

张量频域方法：从 DFT 对角化到 T-Product 与 T-SVD

学习笔记

1 块循环矩阵傅里叶对角化证明

本文提供了块循环矩阵傅里叶对角化性质的严格证明，这是张量-张量积（t-product）框架的基础。

1.1 符号与预备知识

设 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 为一个三阶张量。我们定义：

- $\mathbf{A}^{(k)}$ 为 \mathcal{A} 的第 k 个正面切片
- $\bar{\mathbf{A}}^{(i)}$ 为 $\bar{\mathcal{A}}$ 的第 i 个正面切片，即 $\bar{\mathcal{A}}(:, :, i)$
- $\bar{\mathbf{A}}$ 为由 $\bar{\mathcal{A}}$ 的正面切片构成的块对角矩阵：

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}^{(1)} & & & \\ & \bar{\mathbf{A}}^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\mathbf{A}}^{(n_3)} \end{bmatrix}$$

- $\text{bcirc}(\mathcal{A})$ 为 \mathcal{A} 的块循环矩阵

$$\text{bcirc}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(1)} & \mathbf{A}^{(n_3)} & \dots & \mathbf{A}^{(2)} \\ \mathbf{A}^{(2)} & \mathbf{A}^{(1)} & \dots & \mathbf{A}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}^{(n_3)} & \mathbf{A}^{(n_3-1)} & \dots & \mathbf{A}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (1)$$

- \mathbf{F}_{n_3} 为 $n_3 \times n_3$ 的 DFT 矩阵

$$\mathbf{F}_{n_3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n_3-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n_3-1} & \omega^{2(n_3-1)} & \dots & \omega^{(n_3-1)(n_3-1)} \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中 $\omega = e^{-\frac{2\pi i}{n_3}}$ 。

- \mathbf{I}_n 为 $n \times n$ 单位矩阵
- \otimes 为 Kronecker 积

Kronecker 积示例：设 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ ，则它们的 Kronecker 积为：

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \cdot \mathbf{B} & 2 \cdot \mathbf{B} \\ 3 \cdot \mathbf{B} & 4 \cdot \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 10 \\ 6 & 7 & 12 & 14 \\ 0 & 15 & 0 & 20 \\ 18 & 21 & 24 & 28 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Kronecker 积的作用是将矩阵 \mathbf{A} 的每个元素替换为标量乘法 $a_{ij}\mathbf{B}$ ，从而构建更大的块矩阵。

1.2 步骤 1：向量情况性质回顾

对于任意向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ，我们有基本性质：

$$\mathbf{F}_n \cdot \text{circ}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{F}_n^{-1} = \text{Diag}(\bar{\mathbf{v}}) \quad (4)$$

其中 $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_n \mathbf{v}$ 是 \mathbf{v} 的 DFT， $\text{circ}(\mathbf{v})$ 是由 \mathbf{v} 生成的循环矩阵。

1.3 步骤 2：块循环矩阵的 Kronecker 和表示

块循环矩阵 $\text{bcirc}(\mathcal{A})$ 可以表示为 Kronecker 和：

$$\text{bcirc}(\mathcal{A}) = \sum_{k=1}^{n_3} \mathbf{P}^{k-1} \otimes \mathbf{A}^{(k)} \quad (5)$$

其中 \mathbf{P} 是 $n_3 \times n_3$ 的循环移位矩阵：

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

左乘置换矩阵 \mathbf{P} 的作用是对被乘矩阵进行行置换操作，具体而言：

- 对于任意矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，左乘 \mathbf{P} 将 \mathbf{A} 的最后一行循环移到第一行
- 其余各行依次向下移动一行位置

示例说明

考虑 4×4 矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$

左乘 \mathbf{P} 的效果：

$$\mathbf{P}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

以此类推：多次左乘 \mathbf{P} 的效果

- 一次左乘 $\mathbf{P}\mathbf{A}$ ：最后一行移到第一行

行顺序： $4 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$

- 二次左乘 $\mathbf{P}^2\mathbf{A}$ ：倒数第二行移到第一行

$$\mathbf{P}^2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

行顺序： $3 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2$

- 三次左乘 $P^3 A$: 倒数第三行移到第一行

$$P^3 A = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{bmatrix}$$

行顺序: $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$

- 四次左乘 $P^4 A$: 回到原始矩阵 (单位变换)

$$P^4 = I, \quad P^4 A = A$$

矩阵 P 生成了一个循环群: $\{I, P, P^2, P^3, \dots, P^{n-1}\}$ 。这种循环移位操作在张量分解、傅里叶分析和循环矩阵理论中具有重要应用。

1.4 步骤 3: 对每个 Kronecker 项应用 DFT 变换

对于任意 $k = 1, \dots, n_3$, 考虑项 $P^{k-1} \otimes A^{(k)}$ 的变换:

$$(F_{n_3} \otimes I_{n_1}) \cdot (P^{k-1} \otimes A^{(k)}) \cdot (F_{n_3}^{-1} \otimes I_{n_2}) \quad (7)$$

利用 Kronecker 积的混合乘积性质:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD) \quad (8)$$

我们得到:

$$(F_{n_3} \otimes I_{n_1}) \cdot (P^{k-1} \otimes A^{(k)}) \cdot (F_{n_3}^{-1} \otimes I_{n_2}) = (F_{n_3} P^{k-1} F_{n_3}^{-1}) \otimes (I_{n_1} A^{(k)} I_{n_2}) \quad (9)$$

由于 $I_{n_1} A^{(k)} I_{n_2} = A^{(k)}$, 这简化为:

$$(F_{n_3} \otimes I_{n_1}) \cdot (P^{k-1} \otimes A^{(k)}) \cdot (F_{n_3}^{-1} \otimes I_{n_2}) = (F_{n_3} P^{k-1} F_{n_3}^{-1}) \otimes A^{(k)} \quad (10)$$

1.5 步骤 4: 循环移位矩阵的对角化

根据方程 (4), 对于循环移位矩阵 P , 我们有:

$$F_{n_3} P F_{n_3}^{-1} = \text{Diag}(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n_3-1}) \quad (11)$$

其中 $\omega = e^{-2\pi i/n_3}$ 。

对于任意幂次 $k-1$, 有:

$$\begin{aligned} F_{n_3} P^{k-1} F_{n_3}^{-1} &= (F_{n_3} P F_{n_3}^{-1})^{k-1} \\ &= \text{diag}(1, \omega^{k-1}, \omega^{2(k-1)}, \dots, \omega^{(n_3-1)(k-1)}). \end{aligned} \quad (12)$$

令 $\Omega = \text{Diag}(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n_3-1})$, 则:

$$F_{n_3} P^{k-1} F_{n_3}^{-1} = \Omega^{k-1} \quad (13)$$

1.6 步骤 5：组合所有项

现在考虑完整的变换：

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{F}_{n_3} \otimes \mathbf{I}_{n_1}) \cdot \text{bcirc}(\mathcal{A}) \cdot (\mathbf{F}_{n_3}^{-1} \otimes \mathbf{I}_{n_2}) \\
&= \sum_{k=1}^{n_3} (\mathbf{F}_{n_3} \otimes \mathbf{I}_{n_1}) \cdot (\mathbf{P}^{k-1} \otimes \mathbf{A}^{(k)}) \cdot (\mathbf{F}_{n_3}^{-1} \otimes \mathbf{I}_{n_2}) \\
&= \sum_{k=1}^{n_3} (\mathbf{F}_{n_3} \mathbf{P}^{k-1} \mathbf{F}_{n_3}^{-1}) \otimes \mathbf{A}^{(k)} \quad (\text{由方程 10}) \\
&= \sum_{k=1}^{n_3} \boldsymbol{\Omega}^{k-1} \otimes \mathbf{A}^{(k)} \quad (\text{由方程 13})
\end{aligned} \tag{14}$$

1.7 步骤 6：将结果表示为块对角矩阵

考虑矩阵 $\sum_{k=1}^{n_3} \boldsymbol{\Omega}^{k-1} \otimes \mathbf{A}^{(k)}$ 。这是一个块矩阵，其 (i, j) -th 块为：

$$\left[\sum_{k=1}^{n_3} \boldsymbol{\Omega}^{k-1} \otimes \mathbf{A}^{(k)} \right]_{ij} = \sum_{k=1}^{n_3} [\boldsymbol{\Omega}^{k-1}]_{ij} \mathbf{A}^{(k)} \tag{15}$$

由于 $\boldsymbol{\Omega}$ 是对角矩阵， $\boldsymbol{\Omega}^{k-1}$ 也是对角矩阵：

$$\boldsymbol{\Omega}^{k-1} = \text{Diag}(1, \omega^{k-1}, \omega^{2(k-1)}, \dots, \omega^{(n_3-1)(k-1)}) \tag{16}$$

因此：

$$[\boldsymbol{\Omega}^{k-1}]_{ij} = \delta_{ij} \omega^{(i-1)(k-1)} \tag{17}$$

其中 δ_{ij} 是 Kronecker delta，当 $i = j$ 时 $\delta_{ij} = 1$ ，当 $i \neq j$ 时 $\delta_{ij} = 0$ 。

因此：

$$\left[\sum_{k=1}^{n_3} \boldsymbol{\Omega}^{k-1} \otimes \mathbf{A}^{(k)} \right]_{ij} = \delta_{ij} \sum_{k=1}^{n_3} \omega^{(i-1)(k-1)} \mathbf{A}^{(k)} \tag{18}$$

1.8 步骤 7：与 DFT 的本质联系

现在考虑张量 \mathcal{A} 的离散傅里叶变换。根据定义，张量的 DFT 通过对第三维度进行快速傅里叶变换实现：

$$\bar{\mathcal{A}} = \text{fft}(\mathcal{A}, [], 3) \tag{19}$$

这一操作的数学本质是：对张量中每个管向量 $\mathcal{A}(i, j, :)$ 独立地应用相同向量版的 DFT 变换，即

$$\bar{\mathcal{A}}(i, j, :) = \mathbf{F}_{n_3} \cdot \mathcal{A}(i, j, :) \tag{20}$$

其中 \mathbf{F}_{n_3} 是 $n_3 \times n_3$ 的 DFT 矩阵。

在矩阵表示层面，这一变换等价于通过 DFT 矩阵元素构造频域切片：

$$\bar{\mathbf{A}}^{(i)} = \sum_{k=1}^{n_3} \omega^{(i-1)(k-1)} \mathbf{A}^{(k)} \tag{21}$$

这一表达式与我们在方程 (18) 中通过严谨推导得到的结果完全一致！

因此，我们建立了关键的等价关系：

$$\left[\sum_{k=1}^{n_3} \boldsymbol{\Omega}^{k-1} \otimes \mathbf{A}^{(k)} \right]_{ij} = \delta_{ij} \bar{\mathbf{A}}^{(i)} \tag{22}$$

这一结果表明：复杂的块循环矩阵傅里叶对角化过程，本质上等价于对张量所有管向量进行并行 DFT 变换。频域张量 $\bar{\mathcal{A}}$ (注意： $\bar{\mathcal{A}}(i, j, :) = \mathbf{F}_{n_3} \cdot \mathcal{A}(i, j, :)$) 的几何解释是：它由经过 DFT 变换后的管向量 $\bar{\mathcal{A}}(i, j, :)$ 按照原始空间位置 (i, j) 重新组合而成，而对角化操作本质上就是将这些频域切片沿对角线“铺展”为块对角矩阵形式。

1.9 步骤 8：最终结果

我们已经证明：

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{F}_{n_3} \otimes \mathbf{I}_{n_1}) \cdot \text{bcirc}(\mathcal{A}) \cdot (\mathbf{F}_{n_3}^{-1} \otimes \mathbf{I}_{n_2}) \\
 &= \sum_{k=1}^{n_3} \mathbf{\Omega}^{k-1} \otimes \mathbf{A}^{(k)} \\
 &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}^{(1)} & & & \\ & \bar{\mathbf{A}}^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\mathbf{A}}^{(n_3)} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{A}}
 \end{aligned} \tag{23}$$

1.10 总结

通过基于 Kronecker 积和循环矩阵对角化的严格推导，我们清晰地证明了：

1. 块循环矩阵分解：

$$\text{bcirc}(\mathcal{A}) = \sum_{k=1}^{n_3} \mathbf{P}^{k-1} \otimes \mathbf{A}^{(k)}$$

2. 循环移位矩阵的 DFT 对角化：

$$\mathbf{F}_{n_3} \mathbf{P} \mathbf{F}_{n_3}^{-1} = \mathbf{\Omega} = \text{Diag}(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n_3-1})$$

3. 变换在频域产生块对角矩阵：

$$(\mathbf{F}_{n_3} \otimes \mathbf{I}_{n_1}) \cdot \text{bcirc}(\mathcal{A}) \cdot (\mathbf{F}_{n_3}^{-1} \otimes \mathbf{I}_{n_2}) = \bar{\mathbf{A}}$$

这个推导不仅提供了数学上的严谨性，还揭示了 t-product 与传统循环卷积之间的深刻联系，为理解基于 t-product 的张量代数提供了更清晰的数学基础。

特别值得注意的是，上述推导框架具有普适性：当我们将张量情况退化到向量情况时，只需将正面切片 $\mathbf{A}^{(k)}$ 视为标量 v_k ，同时 Kronecker 积退化为普通标量乘法，即可完全复现向量 FFT 对角化公式：

$$\mathbf{F}_n \cdot \text{circ}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{F}_n^{-1} = \text{Diag}(\bar{\mathbf{v}})$$

这表明张量傅里叶对角化是向量情况的自然推广，体现了数学理论从低维到高维的优美统一性。

2 深刻理解：从向量 DFT 到张量 DFT 的并行化视角

核心洞察 1. 看似复杂的张量傅里叶变换本质上是多个向量 **DFT** 的并行执行，其中张量的每个管都经过独立的 **DFT** 处理。

2.1 向量情况与张量情况的对应关系

2.1.1 向量情况（论文中公式 6）

对于向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_3}$ ：

$$\bar{v}_k = \sum_{m=1}^{n_3} v_m \cdot e^{-2\pi i(k-1)(m-1)/n_3} \tag{24}$$

- 输入：向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_3}$
- 输出：向量 $\bar{\mathbf{v}} \in \mathbb{C}^{n_3}$
- 操作：单个向量 DFT

2.1.2 张量情况

对于张量 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$:

$$\bar{\mathcal{A}}(i, j, k) = \sum_{m=1}^{n_3} \mathcal{A}(i, j, m) \cdot e^{-2\pi i(k-1)(m-1)/n_3} \quad (25)$$

- 输入: 张量 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$
- 输出: 张量 $\bar{\mathcal{A}} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$
- 操作: $n_1 \times n_2$ 个独立的向量 DFT

2.2 关键洞察: 并行计算

核心理解 1. “矩阵形式需要计算 $n_1 \times n_2$ 次而向量形式只需要一次”的说法可以更精确地表述为:
不是“顺序计算多次”, 而是“并行计算 $n_1 \times n_2$ 个独立的向量 DFT”。

每个管 $\mathcal{A}(i, j, :)$ 的 DFT 与其他管完全独立。在计算上, 这可以通过向量化操作高效实现:

```
# 实际计算: 一次性对所有管进行FFT
A_hat = np.fft.fft(A, axis=2) # 沿第三维进行FFT
```

2.3 从张量到块对角矩阵的转换

核心洞察 2. 块对角矩阵 $\bar{\mathbf{A}}$ 是通过切片并重组这些并行 DFT 操作的结果构建的。本质上, 对角化 $\bar{\mathbf{v}}$ 中的每个位置变成了一个矩阵, 该矩阵由从所有 (i, j) 管 DFT 在该频率位置的元素收集而成。

2.3.1 逐步转换过程

步骤 1: 管向量 DFT

对于每个固定的 (i, j) 空间位置, 独立计算管向量的离散傅里叶变换:

$$\bar{\mathcal{A}}(i, j, :) = \text{FFT}(\mathcal{A}(i, j, :)) \quad (26)$$

此过程并行且独立地处理了 $n_1 \times n_2$ 个管向量, 体现了算法的高度并行性。

步骤 2: 构造频域切片

对于每个固定的频率索引 k , 从所有空间位置 (i, j) 提取对应的第 k 个频率分量:

$$\bar{\mathbf{A}}^{(k)}[i, j] = \bar{\mathcal{A}}(i, j, k) \quad (27)$$

由此构造出第 k 个频域切片矩阵 $\bar{\mathbf{A}}^{(k)} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$, 每个切片包含了所有空间位置在该频率下的响应。

步骤 3: 构建块对角矩阵

将所有频域切片沿主对角线排列, 形成块对角矩阵:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}^{(1)} & & & \\ & \bar{\mathbf{A}}^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\mathbf{A}}^{(n_3)} \end{bmatrix} \quad (28)$$

这一构造过程与向量形式的傅里叶对角化建立了深刻的直觉联系: 对于向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_3}$, 其对角化形式为

$$\mathbf{F}_{n_3} \cdot \text{circ}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{F}_n^{-1} = \text{Diag}(\bar{\mathbf{v}}) = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 & & & \\ & \bar{v}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{v}_{n_3} \end{bmatrix} \quad (29)$$

通过一个直观的比喻可以更好地理解这种推广关系：向量情况相当于将单根火腿肠切成 n_3 段，然后将每一段依次放置在对角线方格中；而张量情况则相当于将多根火腿肠（共 $n_1 \times n_2$ 根）捆绑在一起进行同步切割，原本每个切割位置只得到单块火腿肠，现在则得到由多根火腿肠对应位置切片组成的“火腿肠束”，然后将这些“火腿肠束”作为一个整体单元放置到对角线对应位置。这种从标量分量到矩阵切片的推广，生动体现了从一维信号处理到多维张量处理的数学统一性。

2.4 为什么这种视角很重要

2.4.1 计算效率

- 利用现代计算架构：管 DFT 的并行性质完美匹配现代并行计算范式
- 同时计算：所有管 FFT 可以并发计算而不是顺序计算
- 解释基于 FFT 的效率：这种视角阐明了为什么基于 FFT 的 t-product 实现如此计算高效

2.4.2 理论清晰性

- 复杂度的分解：将复杂的张量操作分解为熟悉的向量操作
- 直观的理论分析：使理论分析和证明更加直观和易于理解
- 域间的桥梁：在时域张量操作和频域矩阵操作之间建立了清晰的联系

2.4.3 算法设计

- 高效的分块算法：支持设计更高效的基于块的算法
- 硬件优化：便于针对特定硬件架构进行优化（如 GPU 加速）
- 可扩展的实现：支持开发用于大规模张量处理的可扩展实现

2.5 与原始论文的联系

在原始的 Tensor RPCA 论文中，这个过程被形式化为：

2.5.1 三步形式化

1. 时域： $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 的块循环矩阵表示
2. 变换：通过 Kronecker 积与 DFT 矩阵进行对角化
3. 频域：获得块对角矩阵 $\bar{\mathcal{A}}$

核心洞察 3. 关键启示：这个看似复杂的矩阵变换本质上是所有管向量的并行 *DFT*。形式化的数学框架提供了严谨性，而并行 *DFT* 视角提供了计算直觉。

2.6 深刻理解的总结

2.6.1 关键验证

- 张量性质确认： $\bar{\mathcal{A}}$ 是一个 $n_1 \times n_2 \times n_3$ 的张量
- 独立处理：每个管 $\mathcal{A}(i, j, :)$ 都经过独立的向量 DFT
- 构建方法：块对角矩阵 $\bar{\mathcal{A}}$ 是通过“切片并重组”这些 DFT 结果获得的
- 并行化本质：这本质上是 $n_1 \times n_2$ 个向量 DFT 的并行化

2.6.2 对 Tensor RPCA 的意义

这种理解不仅正确，而且比原始论文中的形式化描述更加直观。它揭示了 Tensor RPCA 能够高效处理大规模数据的根本原因：

根本原因：复杂的张量操作被分解为大量可以高度并行化的简单向量操作。

2.6.3 科学计算的经典模式

这体现了科学计算中的经典模式：

通过适当的数学重构，复杂问题被转化为可以高度并行化的简单问题。

张量傅里叶变换展示了复杂的数学构造如何可以被理解为优雅的计算模式，弥合了理论优雅与实际效率之间的差距。

3 论文中公式 (9) 的直观证明

3.1 论文中公式 (9) 内容

对于任何实向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ，其 DFT 变换 $\bar{\mathbf{v}}$ 满足：

1. $\bar{v}_1 \in \mathbb{R}$ （第一个分量是实数）
2. $\text{conj}(\bar{v}_i) = \bar{v}_{n-i+2}$, $i = 2, \dots, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ （共轭对称性）

3.2 直观证明

3.2.1 第一个分量实数性的证明

设 DFT 矩阵 F_n 的第 (i, m) 元素为 $\omega^{(i-1)(m-1)}$ ，其中 $\omega = e^{-\frac{2\pi i}{n}}$ 。

对于第一个分量 \bar{v}_1 ：

$$\bar{v}_1 = \sum_{m=1}^n v_m \cdot \omega^{(1-1)(m-1)} = \sum_{m=1}^n v_m \cdot \omega^0 = \sum_{m=1}^n v_m \cdot 1 \quad (30)$$

由于所有 v_m 都是实数，它们的和自然也是实数。

几何解释：DFT 矩阵的第一行对应“零频率”分量（直流分量），所有旋转因子都是 1，相当于对信号进行简单求和，没有复平面上的旋转，所以结果落在实轴上。

3.2.2 共轭对称性的证明

考虑第 i 个分量和第 $n-i+2$ 个分量：

第 i 个分量：

$$\bar{v}_i = \sum_{m=1}^n v_m \cdot \omega^{(i-1)(m-1)} \quad (31)$$

第 $n-i+2$ 个分量：

$$\bar{v}_{n-i+2} = \sum_{m=1}^n v_m \cdot \omega^{(n-i+1)(m-1)} \quad (32)$$

利用 ω 的性质：

$$\begin{aligned} \omega^{(n-i+1)(m-1)} &= e^{-\frac{2\pi i}{n}(n-i+1)(m-1)} = e^{\frac{-2\pi i(m-1)n + 2\pi i(i-1)(m-1)}{n}} \\ &= e^{-2\pi i(m-1)} \cdot e^{\frac{2\pi i}{n}(i-1)(m-1)} = 1 \cdot \omega^{-(i-1)(m-1)} \end{aligned} \quad (33)$$

由于 $\omega^{-(i-1)(m-1)} = \text{conj}(\omega^{(i-1)(m-1)})$, 且 v_m 是实数, 所以:

$$\bar{v}_{n-i+2} = \sum_{m=1}^n v_m \cdot \text{conj}(\omega^{(i-1)(m-1)}) = \text{conj}\left(\sum_{m=1}^n v_m \cdot \omega^{(i-1)(m-1)}\right) = \text{conj}(\bar{v}_i) \quad (34)$$

几何解释:

- 第 i 行对应以角度 $-\frac{2\pi(i-1)}{n}$ 在复平面上旋转
- 第 $n-i+2$ 行对应以角度 $+\frac{2\pi(i-1)}{n}$ 在复平面上旋转
- 这两个旋转方向相反, 但幅度相同
- 当与实向量 \mathbf{v} 内积时, 它们的实部投影相同, 虚部投影相反

3.2.3 张量情况的推广

现在考虑张量 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 。根据之前的分析, 张量的 DFT 等价于对每个管向量 $\mathcal{A}(i, j, :)$ 独立进行 DFT:

$$\bar{\mathcal{A}}(i, j, :) = \mathbf{F}_{n_3} \cdot \mathcal{A}(i, j, :), \quad \forall i = 1, \dots, n_1, j = 1, \dots, n_2 \quad (35)$$

由于 $\mathcal{A}(i, j, :)$ 是实向量, 对于每个固定的 (i, j) , 我们有:

- $\bar{\mathcal{A}}(i, j, 1) \in \mathbb{R}$
- $\text{conj}(\bar{\mathcal{A}}(i, j, k)) = \bar{\mathcal{A}}(i, j, n_3 - k + 2)$, 对于 $k = 2, \dots, \lfloor \frac{n_3+1}{2} \rfloor$

由于这对所有 (i, j) 都成立, 因此在张量层面我们有:

- $\bar{\mathcal{A}}^{(1)} = \bar{\mathcal{A}}(:, :, 1) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$
- $\text{conj}(\bar{\mathcal{A}}^{(k)}) = \bar{\mathcal{A}}^{(n_3-k+2)}$, 对于 $k = 2, \dots, \lfloor \frac{n_3+1}{2} \rfloor$

3.3 在 Tensor RPCA 中的重要性

- **保证实值性:** 当对实值张量进行 FFT 和逆 FFT 时, 共轭对称性确保最终结果仍是实值
- **计算效率:** 只需计算前 $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ 个频域分量, 其余可通过对称性得到
- **算法正确性:** 在 t-SVD 中, 利用这个性质构造实值张量 \mathcal{U} 和 \mathcal{V}

4 DFT 的几何解释: 竹签插入模型与相干叠加

4.1 核心洞察: 固定间隔的竹签插入

核心洞察 4. 离散傅里叶变换 (DFT) 可以直观地理解为在复平面上以不同间隔插入竹签并进行向量合成的过程。这个模型将抽象的频域分析转化为直观的几何操作。

4.2 先验解释: 复平面上的向量旋转

考虑第 i 个分量, DFT 公式如下:

$$\bar{v}_i = \sum_{m=1}^n v_m \cdot \omega^{(i-1)(m-1)} \quad (36)$$

在深入理解竹签插入模型之前, 我们需要先理解 DFT 中核心项 $v_m \cdot \omega^{(i-1)(m-1)}$ 的几何意义。

如图 1 所示, DFT 中的每一项 $v_m \cdot \omega^{(i-1)(m-1)}$ 可以理解为:

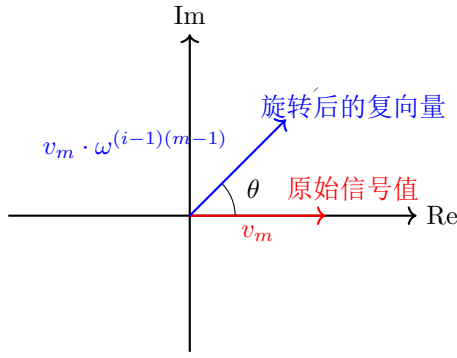


图 1: $v_m \cdot \omega^{(i-1)(m-1)}$ 的几何意义: 将实轴上的信号值 v_m 旋转到复平面上的特定角度

- v_m : 在时间点 m 的信号值, 最初位于实轴上
- $\omega^{(i-1)(m-1)}$: 旋转算子, 将 v_m 旋转角度 $\theta = \frac{2\pi(i-1)(m-1)}{n}$
- 结果: 得到一个在复平面上的向量, 长度为 $|v_m|$, 方向由 θ 决定

这个旋转操作的本质是: $\omega = e^{-2\pi i/n}$ 是一个单位复数, ω^k 表示在复平面上逆时针旋转 $k \times \frac{2\pi}{n}$ 弧度。

4.3 竹签插入模型的精确描述

想象一个单位圆盘坐落在由实轴和虚轴张成的二维平面 (即复平面) 中, 圆周被等分为 n 个位置:

- m (竹签序号): 表示插入竹签的完成进度 (第 1 根、第 2 根... 第 n 根)
- i (频率索引): 控制插入竹签的固定间隔以及总共需要的圈数

4.4 竹签插入模式示例 ($n = 12$)

为了更直观地理解竹签插入模型, 我们以 $n = 12$ 的单位圆为例, 展示不同 i 值对应的插入模式。在此模型中:

- 竹签颜色: 表示插入的时间顺序对应时间索引 $m = 1, 2, \dots, 12$
- 竹签长度: 表示信号的强度或权重 $|v_m|$, 在此示例中采用正弦变化 $v_m = 1.0 + 0.5 \sin(30^\circ \times m)$ 来模拟真实信号的幅度变化
- 插入间隔: 由频率索引 i 决定, 间隔为 $i - 1$, 决定了竹签在圆周上的分布模式
- 总圈数: 插入 n 根竹签需要 $i - 1$ 圈, 反映了频率的高低

这种几何表示使我们能够直观地理解 DFT 的工作原理: 对于每个频率 i , 我们测试在该插入模式下, 信号中不同时间点的分量 (不同颜色的竹签) 是否会相干叠加 (方向一致) 还是相互抵消 (方向分散)。

4.4.1 插入规则

对于每个频率 i :

- 起始位置: 第 1 根竹签插在角度 0 的位置
- 固定间隔: 相邻竹签之间的角度间隔为 $(i - 1)$ 个单位圆 n 等分单位。
- 圈数计算: 插入 n 根竹签需要 $i - 1$ 圈

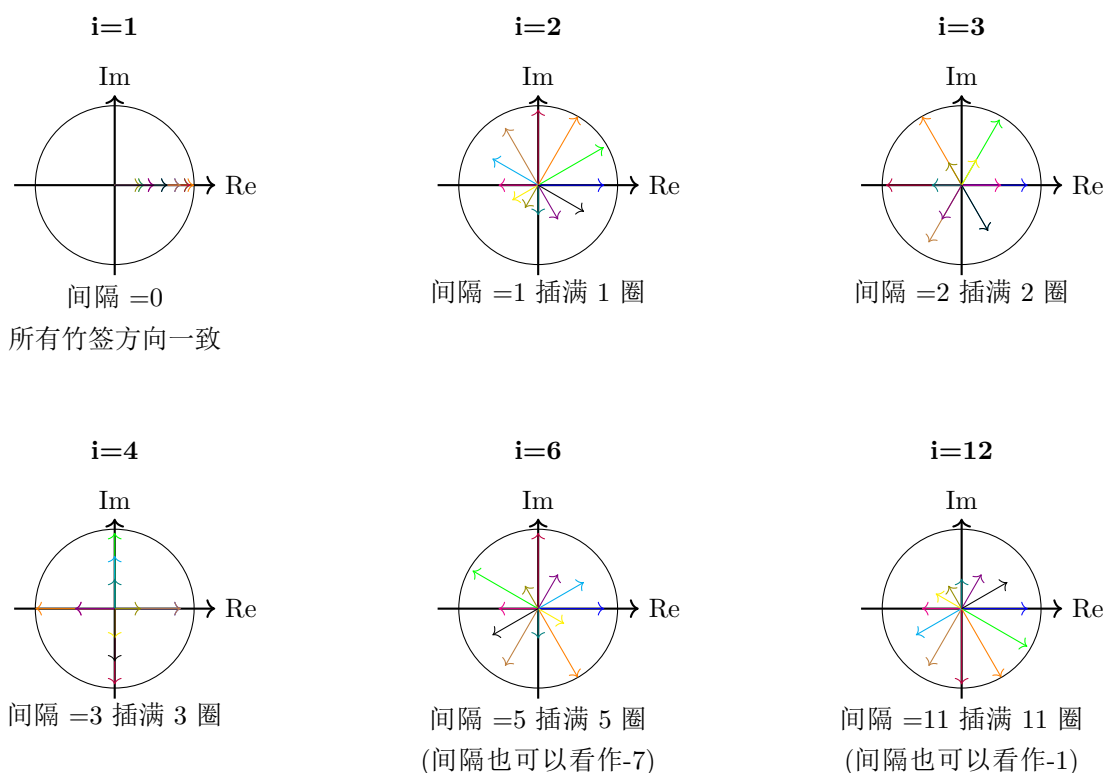


图 2: $n = 12$ 时不同 i 值的竹签插入模式示意图（竹签颜色表示时间顺序，竹签长度表示信号强度）

4.4.2 具体插入模式

- $i = 2$: 间隔 = 1, 从位置 0 开始, 插入第 1 根 \rightarrow 第 2 根 $\rightarrow \dots \rightarrow$ 第 n 根, 刚好插满 1 圈
- $i = 3$: 间隔 = 2, 插入 n 根竹签需要 2 圈才能插完
- $i = n$: 间隔 = $n - 1$, 插入 n 根竹签需要 $n - 1$ 圈, 从压缩视角看, 相当于以间隔 -1 插入竹签, 因此与 $i = 2$ 的方向相反

4.5 DFT 求和的几何意义

DFT 求和过程:

$$\bar{v}_i = \sum_{m=1}^n v_m \cdot \omega^{(i-1)(m-1)}$$

这个过程的本质是在问:

核心问题: “在以间隔 $i - 1$ 插入竹签的方式下, 那些数值大 ($|v_m|$ 大) 的竹签, 是会聚集在一起相互增强, 还是会分散开来相互抵消?”

4.6 共轭对称性的自然几何结果

由于圆盘的对称性:

- i 和 $n - i + 2$ 的插入模式是镜像对称的
- 对应的竹签方向关于实轴对称
- 因此它们的实部投影相同, 虚部投影相反 \rightarrow 结果共轭

4.7 频率分析与相干叠加的物理意义

核心理解 2. 傅里叶变换的本质是通过**相干叠加原理**来探测信号的内在结构。不同的频率索引 i 对应不同的**相干叠加模式**，通过测试信号在不同叠加模式下的响应来识别其频率成分。

具体而言，对于每个频率索引 i ：

- $i = 1$ (**零频率模式**)：所有竹签方向一致，检测信号的**直流分量**或总体偏移
- $i = 2$ (**基频模式**)：竹签均匀分布在一圈中，检测信号的**基频振荡成分**
- i 增大 (**高频模式**)：竹签分布在更多圈中，对应检测**更高频的振荡模式**
- i 接近 n (**奈奎斯特频率**)：竹签呈现最大程度的反向排列，检测**最高可分辨频率成分**

这一机制解释了傅里叶分析的核心原理：

- **周期性信号**在特定 i 值下会产生大的 DFT 分量，因为其内在周期性与该 i 值对应的叠加模式**相位匹配**
- **噪声信号**在所有 i 值下 DFT 分量都很小，因为其随机性导致竹签方向**随机分布**
- **频率成分识别**对应于寻找那些能让信号强分量**相干增强**的叠加模式

因此，傅里叶分析本质上是一个**模式匹配过程**：通过系统地测试所有可能的相干叠加模式，来识别信号中存在的周期性结构。

4.8 在 Tensor RPCA 中的延伸应用

当我们将这个概念扩展到张量：

- 每个管向量 $\mathcal{A}(i, j, :)$ 都经历这样的”竹签叠加”过程
- $n_1 \times n_2$ 个管向量**并行进行**各自的旋转叠加
- 最终得到频域张量 $\bar{\mathcal{A}}$ ，其中每个切片 $\bar{\mathcal{A}}^{(k)}$ 包含了所有空间位置在频率 k 上的”合成竹签”

4.9 总结：从抽象数学到直观几何

核心洞察 5. 竹签插入模型在保持几何直观性的同时，与离散傅里叶变换的数学框架完全相容：

1. m 代表插入进度， i 代表插入间隔和所需圈数
2. **DFT** 结果的大小反映了在某种插入模式下，重要竹签的**相干程度**
3. 频率分析本质上是在寻找那些能让信号强分量**方向一致**的插入模式

这种理解将抽象的频域概念转化为直观的几何操作，为理解更复杂的信号处理理论（如小波变换、滤波器组等）提供了强大的直觉基础。在 Tensor RPCA 中，这种几何视角帮助我们理解为什么基于 t-product 的方法能够有效捕捉多维数据中的低维结构。

5 论文中公式 (12) 和 (13) 的证明

5.1 Parseval 定理

定理 1 (Parseval 定理). 对于任意向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ 及其 DFT 变换 $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_n \mathbf{v}$, 有:

$$\sum_{k=1}^n |v_k|^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\bar{v}_k|^2 \quad (37)$$

即 $\|\mathbf{v}\|_2^2 = \frac{1}{n} \|\bar{\mathbf{v}}\|_2^2$ 。

证明. 由于 DFT 矩阵满足 $\mathbf{F}_n^* \mathbf{F}_n = n \mathbf{I}_n$, 我们有:

$$\begin{aligned} \|\bar{\mathbf{v}}\|_2^2 &= \bar{\mathbf{v}}^* \bar{\mathbf{v}} = (\mathbf{F}_n \mathbf{v})^* (\mathbf{F}_n \mathbf{v}) = \mathbf{v}^* \mathbf{F}_n^* \mathbf{F}_n \mathbf{v} \\ &= \mathbf{v}^* (n \mathbf{I}_n) \mathbf{v} = n \mathbf{v}^* \mathbf{v} = n \|\mathbf{v}\|_2^2 \end{aligned}$$

因此 $\|\mathbf{v}\|_2^2 = \frac{1}{n} \|\bar{\mathbf{v}}\|_2^2$ 。 □

核心理解 3. Parseval 定理体现了傅里叶变换的能量守恒性质: 信号在时域和频域的总能量保持不变 (差一个由 DFT 归一化方式决定的缩放因子)。在论文使用的非归一化 DFT 定义下, 时域能量是频域能量的 $1/n$ 倍。

5.2 论文中公式 (12): 范数等价性 $\|\mathcal{A}\|_F = \frac{1}{\sqrt{n_3}} \|\bar{\mathcal{A}}\|_F$

证明. 由 Frobenius 范数的定义和 Parseval 定理:

$$\begin{aligned} \|\bar{\mathcal{A}}\|_F^2 &= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} |\bar{\mathcal{A}}(i, j, k)|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \left(\sum_{k=1}^{n_3} |\bar{\mathcal{A}}(i, j, k)|^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \left(n_3 \sum_{m=1}^{n_3} |\mathcal{A}(i, j, m)|^2 \right) \quad (\text{Parseval 定理}) \\ &= n_3 \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{m=1}^{n_3} |\mathcal{A}(i, j, m)|^2 \\ &= n_3 \|\mathcal{A}\|_F^2 \end{aligned}$$

因此 $\|\mathcal{A}\|_F = \frac{1}{\sqrt{n_3}} \|\bar{\mathcal{A}}\|_F$ 。 □

5.3 论文中公式 (13): 内积等价性 $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle = \frac{1}{n_3} \langle \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathcal{B}} \rangle$

证明. 由内积的线性性质和 Parseval 定理的极化形式:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathcal{B}} \rangle &= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \langle \bar{\mathcal{A}}(i, j, :), \bar{\mathcal{B}}(i, j, :) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} (n_3 \langle \mathcal{A}(i, j, :), \mathcal{B}(i, j, :) \rangle) \quad (\text{Parseval 定理}) \\ &= n_3 \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{m=1}^{n_3} \mathcal{A}(i, j, m) \overline{\mathcal{B}(i, j, m)} \\ &= n_3 \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle \end{aligned}$$

因此 $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle = \frac{1}{n_3} \langle \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathcal{B}} \rangle$ 。 □

6 t-Product 的定义与性质

6.1 t-Product 的定义（论文中公式 14）

定义 1 (t-Product). 设 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 和 $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{n_2 \times l \times n_3}$, 则 $t\text{-product } \mathcal{A} * \mathcal{B}$ 定义为:

$$\mathcal{A} * \mathcal{B} = \text{fold}(\text{bcirc}(\mathcal{A}) \cdot \text{unfold}(\mathcal{B})) \quad (38)$$

其中:

- $\text{unfold}(\mathcal{B})$ 将张量 \mathcal{B} 展开为 $n_2 n_3 \times l$ 矩阵:

$$\text{unfold}(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{(1)} \\ \mathbf{B}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{B}^{(n_3)} \end{bmatrix}$$

- $\text{bcirc}(\mathcal{A})$ 是 \mathcal{A} 的块循环矩阵
- fold 是 unfold 的逆操作

6.2 T-Product 的频域等价形式（论文中公式 15）

定理 2 (T-Product 的频域等价性). $T\text{-product}$ 在频域中等价于块对角矩阵乘法:

$$\bar{\mathcal{C}} = \bar{\mathcal{A}} \bar{\mathcal{B}} \Leftrightarrow \mathcal{C} = \mathcal{A} * \mathcal{B} \quad (39)$$

证明. 由 T-product 定义:

$$\begin{aligned} \text{unfold}(\mathcal{C}) &= \text{bcirc}(\mathcal{A}) \cdot \text{unfold}(\mathcal{B}) \\ &= (\mathbf{F}_{n_3}^{-1} \otimes \mathbf{I}_{n_1}) \cdot \bar{\mathcal{A}} \cdot (\mathbf{F}_{n_3} \otimes \mathbf{I}_{n_2}) \cdot \text{unfold}(\mathcal{B}) \quad (\text{论文中公式 10}) \\ &= (\mathbf{F}_{n_3}^{-1} \otimes \mathbf{I}_{n_1}) \cdot \bar{\mathcal{A}} \cdot \text{unfold}(\bar{\mathcal{B}}) \quad (\text{DFT 定义}) \end{aligned}$$

左乘 $(\mathbf{F}_{n_3} \otimes \mathbf{I}_{n_1})$ 得:

$$\text{unfold}(\bar{\mathcal{C}}) = \bar{\mathcal{A}} \cdot \text{unfold}(\bar{\mathcal{B}}) = \text{unfold}(\bar{\mathcal{A}} \bar{\mathcal{B}})$$

因此 $\bar{\mathcal{C}} = \bar{\mathcal{A}} \bar{\mathcal{B}}$. □

6.3 计算意义

T-product 的高效计算:

1. 将输入张量 \mathcal{A}, \mathcal{B} 变换到频域: $\bar{\mathcal{A}} = \text{fft}(\mathcal{A}, [], 3)$, $\bar{\mathcal{B}} = \text{fft}(\mathcal{B}, [], 3)$
2. 在频域中并行计算矩阵乘法: $\bar{\mathcal{C}}^{(k)} = \bar{\mathcal{A}}^{(k)} \bar{\mathcal{B}}^{(k)}$, $k = 1, \dots, n_3$
3. 将结果变换回时域: $\mathcal{C} = \text{ifft}(\bar{\mathcal{C}}, [], 3)$

7 张量奇异值分解 (T-SVD)

7.1 定理陈述

定理 3 (张量奇异值分解 (T-SVD)). 设 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$, 则它可以被分解为:

$$\mathcal{A} = \mathcal{U} * \mathcal{S} * \mathcal{V}^* \quad (40)$$

其中:

- $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1 \times n_3}$ 是正交张量
- $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2 \times n_3}$ 是正交张量
- $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 是 f -对角张量

7.2 证明概要

证明. 证明是通过构造性方法完成的。回顾论文中公式 (10) 成立且 $\bar{\mathbf{A}}^{(i)}$ 满足论文中性质 (11)。然后我们以下列方式构造每个 $\bar{\mathbf{A}}^{(i)}$ 的 SVD:

对于 $i = 1, \dots, \lceil \frac{n_3+1}{2} \rceil$, 令 $\bar{\mathbf{A}}^{(i)} = \bar{\mathbf{U}}^{(i)} \bar{\mathbf{S}}^{(i)} (\bar{\mathbf{V}}^{(i)})^*$ 为 $\bar{\mathbf{A}}^{(i)}$ 的完全 SVD。这里 $\bar{\mathbf{S}}^{(i)}$ 中的奇异值是实数 (根据 SVD 的数学性质, 任何矩阵的奇异值均为非负实数, 无论原矩阵是实矩阵还是复矩阵)。

对于 $i = \lceil \frac{n_3+1}{2} \rceil + 1, \dots, n_3$, 令:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{U}}^{(i)} &= \text{conj}(\bar{\mathbf{U}}^{(n_3-i+2)}) \\ \bar{\mathbf{S}}^{(i)} &= \bar{\mathbf{S}}^{(n_3-i+2)} \\ \bar{\mathbf{V}}^{(i)} &= \text{conj}(\bar{\mathbf{V}}^{(n_3-i+2)})\end{aligned}$$

然后, 容易验证对于 $i = \lceil \frac{n_3+1}{2} \rceil + 1, \dots, n_3$, $\bar{\mathbf{A}}^{(i)} = \bar{\mathbf{U}}^{(i)} \bar{\mathbf{S}}^{(i)} (\bar{\mathbf{V}}^{(i)})^*$ 给出了 $\bar{\mathbf{A}}^{(i)}$ 的完全 SVD。

于是,

$$\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{V}}^* \quad (41)$$

通过 $\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{S}}$ 和 $\bar{\mathbf{V}}$ 的构造, 以及引理 2.1, 我们有:

- $(\mathbf{F}_{n_3}^{-1} \otimes \mathbf{I}_{n_1}) \cdot \bar{\mathbf{U}} \cdot (\mathbf{F}_{n_3} \otimes \mathbf{I}_{n_1})$
- $(\mathbf{F}_{n_3}^{-1} \otimes \mathbf{I}_{n_1}) \cdot \bar{\mathbf{S}} \cdot (\mathbf{F}_{n_3} \otimes \mathbf{I}_{n_2})$
- $(\mathbf{F}_{n_3}^{-1} \otimes \mathbf{I}_{n_2}) \cdot \bar{\mathbf{V}} \cdot (\mathbf{F}_{n_3} \otimes \mathbf{I}_{n_2})$

都是实块循环矩阵。

然后我们可以通过对论文公式 (17) 中的每个矩阵分别左乘适当的 $(\mathbf{F}_{n_3} \otimes \mathbf{I}_{n_1})$ 和右乘适当的 $(\mathbf{F}_{n_3} \otimes \mathbf{I}_{n_2})$, 并将结果折叠起来, 获得 $\text{bcirc}(\mathbf{A})$ 的分解表达式。这就给出了形式为 $\mathcal{U} * \mathcal{S} * \mathcal{V}^*$ 的分解, 其中 \mathcal{U}, \mathcal{S} 和 \mathcal{V} 是实张量。□

7.2.1 补充说明: 从块循环矩阵到 t-Product 的严格对应

上述构造性证明在频域中建立了块循环矩阵的分解形式。为了严格说明这一频域分解如何转化为原始张量空间的 t-product 分解, 我们需要建立块循环矩阵与 t-product 之间的内在联系。以下关键定理为此提供了理论依据:

定理 4 (块循环矩阵与 t-Product 的关系). 对于任意张量 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 和 $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{n_2 \times l \times n_3}$, 有:

$$\text{bcirc}(\mathcal{X} * \mathcal{Y}) = \text{bcirc}(\mathcal{X}) \cdot \text{bcirc}(\mathcal{Y}) \quad (42)$$

证明. 考虑单位张量 $\mathcal{I} \in \mathbb{R}^{l \times l \times n_3}$, 其展开为:

$$\text{unfold}(\mathcal{I}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_l \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

对于任意张量 $\mathcal{Z} \in \mathbb{R}^{n_1 \times l \times n_3}$, 有:

$$\text{unfold}(\mathcal{Z}) = \text{bcirc}(\mathcal{Z}) \cdot \text{unfold}(\mathcal{I}) \quad (44)$$

现在证明主要结论：

$$\begin{aligned}
\text{bcirc}(\mathcal{X} * \mathcal{Y}) \cdot \text{unfold}(\mathcal{I}) &= \text{unfold}((\mathcal{X} * \mathcal{Y}) * \mathcal{I}) \\
&= \text{unfold}(\mathcal{X} * \mathcal{Y}) \quad (\text{因为 } \mathcal{Y} * \mathcal{I} = \mathcal{Y}) \\
&= \text{bcirc}(\mathcal{X}) \cdot \text{unfold}(\mathcal{Y}) \\
&= \text{bcirc}(\mathcal{X}) \cdot \text{bcirc}(\mathcal{Y}) \cdot \text{unfold}(\mathcal{I})
\end{aligned}$$

由于 $\text{unfold}(\mathcal{I})$ 的列张成了整个空间，我们有：

$$\text{bcirc}(\mathcal{X} * \mathcal{Y}) = \text{bcirc}(\mathcal{X}) \cdot \text{bcirc}(\mathcal{Y}) \quad (45)$$

□

利用上述定理，我们从频域分解得到的块循环矩阵关系开始推导：

$$\bar{\mathcal{A}} = \bar{\mathcal{U}} \bar{\mathcal{S}} \bar{\mathcal{V}}^*$$

$$(\mathbf{F}_{n_3} \otimes \mathbf{I}_{n_1}) \cdot \text{bcirc}(\mathcal{A}) \cdot (\mathbf{F}_{n_3}^{-1} \otimes \mathbf{I}_{n_2}) = (\mathbf{F}_{n_3} \otimes \mathbf{I}_{n_1}) \cdot \text{bcirc}(\mathcal{U}) \cdot \text{bcirc}(\mathcal{S}) \cdot \text{bcirc}(\mathcal{V}^*) \cdot (\mathbf{F}_{n_3}^{-1} \otimes \mathbf{I}_{n_2})$$

两边同时左乘 $(\mathbf{F}_{n_3}^{-1} \otimes \mathbf{I}_{n_1})$ 和右乘 $(\mathbf{F}_{n_3} \otimes \mathbf{I}_{n_2})$ ：

$$\text{bcirc}(\mathcal{A}) = \text{bcirc}(\mathcal{U}) \cdot \text{bcirc}(\mathcal{S}) \cdot \text{bcirc}(\mathcal{V}^*)$$

根据块循环矩阵与 t-Product 的关系定理，这等价于：

$$\text{bcirc}(\mathcal{A}) = \text{bcirc}(\mathcal{U} * \mathcal{S} * \mathcal{V}^*) \quad (46)$$

由于块循环矩阵与张量之间存在一一对应关系，我们得到：

$$\mathcal{A} = \mathcal{U} * \mathcal{S} * \mathcal{V}^* \quad (47)$$

这就明确给出了定理所声称的分解形式。

7.3 计算意义

核心洞察 6. T -SVD 的计算可以通过频域方法高效实现：

1. 将张量 \mathcal{A} 变换到频域： $\bar{\mathcal{A}} = \text{fft}(\mathcal{A}, \llbracket, 3)$
2. 对每个频域切片进行 SVD： $\bar{\mathcal{A}}^{(k)} = \bar{\mathcal{U}}^{(k)} \bar{\mathcal{S}}^{(k)} (\bar{\mathcal{V}}^{(k)})^*$
3. 确保频域切片的共轭对称性
4. 将结果变换回时域： $\mathcal{U} = \text{ifft}(\bar{\mathcal{U}}, \llbracket, 3)$ 等

8 T-SVD 几何解释

8.1 T-SVD 的频域几何分解

核心洞察 7. T -SVD 的核心思想是将复杂的张量变换分解为多个独立频率模式上的矩阵 SVD 分析。每个频率索引 i 对应一个特定的频率模式，捕捉了张量在第三维上的特定变化规律。

8.1.1 频率模式的物理意义

- 频率索引 $i = 1$ ：对应直流分量，捕捉张量沿第三维的静态偏移
- 频率索引 $i = 2$ ：对应基频模式，捕捉最缓慢的周期性变化
- 频率索引 i 增大：对应高频模式，捕捉更快速的周期性变化
- 频率索引 $i = n_3$ ：对应奈奎斯特频率，捕捉最快速的可分辨变化

8.1.2 T-SVD 的频域分解过程

1. 频域变换：将张量变换到频域，得到各频率模式的分量

$$\bar{\mathcal{A}} = \text{fft}(\mathcal{A}, [], 3)$$

2. 模式分析：在每个频率模式下独立分析空间结构

$$\bar{\mathbf{A}}^{(i)} = \bar{\mathbf{U}}^{(i)} \bar{\mathbf{S}}^{(i)} (\bar{\mathbf{V}}^{(i)})^*, \quad i = 1, \dots, n_3$$

3. 几何合成：将各频率模式的分析结果合成完整的几何变换

$$\mathcal{A} = \mathcal{U} * \mathcal{S} * \mathcal{V}^*$$

8.1.3 在张量处理中的应用原理

基于上述几何理解，T-SVD 在张量处理中具有以下应用：

- 张量压缩：保留主导频率模式下的主要奇异值，保持核心几何结构
- 特征提取： \mathcal{U} 和 \mathcal{V} 的列纤维构成**时空特征基**，同时捕捉空间模式和时间变化规律
- 噪声抑制：小奇异值通常对应无结构的噪声成分，可有效滤除
- 低秩建模：数据的主要时空结构可由少数频率模式下的主导特征方向描述

8.1.4 与矩阵 SVD 的深度对比

矩阵 SVD (静态空间分析)	张量 T-SVD (动态时空分析)
分析单一空间变换结构	分析多频率模式下的时空变换结构
奇异向量描述全局空间模式	奇异向量描述特定频率下的时空模式
适用于静态数据关系分析	适用于动态时空数据分析
几何：单一椭球变换	几何：多频率椭球变换的合成
压缩：保留主要空间模式	压缩：保留主要频率时空模式

表 1: 矩阵 SVD 与张量 T-SVD 的对比

核心理解 4. *T-SVD* 的几何本质在于：通过频域分解将复杂的张量变换转化为多个独立频率模式下的最优方向对齐和缩放操作。每个频率分量找到最优的旋转方向和缩放强度，通过逆变换合成完整的张量变换。这种分解既保持了数学严谨性，又为高维数据分析提供了清晰的物理框架。