

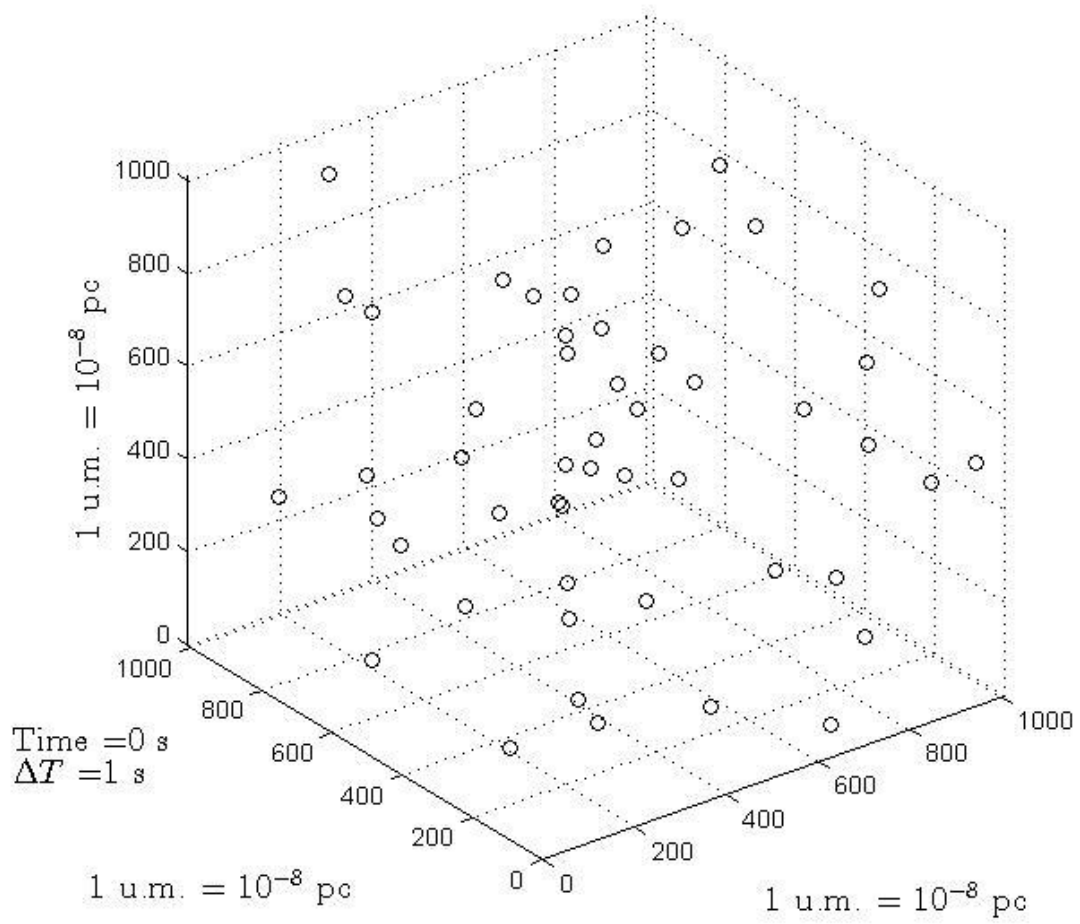
$M_1 [M_\odot]$  – масса центральной ПЧД;

$\sum_{i=1}^N M_i [M_\odot]$  – суммарная масса кластера ПЧД;

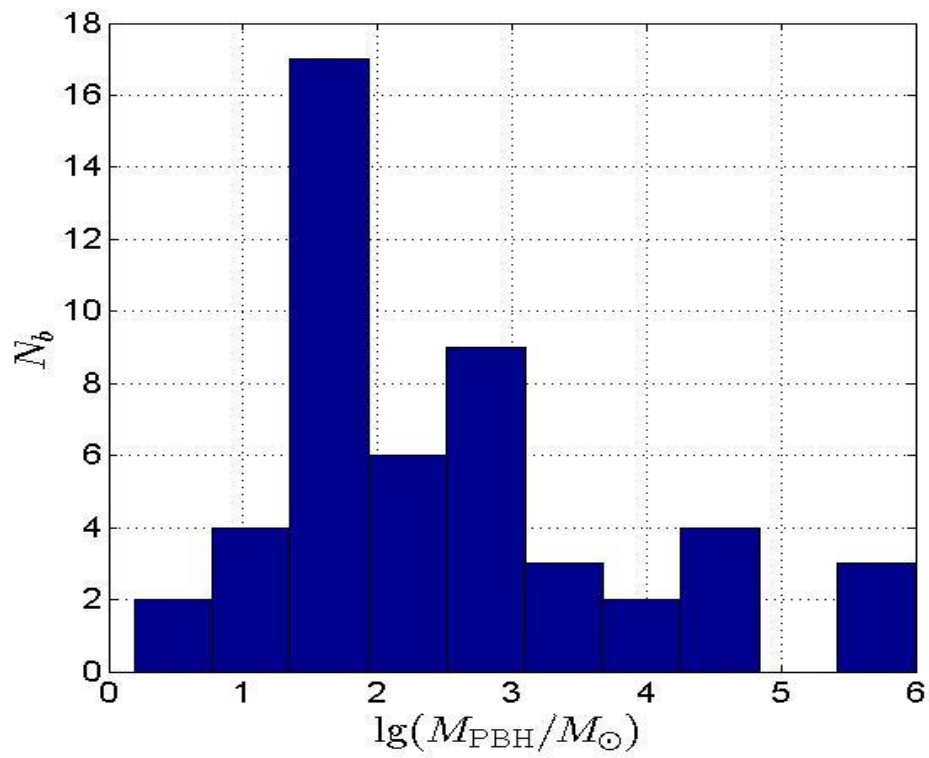
$R$  [пк] – радиус кластера;

$\tau_{\text{хар}}$ [с] – характерное время изменения количества ЧД (время образования стабильного кластера);

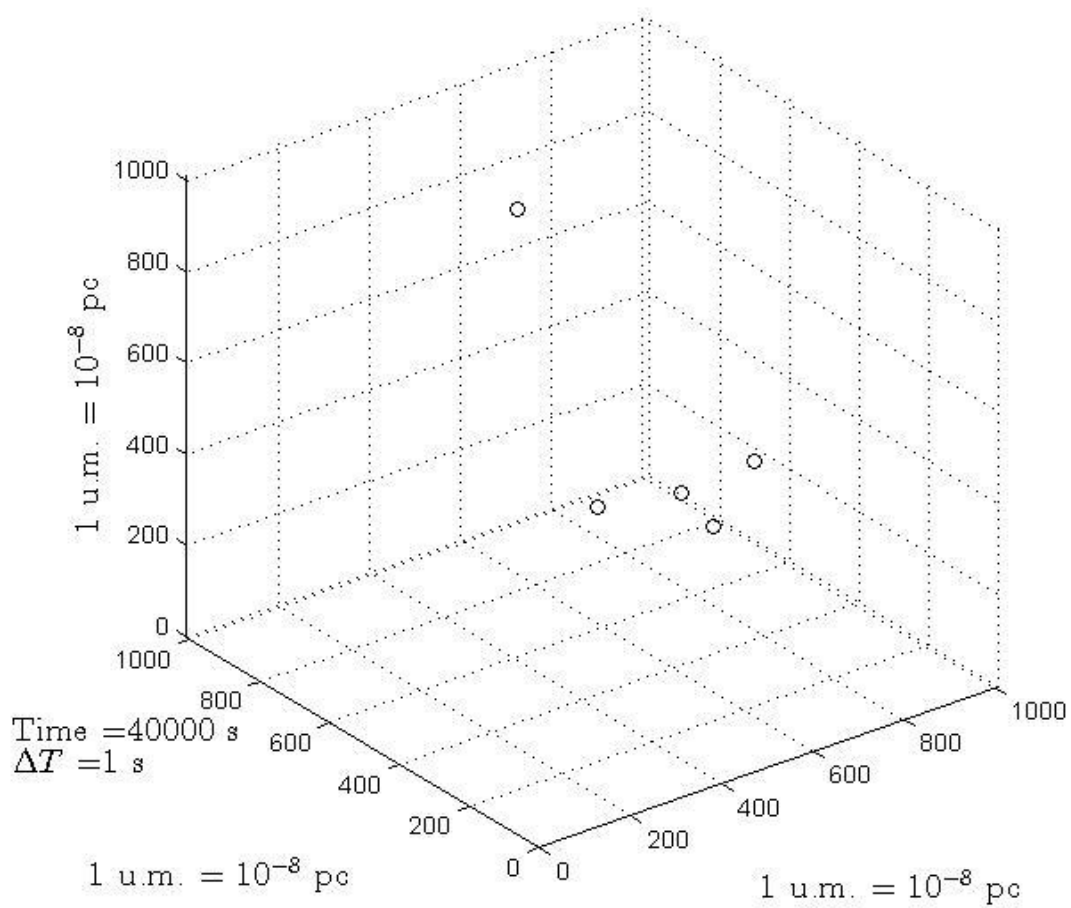
$N$  – число разыгрываемых ПЧД.



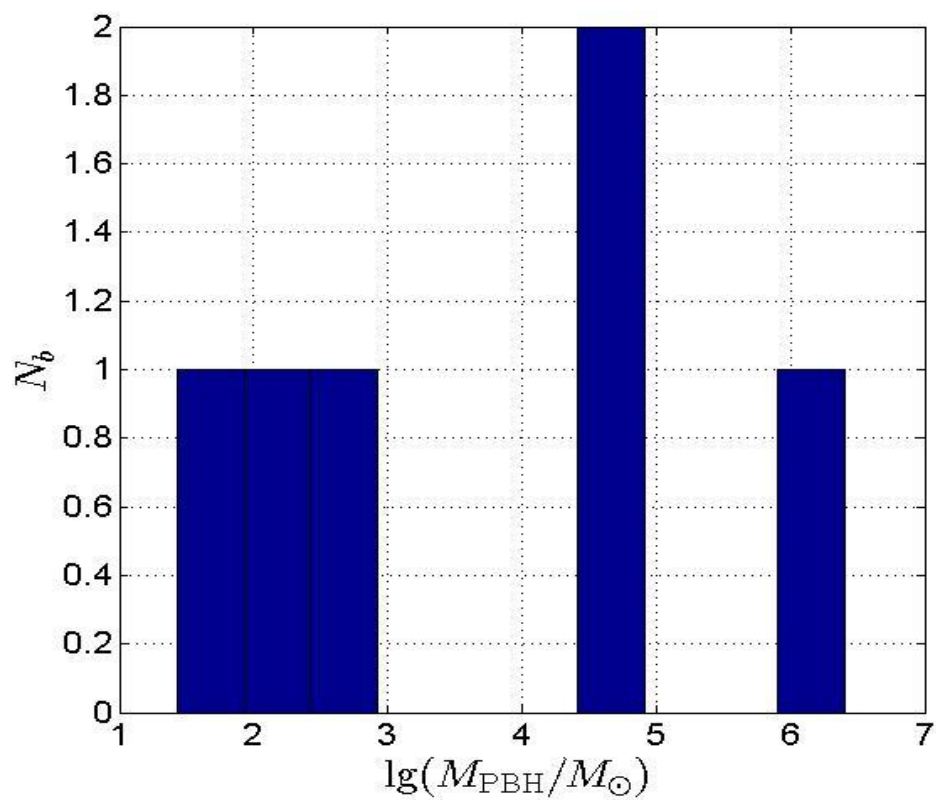
**Рис. 6.1.** Начальное пространственное распределение ПЧД.



**Рис. 6.2.** Начальное распределение масс ПЧД в кластере.



**Рис.7.1.** Положение ПЧД в пространстве в конечный момент времени.



**Рис. 7.2.** Конечное распределение масс ПЧД в кластере.

## Заключение

В рамках модели кластера первичных черных дыр (ПЧД) рассматривался процесс эволюции этого кластера. Проводилось моделирование эволюции этого кластера для случая 50 ПЧД и различных их пространственных и массовых распределений. Получены конечные массовые спектры ПЧД для различных параметров. Была произведена оценка времени образования стабильного кластера в зависимости от суммарной массы кластера, оказалось, что это время не превышает 2-х дней для всех рассматриваемых случаев. Исходя из полученных результатов можно сделать вывод, что образование кластера имеет однотипный характер: во всех разыгранных нами случаях образуются центральная массивная ЧД, поглощающая основную часть маломассивных ЧД, и черные дыры промежуточных (между центральной и маломассивными) масс обращающихся вокруг неё. Отдельно стоит заметить, что вылет в результате многочастичного взаимодействия оказывается не существенным для разыгранного числа частиц.

Полученный результат показал на качественном уровне, что действительно образуется стабильный кластер, что позволяет переходить к моделированию эволюции кластеров с большим числом ПЧД и учётом более тонких физических эффектов (излучение гравитационных волн, сложные пространственное и массовое распределения ПЧД в кластере, и т.п.). В дальнейшем планируется учёт отмеченных эффектов совместно с переходом к большему числу ПЧД при моделировании, а также использование существующих программных пакетов по задаче N-тел (например [29-30]).

## Список литературы

- [1] D. Rosenberg, J. Rutgers, «Galaxy formation: Was there a big bang shell?», arXiv: astro-ph/0012023.
- [2] S. Veilleux, «The starburst — AGN connection», arXiv: astro-ph/001212.
- [3] M. Stiavelli, «Violent relaxation around a massive black hole», arXiv: astro-ph/9801021.
- [4] M. Merrifield, D. Forbes, A. Terlevich, «The black hole mass — galaxy age relation», arXiv: astro-ph/0002350.
- [5] S. Rubin, M. Khlopov, A. Sakharov, «Primordial black holes from nonequilibrium second order phase transition», Grav. Cosmol. S. 6 (2000) 51.
- [6] С. Рубин, А. Сахаров, М. Хлопов, «Образование первичных ядер галактик при фазовых переходах в ранней вселенной», ЖЭТФ 91 (2001) 921.
- [7] M. Y. Khlopov, S. G. Rubin, A. S. Sakharov, «Primordial structure of massive black hole clusters», Astropart. Phys. 23 (2005) 265–277; arXiv: astro-ph/0401532.
- [8] V.I. Dokuchaev, Y.N. Eroshenko, S.G. Rubin, «Quasars formation around clusters of primordial black holes», Grav. Cosmol. 11 (2005) 99–104; arXiv: astro-ph/0412418.
- [9] Linhua Jiang et al., «The final SDSS high-redshift quasar sample of 52 quasars at  $Z > 5.7$ », (2016); arXiv: astro-ph.GA/1610.05369.
- [10] K. M. Belotsky et al., «Signatures of primordial black hole dark matter», Mod. Phys. Lett. A 29 (2014) 1440005.
- [11] K. M. Belotsky, A. A. Kirillov, N. O. Nazarova, S. G. Rubin, «Reionization effect enhancement due to primordial black holes», International Journal of Modern Physics D 26 (2017) 1750102; arXiv: astro-ph.CO/1702.06338
- [12] Bernard Carr, Florian Kuhnel, Marit Sandstad, «Primordial Black Holes as Dark Matter», Phys. Rev. D 94, 083504 (2016); arXiv: astro-ph.CO/1607.06077

- [13] К. М. Белоцкий, А. А. Кириллов, С. Г. Рубин, «Скопления первичных черных дыр и проблема реионизации», Ядерная физика 78 (2015) 417–422.
- [14] K. M. Belotsky, A. A. Kirillov, «Primordial black holes with mass  $10^{16}$ – $10^{17}$  g and reionization of the Universe», JCAP 01 (2015) 041; arXiv: astro-ph.CO/1409.8601.
- [15] LIGO Collaboration, «GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence», Phys. Rev. Lett. 116 (2016) 241103.
- [16] LIGO Collaboration, « Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger», Phys. Rev. Lett. 116 (2016) 061102.
- [17] LIGO Collaboration, « Observation of a 50-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence at Redshift 0.2», Phys. Rev. Lett. 118 (2017) 221101
- [18] The American Astronomical Society, «The third egret catalog of high-energy gamma-ray sources», The Astrophysical Journal Supplement Series, Volume 123, Issue 1, pp. 79-202.
- [19] K. M. Belotsky, et al., «Clusters of black holes as point-like gamma ray sources», Astropart. Phys. 35 (2011) 28–32.
- [20] V. I. Dokuchaev, et al., «Mechanism for the Suppression of Intermediate-Mass Black Holes», arXiv: astro-ph.CO/1010.5325.
- [21] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т II. Теория поля. — М.:ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 536 с.
- [22] Владимиров Ю.С. Классическая теория гравитации: Учебное пособие. — М.:КНИЖНЫЙ ДОМ «ЛИБРОКОМ», 2009. — 264 с.
- [23] А. П. Маркеев, «Задача трёх тел и её точные решения», Соросовский образовательный журнал 9 (1999) 112.
- [24] A. Ahmad, L. Cohen, «A Numerical Integration Scheme for the N-Body Gravitational Problem», Journal of computational physics 12 (1973) 389-402.
- [25] R. Wielen, Veroeffentlichungen Astr. Rechen-Institut Heidelberg Nr. 19 (1967).

- [26] S. J. Aarseth, F. Hoyle, *Astrophysica Norwegica* 29 (1964) 313.
- [27] A. Hayli, *Bulletin Astronomique* 2 (1967) 67.
- [28] M. Lecar, C. C. Gonzalez, «*Bulletin Astronomique*» (1968) 209
- [29] Long Wang, et al., «NBODY6++GPU: Ready for the gravitational million-body problem», *MNRAS* 450 (2015) 4070-4080
- [30] Volker Springel (MPA), «The cosmological simulation code GADGET-2», [arXiv:astro-ph/0505010](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0505010).