

Lab2

Дискретна Математика

ІА-31 МАКАСЄЄВА МАРІЯ, 1 КУРС, ФІОТ 126

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 2. МЕТОДИ ЛАГРАНЖА І НЬЮТОНА ДЛЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ФУНКЦІЙ

**МЕТА РОБОТИ: ОЗНАЙОМИТИСЬ З ІНТЕРПОЛЯЦІЄЮ ФУНКЦІЙ ЗА МЕТОДАМИ ЛАГРАНЖА І НЬЮТОНА;
ОЦІНИТИ ПОХИБКУ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ВКАЗАНИМИ МЕТОДАМИ.**

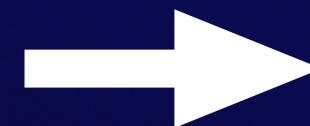
ТАСКА

Завдання

1. Використовуючи таблицю значень Y_i функції $y = f(x)$, які обчислено в точках X_i , $i=0, \dots, 3$, побудувати інтерполяційні многочлени Лагранжа та Ньютона, що проходять через точки $\{X_i, Y_i\}$ для двох діапазонів. Обчислити значення похибки інтерполяції в точці X^* .
2. Написати програму розв'язування задачі (див. свій варіант у таблиці) мовою Python усіма розглянутими вище методами.

ВАРІАНТ 17

17	$tg(x) - 5x^2 + 1 = 0, \quad x \in [-1, 1]$
----	---



РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ В АНАЛІТИЧНІЙ ФОРМІ

Лаб 2 Макаєєва Марія ІА-31

$$y = e^x + x$$

Інтерполяція Лагранжа

	0	1	2	3
x	-2	-1	0	1
y	$\frac{1}{e^2} - 2$	$\frac{1}{e} - 1$	1	$e + 1$

діапазон 1 $x^s = 0,5$

$$L_3(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

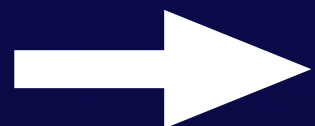
$$\left(\frac{1}{e^2} - 2\right) \frac{(x+1)(x)(x-1)}{(-1)(-2)(-3)} + \left(\frac{1}{e} - 1\right) \frac{(x+2)(x)(x-1)}{(1)(-1)(-2)} + \frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{(2)(1)(-1)} + \left(e+1\right) \frac{(x+2)(x+1)(x)}{(3)(2)(1)} =$$

$$\left(\frac{1}{e^2} - 2\right) \left(\frac{x-x^3}{6}\right) + \left(\frac{1}{e} - 1\right) \left(\frac{x^3+x^2-2x}{2}\right) - \frac{x^3+2x^2-x-2}{2} + (e+1) \left(\frac{x^3+3x^2+2x}{6}\right) = L(x)$$

$$L(0,5) = \left(\frac{1}{e^2} - 2\right) \left(\frac{0,5-0,5^3}{6}\right) + \left(\frac{1}{e} - 1\right) \left(\frac{0,5^3+0,5^2-2\cdot 0,5}{2}\right) - \frac{0,5^3+2\cdot 0,5^2-0,5-2}{2} + (e+1) \left(\frac{0,5^3+3\cdot 0,5+2\cdot 0,5}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{e^2} - 2\right) \left(\frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{e} - 1\right) \left(-\frac{5}{16}\right) + \frac{15}{16} + (e+1) \left(\frac{5}{16}\right) \approx 2,18046$$

$$f(0,5) = \sqrt{e} + 0,5 \approx 2,14872$$



Визначаємо верхню оцінку похибки

$$|f(x^*) - L_3(x^*)| \leq \frac{\max_{x \in [-2, 1]} |f^{(4)}(x)|}{4!} |(x^* - x_0)(x^* - x_1)(x^* - x_2)(x^* - x_3)|$$

$$f^{(4)}(x) = (e^x + x)^{(4)} = (e^x + 1)^{(4)} = (e^x)^{(4)} = (e^x)$$

$$\max_{x \in [-2, 1]} |f^{(4)}(x)| = \max_{x \in [-2, 1]} |e^x| = e^1 \approx 2,718 \quad 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$|f(x^*) - L_3(x^*)| = |2,14872 - 2,18046| = 0,03174$$

$$0,03174 \leq \frac{2,718}{24} |(0,5 + 2)(0,5 + 1)(0,5)(0,5 - 1)|$$

$0,03174 \leq \boxed{0,21234} \rightarrow$ істина, верхня оцінка похибки перевищує абсолютну похибку в точці $x^* = 0,5$ рівно в 7 разів

	0	1	2	3
x	-2	-1	0,2	1
y	$\frac{1}{e^2} - 2$	$\frac{1}{e} - 1$	$\sqrt{e} + 0,2$	$e + 1$

діапазон 2

$$L_3(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

$$\left(\frac{1}{e^2} - 2\right) \frac{(x+1)(x-0,2)(x-1)}{(-1)(-2-0,2)(-3)} + \left(\frac{1}{e} - 1\right) \frac{(x+2)(x-0,2)(x-1)}{(1)(-1,2)(-2)} + \left(\sqrt[5]{e} + 0,2\right) \frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{(2,2)(1,2)(0,2-1)} + (e+1) \frac{(x+2)(x+1)(x-0,2)}{(3)(2)(1-0,2)}$$

$$\left(\frac{1}{e^2} - 2\right) \left(-\frac{5x^3 - x^2 - 5x + 1}{33}\right) + \left(\frac{1}{e} - 1\right) \left(\frac{5x^3 + 4x^2 - 11x + 2}{12}\right) + \left(\sqrt[5]{e} + 0,2\right) \left(-\frac{125x^3 + 250x^2 - 125x - 250}{265}\right) + (e+1) \left(\frac{5x^3 + 14x^2 + 7x - 2}{24}\right)$$

$$\hookrightarrow L_3(x)$$

$$L_3(0,5) \approx 2,16381$$

$$|f(x^*) - L_3(x^*)| = |2,14872 - 2,16381| = 0,01509$$

$0,01509 \leq 0,01234$ Верхня оцінка похибки перевищує знач δ разів абсолютну похибку в точці $x = 0,5$



$$y = e^x + x$$

Интерполяция Ньютона

	0	1	2	3
x	-2	-1	0	1
y	$\frac{1}{e^2} - 2$	$\frac{1}{e} - 1$	1	$e + 1$

диапазон 1

$$N_4(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + f(x_0, x_1, x_2, x_3)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$f(x_0) = \frac{1}{e^2} - 2 \approx (-1,86)$$

$$f(x_0, x_1) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\frac{1}{e} - 1 - \frac{1}{e^2} + 2}{-1 + 2} = -\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} + 1 = \frac{-1 + e + e^2}{e^2} \approx 1,23$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{1 - \frac{1}{e} + 1}{0 + 1} + \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e} - 1}{0 + 2} = \frac{2 - \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e} - 1}{2} = \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{e} + \frac{1}{2}$$

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_1, x_2, x_3) - f(x_0, x_1, x_2)}{x_3 - x_0} = \frac{\frac{\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1} - f(x_0, x_1, x_2)}{x_3 - x_0} = \frac{\frac{\frac{e - 2 + \frac{1}{e}}{2} - \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{e} - \frac{1}{2}}{3} - \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{e} - \frac{1}{2}}{e - 1}$$

$$= \frac{\frac{e}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2e} - \frac{1}{2e^2}}{3} = \frac{e^3 - 3e^2 + 3e - 1}{6e^2} \approx 0,114$$

$$N_4(x) = \frac{1}{e^2} - 2 + \left(\frac{-1+e+e^2}{e^2} \right) (x+2) + \left(\frac{1-2e+e^2}{2e^2} \right) (x+2)(x+1) + \left(\frac{e^3-5e^2+4e-1}{6e^2} \right) (x+2)(x+1)(x) =$$

$$N_4(x) = \frac{1}{e^2} - 2 + \left(\frac{-1+e+e^2}{e^2} \right) (x+2) + \left(\frac{1-2e+e^2}{2e^2} \right) (x^2+3x+2) + \left(\frac{e^3-5e^2+4e-1}{6e^2} \right) (x^3+3x^2+2x) =$$

$$N(0,5) = \frac{1}{e^2} - 2 + \left(\frac{-1+e+e^2}{e^2} \right) (2,5) + \left(\frac{1-2e+e^2}{2e^2} \right) (0,5^2+1,5+2) + \left(\frac{e^3-5e^2+4e-1}{6e^2} \right) (0,5^3+3 \cdot 0,5^2+1) =$$

$$\approx 2,18046 \quad f(0,5) = \sqrt[5]{e} + 0,5 \approx 2,14872 \quad \rightarrow \text{гмору интерполяції формулюю}$$

$$N(-2) \approx -1,86466, \quad N(-1) \approx -0,632121, \quad N(1) \approx 3,11823$$

$$f(-2) = \frac{1}{e^2} - 2 \approx -1,8647, \quad f(-1) = \frac{1}{e} - 1 \approx -0,6321, \quad f(1) = e + 1 \approx 3,7183$$

	0	1	2	3
x	-2	-1	0,2	1
y	$\frac{1}{e^2} - 2$	$\frac{1}{e} - 1$	$\sqrt[5]{e} + 0,2$	$e + 1$

таблиця 2

$$N_4(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x-x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x-x_0)(x-x_1) + f(x_0, x_1, x_2, x_3)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$f(x_0) = \frac{1}{e^2} - 2 \approx (-1,86)$$

$$f(x_0, x_1) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\frac{1}{e} - 1 - \frac{1}{e^2} + 2}{-1 + 2} = -\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} + 1 = \frac{-1+e+e^2}{e^2} \approx 1,23$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{\sqrt[5]{e} + 0,2 - \frac{1}{e} + 1}{0,2 + 1} - \frac{\frac{1}{e} - 1 - \frac{1}{e^2} + 2}{-1 + 2}}{0,2 + 2} = \frac{\frac{\sqrt[5]{e} + 0,2}{1,2} - \frac{1}{1,2e} + \frac{1}{1,2} - \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} - 1}{2,2} =$$

$$= \frac{25e^2\sqrt[5]{e} - 55e + 39}{66e^2} \approx 0,217$$

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_1, x_2, x_3) - f(x_0, x_1, x_2)}{x_3 - x_0} = \frac{\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_0} =$$

$$= \frac{\frac{e+1 - \sqrt[5]{e}-0,2}{1-0,2} - \frac{\sqrt[5]{e}+0,2 - \frac{1}{e}+1}{0,2+1}}{1+1} = \frac{\frac{25e^2\sqrt[5]{e}-55e+30}{66e^2}}{2} = \frac{15e^2 - 25e\sqrt[5]{e} + 10}{264e^2} = \frac{55e^3 - 125e\sqrt[5]{e} + 110e - 40}{264e^2}$$

$$\approx 0,1207$$

$$N_4(x) = \frac{1}{e^2} - 2 + \left(-\frac{1+e+e^2}{e^2}\right)(x+2) + \left(\frac{25e^2\sqrt[5]{e}-55e+30}{66e^2}\right)(x+2)(x+1) + \left(\frac{55e^3-125e\sqrt[5]{e}+110e-40}{264e^2}\right)(x+2)(x+1)(x-0,2) =$$

$$N_4(x) = \frac{1}{e^2} - 2 + \left(-\frac{1+e+e^2}{e^2}\right)(x+2) + \left(\frac{25e^2\sqrt[5]{e}-55e+30}{66e^2}\right)(x^2+3x+2) + \left(\frac{55e^3-125e\sqrt[5]{e}+110e-40}{264e^2}\right)(x^3+2,8x^2+1,4x-0,4) =$$

$$N(0,5) = \frac{1}{e^2} - 2 + \left(-\frac{1+e+e^2}{e^2}\right)(2,5) + \left(\frac{25e^2\sqrt[5]{e}-55e+30}{66e^2}\right)(0,5^2+1,5+2) + \left(\frac{55e^3-125e\sqrt[5]{e}+110e-40}{264e^2}\right)(0,5^3+2,8\cdot 0,5^2+1,4\cdot 0,5-0,4) =$$

$$\approx 2,16857$$

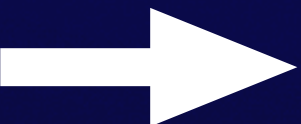
$$f(0,5) = \sqrt[5]{e} + 0,5 \approx 2,14872$$

$N(-2) \approx -1,86466$	$f(-2) = \frac{1}{e^2} - 2 \approx -1,8647$	\rightarrow γνωρίζω την επρόθεσή σου
$N(-1) \approx -0,6321$	$f(-1) = \frac{1}{e} - 1 \approx -0,6321$	
$N(1) \approx 3,71828$	$f(1) = e + 1 \approx 3,7183$	

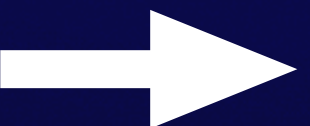
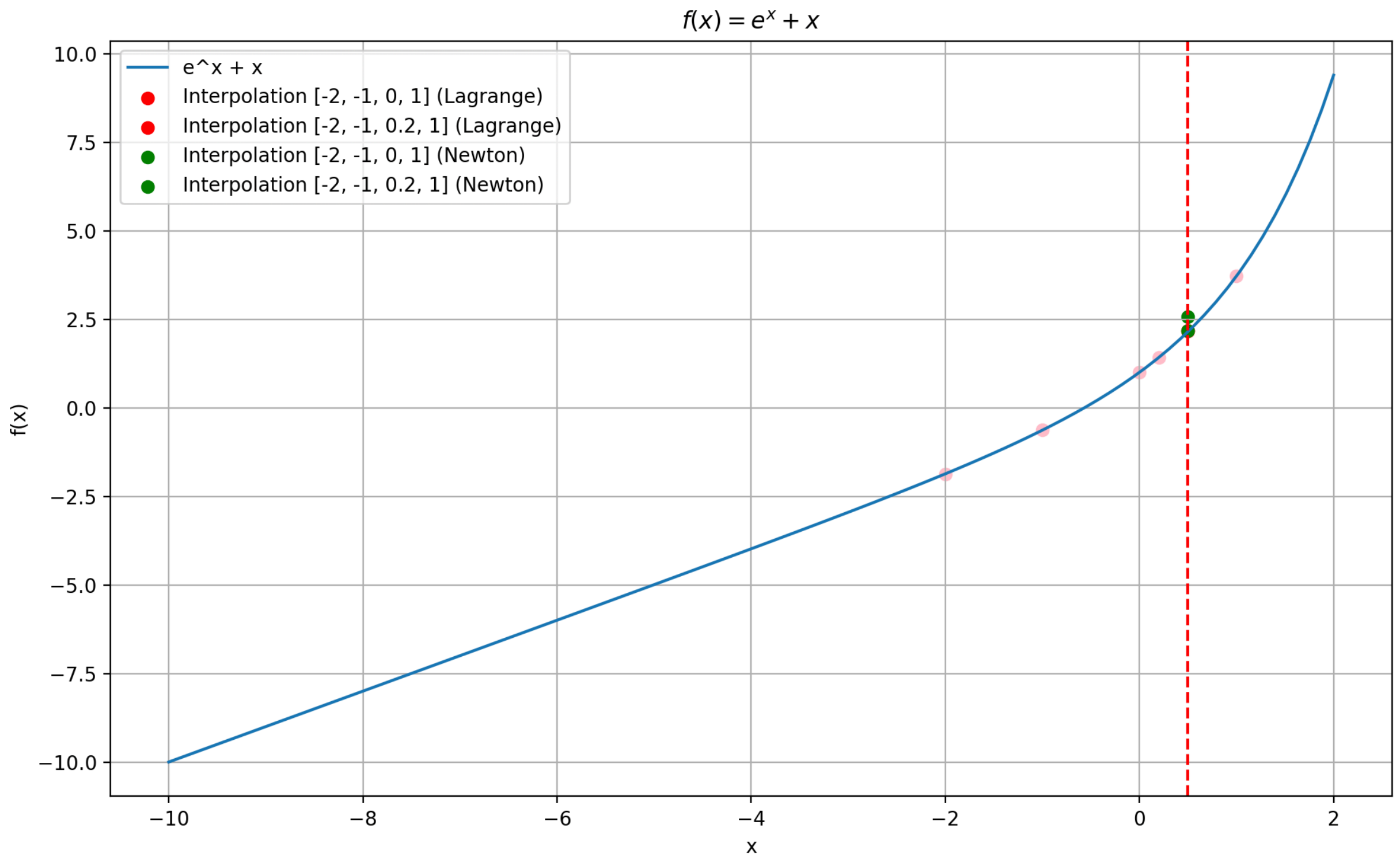
Ποσότητα interpolation error

$$① |f(x^*) - N(x^*)| = |2,14872 - 2,18046| = 0,03174$$

$$② |f(x^*) - N(x^*)| = |2,14872 - 2,16857| = 0,01985$$



ГРАФІК З ТОЧКАМИ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ (MATPLOTLIB)

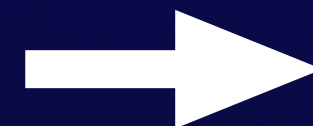


РЕЗУЛЬТАТ ПРОГРАМИ

```
- * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - *
WELCOME TO THE INTERPOLATION CALCULATOR!
- * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - *
We have the variant 17 - function is:
e^x + x
The first diapason is [-2, -1, 0, 1]
The second diapason is [-2, -1, 0.2, 1]
- * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - *
LAGRANGE INTERPOLATION
- * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - *
DEMONSTRATION OF THE LAGRANGE INTERPOLATION FOR FIRST DIAPASON
Lagrange interpolation for diapason [-2, -1, 0, 1] is 2.180459201229664
f(0.5) = 2.148721270700128
Lagrange error is 0.031737930529535774

DEMONSTRATION OF THE LAGRANGE INTERPOLATION FOR SECOND DIAPASON
Lagrange interpolation for diapason [-2, -1, 0.2, 1] is 2.168571780986745
f(0.5) = 2.148721270700128
Lagrange error is 0.019850510286616885
- * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - *
NEWTON INTERPOLATION
- * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - *
DEMONSTRATION OF THE NEWTON INTERPOLATION FOR FIRST DIAPASON
Newton interpolation for diapason [-2, -1, 0, 1] is 2.575524287004823
f(0.5) = 2.148721270700128
Newton error is 0.42680301630469497

DEMONSTRATION OF THE NEWTON INTERPOLATION FOR SECOND DIAPASON
Newton interpolation for diapason [-2, -1, 0.2, 1] is 2.168571780986745
f(0.5) = 2.148721270700128
Newton error is 0.019850510286616885
- * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - * - *
```



ВИСНОВОК

1. Було цікаво дізнатися як працює інтерполяція. Знаючи кілька точок, ми можемо знайти приблизну функцію та як вона себе потенційно поводитиме в деякому проміжку
2. Інтерполяція має багато переваг (навіть зараз її використовують в багатьох галузях так як бізнес, економія, інвестиція), але їй не вистачає достатньої точності. На практиці я помітила, як при діапазонах, які трохи відрізняються, можемо мати значущі і різні похибки.