# Factibilidade monetária de um equilíbrio geral

Marcelo Fiorelli

October 2025

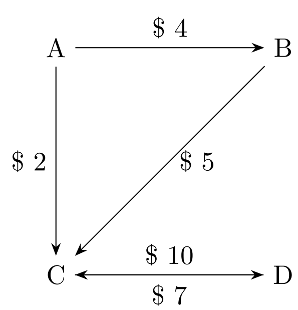
## 1 Introdução

Neste texto, eu introduzo um *framework* possível para avaliar a existência monetária de uma alocação de equilíbrio geral. Trata-se da estruturação do problema de factibilidade monetária em rede de uma economia em equilíbrio geral, um rascunho da demonstração de que um equilíbrio geral é sempre monetariamente factível, e uma possível classe de modelos novos de iliquidez e desequilíbrio.

## 2 O Problema: Matriz de Transações e Equilíbrio Geral

Em uma determinada economia, todas as transações econômicas em um período arbitrário podem ser representadas por um grafo com pesos e direcionado:

### 2.1 Transações monetárias como matriz de adjacência, dotação monetária como vetor




Se os agentes utilizam somente uma única moeda como meio de troca (i.e., o meio de pagamento legalmente determinado em um país), e se ignorarmos o lado real das transações (i.e., bens, serviços, ativos e passivos), temos a rede de transações ou a rede de fluxos de uma economia em dado período. Esse grafo pode ser representado por uma matriz de adjacência, que será chamada de matriz de transações ou matriz de fluxos.

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}
$$

Nessa matriz, a célula $a_{i,j}$ indica o valor monetário saindo do bolso do indivíduo/firma $i$ e indo para o bolso do indivíduo/firma $j$. Assim, se somarmos todos os valores da linha $i$, temos o total de saídas do caixa de $i$, e se somarmos todos os valores da linha $j$ temos o total de entradas do caixa de $j$. Por convenção, vamos estabelecer que não existe auto-transferência (auto-loop), e não existe transferência negativa (todas as entradas da matriz são positivas). Um valor $a_{i,j}$ negativo pode simplesmente ser representado por um valor $a_{j,i}$ de mesmo valor absoluto mas positivo, sem perda de coesão.

Se tivermos um vetor de dotações monetárias, podemos computar, a partir da matriz de transações, como ficam as dotações monetárias após todas as transações do período. Basta, para cada indivíduo, somar as entradas e subtrair as saídas. Assim, temos a fórmula:

$$
w_0 = (w_0^1, \cdots, w_0^n)'
$$

$$
w_1 = (\sum_{j=1}^{n} a_{j,i} - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j})_{i=1}^{n} + w_0 \tag{1}
$$

Se somarmos todas as coordenadas do vetor $w_1$ (o que inclusive seria um norma soma, nesse caso), no primeiro termo dentro do parênteses, estaríamos somando todos os valores da matriz $A$. No segundo termo, estaríamos também somando o oposto de todos os valores da matriz. Assim, a soma de todas as coordenadas de $w_1$ é igual a soma de todas as coordenadas de $w_0$. Logo, qualquer matriz de transações sempre preservará o estoque de moeda de uma economia. Essa é uma limitação clara do nosso arcabouço teórico que obrigará sua reformulação no futuro. Mas estamos justamente tentando avaliar o que acontece quando o estoque monetário é fixo. Portanto, essa é uma propriedade fundamental do nosso modelo.

Note que a matriz de transações é algo que existe no "mundo real". Esse problema de estoque monetário fixo surge pois não incluímos transações com o Banco Central nem com o Tesouro no nosso modelo. Mas a matriz de transações, por si só, existe. Evidentemente, não conseguimos observar ela, já que muitas transações acontecem em dinheiro, ou não pagam imposto, ou simplesmente por se tratar de um volume muito grande de transações que ocorrem diariamente em uma economia.

Note também que uma matriz de transações pode satisfazer a equação 1, sem ser possível realizar todas as equações de uma vez. Para conseguirmos realizar todas as transações de uma vez, precisamos que $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \leq w_0^i, \ \forall i$. Todavia, essa é uma situação irrealista para uma economia real. No geral, realizamos todas as transações possíveis em diferentes rodadas, reutilizando a mesma unidade de moeda para diferentes transações.

## 2.2 Alocação de equilíbrio e conjunto de matrizes de transação possíveis

Para cada alocação e vetor de preços de equilíbrio, existe pelo menos uma matriz de transações que a representa.

Se temos uma alocação de equilíbrio, cada indivíduo e firma apresenta uma função demanda por bens e serviços, cada indivíduo e firma apresenta uma oferta de bens e serviços, e existe um subespaço de vetores de preços $p$ tal que:

$$\sum_i x_i^l(p) = \sum_j y_j^l(p) + \sum_i e_i^l, \ \forall l \in L$$

Sendo $x_i^l(p)$ a demanda do indivíduo $i$ pelo bem $l$, $y_i^l(p)$ a oferta do bem $l$ pela firma $j$, $e_i^l$ a dotação do bem $l$ do indivíduo $i$, e $L$ o conjunto de todos os bens capazes de serem produzidos em uma economia.

Note que aqui equilibramos oferta e demanda a partir de mercados de bens homogêneos, e não a partir de transações entre indivíduos/firmas. Ou seja, um mesmo indivíduo pode saciar sua demanda pelo bem $l$ comprando tudo que deseja da firma A, ou da firma B, ou de uma combinação das duas, ou de uma combinação de todos os indivíduos e firmas que ofertam o bem $l$. Realmente, se somente uma firma ofertar o bem $l$, ou então somente um consumidor demandar o bem $l$, só há um conjunto de transações que sacia essa demanda. Agora, se tivermos $n > 1$ consumidores e $n' > 1$ ofertantes do bem $l$, teremos infinitos conjuntos de transações possíveis que equilibram o mercado do bem $l$.

Portanto, um único equilíbrio geral pode gerar infinitas possibilidades de transações monetárias. Mas cabe, finalmente, a pergunta: dada uma realização das infinitas possibilidades de matrizes de transação monetária, gerada por uma economia em equilíbrio geral, as transações monetárias dessa matriz são possíveis de serem completadas, dada uma dotação monetária exógena?

Mas ai cabe uma outra pergunta: como a moeda entra nesse modelo? Podemos incluir a moeda em um arcabouço de equilíbrio geral com fluxos monetários? Aqui, discutimos duas possibilidades: 1) Não há demanda por moeda; 2) Há demanda por moeda.

## 2.3 Factibilidade monetária de uma matriz de transações conectada e simétrica

Se considerarmos que não existe demanda por moeda, mas ela é necessária para as trocas (sem ela, as trocas não ocorrem), precisamos descobrir se dado um vetor dotação monetária não nulo se é possível realizarmos subtransações até que todas as transações delimitadas pela matriz de transações se esgotem.

Por subtransações queremos dizer que em uma rodada de trocas, os indivíduos realizam transações sem ultrapassar seu estoque monetário (ou seja, sem caixa negativo), mas também sem realizar mais trocas do que precisam. Há medida que as trocas ocorrem e as rodadas se passam, os indivíduos adquirem mais moedas em caixa e podem realizar as transações que ainda desejam realizar.

Assim, primeiro definimos uma matriz de subtransação ou subfluxo:

$$S_{t+1} := [s_{i,j}^{t+1} : (\forall(i,j), s_{i,j}^{t+1} \leq a_{i,j}^{t}) \wedge (\forall i, \sum_{j}^{n} s_{i,j}^{t+1} \leq w_t^i)]_{n\times n}$$

Ou seja, uma matriz de subtransação é uma matriz de transações possíveis dado o estoque monetário dos agentes em um subperíodo $t$ e as transações planejadas do período total. Note que $w_t$ é atualizado de acordo com o período a partir da equação:

$$w_t = (\sum_{j=1}^{n} s_{j,i}^{t} - \sum_{j=1}^{n} s_{i,j}^{t})_{i=1}^{n} + w_{t-1}$$

Portanto, queremos saber para quais matrizes de transação $A$, existe $w_0$ para o qual seja possível esgotar todas as transações a partir de uma sequência finita $\{S_k\}_{k=1}^{m}$ de subtransações.

Assim, a condição fraca de factibilidade do par $(w_0, A)$ seria: $A$ e $w_0$ são factíveis se existe $\{S_k\}_{k=1}^{m}$ tal que:

$$A = \sum_{k=1}^{m} S_k$$

Ou:

$$A - \sum_{k=1}^{m} S_k = 0$$

Sabemos que se a matriz de transferência não for fortemente conectada, temos vetores dotação não nulo para os quais a matriz de transações não é factível.

Em um problema de equilíbrio geral, temos a seguinte restrição para todo $i$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{j,i} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \tag{2}$$

Para provar isso, basta perceber que, para um equilíbrio geral com trocas puras, a restrição orçamentária deve ser satisfeita:

$$p * x^i \leq p * e^i, \ \forall i$$

Sendo $x^i$ o vetor demanda de equilíbrio do indivíduo $i$. Assim, podemos separar a restrição orçamentária em transações em que o indivíduo demanda liquidamente e oferta liquidamente:

$$p * (x_d^i - e_d^i) + p * (x_s^i - e_s^i) \leq 0$$

Sendo $c^i =: (x_d^i - e_d^i) = 0$ para as coordenadas $j$ em que $x_j^i \leq e_j^i$, e sendo $-v^i := (x_s^i - e_s^i) = 0$ para as coordenadas em que $x_j^i \geq e_j^i$. Ou seja, o primeiro termo são as compras líquidas e é positivo, e o segundo termo são as vendas líquidas e são negativos.

Assim, temos:

$$p * c^i \leq p * v^i \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \leq \sum_{j=1}^{n} a_{j,i},\ \forall i$$

Todavia, sabemos que se somarmos as desigualdades para todos os $i$, teremos a soma de todas as entradas da matriz $A$ em ambos os lados $A \leq A \Rightarrow A = A$. Isso implica que $p * c^i = p * v^i$, pois caso exista $i$ tal que $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} < \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}$, deve existir pelo menos um $i$ tal que $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} > \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}$, contradizendo nossa condição de equilíbrio.

Ou seja, as entradas devem ser iguais as saídas para todos os indivíduos. Para o caso com firmas, o problema é o mesmo, averiguando o problema da firma. A firma maximiza a seguinte função objetivo (restrita ao seu conjunto de tecnologia de produção):

$$p * y^j = p * v^j - p * c^j = \Pi^j$$

Sendo $v_j$ as vendas líquidas e $c_j$ as compras líquidas. Note que os lucros $\Pi^j$ são totalmente distribuídos para as famílias, então, por construção, existe igualdade entre as entradas e saídas na firma, desde que o lucro seja maior igual a zero (o que, pela condição de possibilidade de inação, é sempre possível em equilíbrio geral).

Já a nova restrição orcamentária da família seria:

$$p * c^i \leq p * v^i + \sum_{j} \theta^{ij} \Pi^j \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \leq \sum_{j=1}^{n} a_{j,i},\ \forall i$$

Já que os lucros das firmas também são entradas para as famílias. Assim, temos o mesmo argumento de antes: as entadas devem ser iguais as saídas de todos os indivíduos. Logo:

$$\{\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}\}_{i=1}^{n} = \{\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\}_{i=1}^{n}$$

Note que no lado esquerdo, em cada linha do vetor temos a soma dos valores na própria linha. Isso equivale a $A \times \vec{1}$, sendo $\vec{1}$ um vetor em que todas as coordenadas equivalem o número 1. No lado direito, em cada linha temos a soma dos valores das colunas correspondentes. Isso equivale a $(\vec{1}^T A)^T = A^T \vec{1}$. Portanto, temos:

$$A\vec{1} = A^T \vec{1} \Rightarrow A\vec{1} - A^T \vec{1} = 0 \Rightarrow (A - A^T)\vec{1} \Rightarrow A = A^T$$

Portanto, a matriz de transações necessariamente precisa ser simétrica nesse modelo.

Assim, temos o teorema:

**Teorema:** Dada uma matriz de transações $A$ (fortemente) conectada simétrica, temos que para qualquer dotação monetária positiva $w_0$, a matriz de transações (ou o par $(w_0, A)$) é monetariamente factível.

**Demonstração:** Antes, note que, como a matriz A é simétrica, se ela for conectada (existe um *path* entre quaisquer dois nós do grafo, ignorando sua direção), ela também necessariamente é fortemente conectada (já que a *path* de volta é sempre possível).

Supondo, sem perda de generalidade que somente um dos nós apresenta uma dotação positiva, como a matriz é fortemente conectada, podemos sempre atingir qualquer nó do grafo a partir de qualquer outro. Não só isso, mas podemos sempre fazer uma *walk* passando por todos os nós do grafo (*spanning walk*), sem se preocupar com repetições.

Dada uma *walk*, que se inicia no nó com dotação monetária passa por todos os nós e, após atingir todos os $n$ nós do grafo pelo menos uma vez, passa a fazer o exato caminho de volta, vamos mostrar que conseguimos sempre completar todas as transações se a quantidade positiva de moeda $m$ realizar essa *walk*.

Vamos analisar primeiro a ida dessa *walk*. Para as arestas que aparecem só uma vez nessa *walk*, o seu peso será o próprio valor da matriz de transações. Já para os arestas que aparecem várias vezes, se estivermos repetindo várias vezes transações entre os mesmos dois nós, então devemos dividir o valor do peso na matriz de transação de maneira que a soma dessas transações nos resulte no valor do peso, e de maneira que nenhum dos valores seja nulo. Podemos, por exemplo, dividir o peso igualmente, pelo número de vezes que passamos pela mesma aresta.

Assim, a dotação monetária no valor de $m$ realiza o trajeto. Vamos representar aqui o trajeto genérico de 4 nós:

$$\text{A} \xrightarrow{\text{a}} \text{B} \xrightarrow{\text{b}} \text{C} \xrightarrow{\text{c}} \text{D} \xrightarrow{\text{c}} \text{C'} \xrightarrow{\text{b}} \text{B'} \xrightarrow{\text{a}} \text{A'}$$

Note que $A = A'$ e a assim por diante. São os mesmos nós, só que na ida e na volta. Note que qualquer nó pode aparecer várias vezes na ida (e consequentemente na volta). Se dois nós forem repetidos de maneira consecutiva na ida, temos que o trajeto passa pela mesma aresta algumas vezes. Nesse caso, a soma dos pesos dessas arestas deve ser igual a $a_{ij} = a_{ji}$. O nó $A$ seria o ponto de partida da quantidade de moeda $m$ e, consequentemente, o ponto final da *walk*. O procedimento seria o seguinte. Pegamos o menor valor das arestas do trajeto, digamos $c$, e realizamos as transações até chegarmos em $D$. Suponhamos, sem perda de generalidade que $m \leq c$. Para conseguirmos realizar as transações, devemos realizar um procedimento de ida e volta:

$$\text{A*} \underset{\text{a}}{\overset{\text{a}}{\longleftrightarrow}} \text{B}$$

$$\text{A} \underset{\text{a}}{\overset{\text{a-m}}{\longleftrightarrow}} \text{B*}$$

$$\text{A*} \underset{\text{a-m}}{\overset{\text{a-m}}{\longleftrightarrow}} \text{B}$$

$$\text{A} \xleftrightarrow[\text{a-m}]{\text{a-2m}} \text{B*}$$

O asterisco representa onde a dotação monetária se encontra. Note que podemos repetir esse procedimento $\lfloor a/m \rfloor = z$ vezes, sendo $\lfloor \cdot \rfloor$ a função que retorna o maior inteiro menor ou igual a $a/m$. No penúltimo passo, teremos:

$$\text{A*} \xleftrightarrow[\text{a-zm}]{\text{a- zm}} \text{B}$$

Note que $a - zm = a \bmod m$ sendo mod a operação de módulo (resto da divisão de a por m), que nos retorna um real menor do que $a$ e maior do que 0. Portanto no último passo:

$$\text{A*} \xleftrightarrow[\text{a mod m}]{\text{0}} \text{B*}$$

Assim, $B$ termina esse estágio com $a \bmod m =: m_a$ unidades de moeda, enquanto $A$ termina com $m - a \bmod m$ unidades de moeda. Sabemos que, se após realizarmos todas as outras transações, tivermos novamente uma dotação de $a \bmod m =: m_a$ em $B$, conseguimos realizar a transação de restante de $B$ para $A$. Mostraremos que é isso que acontece.

Na transação de $B$ para $C$, temos novamente esse mesmo procedimento, só que agora com a dotação $m_a$, o que nos deixa com:

$$\text{B*} \xleftrightarrow[\text{b mod (a mod m)}]{\text{0}} \text{C*}$$

Sendo $m_b \equiv b \bmod (a \bmod m) = b \bmod m_a$. $C$ fica com uma dotação de $m_b$ e $B$ fica com uma dotação de $m_a - m_b = a \bmod m - b \mod (a \bmod m)$ Portanto, repetindo até $D$, temos:

$$\text{A} \xrightarrow{\text{0}} \text{B} \xrightarrow{\text{0}} \text{C} \xrightarrow{\text{0}} \text{D} \xrightarrow{\text{c mod mb}} \text{C'} \xrightarrow{\text{b mod ma}} \text{B'} \xrightarrow{\text{a mod m}} \text{A'}$$

$$\text{A} \xrightarrow{\text{0}} \text{B} \xrightarrow{\text{0}} \text{C} \xrightarrow{\text{0}} \text{D} \xrightarrow{\text{mc}} \text{C'} \xrightarrow{\text{mb}} \text{B'} \xrightarrow{\text{ma}} \text{A'}$$

Sendo a dotação de $D$ igual a $m_c$, a de $C$ igual a $m_b - m_c$, a de $B$ igual a $m_a - m_b$ e a de $A$ igual a $m - m_a$.

Assim, conseguimos realizar todas as transações restantes: as $m_c$ unidades monetárias em $D$ vão parar $C$, deixando $C$ com $m_b$ unidades monetárias. Depois vão para $B$, deixando com $A$ unidades monetárias. Por fim, terminamos em $A$ com $M$ unidades monetárias. Isso termina nossa demonstração.

Recapitulando, temos, portanto o procedimento (algoritmo) para o qual a matriz de transações conectada e simétrica $A$ (que representa o grafo $G$) é sempre factível:

- 1) Escolha um dos nós de dotação monetária positiva (que sempre existe por hipótese). Para o nó $i$, temos a dotação $w_i > 0$;

- 2) Defina uma *spanning walk* para o grafo $A$ (que existe por ser fortemente conectado), começando no nó escolhido e terminando em qualquer outro nó. Esse será seu caminho de ida. O caminho de volta é o mesmo, mas começando do último nó da *walk*. Represente por um "novo grafo direcionado" $\hat{G}$ que tems as seguintes características: a) ele é em linha; b) possivelmente, apresente nós de $G$ repetidos; c) possivelmente, apresenta arestas de $G$ repetidas;

- 3) Defina os pesos de cada aresta. Se uma aresta de $G$, com peso $a_{ij}$, aparece somente uma vez no novo grafo $\hat{G}$, seu peso será $a_{ij}$. Agora, se aparecer $n$ vezes no novo grafo, a soma dos pesos das novas arestas deverá igualar $a_{ij}$. Por simplicidade, suponhamos que se cada a aresta repetida aparecer $n$ vezes em $\hat{G}$, seu peso será $a_{ij}/n$. Assim, terminamos de especificar o grafo $\hat{G}$, que simplifica o problema proposto para $G$;

- 4) Na ida, realizamos um procedimento de vai e volta. A quantidade de moeda começa em um nó (por exemplo, 1), vai para o seguinte (2), e depois volta para o mesmo nó (1). Repetimos esse procedimento até a quantidade sobrante na aresta ser menor ou igual a dotação de moeda ($m \geq \hat{a}'_{ij}$). Por fim, finalizamos esse procedimento com uma única transação de ida $(m_1 = \hat{a}'_{12})$ . A aresta no sentido contrário fica com um peso de $m_1$, que é igual a $\hat{a}_{12} \bmod m$, se $\hat{a}_{12} \bmod m \neq 0$, e $m$, se $\hat{a}_{12} \bmod m = 0$ . O primeiro nó fica com uma dotação de $m - m_1$, enquanto o segundo nó fica com uma dotação adicional de $m_1$. Repetimos o procedimento para o terceiro nó usando a dotação $m_1$ e assim por diante até chegarmos no último nó. Como $m$, $m_1$, $m_2$ e assim por diante é sempre positivo, podemos sempre esgotar as transações da ida.

- 5) Realizamos as transações da volta, até voltar para o primeiro nó. No último nó (enésimo), temos uma dotação de $m_n$. A transação restante desse nó, é a volta, no valor de $m_n$. Assim realizamos essa transação. Antes, a dotação do nó $n-1$ era de $m_{n-1} - m_n$. Agora, é de $m_{n-1}$. Repetindo esse procedimento, esgotamos todas as dotações da volta e, portanto, esgotamos todas as transações de $\hat{G}$. Portanto, $G$ é factível.

$\square$

Agora, podemos repetir essa demonstração (algoritmo) em notação matricial:

Note que, trivialmente, uma matriz simétrica só é factível para qualquer dotação monetária se e somente se ela for conectada.

## 2.4 Factibilidade forte do fluxo monetário

O problema se torna mais interessante quando estamos tratando de um modelo de equilíbrio geral com demanda por moeda. Se há demanda por moeda, a moeda aparece na função utilidade, ou seja, trata-se de um modelo *Money in Utility* (MIU). Nesse caso, não basta que a moeda realize todas as transações. Devemos satisfazer o equilíbrio parcial:

$$\sum_i x_i^m(p) = \sum_j y_j^m(p) + \sum_i e_i^m$$

Sendo $x_i^m$ a demanda do indivíduo $i$ por moeda e $y_i^m$ a oferta do indivíduo $i$ de moeda. Como nenhuma firma produz moeda, temos:

$$\sum_i^n x_i^m(p) = \sum_i^n e_i^m$$

Sendo $e_i^m$ a dotação de moeda do indivíduo $i$, que na verdade denotamos aqui como $w_0^i$. Após concluídas as transações, temos $x_i^m = w_T^i$.

Agora, portanto, nosso problema de factibilidade monetária mudou. Não basta a moeda circular, esgotando todas as transações planejadas. Ela precisa também "parar" no lugar certo, com a pessoa certa, depois de realizar todas as trocas necessárias.

Assim, a condição forte de factibilidade do trio $(w_0, w_T, A)$, em que $|w_0| = |w_T|$ seria: $A$, $w_0$ e $w_T$ são factíveis se

$$w_T = (\sum_{j=1}^n a_{j,i} - \sum_{j=1}^n a_{i,j})_{i=1}^n + w_0 \tag{3}$$

e se existe $\{S_k\}_{k=1}^m$ tal que:

$$A = \sum_{k=1}^m S_k$$

Veremos que $w_T = w_d$ desde de que a restrição orçamentária seja satisfeita. Ou seja, a dotação de moeda demandada é a mesma que resulta das demais transações:

$$p * x^i \leq p * e^i + \sum_j \theta_{ij}\Pi_j \Rightarrow p * x_{-m}^i + p * x_m^i \leq p * e_{-m}^i + p * e_m^i + \sum_j \theta_{ij}\Pi_j$$

$$\Rightarrow p * x_{-m}^i + w_d^i \leq p * e_{-m}^i + w_0^i + \sum_j \theta_{ij}\Pi_j \Rightarrow w^d \leq p * v^i - p * c^i + \sum_j \theta_{ij}\Pi_j + w_0^i$$

$$\Rightarrow w_d^i \leq \sum_j a_{ji} - \sum_j a_{ij} + w_0^i$$

Considerando o preço da moeda como numerário. Se somarmos as $i$ desigualdades, temos:

$$|w_d| \leq |w_0|$$

Como sabemos que $|w_d| = |w_0|$ como condição de equilíbrio, todas as desigualdades devem valer como igualdade. Portanto:

$$w_d = (A^T - A) \cdot \mathbf{1} + w_0 = w_T$$

Note que esse resultado implica na Lei de Walras. Inclusive, trata-se de uma relação se e somente se. Se fizermos o mesmo procedimento considerando a desigualdade como igualdade, chegamos no resultado.

**Lema:** Sequência de matrizes de subtransação sempre pode ser finita.

**Teorema:** Para toda matriz $A$ fortemente conectada e todo par de vetores $w_T$ e $w_0$ tal que $w_T = (\sum_{j=1}^{n} a_{j,i} - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j})_{i=1}^{n} + w_0$, o trio $(w_0, w_T, A)$ é factível. Ou seja, existe $\{S_k\}_{k=1}^{m}$ tal que:

$$A = \sum_{k=1}^{m} S_k$$

Sendo $S_k$ da forma:

$$S_k := [s_{i,j}^k : (\forall (i,j), s_{i,j}^k \leq a_{i,j}^{k-1}) \wedge (\forall i, \sum_{j}^{n} s_{i,j}^k \leq w_{k-1}^i)]_{n \times n}$$

**Demonstração:** Para essa demonstração, uma argumentação baseada em grafos é mais promissora do que uma argumentação baseada em álgebra matricial.

Suponha, por contradição, que não é factível. Suponha, além disso, que já realizamos o máximo de transações possíveis, e chegamos no último dos estados finais. O lema de sequência finita nos garante a existência do último dos estados finais. Isso significa que todos os nós que demandam moeda ($w_t^i > 0$) já realizaram todas as suas transações. Caso contrário, não estamos no último estado. As transações que restam são aquelas de nós que não têm moeda.

Note que para toda transação feita, temos a condição:

$$w_t^i = \sum_{j=1}^{n} s_{j,i}^t - \sum_{j=1}^{n} s_{i,j}^t + w_{t-1}^i$$

Ou então, se combinarmos várias matrizes de subtransação:

$$w_t^i = \sum_{j=1}^{n} s_{j,i}^t - \sum_{j=1}^{n} s_{i,j}^t + w_0^i$$

Todos os nós que completaram suas transações estão com a quantidade demandada de moeda. Caso contrário, se tivessem moeda de mais, significaria que $w_T^i < w_t^i$ o que implica ou que foram feitas compras de menos (o que implica que o indivíduo ainda pode fazer compras) ou vendas de mais (o que implica que o indivíduo realizou vendas que não desejava fazer).

Já no cenário em que $w_T^i > w_t^i$, vamos supor, inicialmente que o nó $A$ realizou todas as suas compras e tem uma quantidade positiva de moeda, mas que seja inferior a quantidade demandada. Isso implica a existência de outro nó B, com zero moeda em estoque, mas que deseja realizar compras com A. Todavia, para ser capaz de realizar essas compras, o nó B precisa ter um volume de vendas maior ou igual ao volume de compras que realiza com A e demais nós. Se seguirmos esse processo indutivamente, chegamos a conclusão que tal cenário só é possível se existir pelo menos um indivíduo que deseja realizar compras e tem estoque de moeda (o que contradiz nossa suposição de estado final) ou se existir um indivíduo que deseja realizar compras mas não tem moeda (o que contradiz a hipótese de consistência do caixa). Portanto, o único estado final possível é aquele em que $w_T^i = w_t^i$, e não só isso, mas o vetor inteiro é satisfeito: $w_T = w_t$, já que caso haja alguma comunidade isolada com estoque de moeda e transações a serem feitas ainda, não estamos no estado final. Aqui, chamamos de comunidade isolada aquela que não é conectada com o restante dos nós do grafo, ou seja, um componente do grafo.

Portanto, a possibilidade de "existência de não factibilidade" seria em comunidades que não apresentam demanda líquida por moeda. Não pode existir nem compras nem vendas com os agentes que finalizaram suas transações. Pela condição de consistência do caixa, a quantidade inicial de moeda desses agentes também deve ser zero, caso contrário, teríamos agentes com quantidades negativas de moeda. Portanto, nosso estado final é da seguinte forma:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "\$\ 2"'] & B \arrow[l, "\$\ 2"'] \arrow[dl, "\$\ 5"] & E & F \\
C \arrow[r, leftrightarrow, "\$\ 3", "\$\ 10"'] & D \arrow[u, "\$\ 7"'] & G & H
\end{tikzcd}$$

Em que E, F, G e H apresentam algum estoque de moeda, enquanto A, B, C e D não apresentem nenhum estoque de moeda.

Suponha, sem perda de generalidade, que as matrizes de subtransação contenham uma transação cada. Se revertermos as transações uma por uma, há duas possibilidades:

1) Não existiam transações entre a comunidade com moeda (representada na figura pelas letras de E a H) e a comunidade sem moeda (representada pelas letras de A a D). Isso por sua vez implica que a matriz A não é fortemente conectada (contradição!);

2) Existiam transações entre as duas comunidades, mas a moeda "entrou e saiu rapidamente". Ou seja, entrou e saiu sem completar todas as transações.

Para o segundo caso, temos uma situação parecida com o problema sem demanda por moeda, temos uma matriz de transação simétrica para essa comunidade isolada. Assim, como uma matriz de transação simétrica é sempre factível para uma quantidade não nula de moeda, e a dotação monetária sempre volta para o ponto de partida, temos que se desfizermos algumas transações, eventualmente conseguiremos voltar ao ponto em que podemos concluir todas as transações da comunidade isolada e, posteriormente, completar todas as transações da matriz completa. Existe outra forma de demonstrar esse ponto, sem usar o resultado anterior. Basta observar que a partir dessa etapa, se existirem mais de dois nós na comunidade sem moeda (o que implica existirem no mínimo duas transações), podemos sempre realizar pelo menos uma transação a mais do que foi feito. Ou seja, chegamos em um estado final anteriormente, mas ele não é o último estado final. Nunca poderíamos chegar ao último estado final que não seja o esgotamento completo de todas as transações. □

Assim, concluímos que um equilíbrio geral MIU é sempre monetariamente factível. Mas o que esse resultado significa? Significa basicamente que se os agentes decidem os preços no começo do período de modo a garantir o equilíbrio, e se os agentes planejam suas transações, todas as transações planejadas serão possíveis de serem realizadas, desde que em uma ordem correta. Isso não diz nada sobre quantas transações serão necessárias para que isso ocorra.

Esse, por si só, é um resultado bastante útil no fortalecimento do conceito de equilíbrio geral, apesar de vários problemas práticos. É uma porta de entrada para discutirmos problemas mais complexos envolvendo tempo de transações, velocidade da moeda, desutilidade intertemporal, endogeneidade da moeda etc.

# 3 Um modelo de ”armadilha da moeda”

A partir do que discutimos na seção anterior, vimos que se as transações forem feitas na ordem errada, podemos criar comunidades em que as demandas por moeda são saciadas, mas nenhuma transação é desejada de ser realizada, e comunidades em que deseja-se transacionar, mas não há moeda. Ou seja comunidades com moeda e sem troca, e comunidades com desejo pela troca mas sem moeda. Situações em que comunidades inteiras demandam liquidamente exatamente ”zero” unidades monetárias pode parecer algo que quase certamente não ocorrerá, o que é verdade. Mas note que algo próximo disso já é uma situação ”problemática” do ponto de vista de se atingir o equilíbrio. Se a demanda líquida por moeda for muito próxima de zero em uma comunidade, pode ser que somente uma pequena quantidade de moeda entre na comunidade, fazendo com que seja necessário um número muito grande de transações para se atingir a alocação de equilíbrio.

Então, a ideia aqui proposta é justamente modelar como trocas em ordens aleatórias podem gerar uma situação de iliquidez. Qual a probabilidade de cairmos em uma região próxima da ”armadilha da moeda”? O que ocorre com a velocidade de circulação da moeda? Isso aumenta a preferência por moeda endogenamente? Essas situações de iliquidez promovem uma demanda maior por crédito comercial?