محمدمهدی نظری - ۹۹۳۱۰۹۱

① حالت عادی

حافظه دار: مقادیر خروجی به مقادیر سیگنال ورودی در آینده بستگی دارد.

غیرعلی: " " " " " در آینده " " .

پایدار: مقدار $\cos^2(\omega t)$ کراندار است و اگر $x(t)$ پایدار باشد، آنگاه حاصلضرب دو کراندار مقداری کراندار است

$$|x(t)| < \beta \longrightarrow \left| x(t+1) \cos^2(\omega t) \right| = |x(t+1)| \, |\cos^2(\omega t)|$$

$$\longrightarrow |\cos^2(\omega t)| < 1 \longrightarrow |x(t+1) \cos^2(\omega t)| < 1 \times \beta$$

خطی:

$$y_1(t) = x_1(t+1) \cos^2(\omega t) \qquad x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t)$$

$$y_2(t) = x_2(t+1) \cos^2(\omega t) \qquad y_3(t) = x_3(t+1) \cos^2(\omega t) \longrightarrow$$

$$= \left(a x_1(t+1) + b x_2(t+1) \right) \cos^2(\omega t) = a x_1(t+1) \cos^2(\omega t)$$

$$+ b x_2(t+1) \cos^2(\omega t) = a y_1(t) + b y_2(t)$$

تغییرناپذیر با زمان :

$$y_1(t) = x_1(t+1)\cos^2(\omega t)$$

$$x_1(t) = x(t-t_0) \longrightarrow y_1(t) = x(t-t_0+1)\cos^2(\omega t)$$

$$\neq y(t-t_0) = x(t-t_0+1)\cos^2(\omega(t-t_0))$$

سیستم LTI نیست پس به دست آوردن خواص با پاسخ ضربه ممکن است درست نباشد.

$$h(t) = \delta(t+1)\cos^2(\omega t)$$

$$h(t) \neq k\,\delta(t) \longrightarrow$$ ✓ حافظه دار

$$t<0 \rightarrow h(t) \neq 0 \longrightarrow$$ ✓ غیرعلی

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t+1)\cos^2(\omega t)\,dt = \cos^2(-\omega) < \infty$$

$$\rightarrow$$ ✓ پایدار

۳) کافیست ثابت کنیم

$$x[n-n_0] = x[n]\,g[n_0]$$

a)

$$x[n-n_0] = (n-n_0)^2 \neq n^2 \times g(n_0)$$

ویژه نیست

b)

$$x[n-n_0] = \sin(n-n_0) \neq \sin(n) \times g(n_0)$$

ویژه نیست

c)

$$x[n-n_0] = e^{j\omega(n-n_0)} = e^{j\omega n} \times e^{j\omega -n_0} = x[n]\,g[n_0]$$

ویژه است

③ ۱۵) توابع را به شکل نمایی می‌نویسیم و سپس دوره تناوب تابع نهایی را با کمک (ک.م.م) می‌کنیم.

$$x(t) = \underbrace{1 + \cos(2\pi t)}_{x_1(t)} + \underbrace{\sin(10\pi t + \tfrac{\pi}{4})}_{x_2(t)}$$

$$= 1 + \frac{e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}}{2} + \frac{e^{j(10\pi t + \frac{\pi}{4})} - e^{-j(10\pi t + \frac{\pi}{4})}}{2j}$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \quad , \quad T_2 = \frac{2\pi}{10\pi} = \frac{1}{5}$$

$$T_0 = [\tfrac{1}{5}, 1] = 1$$

$$\rightarrow \underline{x(t)} = e^{j(0\times 2\pi)t} + \frac{1}{2} e^{j(1\times 2\pi)t} + \frac{1}{2} e^{j(-1\times 2\pi)t}$$

$$+ \left(\frac{e^{\frac{\pi}{4}j}}{2j}\right)\left(e^{j(5\times 2\pi)t}\right) - \left(\frac{e^{\frac{\pi}{4}j}}{2j}\right)\left(e^{j(-5\times 2\pi)t}\right)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{1}t}$$

حال کافی است با بررسی شباهت تابع بدست آمده با ضرایب فوریه را بدست آوریم (تابع بدست آمده همان سری فوریه است).

$$\rightarrow a_0 = 1 \; , \; a_1 = \frac{1}{2} \; , \; a_{-1} = \frac{1}{2} \; , \; a_5 = \frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{2j}$$

$$, \; a_{-5} = \frac{-e^{j\frac{\pi}{4}}}{2j} \; , \; a_k = 0 \; (k \notin \{0, \pm 1, \pm 5\})$$

ب)

$$x(t) = \sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)$$

$$= \frac{1}{2} e^{j(0\times 2)t} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{j(1\times 2)t} + e^{j(-1\times 2)t}}{2} \right)$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

حال با سری فوریه می

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{\pi}t}$$

مقایسه می کنیم

تا ضرایب فوریه را حساب کنیم

$$\rightarrow a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = a_{-1} = -\frac{1}{4}, \quad a_k = 0 \ (k \notin \{0, \pm 1\})$$

④ دوره تناوب سیگنال $T=6$ است $\longleftarrow$ $\omega = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

$$x(t) = \begin{cases} 1 , & 4<t<5 \\ 0 , & 0<t<1 \ \& \ 2<t<4 \ \& \ 5<t<6 \\ -1 , & 1<t<2 \end{cases}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t)\, e^{-jk\omega t}\, dt =$$

$$\frac{1}{6}\left(\int_1^2 -e^{-jk\omega t}\, dt + \int_4^5 e^{-jk\omega t}\, dt\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{e^{-jk\frac{\pi}{3}t}}{jk\frac{\pi}{3}}\Bigg|_1^2 - \frac{e^{-jk\frac{\pi}{3}t}}{jk\frac{\pi}{3}}\Bigg|_4^5 \right) =$$

$$= \frac{1}{2jk\pi}\left(e^{-jk\frac{2\pi}{3}} - e^{-jk\frac{\pi}{3}} - e^{-jk\frac{5\pi}{3}} + e^{-jk\frac{4\pi}{3}} \right)$$

۵) دوره تناوب $\cos(\frac{2\pi}{T}t)$ هم برابر T است و مطابق خواص $\cos(\frac{t}{T})$ می‌دانیم که ضرایب فوریه آن به شکل زیر است:

$b_1 = b_{-1} = \frac{1}{2}$, $b_k = 0$ $(k \notin \{\pm 1\})$.

حال از خاصیت ضرب استفاده می‌کنیم، اگر ضرایب فوریه $x(t)$ را a_k و $\cos(\frac{2\pi}{T}t)$ را b_k و $y(t)$ را c_k بنامیم، آنگاه:

$$c_k = b_k * a_k = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} b_l \, a_{k-l}$$

حال چون به غیر از b_1 و b_{-1} بقیه مقادیر آن صفر است، به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$c_k = b_1 a_{k-1} + b_{-1} a_{k+1} = \frac{1}{2}(a_{k-1} + a_{k+1})$$

مثلاً:

$$c_2 = \frac{1}{2}(a_1 + a_3)$$

۶) سیگنال حاصل از انتقال سیگنال اولیه به شکل $2x(t-0.5)$

بدست می آید. از روی شکل هم معلوم است که دوره تناوب برابر ۲ است. طبق

خاصیت های جابجایی زمانی و ترکیب خطی، ضرایب فوریه سیگنال حاصل

به شکل زیر است.

$$b_k = 2 \times e^{-jk\frac{2\pi}{2} \times \frac{1}{2}} \times a_k$$

$$b_k = \begin{cases} 1 , & k=0 \\ \dfrac{\left(2 e^{-j\frac{k\pi}{2}}\right)\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right)}{k\pi} , & ow \end{cases}$$