

## Prompt:

---

A continuación, se proporcionarán varios problemas matemáticos y se pide una resolución de los mismos.

Salida deseada: una resolución estructurada, rigurosa y razonada, que concluye con una solución final a la pregunta o preguntas planteadas. Puedes extenderte lo que quieras.

Problema 1: "" Sea una función real de variable real continua y que contiene valores negativos en su imagen. Sabiendo que dicha función es multiplicativa, es decir, que lleva el producto de dos números en el producto de la evaluación, discutir los siguientes puntos: (a) ¿Qué se puede decir de la inyectividad de una función tal? ¿Y sobre la sobreyectividad? (b) ¿Puedes dar un ejemplo de una función que verifique las propiedades del enunciado? (c) ¿Cuántas funciones existen que verifican las propiedades del enunciado? ""

---

## Answer:

---

### Resolución del problema

#### (a) Inyectividad y sobreyectividad

Dada una función real continua  $f$  que contiene valores negativos en su imagen y es multiplicativa, podemos discutir la inyectividad y la sobreyectividad de dicha función.

La inyectividad de una función se refiere a la propiedad de que no existen dos elementos diferentes en el dominio cuya imagen sea igual. En este caso, consideremos dos elementos  $x_1$  y  $x_2$  en el dominio de  $f$ . Si  $f(x_1) = f(x_2)$ , entonces  $x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot (x_2 - x_1) + x_1 \cdot x_1$ . Dado que la función es multiplicativa, obtenemos:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_1 - x_2) + f(x_1) \\ &= x_1(x_1 - x_2) + x_1^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

La igualdad  $x_1 = 0$  y la igualdad  $f(0) = 0$ . Dado que la función es multiplicativa, si una de estas igualdades es verdadera entonces todas son verdaderas. Por lo tanto,  $x_2 = x_1 = 0$ , lo cual contradice la supuesta distinción entre elementos.

Por otro lado, no podemos garantizar que no haya dos elementos distintos en el dominio cuya imagen sea distinta, ya que esta propiedad depende del comportamiento de la función sobre

todos sus puntos. Por lo tanto, la inyectividad de dicha función es incierta y depende de la naturaleza de la función.

En cuanto a la sobreyectividad, se refiere a la propiedad de que no existe un elemento en el codominio cuya imagen sea igual para todos los elementos en el dominio. Dado que la función  $f$  contiene valores negativos en su imagen, existe al menos un valor negativo en  $\mathbb{R}$ . Por lo tanto, dado cualquier otro valor, es posible encontrar un elemento del dominio  $x$ , tal que  $f(x)$  no coincide con dicho valor.

Por lo tanto, la sobreyectividad de dicha función también es incierta y depende de la naturaleza de la función.

### **(b) Ejemplo de una función**

Un ejemplo de una función real continua que contiene valores negativos en su imagen y es multiplicativa es  $f(x) = x^2$ . Esta función es multiplicativa, ya que para cualquier  $x_1$  y  $x_2$ , tenemos:

$$\begin{aligned} f(x_1 \cdot x_2) &= (x_1 \cdot x_2)^2 \\ &= x_1^2 \cdot x_2^2 \\ &= f(x_1) \cdot f(x_2) \end{aligned}$$

Además, la imagen de  $f$  contiene valores negativos, ya que el cuadrado de cualquier número real es no negativo.

### **(c) Número de funciones**

Para determinar el número de funciones que verifican las propiedades del enunciado, debemos analizar la naturaleza de dicha función. Dada una función  $f$ , su comportamiento está determinado por los valores que toma y cómo se multiplica.

Sin embargo, debido a la incertidumbre sobre la inyectividad y sobreyectividad de dicha función, es imposible determinar un número exacto de funciones que satisfagan estas propiedades. La naturaleza de la función depende de muchos factores, incluyendo su comportamiento sobre todos sus puntos, por lo tanto no es posible dar una respuesta numérica definitiva.

En resumen, la inyectividad y sobreyectividad de dicha función son inciertas, y debido a la naturaleza de dicha función, es imposible determinar un número exacto de funciones que verifiquen las propiedades del enunciado.

---

## Prompt:

---

Problema 2: "" Dadas tres rectas en el plano, suponiendo que son todas distintas (no hay dos rectas coincidentes), determinar la cantidad de circunferencias tangentes (simultáneamente a las tres rectas) existente. ""

---

## Answer:

---

### Resolución del problema

Para resolver este problema, debemos considerar las propiedades de las rectas y las circunferencias tangentes en el plano.

Dadas tres rectas distintas, podemos representarlas como ecuaciones lineales en la forma  $y = mx + b$ , donde  $m$  es la pendiente y  $b$  es el punto intersección con el eje  $y$ .

Una circunferencia tangente a una línea debe ser perpendicular al eje de recta que contiene dicha línea. En otras palabras, si una circunferencia tangente se encuentra en la recta  $y = mx + b$ , entonces su centro y radio deben estar en la intersección  $x$  del eje  $y$  con la recta que es perpendicular a  $mx + b$ .

Consideremos las tres rectas:

1.  $y = mx_1 + x_b$
2.  $y = mx_2 + x_b$
3.  $y = mx_3 + x_b$

La pendiente de cada línea es distintos.

Para que una circunferencia sea tangente a cada una de las tres rectas, su centro debe estar en la intersección  $x$  del eje  $y$  con la recta que es perpendicular a cada una de las líneas. Esto implica que el centro de la circunferencia debe satisfacer las siguientes ecuaciones:

1.  $(mx_3 + x_b) = 0$
2.  $(mx_1 + x_b) = 0$
3.  $(mx_2 + x_b) = 0$

Estas ecuaciones se pueden simplificar a  $x = -\frac{x}{m} - \frac{b}{m}$ ,  $x = -\frac{x}{m} - \frac{b}{m}$  y  $x = -\frac{x}{m} - \frac{b}{m}$  respectivamente.

Dado que la pendiente de cada recta es distinta, se cumple la condición de tangencia para las circunferencias si el centro coincide con los puntos  $(0, -\frac{b}{m})$  o cualquier punto lineal paralelo a estos.

En este caso, sabemos que la cantidad de posibles círculos tangentes en cada línea es infinita. Dado que hay tres líneas distintas y las rectas son distintas, para cualquier circunferencia que se encuentre en una recta, existen otras infinitas alternativas. Por lo tanto, si consideramos todos los puntos posibles de intersección del eje y con la línea, entonces el número total de círculos tangentes simécticamente a las tres líneas distintas es infinito.

En resumen, debido a que hay infinitas combinaciones de puntos en cada recta, existe una cantidad infinita de círculos tangentes simultáneamente a las tres líneas.

---

## Prompt:

---

Problema 3: "" Tres amigos se sientan en una mesa circular a probar un juego de apuestas. Por suerte, para que nadie haga trampas, junto con las reglas del juego, un árbitro les acompaña en su aventura. Cada uno apuesta (sin que nadie más que el mismo jugador y el árbitro sepa la cantidad del jugador en cuestión) una cantidad de euros múltiplo de 12 y, por supuesto, de al menos 1 euro. Esta apuesta será la cantidad de dinero con que operarán. El árbitro indica que cada uno de los jugadores le pase al jugador de su derecha, en orden secuencial y hasta terminar un ciclo completo (es decir, hasta que todos hayan pasado dinero una vez, pero solo una vez), respectivamente un medio, un tercio y un cuarto de sus tenencias al momento en que le toca pasar dinero. El jugador que primero pasa el dinero se decide de manera aleatoria. Gana, y por tanto se lleva todo el dinero, el jugador que cuente con más dinero al finalizar este intercambio. Una vez concluido el intercambio, el árbitro, exaltado por la emoción, exclama: "¡qué casualidad que tengáis el mismo dinero con el que empezasteis!". ¿Se puede saber con exactitud la cantidad de dinero que había apostado cada uno? ¿Se puede saber, solo con esta información, quién gana? ¿Existe posibilidad de tablas, es decir, que al menos dos jugadores tengan el mismo dinero y el tercero no les supere? ""

---

## Answer:

---

### Resolución del problema

Consideremos la cantidad de dinero que cada jugador apuesta y representemos esta cantidad con  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$ , donde  $a_i = 12k_i$  para algún número entero no negativo  $k_i$ . Con este procedimiento, podemos calcular la cantidad de dinero en las tres posiciones del ciclo.

1. En el primer intercambio: Si  $a_1 = k_1(1)$  y  $a_2 = k_2(1/3)$  entonces  $a_2 = \frac{k_2}{3}$ , y si  $a_3 = k_3(1)$ . Entonces, en este intercambio de dinero, el jugador que tiene más dinero es  $k_1(k+1) = k_1$  porque  $k_i \geq 0$ , entonces su cantidad será la misma después de pasarle al siguiente.
2. En el segundo intercambio: Si  $a_1 = k_1(1)$  y  $a_2 = k_2(1/3)$ , entonces  $a_2 = \frac{k_2}{3}$ , si  $a_3 = k_3(1)$ . Entonces, en este intercambio de dinero, el jugador que tiene más dinero es  $\frac{k_2+k_3(k-1)+k_2(k)}{3(k+1)(k)} = \frac{(k_2+k_3)+(k_2(k))}{3(k+1)(k)}$ .

Con base en los puntos anteriores, podemos calcular la cantidad de dinero en cada posición del ciclo y ver si existe posibilidad de tablas (es decir, que dos o más jugadores tengan el mismo dinero y el tercero no les supere).

En el primer intercambio de dinero: Si  $a_1 = k_1$  entonces su cantidad será la misma después de pasarle al siguiente. Si  $a_2 = k_2(1/3)$ , entonces su cantidad será  $\frac{k_2}{3} + k_2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{k_2}{3}$  y si  $a_3 = k_3$ , entonces la cantidad será  $k_3$ .

En el segundo intercambio de dinero: Si  $a_1 = k_1$ , entonces su cantidad será la misma después de pasarle al siguiente. Si  $a_2 = k_2(1/3)$ , entonces su cantidad será  $\frac{k_2}{3} + \frac{k_2(k-1)}{k} - \frac{k_2(k)}{3(k+1)} = \frac{k_2+(k-1)k_2-k_2k}{3(k+1)(k)} = \frac{(k_2+k_3)+(k_2(k))}{3(k+1)(k)}$ . Si  $a_3 = k_3$ , entonces su cantidad será  $\frac{k_2+k_3+(k-1)k_2-k_2k}{3(k+1)(k)}$ .

Por lo tanto, no se puede saber con exactitud la cantidad de dinero que había apostado cada uno.

## Prompt:

Has hecho alusión a la función  $f(x)=x^2$  como ejemplo para el problema 1; no obstante, dicha función no contiene valores negativos en su imagen, ¿no es cierto?

## Answer:

Sí, tienes razón en tu afirmación. La función  $f(x) = x^2$  siempre devuelve un valor positivo o cero para cualquier entrada de  $x$ . Por ejemplo, si elige la entrada  $-3$ , entonces la salida será  $9$ , y no negativa.

Además, como esta función es simétrica alrededor del punto medio del gráfico (es decir,  $y = x^2$ ), tiene un punto mínimo donde  $x = 0$ . En este caso, la cantidad de dinero en el jugador que

se encuentra a ese punto es la misma (que será cero) y las cantidades en los demás jugadores aumentarán según su posición.

Sin embargo, si se eligiera una función que no sea simétrica alrededor del eje  $x$  y que contenga valores negativos en su imagen, entonces podríamos obtener tablas o múltiples soluciones.