

## Gemini Chat

A continuación, se proporcionarán varios problemas matemáticos y se pide una resolución de los mismos.

Salida deseada: una resolución estructurada, rigurosa y razonada, que concluye con una solución final a la pregunta o preguntas planteadas. Puedes extenderlo lo que quieras.

Problema 1: "...."

Sea una función real de variable real continua y que contiene valores negativos en su imagen. Sabiendo que dicha función es multiplicativa, es decir, que lleva el producto de dos números en el producto de la evaluación, discutir los siguientes puntos:

- (a) ¿Qué se puede decir de la inyectividad de una función tal? ¿Y sobre la sobreyectividad?
- (b) ¿Puedes dar un ejemplo de una función que verifique las propiedades del enunciado?
- (c) ¿Cuántas funciones existen que verifican las propiedades del enunciado?

.....



A continuación, se presenta una resolución estructurada y razonada del problema planteado:

**Problema 1:** Sea una función real de variable real continua y que contiene valores negativos en su imagen. Sabiendo que dicha función es multiplicativa, es decir, que para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ , se cumple  $f(xy) = f(x)f(y)$ , discutir los siguientes puntos:

- (a) ¿Qué se puede decir de la inyectividad de una función tal? ¿Y sobre la

## sobreyectividad?

Comencemos analizando las propiedades de una función multiplicativa continua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- **Valor en cero:** Consideremos  $f(0)$ . Para cualquier  $x \in \mathbb{R}$ , tenemos  $f(0) = f(x \cdot 0) = f(x)f(0)$ .
  - Si existe algún  $x$  tal que  $f(x) \neq 1$ , entonces  $f(0)$  debe ser 0.
  - Si para todo  $x$ ,  $f(x) = 1$ , entonces  $f$  no contiene valores negativos en su imagen, lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto, concluimos que  $f(0) = 0$ .
- **Valor en uno:** Consideremos  $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)f(1) = (f(1))^2$ . Esto implica que  $f(1) = 0$  o  $f(1) = 1$ .
  - Si  $f(1) = 0$ , entonces para cualquier  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = f(x \cdot 1) = f(x)f(1) = f(x) \cdot 0 = 0$ . Esto significa que  $f(x) = 0$  para todo  $x$ , lo cual contradice la hipótesis de que la imagen contiene valores negativos. Por lo tanto, debemos tener  $f(1) = 1$ .
- **Valores de  $f(x)$  para  $x > 0$ :** Sea  $x > 0$ . Entonces  $x = (\sqrt{x})^2$ , por lo que  $f(x) = f(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}) = f(\sqrt{x})f(\sqrt{x}) = (f(\sqrt{x}))^2 \geq 0$ . Esto implica que para todo  $x > 0$ ,  $f(x)$  debe ser no negativo.
- **Valor en -1:** Consideremos  $f(-1) = f((-1) \cdot 1) = f(-1)f(1) = f(-1) \cdot 1 = f(-1)$ . También,  $f(1) = f((-1) \cdot (-1)) = f(-1)f(-1) = (f(-1))^2$ . Como  $f(1) = 1$ , tenemos  $(f(-1))^2 = 1$ , lo que implica  $f(-1) = 1$  o  $f(-1) = -1$ .
- **Valores de  $f(x)$  para  $x < 0$ :** Sea  $x < 0$ . Podemos escribir  $x = (-1) \cdot |x|$ . Entonces  $f(x) = f((-1) \cdot |x|) = f(-1)f(|x|)$ . Como  $|x| > 0$ , sabemos que  $f(|x|) \geq 0$ .
  - Si  $f(-1) = 1$ , entonces  $f(x) = 1 \cdot f(|x|) = f(|x|) \geq 0$  para todo  $x < 0$ . En este caso, la imagen de  $f$  no contendría valores negativos, lo cual contradice la hipótesis.
  - Por lo tanto, debemos tener  $f(-1) = -1$ . En este caso, para  $x < 0$ ,  $f(x) = -1 \cdot f(|x|) \leq 0$ . Para que la imagen contenga valores negativos, debe haber algún  $x < 0$  tal que  $f(|x|) > 0$ .

Ahora, analicemos la inyectividad y sobreyectividad:

- **Inyectividad:** Una función  $f$  es inyectiva si para todo  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , si  $f(x_1) = f(x_2)$ , entonces  $x_1 = x_2$ . Consideremos  $f(x) = x$ . Esta función es multiplicativa ( $xy = x \cdot y$ ), continua y su imagen es  $\mathbb{R}$ , que contiene valores negativos. Además, es inyectiva.

Consideremos  $f(x) = |x|$ . Esta función es multiplicativa ( $|xy| = |x||y|$ ) y continua. Sin embargo, su imagen es  $[0, \infty)$ , que no contiene valores negativos. Además, no es inyectiva (por ejemplo,  $f(1) = f(-1) = 1$ ).

Consideremos una función multiplicativa continua con valores negativos en su imagen. Sabemos que  $f(0) = 0$ . Si  $f$  fuera inyectiva, entonces para cualquier  $x \neq 0$ , tendríamos  $f(x) \neq f(0) = 0$ . Sin embargo, si existe algún  $a \neq 1$  tal que  $f(a) = 1$  (por ejemplo, si  $f(x) = x^n$  con  $n$  par,  $f(-1) = 1$ ), entonces  $f(a) = f(1)$  pero  $a \neq 1$ , lo que contradice la inyectividad.

Consideremos  $f(x) = x$ . Es inyectiva.

Consideremos  $f(x) = -x$ . Es multiplicativa ( $f(xy) = -(xy) = (-x)(-y) = f(x)f(y)$ ), continua y su imagen es  $\mathbb{R}$ . Es inyectiva.

En general, si  $f(a) = f(b) \neq 0$ , entonces  $\frac{f(ab)}{f(b)} = f(a) = f(b)$ , por lo que  $f(a) = f(a)f(b)$ . Si  $f(a) \neq 0$ , entonces  $f(b) = 1$ . Esto no necesariamente implica  $a = b$ .

**Conclusión sobre la inyectividad:** Una función multiplicativa continua que contiene valores negativos en su imagen puede ser inyectiva (ejemplo:  $f(x) = x$  o  $f(x) = -x$ ). Sin embargo, no es necesariamente inyectiva.

- **Sobreyectividad:** Una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es sobreyectiva si para todo  $y \in \mathbb{R}$ , existe un  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = y$ .

Consideremos  $f(x) = x$ . Es multiplicativa, continua, su imagen es  $\mathbb{R}$  (contiene valores negativos) y es sobreyectiva.

Consideremos  $f(x) = -x$ . Es multiplicativa, continua, su imagen es  $\mathbb{R}$  y es sobreyectiva.

Consideremos  $f(x) = x^n$  con  $n$  impar. Es multiplicativa, continua y su imagen es  $\mathbb{R}$ .

Si  $f(x) = x^n$  con  $n$  par, su imagen es  $[0, \infty)$ , no contiene valores negativos.

Si una función multiplicativa continua tiene valores negativos en su imagen, sabemos que  $f(x) \geq 0$  para  $x \geq 0$  y  $f(x) \leq 0$  para  $x \leq 0$ . Por la continuidad y el hecho de que  $f(0) = 0$ , la imagen debe ser un intervalo que contiene valores positivos y negativos, por lo que debe ser de la forma  $(-\infty, a]$ ,  $[a, \infty)$ , o  $(-\infty, \infty)$ .

**Conclusión sobre la sobreyectividad:** Una función multiplicativa continua que contiene valores negativos en su imagen puede ser sobreyectiva (ejemplo:  $f(x) = x$  o  $f(x) = -x$ ). Sin embargo, no es necesariamente sobreyectiva. Por ejemplo, si  $f(x) = x^3$ , es multiplicativa, continua, tiene valores negativos en su imagen, y es sobreyectiva. Si consideramos una función definida a trozos que cumpla las propiedades, no necesariamente será sobreyectiva.

- (b) ¿Puedes dar un ejemplo de una función que verifique las propiedades del enunciado?

Consideremos la función  $f(x) = x$

Consideremos la función  $f(x) = x$ .

- ```
\begin{itemize}
\item Es una función real de variable real.
\item Es continua en todo  $\mathbb{R}$ .
\item Su imagen es  $\mathbb{R}$ , que contiene valores negativos (por ejemplo,  $f(-1) = -1$ ).
\item Es multiplicativa:  $f(xy) = xy = f(x)f(y)$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ .
\end{itemize}
```

Por lo tanto,  $f(x) = x$  es un ejemplo de una función que verifica las propiedades del enunciado.

Otro ejemplo es  $f(x) = -x$ .

- ```
\begin{itemize}
\item Es una función real de variable real.
\item Es continua en todo  $\mathbb{R}$ .
\item Su imagen es  $\mathbb{R}$ , que contiene valores negativos (por ejemplo,  $f(1) = -1$ ).
\item Es multiplicativa:  $f(xy) = -(xy) = (-x)(-y) = f(x)f(y)$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ .
\end{itemize}
```

Por lo tanto,  $f(x) = -x$  es otro ejemplo.

En general, cualquier función de la forma  $f(x) = cx$  donde  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  es multiplicativa ( $f(xy) = c(xy) = (cx)(cy) = f(x)f(y)$  si y solo si  $c = c^2$ , es decir,  $c = 1$  o  $c = 0$ ). Por lo tanto, solo  $f(x) = x$  y  $f(x) = 0$  son de esta forma y multiplicativas.

Consideremos funciones potencia  $f(x) = x^n$ . Para que sea multiplicativa,  $(xy)^n = x^n y^n$ , lo cual siempre se cumple. Para que sea continua,  $n$  debe ser un entero no negativo. Para que contenga valores negativos en su imagen,  $n$  debe ser impar.

Ejemplo:  $f(x) = x^3$ . Es continua, multiplicativa ( $(xy)^3 = x^3 y^3$ ) y su imagen es  $\mathbb{R}$ .

Consideremos  $f(x) = \operatorname{sgn}(x)|x|^p$  donde  $p > 0$ .

$$f(xy) = \operatorname{sgn}(xy)|xy|^p = \operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(y)|x|^p|y|^p = (\operatorname{sgn}(x)|x|^p)(\operatorname{sgn}(y)|y|^p) = f(x)f(y).$$

Si  $p$  es tal que  $|x|^p$  es continua (lo cual es cierto para  $p > 0$ ), entonces  $f(x)$  es continua.

La imagen de  $f(x)$  es  $\mathbb{R}$ , que contiene valores negativos.

Ejemplo:  $f(x) = \operatorname{sgn}(x)|x| = x$ .

Ejemplo:  $f(x) = \operatorname{sgn}(x)|x|^3 = x^3$ .

### **(c) ¿Cuántas funciones existen que verifican las propiedades del enunciado?**

Las funciones continuas multiplicativas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son bien conocidas. Se clasifican en:

- ```
\begin{enumerate}
\item  $f(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . (No contiene valores negativos en su imagen).
\end{enumerate}
```

- \item  $f(x) = 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . (No contiene valores negativos en su imagen).
  - \item  $f(x) = |x|^p$  para algún  $p \geq 0$ . (Si  $p > 0$ , la imagen es  $[0, \infty)$ , no contiene valores negativos unless  $p$  is not an integer and we consider complex numbers. If  $p = 0$ ,  $f(x) = 1$ ).
  - \item  $f(x) = \operatorname{sgn}(x)|x|^p$  para algún  $p > 0$ . (La imagen es  $\mathbb{R}$ , contiene valores negativos).
- \end{enumerate}

La derivación de esta clasificación se basa en analizar la función en los racionales y luego extender por continuidad a los reales.

Si  $f$  es una función continua multiplicativa, entonces para  $x > 0$ ,  $f(x) = x^p$  para algún  $p \in \mathbb{R}$  o  $f(x) = 0$  o  $f(x) = 1$ .

Si  $f(x) = x^p$  para  $x > 0$ , entonces  $f(-1) = 1$  o  $f(-1) = -1$ .

Si  $f(-1) = 1$ , entonces  $f(x) = f(-1 \cdot |x|) = f(-1)f(|x|) = 1 \cdot |x|^p = |x|^p$ . La imagen es  $[0, \infty)$  (si  $p > 0$ ).

Si  $f(-1) = -1$ , entonces  $f(x) = f(-1 \cdot |x|) = f(-1)f(|x|) = -1 \cdot |x|^p = -\operatorname{sgn}(x)|x|^p = \operatorname{sgn}(x)(-1)|x|^p$ . Esto no parece correcto.

Si  $f(x) = x^p$  para  $x > 0$ , y  $f(-1) = -1$ , entonces para  $x < 0$ ,  $f(x) = f(-1 \cdot |x|) = f(-1)f(|x|) = -1 \cdot |x|^p = -\operatorname{sgn}(x)|x|^p$ . No es multiplicativa:

$$f((-2)(-3)) = f(6) = 6^p, f(-2)f(-3) = (-1 \cdot 2^p)(-1 \cdot 3^p) = 2^p 3^p = 6^p.$$

Las funciones que verifican las propiedades del enunciado son de la forma  $f(x) = \operatorname{sgn}(x)|x|^p$  para cualquier  $p > 0$ . Dado que  $p$  puede ser cualquier número real positivo, existen infinitas funciones que verifican las propiedades del enunciado.

### Solución Final:

**(a)** Una función multiplicativa continua que contiene valores negativos en su imagen no es necesariamente inyectiva ni sobreyectiva. Puede ser inyectiva (ejemplo:  $f(x) = x$ ) o no inyectiva. Puede ser sobreyectiva (ejemplo:  $f(x) = x$ ) o no sobreyectiva.

**(b)** Dos ejemplos de funciones que verifican las propiedades del enunciado son  $f(x) = x$  y  $f(x) = x^3$ . En general, cualquier función de la forma  $f(x) = \operatorname{sgn}(x)|x|^p$  con  $p > 0$  es un ejemplo.

**(c)** Existen infinitas funciones que verifican las propiedades del enunciado, ya que el parámetro  $p$  en la forma general  $f(x) = \operatorname{sgn}(x)|x|^p$  puede ser cualquier número real positivo.

Dadas tres rectas en el plano, suponiendo que son todas distintas (no hay dos rectas coincidentes), determinar la cantidad de circunferencias tangentes (simultáneamente a las tres rectas) existente.

.....

◆ **Problema 2:** Dadas tres rectas en el plano, suponiendo que son todas distintas (no hay dos rectas coincidentes), determinar la cantidad de circunferencias tangentes (simultáneamente a las tres rectas) existentes.

#### Resolución:

Consideremos tres rectas distintas en el plano. La cantidad de circunferencias tangentes simultáneamente a estas tres rectas dependerá de la configuración relativa de las rectas. Analizaremos los diferentes casos posibles:

##### **Caso 1: Las tres rectas son paralelas.**

Si las tres rectas son paralelas, no existe ninguna circunferencia que pueda ser tangente simultáneamente a las tres. Una circunferencia tangente a tres rectas paralelas implicaría que el centro de la circunferencia debería equidistar de las tres rectas, lo cual es imposible a menos que las rectas coincidan, lo que contradice la hipótesis.

**Cantidad de circunferencias tangentes: 0.**

##### **Caso 2: Dos rectas son paralelas y la tercera las interseca.**

Sean  $r_1$  y  $r_2$  dos rectas paralelas, y  $r_3$  una recta que las interseca. Una circunferencia tangente a  $r_1$  y  $r_2$  debe tener su centro sobre la recta paralela media a  $r_1$  y  $r_2$ . Sea  $d$  la distancia entre  $r_1$  y  $r_2$ . El radio de cualquier circunferencia tangente a ambas rectas debe ser  $d/2$ , y su centro estará a una distancia  $d/2$  de cada una de ellas.

Ahora, esta circunferencia también debe ser tangente a  $r_3$ . La distancia desde el centro de la circunferencia a  $r_3$  debe ser igual al radio  $d/2$ . En general, habrá dos puntos sobre la recta media que estén a una distancia  $d/2$  de la recta  $r_3$ , correspondientes a dos circunferencias tangentes a las tres rectas.

Para visualizar esto, considera la banda formada por las dos rectas paralelas. El centro de cualquier circunferencia tangente a ambas debe estar en la línea media de esta banda. La tercera recta interseca esta banda. Existirán, en general, dos circunferencias con centro en la línea media y radio  $d/2$  que sean tangentes a la tercera recta.

### **Cantidad de circunferencias tangentes: 2.**

#### **Caso 3: Las tres rectas se intersecan en un único punto.**

Si las tres rectas se intersecan en un único punto, cualquier circunferencia tangente a las tres rectas tendría su centro en la bisectriz de cada par de ángulos formados por las rectas. El punto de intersección de las tres rectas es el centro de una circunferencia de radio cero que podría considerarse tangente a las tres (aunque degenerada). Sin embargo, estamos buscando circunferencias con radio positivo.

Las bisectrices de los ángulos formados por dos rectas se intersecan en dos puntos (el incentro y el exincentro del "triángulo" degenerado formado por las rectas). La tercera recta pasará por estos puntos de intersección de las bisectrices. Por lo tanto, no existirá una circunferencia con radio positivo tangente a las tres rectas en este caso.

### **Cantidad de circunferencias tangentes: 0.**

#### **Caso 4: Las tres rectas se intersecan dos a dos, formando un triángulo.**

Si las tres rectas se intersecan dos a dos, forman un triángulo. En este caso, existen cuatro circunferencias tangentes simultáneamente a las tres rectas:

1. **El incentro y la circunferencia inscrita:** El incentro es el punto de intersección de las tres bisectrices interiores del triángulo. Es el centro de la circunferencia inscrita, que es tangente a los tres lados del triángulo por dentro.
2. **Los excentros y las circunferencias exinscritas:** Para cada vértice del triángulo, existe un exincentro, que es el punto de intersección de la bisectriz interior del ángulo en ese vértice y las bisectrices exteriores de los otros dos ángulos. Cada exincentro es el centro de una circunferencia exinscrita, que es tangente a uno de los lados del triángulo y a las extensiones de los otros dos lados. Dado que un triángulo tiene tres vértices, existen tres excentros y, por lo tanto, tres circunferencias exinscritas.

### **Cantidad de circunferencias tangentes: 4.**

#### **Resumen de los casos:**

- **Tres rectas paralelas:** 0 circunferencias tangentes.
- **Dos rectas paralelas y una secante:** 2 circunferencias tangentes.
- **Tres rectas concurrentes:** 0 circunferencias tangentes (considerando circunferencias con radio positivo).
- **Tres rectas que forman un triángulo:** 4 circunferencias tangentes (una inscrita y tres exinscritas).

#### **Conclusión:**

La cantidad de circunferencias tangentes simultáneamente a tres rectas distintas en el plano puede ser 0, 2 o 4, dependiendo de la configuración relativa de las rectas.

- **0 circunferencias:** si las tres rectas son paralelas o si las tres rectas se intersecan en un único punto.
- **2 circunferencias:** si exactamente dos de las rectas son paralelas.
- **4 circunferencias:** si las tres rectas se intersecan dos a dos, formando un triángulo.

#### Problema 3: "'''

Tres amigos se sientan en una mesa circular a probar un juego de apuestas. Por suerte, para que nadie haga trampas, junto con las reglas del juego, un árbitro les acompaña en su aventura. Cada uno apuesta (sin que nadie más que el mismo jugador y el árbitro sepa la cantidad del jugador en cuestión) una cantidad de euros múltiplo de 12 y, por supuesto, de al menos 1 euro. Esta apuesta será la cantidad de dinero con que operarán. El árbitro indica que cada uno de los jugadores le pase al jugador de su derecha, en orden secuencial y hasta terminar un ciclo completo (es decir, hasta que todos hayan pasado dinero una vez, pero solo una vez), respectivamente un medio, un tercio y un cuarto de sus tenencias al momento en que le toca pasar dinero. El jugador que primero pasa el dinero se decide de manera aleatoria. Gana, y por tanto se lleva todo el dinero, el jugador que cuente con más dinero al finalizar este intercambio. Una vez concluido el intercambio, el árbitro, exaltado por la emoción, exclama: "¡qué casualidad que tengáis el mismo dinero con el que empezasteis!". ¿Se puede saber con exactitud la cantidad de dinero que había apostado cada uno? ¿Se puede saber, solo con esta información, quién gana? ¿Existe posibilidad de tablas, es decir, que al menos dos jugadores tengan el mismo dinero y el tercero no les supere?



**Problema 3:** Tres amigos se sientan en una mesa circular a probar un juego de apuestas. Cada uno apuesta una cantidad de euros múltiplo de 12 y de al menos 1 euro. Un árbitro indica que cada jugador pase al de su derecha, en orden secuencial, un medio, un tercio y un cuarto de sus tenencias al momento de pasar. El orden de quién empieza a pasar es aleatorio. Gana quien tiene más dinero al finalizar el ciclo. Al final, el árbitro exclama: "¡qué casualidad que tengáis el mismo dinero con el que empezasteis!". ¿Se puede saber con exactitud la cantidad de dinero apostada por cada uno? ¿Se puede saber quién gana? ¿Existe posibilidad de tablas?

**Resolución:**

Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  las cantidades iniciales de dinero de los tres amigos. Sabemos que  $A, B, C \in \{12k \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$ .

Consideremos los tres posibles órdenes en los que los jugadores pueden pasar el dinero:

**Caso 1: Orden A → B → C**

• **Paso 1 (A pasa a B):**

- A da  $\frac{1}{2}A$  a B.
- Nuevas cantidades:  $A_1 = A - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}A$ ,  $B_1 = B + \frac{1}{2}A$ ,  $C_1 = C$ .

• **Paso 2 (B pasa a C):**

- B da  $\frac{1}{3}B_1 = \frac{1}{3}(B + \frac{1}{2}A)$  a C.
- Nuevas cantidades:  $A_2 = \frac{1}{2}A$ ,  $B_2 = B_1 - \frac{1}{3}B_1 = \frac{2}{3}B_1 = \frac{2}{3}(B + \frac{1}{2}A)$ ,  $C_2 = C_1 + \frac{1}{3}B_1 = C + \frac{1}{3}(B + \frac{1}{2}A)$ .

• **Paso 3 (C pasa a A):**

- C da  $\frac{1}{4}C_2 = \frac{1}{4}(C + \frac{1}{3}(B + \frac{1}{2}A))$  a A.
- Cantidades finales:

- $A_f = A_2 + \frac{1}{4}C_2 = \frac{1}{2}A + \frac{1}{4}(C + \frac{1}{3}B + \frac{1}{6}A) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{4}C + \frac{1}{12}B + \frac{1}{24}A = \frac{13}{24}A + \frac{1}{12}B + \frac{1}{4}C$
- $B_f = B_2 = \frac{2}{3}B + \frac{1}{3}A$
- $C_f = C_2 - \frac{1}{4}C_2 = \frac{3}{4}C_2 = \frac{3}{4}(C + \frac{1}{3}B + \frac{1}{6}A) = \frac{3}{4}C + \frac{1}{4}B + \frac{1}{8}A$

Según el enunciado, al finalizar el intercambio, cada jugador tiene la misma cantidad de dinero con la que empezó. Por lo tanto:

$$\frac{13}{24}A + \frac{1}{12}B + \frac{1}{4}C = A \implies -\frac{11}{24}A + \frac{1}{12}B + \frac{1}{4}C = 0 \implies -11A + 2B +$$

$$\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B = B \implies \frac{1}{3}A - \frac{1}{3}B = 0 \implies A = B \quad (2)$$

$$\frac{1}{8}A + \frac{1}{4}B + \frac{3}{4}C = C \implies \frac{1}{8}A + \frac{1}{4}B - \frac{1}{4}C = 0 \implies A + 2B - 2C = 0 \quad (3)$$

Sustituyendo (2) en (1):  $-11A + 2A + 6C = 0 \implies -9A + 6C = 0 \implies$

$$3A = 2C \implies C = \frac{3}{2}A.$$

Sustituyendo (2) en (3):  $A + 2A - 2C = 0 \implies 3A - 2C = 0 \implies 3A = 2C \implies C = \frac{3}{2}A.$

Por lo tanto, si el orden es  $A \rightarrow B \rightarrow C$ , las cantidades iniciales deben estar en la proporción  $A : B : C = A : A : \frac{3}{2}A = 2 : 2 : 3$ .

Como las cantidades iniciales son múltiplos de 12, podemos escribir  $A = 24k$ ,  $B = 24k$ ,  $C = 36k$  para algún entero positivo  $k$ . La cantidad mínima sería cuando  $k = 1$ , es decir,  $A = 24$ ,  $B = 24$ ,  $C = 36$ .

En este caso, las cantidades finales serían:

$$A_f = \frac{13}{24}(24k) + \frac{1}{12}(24k) + \frac{1}{4}(36k) = 13k + 2k + 9k = 24k = A$$

$$B_f = \frac{1}{3}(24k) + \frac{2}{3}(24k) = 8k + 16k = 24k = B$$

$$C_f = \frac{1}{8}(24k) + \frac{1}{4}(24k) + \frac{3}{4}(36k) = 3k + 6k + 27k = 36k = C$$

En este caso,  $C$  tiene la mayor cantidad inicial y final de dinero, por lo que  $C$  gana. No hay posibilidad de tablas.

### Caso 2: Orden $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{B}$

- **Paso 1 (A pasa a C):**  $A_1 = \frac{1}{2}A$ ,  $C_1 = C + \frac{1}{2}A$ ,  $B_1 = B$ .
- **Paso 2 (C pasa a B):**  $A_2 = \frac{1}{2}A$ ,  $C_2 = \frac{2}{3}C_1 = \frac{2}{3}(C + \frac{1}{2}A)$ ,  $B_2 = B_1 + \frac{1}{3}C_1 = B + \frac{1}{3}(C + \frac{1}{2}A)$ .
- **Paso 3 (B pasa a A):**  $A_f = A_2 + \frac{1}{4}B_2 = \frac{1}{2}A + \frac{1}{4}(B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{6}A) = \frac{13}{24}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{12}C$   $C_f = C_2 = \frac{2}{3}C + \frac{1}{3}A$   $B_f = B_2 - \frac{1}{4}B_2 = \frac{3}{4}B_2 = \frac{3}{4}(B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{6}A) = \frac{3}{4}B + \frac{1}{4}C + \frac{1}{8}A$

Igualando las cantidades finales con las iniciales:

$$\frac{13}{24}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{12}C = A \implies -11A + 6B + 2C = 0$$

$$\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}C = C \implies A - C = 0 \implies A = C$$

$$\frac{1}{8}A + \frac{3}{4}B + \frac{1}{4}C = B \implies A + 6B - 2C = 0$$

Sustituyendo  $A = C$ :  $-11A + 6B + 2A = 0 \implies -9A + 6B = 0 \implies 3A = 2B \implies B = \frac{3}{2}A$ .

$$A + 6(\frac{3}{2}A) - 2A = A + 9A - 2A = 8A = 0 \implies A = 0, \text{ lo cual no es posible.}$$

Por lo tanto, este orden no lleva a la situación descrita.

### Caso 3: Orden $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$

- **Paso 1 (B pasa a A):**  $B_1 = \frac{2}{3}B$ ,  $A_1 = A + \frac{1}{3}B$ ,  $C_1 = C$ .
- **Paso 2 (A pasa a C):**  $B_2 = \frac{2}{3}B$ ,  $A_2 = \frac{1}{2}A_1 = \frac{1}{2}(A + \frac{1}{3}B)$ ,  $C_2 = C_1 + \frac{1}{2}A_1 = C + \frac{1}{2}(A + \frac{1}{3}B)$ .
- **Paso 3 (C pasa a B):**  $B_f = B_2 + \frac{1}{4}C_2 = \frac{2}{3}B + \frac{1}{4}(C + \frac{1}{2}A + \frac{1}{6}B) = \frac{2}{3}B + \frac{1}{4}C + \frac{1}{8}A + \frac{1}{24}B = \frac{17}{24}B + \frac{1}{8}A + \frac{1}{4}C$ .  $A_f = A_2 = \frac{1}{2}A + \frac{1}{6}B$ .  $C_f = C_2 - \frac{1}{4}C_2 = \frac{3}{4}C_2 = \frac{3}{4}(C + \frac{1}{2}A + \frac{1}{6}B) = \frac{3}{4}C + \frac{3}{8}A + \frac{1}{8}B$

Igualando las cantidades finales con las iniciales:

$$\frac{1}{6}B + \frac{1}{2}A = A \implies B + 3A = 6A \implies B = 3A$$

$$\frac{17}{24}B + \frac{1}{8}A + \frac{1}{4}C = B \implies \frac{1}{8}A - \frac{7}{24}B + \frac{1}{4}C = 0 \implies 3A - 7B + 6C = 0$$

$$\frac{3}{8}A + \frac{1}{8}B + \frac{3}{4}C = C \implies 3A + B - 2C = 0$$

Sustituyendo  $B = 3A$ :

$$3A - 7(3A) + 6C = 0 \implies 3A - 21A + 6C = 0 \implies -18A + 6C =$$

$$0 \implies C = 3A$$

$$3A + 3A - 2C = 0 \implies 6A - 2C = 0 \implies C = 3A$$

Por lo tanto, si el orden es  $B \rightarrow A \rightarrow C$ , las cantidades iniciales deben estar en la proporción  $A : B : C = A : 3A : 3A = 1 : 3 : 3$ .

Como las cantidades iniciales son múltiplos de 12, podemos escribir  $A = 12k$ ,  $B = 36k$ ,  $C = 36k$  para algún entero positivo  $k$ . La cantidad mínima sería cuando  $k = 1$ , es decir,  $A = 12$ ,  $B = 36$ ,  $C = 36$ .

En este caso, las cantidades finales serían:

$$A_f = \frac{1}{2}(12k) + \frac{1}{6}(36k) = 6k + 6k = 12k = A$$

$$B_f = \frac{17}{24}(36k) + \frac{1}{8}(12k) + \frac{1}{4}(36k) = \frac{51}{2}k + \frac{3}{2}k + 9k = 27k + 9k = 36k = B$$

$$C_f = \frac{3}{8}(12k) + \frac{1}{8}(36k) + \frac{3}{4}(36k) = \frac{9}{2}k + \frac{9}{2}k + 27k = 9k + 27k = 36k = C$$

En este caso,  $B$  y  $C$  tienen la misma cantidad inicial y final de dinero, y es mayor que la de  $A$ . Por lo tanto, hay un empate por el primer puesto entre  $B$  y  $C$ .

Análogamente, se pueden analizar los otros tres órdenes posibles ( $B \rightarrow C \rightarrow A$ ,  $C \rightarrow A \rightarrow B$ ,  $C \rightarrow B \rightarrow A$ ). Debido a la simetría cíclica del problema, los resultados serán permutaciones de los casos ya analizados.

### Conclusiones:

- **Cantidad de dinero apostada:** No se puede saber con exactitud la cantidad de dinero apostada por cada uno, solo la proporción entre ellas, que depende del orden en que pasaron el dinero.
  - Si el orden fue  $A \rightarrow B \rightarrow C$  (o sus equivalentes cílicos), la proporción es 2:2:3, y las cantidades mínimas serían 12, 36, 36 euros.
  - Si el orden fue  $B \rightarrow A \rightarrow C$  (o sus equivalentes cílicos), la proporción es 1:3:3, y las cantidades mínimas serían 12, 36, 36 euros.
  - **Quién gana:** Se puede saber quién gana dependiendo del orden

- Si la proporción es 2:2:3, el jugador con la proporción 3 gana.
- Si la proporción es 1:3:3, hay un empate entre los jugadores con la proporción 3.
- **Posibilidad de tablas:** Sí, existe la posibilidad de tablas si el orden de pasar el dinero lleva a una proporción inicial como 1:3:3 (o sus equivalentes), donde dos jugadores terminan con la misma cantidad de dinero, que es mayor que la del tercero.

#### Respuesta a las preguntas:

- **¿Se puede saber con exactitud la cantidad de dinero que había apostado cada uno?** No, solo se puede determinar la proporción entre las cantidades iniciales, que depende del orden en que los jugadores pasaron el dinero.
- **¿Se puede saber, solo con esta información, quién gana?** No se puede saber quién gana sin conocer el orden en que los jugadores pasaron el dinero. Sin embargo, si se conoce el orden, se puede determinar la proporción de las cantidades iniciales y, por lo tanto, quién tiene la mayor cantidad.
- **¿Existe posibilidad de tablas?** Sí, existe la posibilidad de tablas si el orden de pasar el dinero conduce a una proporción inicial donde al menos dos jugadores terminan con la misma cantidad mayor que la del tercero. Por ejemplo, si las cantidades iniciales estaban en la proporción 1:3:3 y el jugador con la proporción 1 fue el segundo en pasar, habrá un empate entre los otros dos.

En las conclusiones indicas que si el orden es A → B → C entonces la proporción es 2:2:3 y que si el orden es B → A → C entonces la proporción es 1:3:3.  
¿Es posible que siendo el problema simétrico (salvo redenominación de etiquetas) ocurran proporciones distintas?



Tienes toda la razón al señalar la simetría del problema. Mi análisis inicial, al considerar los órdenes específicos A → B → C y B → A → C, podría haber llevado a una conclusión incompleta sobre las posibles proporciones sin una justificación más

rígurosa de por qué solo esos tipos de proporciones emergen. Vamos a analizar los otros órdenes para verificar esto.

### Análisis de los Órdenes Restantes:

Debido a la simetría cíclica de la situación, los otros cuatro órdenes de pasar el dinero deberían dar lugar a proporciones que son simplemente permutaciones cíclicas de las que ya hemos encontrado.

#### Caso 4: Orden $B \rightarrow C \rightarrow A$

Este orden es equivalente a desplazar el orden  $A \rightarrow B \rightarrow C$  un paso a la izquierda (o dos a la derecha). Por lo tanto, si el orden  $A \rightarrow B \rightarrow C$  requiere una proporción inicial  $A : B : C = 2 : 2 : 3$ , entonces el orden  $B \rightarrow C \rightarrow A$  requerirá una proporción inicial  $B : C : A = 2 : 2 : 3$ , lo que implica  $A : B : C = 3 : 2 : 2$ .

#### Caso 5: Orden $C \rightarrow A \rightarrow B$

Este orden es equivalente a desplazar el orden  $A \rightarrow B \rightarrow C$  dos pasos a la izquierda (o uno a la derecha). Por lo tanto, si el orden  $A \rightarrow B \rightarrow C$  requiere una proporción inicial  $A : B : C = 2 : 2 : 3$ , entonces el orden  $C \rightarrow A \rightarrow B$  requerirá una proporción inicial  $C : A : B = 2 : 2 : 3$ , lo que implica  $A : B : C = 2 : 3 : 2$ .

#### Caso 6: Orden $C \rightarrow B \rightarrow A$

Este orden es equivalente a desplazar el orden  $B \rightarrow A \rightarrow C$  un paso a la izquierda (o dos a la derecha). Por lo tanto, si el orden  $B \rightarrow A \rightarrow C$  requiere una proporción inicial  $A : B : C = 1 : 3 : 3$ , entonces el orden  $C \rightarrow B \rightarrow A$  requerirá una proporción inicial  $C : B : A = 1 : 3 : 3$ , lo que implica  $A : B : C = 3 : 3 : 1$ .

#### Caso 7: Orden $A \rightarrow C \rightarrow B$

Este orden ya lo analizamos y llegamos a una contradicción ( $A = 0$ ), lo que indica que no existe una proporción inicial que satisfaga las condiciones para este orden.

### Verificación de la Simetría:

La clave para entender la simetría radica en cómo se aplican las fracciones al pasar el dinero. El primer jugador pasa  $\frac{1}{2}$ , el segundo  $\frac{1}{3}$ , y el tercero  $\frac{1}{4}$ . El "rol" de pasar la mitad, el tercio o el cuarto es lo que se va rotando entre los jugadores dependiendo del orden.

Si en el orden  $A \rightarrow B \rightarrow C$ , la proporción es  $A : B : C = 2 : 2 : 3$ , esto significa que para que cada uno recupere su cantidad inicial, A debe pasar la mitad de su dinero a B, B un tercio a C, y C un cuarto a A, y las cantidades deben estar en esa proporción.

Ahora, si el orden es  $B \rightarrow C \rightarrow A$ , entonces B pasa la mitad a C, C un tercio a A, y A un cuarto a B. Para que la situación final sea la misma que la inicial (en términos de valores absolutos), las proporciones iniciales deben ajustarse para compensar estos diferentes factores de transferencia.

### **Conclusión sobre las Proporciones:**

Las posibles proporciones iniciales (y finales) que permiten que cada jugador recupere su cantidad inicial son permutaciones de  $2 : 2 : 3$  y  $1 : 3 : 3$ . Específicamente, las posibles proporciones  $A : B : C$  son:

- $2 : 2 : 3$  (para los órdenes  $A \rightarrow B \rightarrow C$ ,  $B \rightarrow C \rightarrow A$ ,  $C \rightarrow A \rightarrow B$ )
- $2 : 3 : 2$
- $3 : 2 : 2$
- $1 : 3 : 3$  (para los órdenes  $B \rightarrow A \rightarrow C$ ,  $C \rightarrow B \rightarrow A$ ,  $A \rightarrow C \rightarrow B$  - este último no es posible)
- $3 : 1 : 3$
- $3 : 3 : 1$

Sin embargo, nuestro análisis del orden  $A \rightarrow C \rightarrow B$  resultó en una inconsistencia, lo que sugiere que esa secuencia de transferencias no puede llevar a la situación descrita por el árbitro. Esto implica que no todas las permutaciones son posibles.

### **Revisión del Caso $A \rightarrow C \rightarrow B$ :**

Al revisar las ecuaciones para el orden  $A \rightarrow C \rightarrow B$ :

$$-11A + 6B + 2C = 0$$

$$A - C = 0 \implies A = C$$

$$A + 6B - 2C = 0$$

Sustituyendo  $A = C$  en la primera ecuación:  $-11A + 6B + 2A = 0 \implies -9A + 6B = 0 \implies 3A = 2B \implies B = \frac{3}{2}A$ .

Sustituyendo  $A = C$  en la tercera ecuación:  $A + 6B - 2A = 0 \implies 6B - A = 0 \implies B = \frac{1}{6}A$ .

La contradicción ( $\frac{3}{2}A = \frac{1}{6}A$  implica  $A = 0$ ) confirma que el orden  $A \rightarrow C \rightarrow B$  no es posible bajo las condiciones del problema.

### **Conclusión Final sobre las Proporciones Posibles:**

Las únicas proporciones iniciales (y finales) posibles, hasta una permutación de los jugadores, son  $2 : 2 : 3$  y  $1 : 3 : 3$ .

### **Implicaciones para las Preguntas:**

- **Cantidad de dinero:** Sigue sin poder determinarse exactamente, solo la proporción, que será una de las permutaciones de  $2 : 2 : 3$  o  $1 : 3 : 3$ , dependiendo del orden en que pasaron el dinero.
- **Quién gana:** Depende de la proporción y de quién tiene la parte mayor. Si la proporción es de tipo  $2 : 2 : 3$ , el que tiene la parte 3 gana. Si la proporción es de tipo  $1 : 3 : 3$ , hay un empate entre los dos que tienen la parte 3.

- **Posibilidad de tablas:** Sí, la posibilidad de tablas existe cuando la proporción inicial es de tipo  $1 : 3 : 3$  (o sus permutaciones), donde dos jugadores tienen la misma cantidad mayor que el tercero.

Tu observación sobre la simetría es crucial y nos obliga a considerar todos los órdenes posibles y las proporciones resultantes. La clave está en que la secuencia de fracciones ( $1/2, 1/3, 1/4$ ) aplicada a cada jugador en el ciclo completo es fija, pero el jugador al que se aplica cada fracción varía según quién empiece.