

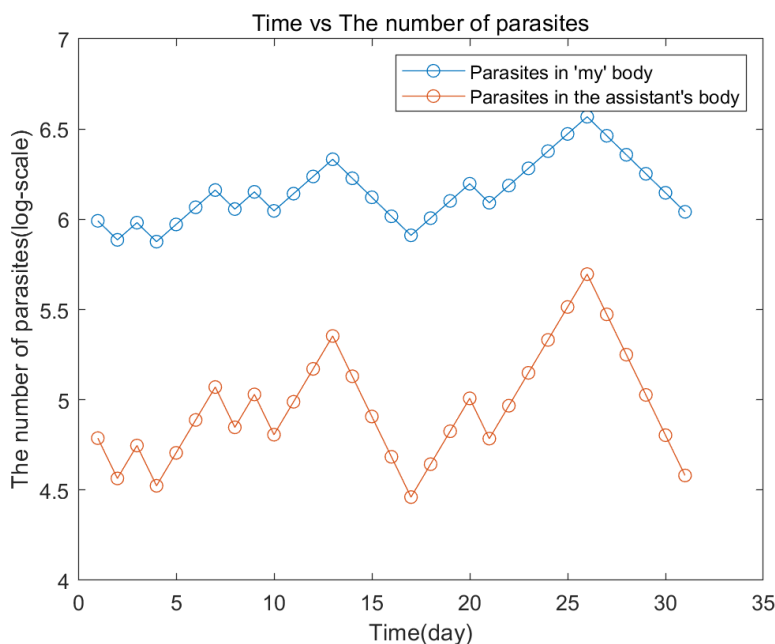
# 生物数学建模 HW2

陈全, 林浚泽, 林乐天, 唐恺旭

March 29, 2025

## 1 EG Lab Manual Exercise 7.1

见程序 Parasite1.m



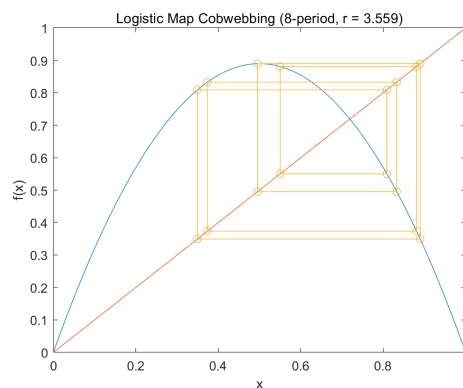
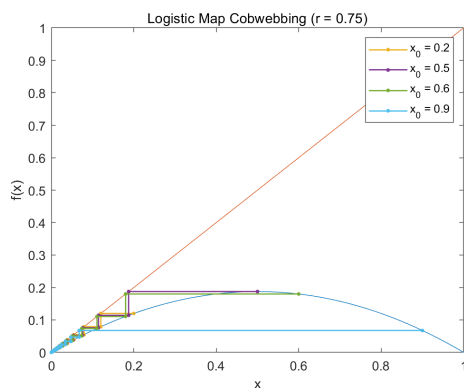
## 2 Period-doubling Scenario

在本题目中, Logistic Function 函数被独立编写为程序 logisticF.m。程序 logisticCobweb1.m 和 logisticCobweb2.m 分别对应了 (a) 和 (b) 中的两幅图像, 即收敛到 0 和 8 周期的两个系统。程序 logisticMultiple.m 为 (c) 绘制了三幅不同迭代次数的 Logistic 函数图像。最后, 程序 logisticBifurcation.m 和 sineBifurcation.m 分别绘制了两幅对应函数的分岔图像。具体的题目、代码与图像解释如下。

(a)

- 取若干初始值  $x_0$ , 例如 0.2、0.5、0.6、0.9 等, 每次迭代 1000 步。
- 迭代后期, 无论初始值为何, 都收敛至 0, 因此我们认为这个映射  $f$  确实满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(x) = 0$ , 即  $x^* = 0$  是吸引子。
- 从固定点条件  $x^* = r x^*(1 - x^*)$  可知  $x^* = 0$  也是映射的一个固定点。

在同一坐标系下画出  $f(x) = rx(1 - x)$  与对角线  $y = x$ , 即可用 cobweb (蛛网图) 方法可视化迭代过程。  $f(x)$  和  $y = x$  的图像和迭代产生的蛛网图见下, 迭代最终收敛到 0。



(b)

我们分析  $x^* = 1 - \frac{1}{r}$  这一固定点。通过计算导数

$$f'(x^*) = \frac{d}{dx}[rx(1-x)] \Big|_{x=x^*} = r[1-2x^*], |f'(x^*)| = |r-2r(1-\frac{1}{r})| = |2-r| > 1,$$

可知当  $r > 3$  时, 该固定点失去稳定性, 系统会出现高阶周期吸引子或进入混沌。当  $r$  进一步增大时, 将出现周期 4、周期 8 的吸引子。通过数值实验可找到一个使系统呈现 8 周期解的  $r$  值 (例如  $r \approx 3.559$ )。在这个参数下, 迭代 1000 步后, 系统会在 8 个不同点之间循环不变。

### Optional Exercise

根据题目提示, 可通过考察二次迭代函数

$$f^{(2)}(x) = f(f(x))$$

来寻找原映射的周期 2 轨道。具体步骤如下:

1. 构造  $f^{(2)}(x)$ :

$$f(x) = rx(1-x) \implies f^{(2)}(x) = r(rx(1-x))(1-rx(1-x)).$$

2. 求固定点: 解方程

$$x = f^{(2)}(x), \text{ 解得两个不动点为: } x_{1,2} = \frac{r+1 \pm \sqrt{r^2-2r-3}}{2r}$$

3. 讨论稳定性: 记  $\lambda = |f^{(2)'}(x)|$  为在周期 2 解处的导数绝对值。当  $\lambda < 1$  时, 该周期 2 轨道稳定, 否则不稳定。

$$\text{由于 } [f(f(x))]' = f'(f(x)) \cdot f'(x) = r^2(1-2rx+2rx^2)(1-2x),$$

$$\text{代入 } x_{1,2} \text{ 的值知 } f^{(2)'}(x_{1,2})' = 4+2r-r^2$$

$$\text{令 } -1 < 4+2r-r^2 < 1 \text{ 得 } 3 < r < 1+\sqrt{6}.$$

故,  $3 < r < 1+\sqrt{6}$  区间内, 周期 2 轨道是稳定吸引子。

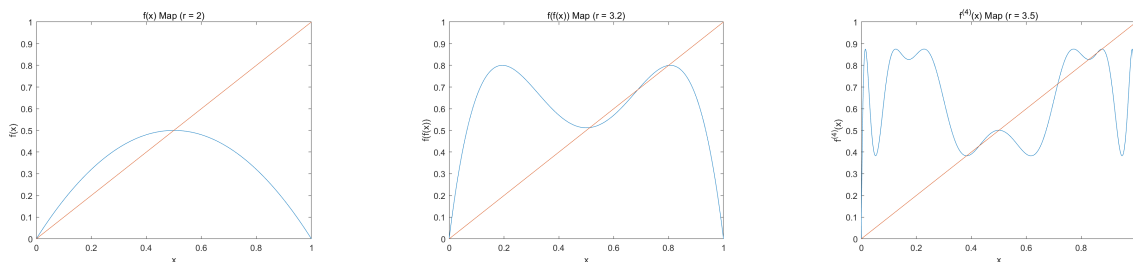
(c)

为说明 Logistic 映射在不同参数  $r$  下, 以及不同迭代次数 ( $f, f^{(2)}, f^{(4)}$ ) 时的形状, 现给出三幅示意图:

1. 左图:  $f(x)$  在  $r = 2$ , Logistic 映射  $f(x) = rx(1-x)$  呈单峰抛物线, 固定点位于曲线与  $y = x$  的交点处, 尚未发生倍周期分岔。

2. **中图：**二次迭代  $f(f(x))$  在  $r = 3.2$ ，随着  $r > 3$ ，原固定点失稳并出现周期 2。相对于原映射而言，这些周期 2 轨道对应于  $f^{(2)}(x)$  的稳定不动点，因此在二次迭代图中表现为曲线与  $y = x$  的两处交点。
3. **右图：**四次迭代  $f^{(4)}(x)$  在  $r = 3.5$ ，进一步增大  $r$  后，系统经历周期 4 及更多分岔，对应于四次迭代  $f^{(4)}(x)$  的不动点。图像较为复杂，峰谷增多，也体现单峰映射在局部的“翻转与缩放”特征。

综上所述，Logistic 映射通过改变  $r$ ，会先出现周期 2，再到周期 4、8，乃至混沌等一系列分岔现象；对于二次或四次迭代函数来说，这些高阶周期轨道就转化为固定点并从图形上直观显现。



### (c)&(d)

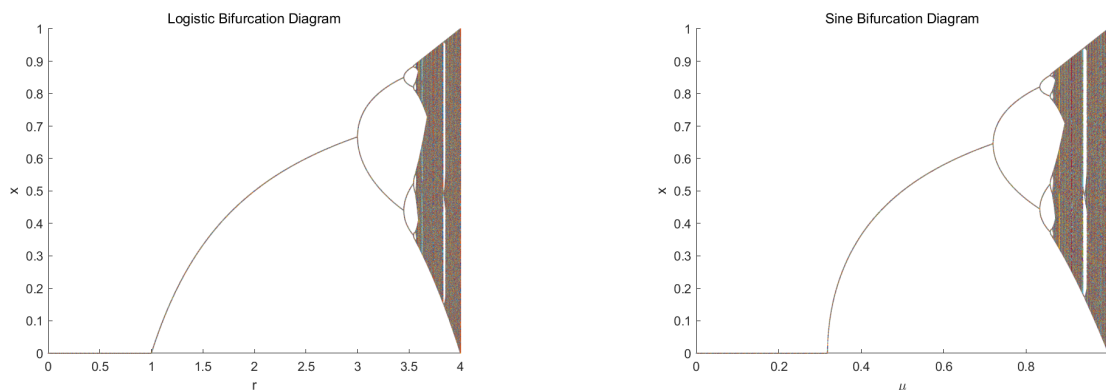
对于 Logistic 函数，我们按如下的步骤绘制图像：

1. 设定  $r$  的步长  $dr = 0.0001$
2. 对于每个  $r_i$  (从 0 依次到 4)，选定一个初值  $x_0$  并迭代若干次：

$$x_{n+1} = r_i x_n (1 - x_n).$$

3. 总共迭代 2000 次，其中前 1500 次作为 burn in, 最后绘制出后 500 个点的图像。
4. 在二维坐标平面上以  $(r_i, x_n)$  为点散布，即可得到完整的分岔图。

Sine 函数我们采取了完全相同的步长，迭代次数与 burn in 次数。从结果上来看，Sine 映射的分岔图与 Logistic 映射极为相似，均呈现出周期倍增通往混沌的线路，图像见下。



## 3 Optional Exercise

本题目要求通过数值方法求解满足重整化群变换不动点方程的普适函数。具体求解过程见代码 `universal.mlx`，下对求解过程做简要说明。

RG 方程如下：

$$T[g](x) = \alpha[g] \cdot \left[ g \left( g \left( \frac{x}{\alpha[g]} + x^*[g] \right) \right) - x^*[g] \right]$$

在坐标平移后可简化为：

$$T[g](y) = \alpha[g] \cdot g \left( g \left( \frac{y}{\alpha[g]} \right) \right).$$

我们的目标是寻找满足  $T[g] = g$  的函数  $g$  及伸缩因子  $\alpha$ 。

**多项式近似** 由于  $g$  是一个单峰函数，且我们无法直接求解 RG 方程，需要为  $g$  添加一个边界条件，这里假设  $g$  是一个偶次多项式级数，由于求解的精度与时间所限，截断到  $2N$ ：

$$g(x) = C_0 + C_2x^2 + C_4x^4 + \cdots + C_{2N}x^{2N}$$

其中我们令  $C_0 = 1$ 。

将  $g(x)$  代入 RG 方程，展开成多项式：

$$T[g](x) = D_0 + D_2x^2 + D_4x^4 + \cdots + D_{2N}x^{2N}$$

通过系数匹配，得到非线性方程组：

$$D_{2i} = C_{2i}, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

使用数值方法可同时求得  $\alpha$  和各阶系数  $\{C_{2i}\}$ 。

**数值结果** 对不同的  $N$ ，得到的  $\alpha$  数值如下：

$N$	2	4	6	7
$\alpha$	-2.534 020	-2.503 159	-2.502 897	-2.502 907

Table 1: 取不同  $N$  值下解出的近似  $\alpha$  值

可以看出，随着展开阶数的增大，数值计算出的  $\alpha$  值在逼近真实值。

**普适性理论的解释与函数图像对比** 这一收敛性可通过重整化群理论的标度不变性解释：对于任意单峰函数  $f(x)$ ，设其极值点为  $x = x_m$ ，定义平移函数  $h(x) = f(x - x_m)$ ，则通过重整化变换：

$$g(x) \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n h^{(2^n)} \left( \frac{x}{\alpha^n}; R_n \right)$$

其中  $R_n$  为使  $f^{(2^n)}(x) = x$  在  $x^* = x_m$  处成为超稳定点（即导数消失）的参数值。该极限过程表明：系统在周期倍分岔点附近展现出标度不变性——高阶分岔的局部结构经过  $\alpha$  缩放下与低阶结构重合。这种自相似性导致不同单峰函数  $f(x)$  在重整化极限下均收敛于同一普适函数  $g(x)$ ，具体函数细节（如高阶导数）在迭代标度变换中被消除，仅保留极值点附近的单峰特性。这解释了为何分岔图具有普适形态，其动力学行为仅由  $g(x)$  主导。

下图绘制了拟合得到的  $g(x)$ 、 $T[g](x)$  以及  $y = x$  的对比曲线，可以看出两者逐渐趋于重合，验证了  $T[g] = g$  的成立。

Approximate Universal Function  $g(x)$  compared with  $T[g](x)$  ( $\alpha = -2.502907$ )

