محمدمهدی نظری - ۹۹۳۱۰۴۱

①

a) e^{-t} : $E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-t}|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t} dt = \left[\frac{-e^{-2t}}{2}\right]_{-\infty}^{+\infty}$

$= \infty$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} |e^{-t}|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} e^{-2t} dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{\left[\frac{-e^{-2t}}{2}\right]_{-T}^{+T}}{2T} = \lim_{T\to\infty} \frac{e^{2T} - e^{-2T}}{4T} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\xrightarrow{Hop} \lim_{T\to\infty} \frac{2e^{2T} + 2e^{-2T}}{4} = \infty$$

b) $e^{-t}u(t)$: $E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-t}u(t)|^2 dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-2t} dt$

$= \left[\frac{-e^{-2t}}{2}\right]_{0}^{+\infty} = 1/2$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} |e^{-t}u(t)|^2\, dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{0}^{+T} e^{-2t}\, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{\left[\frac{-e^{-2t}}{2}\right]_0^{+T}}{2T} = \lim_{T\to\infty}\frac{\frac{-e^{-2T}}{2}+\frac{1}{2}}{2T} = \frac{1/2}{\infty} = 0$$

②

a) $e^{j[3\pi/2]} \longrightarrow N = \frac{2k\pi}{3/2} = \frac{4k\pi}{3} \in N \longrightarrow k \notin N$ (۱

متناوب نیست

اگر پیوسته باشد با $T_0 = \frac{4\pi}{3}$ متناوب است.

b) $\underbrace{\left|\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)\right|}_{①} + \underbrace{\cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right)}_{②}$

① $\longrightarrow$ می‌دانیم قدر مطلق دوره تناوب توابع سینوسی و کسینوسی را نصف می‌کند

$T = \frac{2\pi}{2\pi/3} = 3 \longrightarrow T_0 = 1.5$ و $N_0 = 3$

② $\longrightarrow T_0 = \frac{2\pi}{4\pi/3} = 1.5$

دوره تناوب تابع کل $x(t)$ برابر است پس $\underline{T_0 = 1.5}$

اگر تابع گسسته باشد دوره تناوب آن $\underline{N_0 = 3}$ می‌شود

c) $\underbrace{e^{j\frac{\pi}{3}n}}_{①} + \underbrace{e^{j\frac{4\pi}{3}n}}_{②}$

$① \longrightarrow N = \frac{2k\pi}{\pi/3} = 6k \xrightarrow{k=1} N_0 = 6$

$② \longrightarrow N = \frac{2k\pi}{4\pi/3} = \frac{3}{2}k \xrightarrow{k=2} N_0 = 3$

دوره تناوب کل برابر با $\underline{N_0 = 6}$ است.

اگر سیگنال پیوسته بود $\underline{T_0 = 6}$ می‌بود.

d) $\underbrace{\cos(9t)}_{①} + \underbrace{\sin(2\pi t)}_{②}$

$① \longrightarrow T_0 = \frac{2\pi}{9}$, درحالت گسسته متناوب نیست

$② \longrightarrow T_0 = N_0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

$T_0 = [1, \frac{2\pi}{9}] = ?$ حتی درحالت گسسته متناوب نیست درحالت پیوسته

هم متناوب نیست چونکه ک.م.م برای دو عدد گنگ و گویا وجود ندار

۳

برای اثبات ابتدا باید ثابت کنیم که هر سیگنال $f(t)$ را می‌توان بصورت مجموع دو سیگنال دیگر به شکل $f(t) = h(t) + g(t)$ نوشت به شرط اینکه

$$h(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2} \quad , \quad g(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}$$

$$h(t) + g(t) = \frac{f(t) - f(-t) + f(t) + f(-t)}{2} = \frac{2f(t)}{2} = f(t)$$

حال که ثابت کردیم هر سیگنال $f(t)$ را می‌توان بصورت جمع دو سیگنال $g(t)$ و $h(t)$ نوشت، حال باید ثابت کنیم $g(t)$ و $h(t)$ زوج و فرد هستند. می‌دانیم شرط زوج بودن سیگنال $g(t) = g(-t)$ و شرط فرد بودن سیگنال $h(t) = -h(-t)$ است.

$$g(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} = \frac{f(-(-t)) + f(-t)}{2} = g(-t)$$

با بازنویسی داخل سیگنال به شکل بالا متوجه می‌شویم که اگر ورودی سیگنال قرینه شود پس $g(t) = g(-t)$ و $g(t)$ یک سیگنال زوج است.

$$h(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2} = -\left(\frac{-f(t) + f(-t)}{2}\right) = -\left(\frac{-f(-(-t)) + f(-t)}{2}\right)$$

دقیقا همانند $g(t)$ در $h(t)$ با بازنویسی سیگنال متوجه می‌شویم که سیگنال با $-h(-t)$ برابر است پس $h(t)$ فرد است. پس $f(t)$ مجموع یک سیگنال فرد و زوج است پس هر سیگنالی از مجموع یک سیگنال زوج ($g(t)$) و یک سیگنال فرد ($h(t)$) تشکیل شده است.

۵

a) $\int_{۱}^{۳} \sin(t)\, \delta(۲t-۴)\, dt$

① $\delta(۲t-۴) = \frac{۱}{|۲|} \delta(t-۲) = \frac{۱}{۲} \delta(t-۲)$

② $\sin(t)\, \delta(t-۲) = \sin(۲)\, \delta(t-۲)$

$\rightarrow \int_{۱}^{۳} \frac{۱}{۲} \sin(۲)\, \delta(t-۲)\, dt \xrightarrow[dt = du]{t-۲ = u}$

$\frac{۱}{۲} \sin(۲) \int_{-۱}^{۱} \delta(u)\, du = \frac{۱}{۲} \sin(۲)$

b) $۳(\delta[t+۳] - \delta[t-۳]) + ۲(\delta[t+۲] - \delta[t-۲])$

$+ \delta[t+۱] - \delta[t-۱] = y[n]$

a)

حافظه‌دار نه : خروجی سیستم به سیگنال‌های آینده ورودی بستگی دارد.

غیرعلی : خروجی سیستم به سیگنال‌های ورودی آینده بستگی دارد.

پایدار : اگر $x[n]$ کراندار باشد، $x[n+1]$ هم کراندار است و در نتیجه $y[n]$ که حاصل تفریق دو کراندار است، کراندار می‌شود.

خطی : با فرض‌های زیر مسئله را حل می‌کنیم

$$y_1[n] = x_1[n+1] - x_1[n] \quad , \quad y_2[n] = x_2[n+1] - x_2[n]$$

$$y_3[n] = x_3[n+1] - x_1[n] \quad ; \quad x_3[n] = a x_1[n] + b x_2[n]$$

$$y_3[n] = x_3[n+1] - x_3[n] = a x_1[n+1] + b x_2[n+1]$$

$$= - (a x_1[n] + b x_2[n]) = a(x_1[n+1] - x_1[n])$$

$$+ b(x_2[n+1] - x_2[n]) = a y_1[n] + b y_2[n]$$

تغییرناپذیر با زمان :

$$y_1[n] = x_1[n+1] - x_1[n]$$

$$x_4[n] = x[n-n_0] \longrightarrow y_1[n] = x[n-n_0+1]$$

$$- x[n-n_0] = y[n-n_0]$$

b)

حافظه دار و علّی: خروجی سیگنال به سیگنال ورودی و سیگنال های قبلی بستگی دارد

پایدار: اگر $x[n]$ کراندار باشد آنگاه $\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ مجموع تعدادی عدد کراندار است

پس حاصل هم کراندار است.

خطی:

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k] \quad , \quad y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k]$$

$$y_3[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_3[k] \quad , \quad x_3[n] = a x_1[n] + b x_2[n]$$

$$y_3[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_3[k] = \sum_{k=-\infty}^{n} \left(a x_1[k] + b x_2[k]\right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{n} a x_1[k] + \sum_{k=-\infty}^{n} b x_2[k]$$

$$= a \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k] + b \sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k] = a y_1[n] + b y_2[n]$$

تغییرناپذیر با زمان:

$$y_4[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_4[k] \quad , \quad y[n-n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k]$$

$$x_4[k] = x[k-n_0] \longrightarrow y_4[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k-n_0]$$

طبق قوانین سیگما می‌دانیم

$$\sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k] = \sum_{k=-\infty+n_0}^{n-n_0+n_0} x[k-n_0] \xrightarrow{-\infty+n_0 = -\infty} \sum_{k=-\infty}^{n} x[k-n_0]$$

$$\longrightarrow y[n-n_0] = y_4[n]$$

c)

بدون حافظه و علی : خروجی فقط به سیگنال حال بستگی دارد.

پایدار : از $t<-5$ به مقدار آن ۰ و از $t \geq -5$ مقدار آن همان $x(t)$ است پس اگر $x(t)$ پایدار و کراندار باشد، $y(t)$ هم پایدار و کراندار است.

خطی :

$$y_1(t) = x_1(t)\, u(t+5) \quad , \quad x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t)$$

$$y_2(t) = x_2(t)\, u(t+5)$$

$$y_3(t) = x_3(t)\, u(t+5) = \left(a x_1(t) + b x_2(t)\right) u(t+5)$$

$$= a x_1(t)\, u(t+5) + b x_2(t)\, u(t+5) = a y_1(t) + b y_2(t)$$

تغییرپذیر با زمان :

$$y_4(t) = x_4(t)\, u(t+5) \quad , \quad y(t-t_0) = x(t-t_0)\, u(t-t_0+5)$$

$$x_4(t) = x(t-t_0) \longrightarrow y_4(t) = x(t-t_0)\, u(t+5)$$

$$\neq y(t-t_0)$$

d)

حافظه‌دار و علّی: خروجی به سیگنال ورودی حال و گذشته بستگی دارد.

پایدار: اگر $x[n]$ پایدار و کراندار باشد، $y[n]$ حاصل مجموع تعداد محدودی عدد کراندار است

پس جواب هم کراندار است

خطی:

$$y_1[n] = \sum_{k=m}^{n} x_1[k] \quad , \quad y_2[n] = \sum_{k=m}^{n} x_2[k]$$

$$y_2[n] = \sum_{k=m}^{n} x_2[k] \quad , \quad x_3[k] = a x_1[k] + b x_2[k]$$

$$y_3[n] = \sum_{k=m}^{n} \left(a x_1[k] + b x_2[k] \right) =$$

$$\sum_{k=m}^{n} a x_1[k] + \sum_{k=m}^{n} b x_2[k] = a \sum_{k=m}^{n} x_1[k] + b \sum_{k=m}^{n} x_2[k]$$

$$= a y_1[n] + b y_2[n]$$

تغییرپذیر با زمان:

$$y_4[n] = \sum_{k=m}^{n} x_4[k] \quad , \quad y[n-n_0] = \sum_{k=m}^{n-n_0} x[k]$$

$$x_4[k] = x[k-n_0] \longrightarrow y_4[n] = \sum_{k=m}^{n} x[k-n_0]$$

مشاهده می‌کنیم:

$$y[n-n_0] \neq y_4[n]$$