محمدمهدی نظری - ۹۹۳۱۰۷۱

۱) a)

$N = 3$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$\rightarrow a_0 = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{2} x[n] = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow a_1 = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{2} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{3}n} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\left(e^{-j\frac{2\pi}{3}} + e^{-j\frac{4\pi}{3}}\right)\right)$$

$$\rightarrow a_2 = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{2} x[n] e^{-j\frac{4\pi}{3}n} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\left(e^{-j\frac{4\pi}{3}} + e^{-j\frac{8\pi}{3}}\right)\right)$$

چون ضرایب فوریه متناوبند نیاز به محاسبه بقیه نداریم. بصورت کلی داریم:

$$a_{3k} = a_0 \quad , \quad a_{3k+1} = a_1 \quad , \quad a_{3k+2} = a_2 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

b)

$N = 5$

$$a_0 = \frac{1}{5} \sum_{n=-3}^{1} x[n] = \frac{1}{5}\left(0+0+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5}$$

$$a_1 = \frac{1}{5} \sum_{n=-3}^{1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{5}n} = \frac{1}{5}\left(0+0+\frac{1}{2}e^{+j\frac{2\pi}{5}} + 1 + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{5}}\right)$$

$$a_2 = \frac{1}{5} \sum_{n=-3}^{1} x[n] e^{-j\frac{4\pi}{5}n} = \frac{1}{5}\left(0+0+\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{4\pi}{5}} + e^{-j\frac{4\pi}{5}}\right) + 1\right)$$

محمدمهدی نظری - ۹۹۳۱۰۸۱

$$a_3 = \frac{1}{5}\left(0+0+\frac{1}{2}\left(e^{+j\frac{6\pi}{5}} + e^{-j\frac{6\pi}{5}}\right)+1\right)$$

$$a_4 = \frac{1}{5}\left(0+0+\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{8\pi}{5}} + e^{-j\frac{8\pi}{5}}\right)+1\right)$$

$$a_{5k} = a_0 \ , \quad a_{5k+1} = a_1 \ , \quad a_{5k+2} = a_2 \ , \quad a_{5k+3} = a_3$$

$$, \ a_{5k+4} = a_4 \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

۳) اگر ضرایب فوریه $y[n]$ را b_k بنامیم، طبق مراحل زیر داریم:

$$x[n] \xrightarrow{\text{جابجایی زمانی}} x[n+1] \xrightarrow{\text{وارونی زمانی}} x[-n+1] = y[n]$$

$$b_k = a_{-k}\, e^{-jk\frac{2\pi}{4}}$$

$$b_0 = a_0 = a_8 = -1 = b_{4k}$$

$$b_2 = a_{-2}\, e^{-j\pi} = +e^{j\pi} = b_{4k+2}$$

$$b_{-9} = a_{+9}\, e^{+j\frac{9\pi}{2}} = a_5\, e^{+j\frac{9\pi}{2}} = -j\, e^{+j\frac{9\pi}{2}} = b_{4k+3}$$

محمدحسین مطری - ۹۹۳۱۰۶۱

$$a_k = \frac{1}{4} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\frac{\pi}{2}n}$$

$$b_k = \frac{1}{4} \sum_{n=\langle N \rangle} x[1-n] e^{-jk\frac{\pi}{2}n} \xrightarrow{m=1-n}$$

$$b_k = \frac{1}{4} \sum_{m=\langle N \rangle} x[m] e^{-jk\frac{\pi}{2}(1-m)} = e^{-jk\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \sum_{m=\langle N \rangle} x[m] e^{-jk\frac{\pi}{2}-m}$$

$$b_k = e^{-jk\frac{\pi}{2}} a_{-k}$$

برای بدست آوردن a_{4k+3} که رابطه مستقیم با b_{4k+1} دارد از تساوی زیر استفاده می کنیم

$$y[n] = x[1-n] \xrightarrow{n=0} y[1] = x[0]$$

$$\sum_{k=0}^{3} b_k e^{jk\frac{\pi}{2}} = \sum_{k=0}^{3} a_k \rightarrow$$

$$b_0 + b_1 e^{j\frac{\pi}{2}} + b_2 e^{j\pi} + b_3 e^{j\frac{3\pi}{2}} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

$$-1 + b_1 e^{j\frac{\pi}{2}} + \underbrace{e^{j2\pi}}_{1} - j \underbrace{e^{4\pi}}_{1} = -1 - j + 1 + a_3$$

$$\rightarrow b_1 e^{j\frac{\pi}{2}} = a_3 \rightarrow \underline{b_{4k+1} = e^{-j\frac{\pi}{2}} a_{4k+3}}$$

محمدمهدی نظری - ۹۹۳۱۰۷۱

طبق حدس می‌توان گفت $a_{4k+3} = j$ و $b_{4k+1} = e^{-j\pi/4} j$

اثبات: چون سیگنال $x[n]$ حقیقی است پس:

$$Re\{a_{-3}\} = Re\{a_3\} = 0$$

$$-Im\{a_{-3}\} = Im\{a_3\} = +1$$

$$\Rightarrow \quad a_3 = 0 + j = a_{4k+3}$$

محمدحسین مطهری - ۹۹۳۱۰۶۱

(۴)

a- پس a_k هم زوج حقیقی است

b- $a_{k+5} = a_k$

c- $\sum_{k=<N>} |a_k|^2 = 5$

چگونه تعداد دوره تناوب ۵ است پس بازه a_k های ممکن $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ است.

e- نتیجه می‌شود که $a_{-7} = a_{-2} > 0$ و طبق a چون زوج است و طبق بازه c

پس $a_{-2} = a_2 = 1$ در این صورت باید آنگاه a_1, a_0, a_{-1} فقط مقادیر $\{1, -1\}$

را می‌توانند داشته باشند.

d- قید $(-1)^{2n/5}$ همیشه ۱ می‌شود پس $\sum_{n=<N>} x[n] = 5$

حل ابتدا a_{-2} و a_2 مشخص شد، در این قسمت روابط زیر را بدست می‌آوریم و دوباره شروط a - e

را چک می‌کنیم، اگر $x[-2] = x[2] = x_0$ ، $x[-1] = x[1] = y$ و

$x[0] = z$

محمدحسین نظری - ۹۹۳۱۰۷۱

$$۲x^۲ + ۲y^۲ + z^۲ = ۲۵$$

$$۲x + ۲y + z = ۵$$

$$a_{-۲} = ۱ = \frac{۱}{۵} \sum_{n=-۲}^{۲} x[n] e^{j\frac{۴\pi}{۵}n}$$

$$a_{۲} = ۱ = \frac{۱}{۵} \sum_{n=-۲}^{۲} x[n] e^{-j\frac{۴\pi}{۵}n}$$

$$\rightarrow ۵ = x[-۲] e^{j-\frac{۸\pi}{۵}} + x[-۱] e^{j-\frac{۴\pi}{۵}} + x[۰]$$

$$+ x[۱] e^{j\frac{۴\pi}{۵}} + x[۲] e^{j\frac{۸\pi}{۵}}$$

$$\xrightarrow{\text{طبق } d} ۵ = x[-۲] + x[-۱] + x[۰] + x[۱] + x[۲]$$

$$\xrightarrow{\text{طبق } a} ۵ = ۲x[۲] + ۲x[۱] + x[۰]$$

$$\rightarrow a_{-۱} = \frac{۱}{۵} \sum_{n=-۲}^{۲} x[n] e^{+j\frac{۲\pi}{۵}n} = \frac{۱}{۵}\Big(x[-۲] e^{-j\frac{۴\pi}{۵}} + x[-۱] e^{-j\frac{۲\pi}{۵}} + x[۰]$$

$$+ x[۱] e^{j\frac{۲\pi}{۵}} + x[۲] e^{j\frac{۴\pi}{۵}} \Big) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(x[2]\left(e^{-j\frac{4\pi}{5}} + e^{j\frac{4\pi}{5}}\right) + x[1]\left(e^{-j\frac{2\pi}{5}} + e^{j\frac{2\pi}{5}}\right) + x[0]\right.$$

$$= \frac{1}{5}\left(x[2]\left(2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right) + x[1]\left(2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) + x[0]\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{5}\sum_{n=-2}^{2} x[n] = \frac{1}{5}\left(x[-2] + x[-1] + x[0] + x[1] + x[2]\right)$$

$$\xrightarrow{\text{طبق } d} \quad \underline{a_0 = 1}$$

طبق رابطه بازگشته از a_0 و a_{-1} چون با $\frac{1}{5}\left(\sum_{n=\langle 5\rangle} x[n]\right)$ برابر نیست مقدار آن -1 است. حال با تمام فرض‌ها سری فوریه را می‌نویسیم

$$a_{-2} = a_2 = a_0 = 1 \quad \text{و} \quad a_{-1} = a_1 = -1$$

حال:

$$x[-2] = \sum_{k=-2}^{2} a_k e^{-jk\frac{4\pi}{5}} = e^{j\frac{8\pi}{5}} - e^{j\frac{4\pi}{5}} + 1 - e^{-j\frac{4\pi}{5}} + e^{-j\frac{8\pi}{5}}$$

$$= 2\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) - 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1$$

$$x[-1] = \sum_{k=-2}^{2} a_k e^{-jk\frac{2\pi}{5}} = e^{j\frac{4\pi}{5}} - e^{j\frac{2\pi}{5}} + 1 - e^{-j\frac{2\pi}{5}} + e^{-j\frac{4\pi}{5}}$$

$$= 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 1$$

$$x[0] = 1$$

$$x[1] = \sum_{k=-2}^{2} a_k e^{jk\frac{2\pi}{5}} = e^{-j\frac{4\pi}{5}} - e^{-j\frac{2\pi}{5}} + 1 - e^{j\frac{2\pi}{5}} + e^{j\frac{4\pi}{5}}$$

$$= 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 1$$

$$x[2] = \sum_{k=-2}^{2} a_k e^{jk\frac{4\pi}{5}} = e^{-j\frac{8\pi}{5}} - e^{-j\frac{4\pi}{5}} + 1 - e^{j\frac{4\pi}{5}} + e^{j\frac{8\pi}{5}}$$

$$= 2\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) - 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1$$

در حالت کلی:

$$x[n] = 2\cos\left(2 \times \frac{2\pi|n|}{5}\right) - 2\cos\left(\frac{2\pi|n|}{5}\right) + 1$$

محمدمهدی مطهری - ۹۹۳۱۰۷۱

۵) ضریب فوریه $(-1)^n$ با دوره تناوب $N=2$ بصورت

$$a_0 = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{1}(-1)^n = 1/2\,(1-1) = 0$$

$$a_1 = 1/2\sum_{n=0}^{1}(-1)^n e^{-j\pi n} = 1/2\left(1 - e^{-j\pi}\right)$$

است - بصورت کلی

$$a_{2K} = 0 \quad , \quad a_{2K+1} = 1/2\left(1 - e^{-j\pi}\right)$$

سری فوریه a_n هم برابر $\left(N = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6\right)$

$$\frac{1}{4}\cos\left(-\pi/3\, n\right) + 1/4$$

حال سیگنال $y[n]$ ترکیب خطی دو سیگنال بالاست و دوره تناوب مشترک دو سیگنال $[2,6]=6$ است. پس سری فوریه حاصل:

$$\begin{cases} a_{2K} = 1/4\cos\left(-\pi/3\, n\right) + 1/4 \\ a_{2K+1} = 1/4\cos\left(-\pi/3\, n\right) + 1/4 + 1/2\left(1 - e^{-j\pi}\right) \end{cases}$$