

Factibilidade monetária de um equilíbrio geral

Marcelo Fiorelli

October 2025

1 Introdução

Neste texto, eu introduzo um *framework* possível para avaliar a existência monetária de uma alocação de equilíbrio geral. Trata-se da estruturação do problema de factibilidade monetária em rede de uma economia em equilíbrio geral, um rascunho da demonstração de que um equilíbrio geral é sempre monetariamente factível, e uma possível classe de modelos novos de iliquidez e desequilíbrio.

2 Resumo

A ideia que eu desenvolvo nas seções seguintes, seria, basicamente de definirmos uma matriz de transação monetária A , que contém todas as transações em moeda de uma economia em um período qualquer. Ela pode ser representada por um grafo direcionado com pesos, em que os pesos são os valores monetários das transações, e os nós são indivíduos e firmas. Essa mesma matriz pode ser subdivida em transações menores, chamadas de matrizes de subtransação, cuja soma resulta na matriz de transação A .

Temos um vetor dotação monetária, que atribui um estoque de moeda para cada nó. A soma das subtransações deve respeitar esse vetor, ou seja, um indivíduo não consegue realizar compras com uma quantidade de moeda que não tem. A soma das colunas de cada matriz de subtransação deve ser menor ou igual ao vetor de dotação monetária. A partir da matriz de subtransação, geramos um novo vetor dotação monetária.

As perguntas que tentamos responder quando tratamos de factibilidade são duas: se tivermos uma situação em que os indivíduos não desejam estocar moedas, ou seja, a saída de caixa dos indivíduos é igual a entrada para a matriz de transação A , é possível realizar todas as transações? Ou seja, é possível encontrar uma sequência de matrizes de subtransações que iguala a matriz A ? O primeiro teorema prova, a partir de uma abordagem de grafos, que sim, é sempre possível pra qualquer dotação monetária não nula.

Quando os indivíduos desejam estocar moeda, ou seja, as entradas de moeda podem ser diferentes de saídas, passamos a nos preocupar com aonde a moeda vai parar, ou seja, qual será o vetor dotação monetária no final do processo de trocas. E fazemos as mesmas perguntas: é possível encontrar uma sequência

de matrizes? É possível realizar todas as transações, de maneira a saciar a demanda por moeda dos agentes? O segundo teorema prova que sim também.

Todavia, cabe a pergunta: sempre esgotaremos todas as trocas? Ou podemos nos encontrar em situações em que mais nenhuma troca é possível, mas os indivíduos desejam realizar trocas? A resposta é sim também. Podemos chegar em situações em que os indivíduos que detêm moeda realizam todas as suas trocas entre si, mas aqueles indivíduos que não detêm moeda e demandam pouca moeda nunca chegam a completar todas as suas trocas.

Essa abordagem de *network flow* dialoga com a abordagem de equilíbrio geral em duas formas: o primeiro problema dialoga com um modelo de equilíbrio geral em que a moeda não entra na função utilidade, e a moeda seria um mero facilitador de trocas, enquanto o segundo problema dialoga com um modelo de equilíbrio geral MIU (*money in utility*).

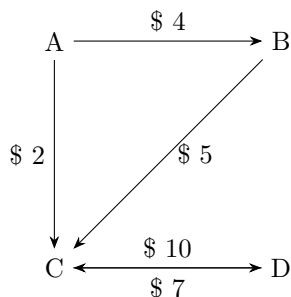
Veremos que uma mesma situação de equilíbrio geral pode gerar infinitas matrizes de transação possíveis diferentes, já que se tivermos n firmas e n' consumidores que demandam o mesmo bem, temos infinitas combinações diferentes de transações possíveis entre cada um dos consumidores com cada uma das firmas.

Portanto, os dois resultados apresentados demonstram que, se o equilíbrio geral existe, é possível, a partir do processo de trocas monetárias, atingirmos a alocação de equilíbrio.

3 O Problema: Matriz de Transações e Equilíbrio Geral

Em uma determinada economia, todas as transações econômicas em um período arbitrário podem ser representadas por um grafo com pesos e direcionado:

3.1 Transações monetárias como matriz de adjacência, dotação monetária como vetor



Se os agentes utilizam somente uma única moeda como meio de troca (i.e., o meio de pagamento legalmente determinado em um país), e se ignorarmos o lado real das transações (i.e., bens, serviços, ativos e passivos), temos a rede de transações ou a rede de fluxos de uma economia em dado período. Esse

grafo pode ser representado por uma matriz de adjacência, que será chamada de matriz de transações ou matriz de fluxos.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Nessa matriz, a célula $a_{i,j}$ indica o valor monetário saindo do bolso do indivíduo/firma i e indo para o bolso do indivíduo/firma j . Assim, se somarmos todos os valores da linha i , temos o total de saídas do caixa de i , e se somarmos todos os valores da linha j temos o total de entradas do caixa de j . Por convenção, vamos estabelecer que não existe auto-transferência (auto-loop), e não existe transferência negativa (todas as entradas da matriz são positivas). Um valor $a_{i,j}$ negativo pode simplesmente ser representado por um valor $a_{j,i}$ de mesmo valor absoluto mas positivo, sem perda de coesão.

Se tivermos um vetor de dotações monetárias, podemos computar, a partir da matriz de transações, como ficam as dotações monetárias após todas as transações do período. Basta, para cada indivíduo, somar as entradas e subtrair as saídas. Assim, temos a fórmula:

$$w_0 = (w_0^1, \dots, w_0^n)'$$

$$w_1 = \left(\sum_{j=1}^n a_{j,i} - \sum_{j=1}^n a_{i,j} \right)_{i=1}^n + w_0 \quad (1)$$

Se somarmos todas as coordenadas do vetor w_1 (o que inclusive seria uma norma soma, nesse caso), no primeiro termo dentro do parênteses, estaríamos somando todos os valores da matriz A . No segundo termo, estaríamos também somando o oposto de todos os valores da matriz. Assim, a soma de todas as coordenadas de w_1 é igual a soma de todas as coordenadas de w_0 . Logo, qualquer matriz de transações sempre preservará o estoque de moeda de uma economia. Essa é uma limitação clara do nosso arcabouço teórico que obrigará sua reformulação no futuro. Mas estamos justamente tentando avaliar o que acontece quando o estoque monetário é fixo. Portanto, essa é uma propriedade fundamental do nosso modelo.

Note que a matriz de transações é algo que existe no "mundo real". Esse problema de estoque monetário fixo surge pois não incluímos transações com o Banco Central nem com o Tesouro no nosso modelo. Mas a matriz de transações, por si só, existe. Evidentemente, não conseguimos observar ela, já que muitas transações acontecem em dinheiro, ou não pagam imposto, ou simplesmente por se tratar de um volume muito grande de transações que ocorrem diariamente em uma economia.

Todavia, trivialmente, a matriz de transações apresenta existência *ex-post*. Ou seja, todas as transações realizadas em um período é um fato social que ocorreu na economia, mesmo que esse não seja observado. Agora, a existência

de uma matriz de transações *ex-ante* no sentido de expectativas dos agentes quanto as transações futuras, ou então um planejamento de gastos realizado por cada um dos agentes é motivo de debate. Retomaremos futuramente essa discussão.

Por fim, devemos notar que a matriz de transações pode satisfazer a equação 1, sem ser possível realizar todas as transações de uma vez. Para conseguirmos realizar todas de uma vez, precisamos que $\sum_{j=1}^n a_{i,j} \leq w_0^i$, $\forall i \in N$, sendo N o conjunto de nós do grafo. Todavia, essa é uma situação irrealista para uma economia real. No geral, realizamos todas as transações possíveis em diferentes rodadas, reutilizando a mesma unidade de moeda para diferentes transações.

3.2 Subdividindo a matriz de transações

A matriz A , que representa as transações monetárias *ex-post* de uma economia pode ser subdivididas em matrizes menores de várias formas.

Suponhamos, por exemplo, que a matriz A represente todas as transações de uma economia fechada em um ano. Assim, temos:

$$A = \sum_{k=1}^{12} S_k$$

Em que S_k são todas as transações da economia no mês k . Podemos fazer o mesmo para qualquer período de tempo. Podemos fazer o mesmo mas com períodos de tempo desiguais. Digamos, por exemplo, que a matriz S_k captura todas as transações que foram realizadas simultaneamente. Alguns períodos podem ser muito maiores do que outro (por exemplo, os indivíduos de uma economia não irão realizar transações enquanto estão dormindo).

Todavia, estamos interessados em um critério de subdivisão específico: queremos subdividir a matriz A em matrizes menor de maneira que nenhum dos agentes gaste mais do que têm em estoque de moeda. Ou seja, respeitando a sua restrição orçamentária. Assim, dado o período total T , sua partição em subperíodos de tempo $T = T_1 + \dots + T_m$, o índice de sua partição $t \in \{1, \dots, m\}$, definimos uma matriz de subtransação, ou subfluxo, arbitrária, como sendo:

$$S_{t+1} := [s_{i,j}^{t+1} : (\forall i, j \in N, s_{i,j}^{t+1} \leq a_{i,j}^t) \wedge (\forall i \in N, \sum_j s_{i,j}^{t+1} \leq w_t^i)]_{n \times n}$$

Uma matriz de subtransação precisa respeitar duas condições: 1) respeita a restrição orçamentária dos agentes; 2) é menor ou igual a transação que o agente irá efetivamente realizar (ou então é menor igual a transação efetivamente planejada). Dado o estoque monetário dos agentes em um subperíodo t e as transações planejadas do período total. Note que w_t é atualizado de acordo com o período a partir da equação:

$$w_t = (\sum_{j=1}^n s_{j,i}^t - \sum_{j=1}^n s_{i,j}^t)_{i=1}^n + w_{t-1}$$

Enquanto A_t também é atualizado de acordo com o período:

$$A_t = A - \sum_{k=1}^t S_k$$

Portanto, um problema que precisará ser respondido é se podemos subdividir uma matriz qualquer A respeitando as condições de subtransação. Ou seja, queremos saber se existe uma sequência de matrizes de subtransação $\{S_k\}_{k=1}^m$, para um dado vetor de dotação inicial w_0 que satisfaz:

$$A = \sum_{k=1}^m S_k$$

Ou seja, queremos saber se para um conjunto de transações planejadas, se é possível completar todas elas, passando um certo estoque de moeda de mão em mão. Para matrizes *ex-post*, sabemos que sim, porque a matriz descreve o que ocorreu. Agora, para matrizes *ex-ante*, matrizes planejadas ou de expectativas, vemos que a resposta não é trivial.

3.3 Alocação de equilíbrio e conjunto de matrizes de transação possíveis

Para cada alocação e vetor de preços de equilíbrio, existe pelo menos uma matriz de transações que a representa.

Se temos uma alocação de equilíbrio, cada indivíduo e firma apresenta uma função demanda por bens e serviços, cada indivíduo e firma apresenta uma oferta de bens e serviços, e existe um subespaço de vetores de preços p tal que:

$$\sum_i x_i^l(p) = \sum_j y_j^l(p) + \sum_i e_i^l, \quad \forall l \in L$$

Sendo $x_i^l(p)$ a demanda do indivíduo i pelo bem l , $y_j^l(p)$ a oferta do bem l pela firma j , e_i^l a dotação do bem l do indivíduo i , e L o conjunto de todos os bens capazes de serem produzidos em uma economia.

Note que aqui equilibramos oferta e demanda a partir de mercados de bens homogêneos, e não a partir de transações entre indivíduos/firmas. Ou seja, um mesmo indivíduo pode saciar sua demanda pelo bem l comprando tudo que deseja da firma A, ou da firma B, ou de uma combinação das duas, ou de uma combinação de todos os indivíduos e firmas que ofertam o bem l . Realmente, se somente uma firma ofertar o bem l , ou então somente um consumidor demandar o bem l , só há um conjunto de transações que sacia essa demanda. Agora, se tivermos $n > 1$ consumidores e $n' > 1$ ofertantes do bem l , teremos infinitos conjuntos de transações possíveis que equilibram o mercado do bem l .

Portanto, um único equilíbrio geral pode gerar infinitas possibilidades de transações monetárias. Mas cabe, finalmente, a pergunta: dada uma realização das infinitas possibilidades de matrizes de transação monetária, gerada por

uma economia em equilíbrio geral, as transações monetárias dessa matriz são possíveis de serem completadas, dada uma dotação monetária exógena?

Mas aí cabe uma outra pergunta: como a moeda entra nesse modelo? Podemos incluir a moeda em um arcabouço de equilíbrio geral com fluxos monetários? Aqui, discutimos duas possibilidades: 1) Não há demanda por moeda; 2) Há demanda por moeda.

Antes de partirmos para a próxima sessão, vamos esclarecer o problema. Temos um resultado de equilíbrio geral, que gera um conjunto não vazio de matrizes de transações que levam a alocação de equilíbrio. Para que as transações sejam possíveis, a moeda deve ser utilizada como meio de pagamento exclusivo das trocas entre agentes.

Temos um componente de temporalidade que não existia antes em outras formulações de equilíbrio geral. Estamos considerando a sequência de eventos:

- 1 O mercado determina os preços e alocações de equilíbrio;
- 2 Os demandantes determinam de quais ofertantes específicos irão saciar sua demanda. Ou seja, geram a matriz de transações planejadas, a matriz *ex-ante*. A matriz é determinada de maneira que, caso os demandantes demandem bens demais de um único ofertante, possamos alocar parte da demanda para outro produtor sem problemas (afinal, os bens são homogêneos e não há custos de transação);
- 3 As transações monetárias ocorrem. Queremos avaliar se existe um ordenamento de subtransações que possibilita o *netting* de todas as transações.

Descrevemos um processo temporal aqui que pode ser interpretado como *ad hoc*. Todavia, o próprio arcabouço de equilíbrio geral apresenta a hipótese *ad hoc* do leiloeiro walrasiano. Uma possível extensão do modelo poderia seguir o seguinte passo à passo:

- 1 O mercado determina os preços e alocações de equilíbrio;
- 2 Diante de um conjunto de possibilidade de transações possíveis, os demandantes escolhem de qual ofertante comprar primeiro. A matriz de transações é determinada dinamicamente. Portanto, não existe uma matriz de transações *ex-ante*, mas sim um conjunto de possibilidades de matrizes de transação *ex-ante*;
- 3 Avaliamos se sempre é possível atingirmos a alocação de equilíbrio.

Por hora, vamos avaliar o problema da matriz de transações ser definida de maneira *ex-ante*.

3.4 Factibilidade monetária fraca do fluxo monetário

Se considerarmos que não existe demanda por moeda, mas ela é necessária para as trocas (sem ela, as trocas não ocorrem), precisamos descobrir se dado um

vetor dotação monetária não nulo, é possível realizarmos subtransações até que todas as transações delimitadas pela matriz de transações se esgotem.

Lembrando que por subtransações queremos dizer que em uma rodada de trocas, os indivíduos realizam transações sem ultrapassar seu estoque monetário (ou seja, sem caixa negativo), mas também sem realizar mais trocas do que precisam. Há medida que as trocas ocorrem e as rodadas se passam, os indivíduos adquirem mais moedas em caixa e podem realizar as transações que ainda desejam realizar.

Portanto, queremos saber para quais matrizes de transação A , existe w_0 para o qual seja possível esgotar todas as transações a partir de uma sequência finita $\{S_k\}_{k=1}^m$ de subtransações.

Assim, a condição fraca de factibilidade do par (w_0, A) seria: A e w_0 são factíveis se existe $\{S_k\}_{k=1}^m$ tal que:

$$A = \sum_{k=1}^m S_k$$

Ou:

$$A - \sum_{k=1}^m S_k = 0$$

Sabemos que se a matriz de transferência não for conectada, temos vetores dotação não nulo para os quais a matriz de transações não é factível.

Em um problema de equilíbrio geral, temos a seguinte restrição para todo i :

$$\sum_{j=1}^n a_{j,i} = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \quad (2)$$

Para provar isso, basta perceber que, para um equilíbrio geral com trocas puras, a restrição orçamentária deve ser satisfeita:

$$p * x^i \leq p * e^i, \quad \forall i$$

Sendo x^i o vetor demanda de equilíbrio do indivíduo i . Assim, podemos separar a restrição orçamentária em transações em que o indivíduo demanda liquidamente e oferta liquidamente:

$$p * (x_d^i - e_d^i) + p * (x_s^i - e_s^i) \leq 0$$

Sendo $c^i := (x_d^i - e_d^i) = 0$ para as coordenadas j em que $x_j^i \leq e_j^i$, e sendo $-v^i := (x_s^i - e_s^i) = 0$ para as coordenadas em que $x_j^i \geq e_j^i$. Ou seja, o primeiro termo são as compras líquidas e é positivo, e o segundo termo são as vendas líquidas e são negativos.

Assim, temos:

$$p * c^i \leq p * v^i \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{i,j} \leq \sum_{j=1}^n a_{j,i}, \quad \forall i$$

Todavia, sabemos que se somarmos as desigualdades para todos os i , teremos a soma de todas as entradas da matriz A em ambos os lados $\mathbf{1}^T A \mathbf{1} \leq \mathbf{1}^T A \mathbf{1} \Rightarrow A = A$. Isso implica que $p * c^i = p * v^i$, pois caso exista i tal que $\sum_{j=1}^n a_{i,j} < \sum_{j=1}^n a_{j,i}$, deve existir pelo menos um i tal que $\sum_{j=1}^n a_{i,j} > \sum_{j=1}^n a_{j,i}$, contradizendo nossa condição de equilíbrio.

Ou seja, as entradas devem ser iguais as saídas para todos os indivíduos. Para o caso com firmas, o problema é o mesmo, averiguando o problema da firma. A firma maximiza a seguinte função objetivo (restrita ao seu conjunto de tecnologia de produção):

$$p * y^j = p * v^j - p * c^j = \Pi^j$$

Sendo v_j as vendas líquidas e c_j as compras líquidas. Note que os lucros Π^j são totalmente distribuídos para as famílias, então, por construção, existe igualdade entre as entradas e saídas na firma, desde que o lucro seja maior igual a zero (o que, pela condição de possibilidade de inação, é sempre possível em equilíbrio geral).

Já a nova restrição orçamentária da família seria:

$$p * c^i \leq p * v^i + \sum_j \theta^{ij} \Pi^j \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{i,j} \leq \sum_{j=1}^n a_{j,i}, \forall i$$

Já que os lucros das firmas também são entradas para as famílias. Assim, temos o mesmo argumento de antes: as entradas devem ser iguais as saídas de todos os indivíduos. Logo:

$$\left\{ \sum_{j=1}^n a_{j,i} \right\}_{i=1}^n = \left\{ \sum_{j=1}^n a_{i,j} \right\}_{i=1}^n$$

Note que no lado esquerdo, em cada linha do vetor temos a soma dos valores na própria linha. Isso equivale a $A \times \vec{1}$, sendo $\vec{1}$ um vetor em que todas as coordenadas equivalem o número 1. No lado direito, em cada linha temos a soma dos valores das colunas correspondentes. Isso equivale a $(\vec{1}^T A)^T = A^T \vec{1}$. Portanto, temos:

$$A \vec{1} = A^T \vec{1} \Rightarrow A \vec{1} - A^T \vec{1} = 0 \Rightarrow (A - A^T) \vec{1} = 0$$

Note que isso não implica que $A^T = A$!!! Essa é apenas uma das soluções possíveis, um caso especial. Por isso, iremos provar primeiro a factibilidade desse caso especial:

Assim, temos o teorema:

Teorema 1: Dada uma matriz de transações A (fortemente) conectada simétrica, temos que para qualquer dotação monetária positiva w_0 , a matriz de transações (ou o par (w_0, A)) é monetariamente factível.

Demonstração: Antes, note que, como a matriz A é simétrica, se ela for conectada (existe um *path* entre quaisquer dois nós do grafo, ignorando sua

direção), ela também necessariamente é fortemente conectada (já que a *path* de volta é sempre possível).

Supondo, sem perda de generalidade, que somente um dos nós apresenta uma dotação positiva, como a matriz é fortemente conectada, podemos sempre atingir qualquer nó do grafo a partir de qualquer outro. Não só isso, mas podemos sempre fazer uma *walk* passando por todos os nós do grafo (*spanning walk*), sem se preocupar com repetições.

Dada uma *walk*, que se inicia no nó com dotação monetária passa por todos os nós e, após atingir todos os n nós do grafo pelo menos uma vez, passa a fazer o exato caminho de volta, vamos mostrar que conseguimos sempre completar todas as transações se a quantidade positiva de moeda m realizar essa *walk*.

Vamos analisar primeiro a ida. Para as arestas que aparecem só uma vez nessa *walk*, o seu peso será o próprio valor da matriz de transações. Já para as arestas que aparecem várias vezes, se estivermos repetindo várias vezes transações entre os mesmos dois nós, então devemos dividir o valor do peso na matriz de transação de maneira que a soma dessas transações nos resulte no valor do peso, e de maneira que nenhum dos valores seja nulo. Podemos, por exemplo, dividir o peso igualmente, pelo número de vezes que passamos pela mesma aresta.

Assim, a dotação monetária no valor de m realiza o trajeto. Vamos representar aqui o trajeto genérico de 4 nós:

$$A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \xrightarrow{c} D \xrightarrow{c} C' \xrightarrow{b} B' \xrightarrow{a} A'$$

Note que $A = A'$ e a assim por diante. São os mesmos nós, só que na ida e na volta. Note que qualquer nó pode aparecer várias vezes na ida (e consequentemente na volta). Se dois nós forem repetidos de maneira consecutiva na ida, temos que o trajeto passa pela mesma aresta algumas vezes. Nesse caso, a soma dos pesos dessas arestas deve ser igual a $a_{ij} = a_{ji}$. O nó A seria o ponto de partida da quantidade de moeda m e, consequentemente, o ponto final da *walk*. O procedimento seria o seguinte: pegamos o menor valor das arestas do trajeto, digamos c , e realizamos as transações até chegarmos em D . Suponhamos, sem perda de generalidade que $m \leq c$. Para conseguirmos realizar as transações, devemos realizar um procedimento de ida e volta:

$$A^* \xleftrightarrow[a]{a} B$$

$$A \xleftrightarrow[a]{a-m} B^*$$

$$A^* \xleftrightarrow[a-m]{a-m} B$$

$$A \xleftrightarrow[a-m]{a-2m} B^*$$

O asterisco representa onde a dotação monetária se encontra. Note que podemos repetir esse procedimento $\lfloor a/m \rfloor = z$ vezes, sendo $\lfloor \cdot \rfloor$ a função que retorna o maior inteiro menor ou igual a a/m . No penúltimo passo, teremos:

$$A^* \xleftrightarrow[a-zm]{a-zm} B$$

Note que $a - zm = a \bmod m$ sendo \bmod a operação de módulo (resto da divisão de a por m), que nos retorna um real menor do que a e maior do que 0. Portanto no último passo:

$$A^* \xrightleftharpoons[a \bmod m]{0} B^*$$

Assim, B termina esse estágio com $a \bmod m =: m_a$ unidades de moeda, enquanto A termina com $m - a \bmod m$ unidades de moeda. Sabemos que, se após realizarmos todas as outras transações, tivermos novamente uma dotação de $a \bmod m =: m_a$ em B , conseguimos realizar a transação restante de B para A . Mostraremos que é isso que acontece.

Na transação de B para C , temos novamente esse mesmo procedimento, só que agora com a dotação m_a , o que nos deixa com:

$$B^* \xrightleftharpoons[b \bmod (a \bmod m)]{0} C^*$$

Sendo $m_b \equiv b \bmod (a \bmod m) = b \bmod m_a$. C fica com uma dotação de m_b e B fica com uma dotação de $m_a - m_b = a \bmod m - b \bmod (a \bmod m)$. Portanto, repetindo até D , temos:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{0} & B & \xrightarrow{0} & C & \xrightarrow{0} & D \xrightarrow{c \bmod mb} C' \xrightarrow{b \bmod ma} B' \xrightarrow{a \bmod m} A', \\ A & \xrightarrow{0} & B & \xrightarrow{0} & C & \xrightarrow{0} & D \xrightarrow{mc} C' \xrightarrow{mb} B' \xrightarrow{ma} A', \end{array}$$

Sendo a dotação de D igual a m_c , a de C igual a $m_b - m_c$, a de B igual a $m_a - m_b$ e a de A igual a $m - m_a$.

Assim, conseguimos realizar todas as transações restantes: as m_c unidades monetárias em D vão para C , deixando C com m_b unidades monetárias. Depois vão para B , deixando com A unidades monetárias. Por fim, terminamos em A com m unidades monetárias. Isso termina nossa demonstração.

Recapitulando, temos, portanto o procedimento (algoritmo) para o qual a matriz de transações conectada e simétrica A (que representa o grafo G) é sempre factível:

- 1) Escolha um dos nós de dotação monetária positiva (que sempre existe por hipótese). Para o nó i , temos a dotação $w_i > 0$;
- 2) Defina uma *spanning walk* para o grafo A (que existe por ser fortemente conectado), começando no nó escolhido e terminando em qualquer outro nó. Esse será seu caminho de ida. O caminho de volta é o mesmo, mas começando do último nó da *walk*. Represente por um "novo grafo direcionado" \hat{G} que tem as seguintes características: a) ele é em linha; b) possivelmente, apresenta nós de G repetidos; c) possivelmente, apresenta arestas de G repetidas;
- 3) Defina os pesos de cada aresta. Se uma aresta de G , com peso a_{ij} , aparece somente uma vez no novo grafo \hat{G} , seu peso será a_{ij} . Agora, se aparecer r vezes no novo grafo, a soma dos pesos das novas arestas deverá igualar a_{ij} . Por simplicidade, suponhamos que se cada a aresta

repetida aparecer r vezes em \hat{G} , seu peso será a_{ij}/r . Assim, terminamos de especificar o grafo \hat{G} , que simplifica o problema proposto para G ;

- 4) Na ida, realizamos um procedimento de vai e volta. A quantidade de moeda começa em um nó (por exemplo, 1), vai para o seguinte (2), e depois volta para o mesmo nó (1). Repetimos esse procedimento até a quantidade sobrando na aresta ser menor ou igual a dotação de moeda ($m \geq \hat{a}'_{ij}$). Por fim, finalizamos esse procedimento com uma única transação de ida ($m_1 = \hat{a}'_{12}$). A aresta no sentido contrário fica com um peso de m_1 , que é igual a $\hat{a}_{12} \bmod m$, se $\hat{a}_{12} \bmod m \neq 0$, e m , se $\hat{a}_{12} \bmod m = 0$. O primeiro nó fica com uma dotação de $m - m_1$, enquanto o segundo nó fica com uma dotação adicional de m_1 . Repetimos o procedimento para o terceiro nó usando a dotação m_1 e assim por diante até chegarmos no último nó. Como m , m_1 , m_2 e assim por diante é sempre positivo, podemos sempre esgotar as transações da ida.
- 5) Realizamos as transações da volta, até voltar para o primeiro nó. No último nó (enésimo), temos uma dotação de m_n . A transação restante desse nó, é a volta, no valor de m_n . Assim realizamos essa transação. Antes, a dotação do nó $n - 1$ era de $m_{n-1} - m_n$. Agora, é de m_{n-1} . Repetindo esse procedimento, esgotamos todas as dotações da volta e, portanto, esgotamos todas as transações de \hat{G} . Portanto, G é factível.

□

Agora, podemos repetir essa demonstração (algoritmo) em notação matricial: [farei depois]

Note que, trivialmente, uma matriz simétrica só é factível para qualquer dotação monetária se e somente se ela for conectada.

Antes de partirmos para o caso geral, precisamos demonstrar mais uma propriedade desse problema. Pela equação 1, temos:

$$w_m = (A^T - A) \cdot \vec{1} + w_0 \Rightarrow w_m = w_0$$

Ou seja, no problema em que os agentes não demandam moeda, a distribuição monetária inicial é mantida após a resolução do problema.

Para, finalmente, provarmos o caso geral, precisaremos de outra forma de demonstração. Para isso, precisamos do lema do estado final:

Lema: Dada uma matriz A , uma dotação w_0 e uma dotação final w_T tal que satisfaz a equação 1, sempre temos uma sequência $\{S_k\}_{k=1}^m$ finita que esgota todas as transações possíveis. Ou seja, atingimos a dotação final podendo ou não ter completado todas as transações planejadas.

Demonstração: Definimos uma matriz A após k matrizes de subtransação:

$$A - \sum_{l=1}^k S_l =: A_k$$

Suponha o procedimento em que um nó realiza todas as transações possíveis. Ou seja, $\forall S_k, \forall i \in N$:

- Se $(a_{i1}^k, \dots, a_{in}^k) \times \mathbf{1} \leq w_k^i \Rightarrow (s_{i1}^k, \dots, s_{in}^k) = (a_{i1}^k, \dots, a_{in}^k)$
- Se $(a_{i1}^k, \dots, a_{in}^k) \times \mathbf{1} > w_k^i \Rightarrow (s_{i1}^k, \dots, s_{in}^k) \times \mathbf{1} = w_k^i$ com $(s_{i1}^k, \dots, s_{in}^k) \leq (a_{i1}^k, \dots, a_{in}^k)$

Note que sempre pelo menos uma das condições é verdadeira, e as implicações respeitam as condições do problema.

Dado esse procedimento, mostraremos que é impossível continuar executando ele infinitamente, há não ser para matrizes de subtransações nulas.

Suponha, por contradição, que é possível esse procedimento continuar para sempre. Eliminamos um número finito de linhas da matriz de transações, mas resta um número finito de linhas maior do que zero que nunca conseguimos eliminar.

Como nas linhas i' em que $(a_{i1}^k, \dots, a_{in}^k) = \vec{0}$ nenhuma transação mais é possível, sua dotação é fixa e igual a $w_{i'}^i$. As linhas que não foram eliminadas respeitam sempre a propriedade: $(s_{i1}^k, \dots, s_{in}^k) \times \mathbf{1} = w_k^i$, com pelo menos um i com $w_k^i > 0$. Mas note que:

$$w_k^i = \sum_j s_{ji} - (s_{i1}^k, \dots, s_{in}^k) \times \mathbf{1} + w_k^i \Rightarrow w_k^i = \sum_j s_{ij}$$

O que vale para todas as linhas que não foram eliminadas. Para as linhas i' que foram eliminadas $(s_{i'1}, \dots, s_{i'n}) = \vec{0}$.

Sendo M um número de matrizes S_k a partir do qual todas as linhas que podiam que podiam ser eliminadas foram:

$$\begin{aligned} \forall m > M, A_M - \sum_{k=M}^m S_k \geq \neq 0_{m \times m} &\Rightarrow A_M \geq \neq \sum_{k=M}^m S_k \Rightarrow A_M^T \geq \neq \sum_{k=M}^m S_k^T \Rightarrow \\ &\Rightarrow A_M^T \mathbf{1} \geq \neq \sum_{k=M}^m S_k^T \mathbf{1} \end{aligned}$$

No lado esquerdo, temos um vetor de constantes \vec{c} . No lado esquerdo, temos um somatório de vetores \vec{v}_k : $\vec{c} \geq \neq \sum_{k=M}^m \vec{v}_k$

Sendo $v_k^{i'}$ igual a zero se i' é uma das linhas eliminadas, e $v_k^i = w_k^i$ se é uma das linhas não eliminadas. Como a dotação monetária nas linhas eliminadas não muda, a soma da dotação monetária nas linhas eliminadas também é constante, portanto:

$$\mathbf{1}^T \vec{c} > \sum_{k=M}^m \mathbf{1}^T \vec{v}_k = \sum_{k=n}^m c \Rightarrow c_1 > (m - n)c_2$$

Como m pode ser arbitrariamente grande, temos uma contradição

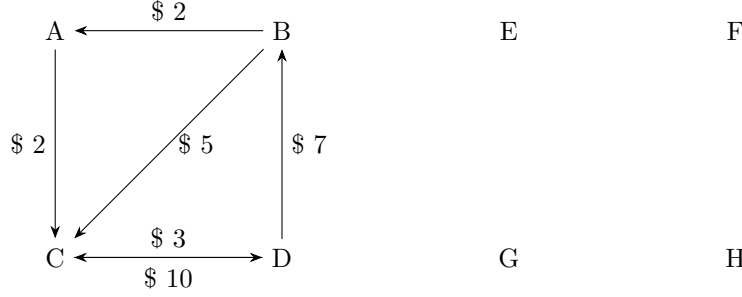
□

Dado que provamos que sempre podemos chegar a um estágio final, utilizando o procedimento descrito anteriormente, iremos caracterizar esse estado final.

Para que mais nenhuma transação seja possível, os indivíduos que ainda desejam realizar transações não podem ter nenhuma dotação monetária. Caso contrário, a realizariam. Já aqueles indivíduos que apresentam uma dotação monetária de moeda maior que zero devem já ter completado todas as suas transações. Pela equação 1, sua dotação monetária deve ser exatamente a dotação monetária inicial.

Portanto, para que estejamos em um estado final, a dotação monetária inicial de todos os agentes deve ser respeitada, mas aqueles que detém uma quantidade de moeda positiva não desejam realizar mais nenhuma transação. Caso contrário, não estaríamos em um estado final. Assim, aqueles agentes que ainda desejam realizar transações são aquelas que já partiram de um estado inicial sem dotação monetária, e terminaram sem também. Todavia, esses ainda desejam realizar transações com outros sem dotação monetária. Temos regiões conectadas sem moeda alguma. Essas regiões respeitam a propriedade de variação de caixa zero, caso contrário, deveriam ter alguma dotação monetária. Caso algum dos nós conectados apresente mais entradas do que saídas, deve existir algum nó com mais saídas do que entradas. E isso só é possível se ele tiver alguma dotação monetária positiva, contrariando a suposição.

Portanto, nosso estado final apresenta a forma:



Note também, que podemos ter nós sem nenhuma dotação monetária inicial, mas que completaram todas as suas transações. Então temos três tipos de nós no estágio final:

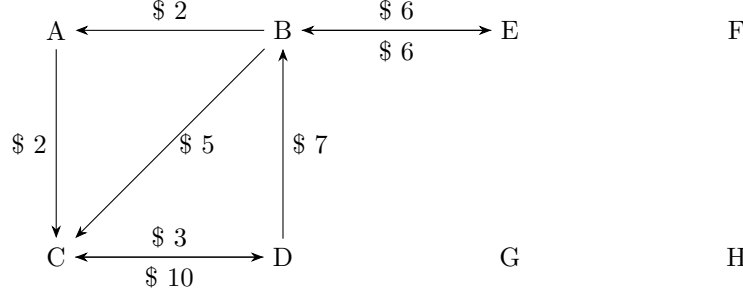
- 1) Nós sem dotação monetária (inicial e final), mas que realizaram todas as suas transações;
- 2) Nós com dotação monetária (inicial e final), mas que realizaram todas as suas transações
- 3) Nós sem dotação monetária (inicial e final), mas que **NÃO** realizaram todas as suas transações. Esses nós estão conectados com um número finito de outros nós que também não realizaram todas as suas transações, formando componentes conectados da matriz A_t .

Assim, se desfizemos as trocas (indução reversa) temos dois cenários:

- 1) As regiões conectadas nunca se conectam com nenhum dos nós do tipo 1 e do tipo 2. Nesse caso, a matriz A , como um todo, não é conectada;

- 2) A região conectada se conecta com pelo menos um dos nós do tipo 1 e do tipo 2.

Segue abaixo uma ilustração do segundo caso:



Note que, necessariamente nesse estágio, haverá uma dotação monetária positiva na região de nós do tipo 1 e do tipo 2 (chamada de $A_t(m)$) exatamente no nó que está conectado com a região conectada em si (chamada de $A_t(s)$, relativo a subgrafo). Na figura, o nó do tipo 1 ou 2 é representado por E , e nó do tipo 3 é representado por B . Para chegarmos no estágio final descrito, o que ocorreu, necessariamente, foi que a moeda entrou e saiu da região conectada $A(s)$. Ou seja, na figura, somente as duas transações de \$6 foram efetuadas. Sendo que pelo menos parte das demais transações é sempre possível. A transação de \$5 é completamente possível, a de \$2 também. E sabemos que, após uma rodada de transações nesse subgrafo, é sempre possível diminuir o saldo restante no subgrafo, e levar a dotação monetária de volta para B , pelo lema do estado final. Como sempre a mesma quantidade de moeda volta para B , para o nó conectado (pela propriedade descrita na equação 1), e há um valor finito de transações que esse nó deseja realizar, sabemos que após um número finito de rodadas podemos eliminar pelo menos um dos nós.

Portanto temos o procedimento:

- 1) Encontre um estágio final. Se ele não for o estágio final que esgota a matriz A , passe para o próximo passo;
- 2) Desfaça matrizes de subtransação (S) até que todas as regiões antes desconectadas voltem a ficar conectadas. Haverá dotação monetária em pelo menos um dos nós da região antes desconectada;
- 3) Realize o procedimento descrito no lema do estado final somente nesse subgrafo. Necessariamente iremos eliminar um número finito de nós desse subgrafo após esgotar todas as suas transações.
- 4) Se ainda restam transações a serem realizadas nessa região, volte para 2) e repita esse procedimento iterativamente até esgotar todas as transações a serem realizadas. Repita o mesmo procedimento para outras regiões desconectadas.
- 5) Atingimos a solução do problema: todos os nós do grafo estão desconectados mutuamente e a matriz de adjacência restante é zero

Portanto, uma matriz A genérica com variação de caixa zero é sempre factível, desde que seja conectada. Assim, temos o teorema:

Teorema 2: Uma matriz A conectada que satisfaz a condição $(A^T - A) \cdot \vec{1} = \vec{0}$ é factível monetariamente para qualquer vetor $\vec{w}_0 \geq \vec{0}$

A demonstração é o procedimento descrito acima.

□

3.5 Factibilidade forte do fluxo monetário

O problema se torna mais interessante quando estamos tratando de um modelo de equilíbrio geral com demanda por moeda. Se há demanda por moeda, a moeda aparece na função utilidade, ou seja, trata-se de um modelo *Money in Utility* (MIU). Nesse caso, não basta que a moeda realize todas as transações. Devemos satisfazer o equilíbrio parcial:

$$\sum_i x_i^m(p) = \sum_j y_j^m(p) + \sum_i e_i^m$$

Sendo x_i^m a demanda do indivíduo i por moeda e y_i^m a oferta do indivíduo i de moeda. Como nenhuma firma produz moeda, temos:

$$\sum_i x_i^m(p) = \sum_i e_i^m$$

Sendo e_i^m a dotação de moeda do indivíduo i , que na verdade denotamos aqui como w_0^i . Após concluídas as transações, temos $x_i^m = w_T^i$.

Agora, portanto, nosso problema de factibilidade monetária mudou. Não basta a moeda circular, esgotando todas as transações planejadas. Ela precisa também "parar" no lugar certo, com a pessoa certa, depois de realizar todas as trocas necessárias.

Assim, a condição forte de factibilidade do trio (w_0, w_T, A) , em que $|w_0|_s = |w_T|_s$ seria: A , w_0 e w_T são factíveis se

$$w_T = \left(\sum_{j=1}^n a_{j,i} - \sum_{j=1}^n a_{i,j} \right)_{i=1}^n + w_0 \quad (3)$$

e se existe $\{S_k\}_{k=1}^m$ tal que:

$$A = \sum_{k=1}^m S_k$$

Veremos que $w_T = w_d$ desde de que a restrição orçamentária seja satisfeita. Ou seja, a dotação de moeda demandada é a mesma que resulta das demais transações:

$$p * x^i \leq p * e^i + \sum_j \theta_{ij} \Pi_j \Rightarrow p * x_{-m}^i + p * x_m^i \leq p * e_{-m}^i + p * e_m^i + \sum_j \theta_{ij} \Pi_j$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p * x_{-m}^i + w_d^i &\leq p * e_{-m}^i + w_0^i + \sum_j \theta_{ij} \Pi_j \Rightarrow w^d \leq p * v^i - p * c^i + \sum_j \theta_{ij} \Pi_j + w_0^i \\ &\Rightarrow w_d^i \leq \sum_j a_{ji} - \sum_j a_{ij} + w_0^i \end{aligned}$$

Considerando o preço da moeda como numerário. Se somarmos as i desigualdades, temos:

$$|w_d| \leq |w_0|$$

Como sabemos que $|w_d| = |w_0|$ como condição de equilíbrio, todas as desigualdades devem valer como igualdade. Portanto:

$$w_d = (A^T - A) \cdot \mathbf{1} + w_0 = w_T$$

Note que esse resultado implica na Lei de Walras. Inclusive, trata-se de uma relação se e somente se. Se fizermos o mesmo procedimento considerando a desigualdade como igualdade, chegamos no resultado.

Teorema 2: Para toda matriz A fortemente conectada e todo par de vetores w_T e w_0 tal que $w_T = (\sum_{j=1}^n a_{j,i} - \sum_{j=1}^n a_{i,j})_{i=1}^n + w_0$, o trio (w_0, w_T, A) é factível. Ou seja, existe $\{S_k\}_{k=1}^m$ tal que:

$$A = \sum_{k=1}^m S_k$$

Sendo S_k da forma:

$$S_k := [s_{i,j}^k : (\forall i, j \in N, s_{i,j}^k \leq a_{i,j}^{k-1}) \wedge (\forall i \in N, \sum_j s_{i,j}^k \leq w_{k-1}^i)]_{n \times n}$$

Demonstração: Para essa demonstração, uma argumentação baseada em grafos é mais promissora do que uma argumentação baseada em álgebra matricial.

Suponha, por contradição, que não é factível. Suponha, além disso, que já realizamos o máximo de transações possíveis, e chegamos em um estado final. O lema do estado final nos garante a existência de um estado final em que mais nenhuma transação é possível. Isso significa que todos os nós que demandam moeda ($w_t^i > 0$) já realizaram todas as suas transações. Caso contrário, não estamos no estado final. As transações que restam são aquelas de nós que não têm moeda.

Note que para toda transação feita, temos a condição:

$$w_t^i = \sum_{j=1}^n s_{j,i}^t - \sum_{j=1}^n s_{i,j}^t + w_{t-1}^i$$

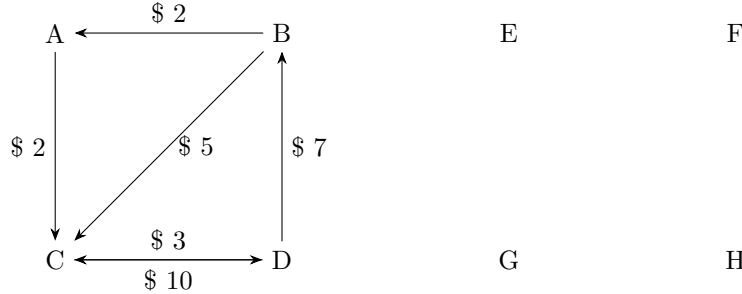
Ou então, se combinarmos várias matrizes de subtransação:

$$w_t^i = \sum_{j=1}^n s_{j,i}^t - \sum_{j=1}^n s_{i,j}^t + w_0^i$$

Todos os nós que completaram suas transações estão com a quantidade demandada de moeda. Caso contrário, se tivessem moeda de mais, significaria que $w_T^i < w_t^i$ o que implica ou que foram feitas compras de menos (o que implica que o indivíduo ainda pode fazer compras) ou vendas de mais (o que implica que o indivíduo realizou vendas que não desejava fazer).

Já no cenário em que $w_T^i > w_t^i$, vamos supor, inicialmente que o nó A realizou todas as suas compras e tem uma quantidade positiva de moeda, mas que seja inferior a quantidade demandada. Isso implica a existência de outro nó B, com zero moeda em estoque, mas que deseja realizar compras com A. Todavia, para ser capaz de realizar essas compras, o nó B precisa ter um volume de vendas maior ou igual ao volume de compras que realiza com A e demais nós. Se seguirmos esse processo indutivamente, chegamos a conclusão que tal cenário só é possível se existir pelo menos um indivíduo que deseja realizar compras e tem estoque de moeda (o que contradiz nossa suposição de estado final) ou se existir um indivíduo que deseja realizar compras mas não tem moeda (o que contradiz a hipótese de consistência do caixa). Portanto, o único estado final possível é aquele em que $w_T^i = w_t^i$, e não só isso, mas o vetor inteiro é satisfeito: $w_T = w_t$, já que caso haja alguma comunidade isolada com estoque de moeda e transações a serem feitas ainda, não estamos no estado final. Aqui, chamamos de comunidade isolada aquela que não é conectada com o restante dos nós do grafo, ou seja, um componente do grafo.

Portanto, a possibilidade de "existência de não factibilidade" seria em comunidades que não apresentam demanda líquida por moeda. Não pode existir nem compras nem vendas com os agentes que finalizaram suas transações. Pela condição de consistência do caixa, a quantidade inicial de moeda desses agentes também deve ser zero, caso contrário, teríamos agentes com quantidades negativas de moeda. Portanto, nosso estado final é da seguinte forma:



Em que E, F, G e H apresentam algum estoque de moeda, enquanto A, B, C e D não apresentam nenhum estoque de moeda.

Suponha, sem perda de generalidade, que as matrizes de subtransação contenham uma transação cada. Se revertermos as transações uma por uma, há duas possibilidades:

1) Não existiam transações entre a comunidade com moeda (representada na figura pelas letras de E a H) e a comunidade sem moeda (representada pelas letras de A a D). Isso por sua vez implica que a matriz A não é fortemente conectada (contradição!);

2) Existiam transações entre as duas comunidades, mas a moeda "entrou e saiu rapidamente". Ou seja, entrou e saiu sem completar todas as transações.

Para o segundo caso, temos uma situação parecida com o problema sem demanda por moeda, temos uma matriz de transação simétrica para essa comunidade isolada. Assim, como uma matriz de transação simétrica é sempre factível para uma quantidade não nula de moeda, e a dotação monetária sempre volta para o ponto de partida, temos que se desfizemos algumas transações, eventualmente conseguiremos voltar ao ponto em que podemos concluir todas as transações da comunidade isolada e, posteriormente, completar todas as transações da matriz completa. \square

Assim, concluímos que um equilíbrio geral MIU é sempre monetariamente factível. Mas o que esse resultado significa? Significa basicamente que se os agentes decidem os preços no começo do período de modo a garantir o equilíbrio, e se os agentes planejam suas transações, todas as transações planejadas serão possíveis de serem realizadas, desde que em uma ordem correta.

O resultado vai muito além disso. Ele nos diz basicamente que toda matriz de transações ex-ante é sempre possível desde que nossa dotação monetária satisfaça a condição:

$$w_t = (A^T - A) * \vec{1} + w_0$$

Ou seja, o resultado não precisa necessariamente ser aplicado a uma análise de equilíbrio geral. Todavia, é um resultado bastante útil no fortalecimento do conceito de equilíbrio geral, apesar da temporalidade do modelo em si não ser muito realista.

Além disso, esse resultado não diz nada sobre quantas transações serão necessárias para que consigamos eliminar todas as transações. Nem diz que vamos realmente completar todas as transações. Só estamos afirmando que é possível em tempo finito.

Essa discussão é uma porta de entrada para discutirmos problemas mais complexos envolvendo tempo de transações, velocidade da moeda, desutilidade intertemporal, endogeneidade da moeda etc.

4 Um modelo de "armadilha da moeda" e velocidade de circulação da moeda endógena

A partir do que discutimos na seção anterior, vimos que se as transações forem feitas na ordem errada, podemos criar comunidades em que as demandas por moeda são saciadas, mas os indivíduos não desejam realizar mais nenhuma transação, e comunidades em que deseja-se transacionar, mas não há moeda. Ou seja comunidades com moeda e sem troca, e comunidades com desejo pela troca mas sem moeda. Situações em que comunidades inteiras demandam liquidamente exatamente "zero" unidades monetárias pode parecer algo que quase certamente não ocorrerá, o que é verdade. Mas note que algo próximo disso já é uma situação "problemática" do ponto de vista de se atingir o equilíbrio. Se

a demanda líquida por moeda for muito próxima de zero em uma comunidade, pode ser que somente uma pequena quantidade de moeda entre na comunidade, fazendo com que seja necessário um número muito grande de matrizes de sub-transações para se atingir a alocação de equilíbrio, mesmo utilizando o procedimento visto anteriormente.

Então, a ideia aqui proposta é justamente modelar como trocas em ordens aleatórias podem gerar uma situação de iliquidez. Qual a probabilidade de cairmos em uma região próxima da "armadilha da moeda"? O que ocorre com a velocidade de circulação da moeda? Isso aumenta a preferência por moeda endogenamente? Essas situações de iliquidez promovem uma demanda maior por crédito comercial?

Outra ideia, seria avaliar a velocidade de circulação para diferentes matrizes de transação ex-ante. Como medidas de centralidade afetam a velocidade de circulação de moeda?