Función multiplicativa continua

A continuación, se proporcionaran varios problemas matemáticos y se pide una resolución de los mismos.

Salida deseada: una resolución estructurada, rigurosa y razonada, que concluye con una solución final a la pregunta o preguntas planteadas. Puedes extenderte lo que quieras.

Problema 1: """
Sea una función real de variable real continua y que contiene valores negativos en su imagen. Sabiendo que dicha función es multiplicativa, es decir, que lleva el producto de dos números en el producto de la evaluación, discutir los siguientes puntos:
(a) ¿Qué se puede decir de la inyectividad de una función tal? ¿Y sobre la sobreyectividad?
(b) ¿Puedes dar un ejemplo de una función que verifique las propiedades del enunciado?
(c) ¿Cuántas funciones existen que verifican las propiedades del enunciado?
"""

- El usuario me solicita resolver un problema sobre funciones multiplicativas continuas con valores negativos en su imagen. Mi enfoque será discutir inyectividad y sobreyectividad, dar un ejemplo de una función que cumpla con estas propiedades y determinar cuántas funciones de este tipo existen. Empezaré con un análisis formal y luego proporcionaré ejemplos concretos basados en la teoría del álgebra de funciones.
- Para las funciones multiplicativas continuas en los reales, cuando la imagen contiene valores negativos, la forma general es $f(x) = \text{sign}(x) \cdot |x|^c$, donde c es real. En este caso, si $c > 0$, la función es creciente en $x > 0$ y también en $x < 0$, pero negativa. Para que la función tenga valores negativos en su imagen, debe cumplirse que $f(-1) = -1$. Ahora bien, si $c \neq 0$, la función será inyectiva.

Listo

Resolución detallada y estructurada

---

1. Planteamiento y comentarios iniciales

Sea

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

una función **continua** en todo $\mathbb{R}$ y que satisface la condición de multiplicatividad

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Además, se sabe que la imagen de f contiene algunos valores negativos. A partir de este enunciado, se piden los siguientes puntos:

1. **(a)** Discuta qué se puede afirmar acerca de la **inyección** y la **sobreyectividad** de una función con estas características.
2. **(b)** Dé un ejemplo de una función que verifique las propiedades del enunciado (continua, multiplicativa, y cuya imagen contenga valores negativos).
3. **(c)** ¿Cuántas funciones de este tipo existen?

Para abordarlos, seguiremos un desarrollo en tres pasos:

1. **Caracterización general** de las funciones reales continuas y multiplicativas.

2. Análisis concreto de inyectividad y sobreyectividad (apartado a).
3. Ejemplo explícito (apartado b).
4. Determinación de la familia completa y su cardinalidad (apartado c).

---

2. Caracterización general de f

2.1. Caso trivial: la función cero

En primer lugar, notemos que si existiera algún $x_0 \neq 0$ tal que $f(x_0) = 0$, entonces, para **cualquier** $y \in \mathbb{R}$,

$$f(0) \;=\; f\big(x_0 \cdot 0\big) \;=\; f(x_0)\, f(0) \;=\; 0 \cdot f(0) \;=\; 0\,,$$

y también

$$f(0) \;=\; f\big(0 \cdot y\big) \;=\; f(0)\, f(y) \;\Longrightarrow\; f(0)\big(1 - f(y)\big) = 0.$$

Si existiera algún y tal que $f(y) \neq 1$, eso forzaría $f(0) = 0$. Pero, una vez que sabemos que $f(x_0) = 0$ para $x_0 \neq 0$, entonces $f \equiv 0$ (se demuestra por $x = x_0$ y cualquier y: $f(x_0\, y) = f(x_0) f(y) = 0 \implies f \equiv 0$).

- **Conclusión 2.1.**
  - Si existe $x_0 \neq 0$ con $f(x_0) = 0$, entonces $f(x) \equiv 0$ para todo x.
  - Esa función “cero” es continua y multiplicativa, pero su imagen es $\{0\}$, que **no** contiene valores negativos distintos de cero.
  - Como en el enunciado se pide explícitamente que la imagen contenga valores negativos, concluimos que **no** nos interesa este caso trivial. A partir de ahora, **supondremos** $f(x) \neq 0$ para todo $x \neq 0$.

2.2. Restricción a $\mathbb{R}_{>0}$

Definamos la restricción de f al subconjunto de los números positivos:

$$f_+ : \; \mathbb{R}_{>0} \;\longrightarrow\; \mathbb{R}\,, \qquad f_+(x) = f(x) \quad (x > 0).$$

Para $x, y > 0$, la multiplicatividad

$$f(x\, y) \;=\; f(x)\, f(y)$$

queda restringida a

$$f_+(x\, y) \;=\; f_+(x)\, f_+(y), \qquad x, y > 0.$$

Observación: la continuidad de f en todo $\mathbb{R}$ implica, en particular, la continuidad de f_+ en $(0, +\infty)$.

2.2.1. Funciones multiplicativas en $(0, +\infty)$

Es un hecho clásico que, si $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es continua y satisface

$$g(x\, y) = g(x)\, g(y) \quad \forall\, x, y > 0,$$

entonces existen dos casos:

1. $g(x) \equiv 0$.
2. $g(x) \neq 0$ para todo $x > 0$ y se puede escribir

$$g(x) \;=\; x^c, \qquad x > 0,$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es una **constante** (determinada por $c = \dfrac{\ln g(e)}{\ln e}$, por ejemplo).

La demostración típica hace uso de:

- Definir $h(x) = \ln\bigl|g(x)\bigr|$ (dado que $g \neq 0$ si no es la idénticamente nula).
- Observar que $h(x\,y) = \ln|g(x\,y)| = \ln\bigl(|g(x)|\,|g(y)|\bigr) = \ln|g(x)| + \ln|g(y)| = h(x) + h(y)$.
- Por continuidad, h es una función aditiva en $(0, +\infty)$ y se concluye que $h(x) = c\,\ln(x)$ (ya que la única solución continua a Cauchy multiplicativo en $\mathbb{R}_{>0}$ es de la forma $\ln(x^c)$).
- Con ello, $\ln|g(x)| = c\,\ln(x) \implies |g(x)| = x^c$.
- Luego, para fijar el signo, se ve que $g(1)$ ha de ser 1 o -1, pero la continuidad obliga a que $g(1) = +1$.

En particular, para nuestro caso $g = f_+$, no deseamos que $f_+(x) \equiv 0$ (pues eso forzaría $f \equiv 0$ en $\mathbb{R}_{>0}$, y por continuidad en $\mathbb{R}$, vuelvo al caso trivial incompatible con la existencia de negativos en la imagen). Por tanto:

> **Para $x > 0$:**
>
> $$f(x) \;=\; x^c, \quad \text{para algún } c \in \mathbb{R}.$$

2.3. Valor en $x = 0$

La multiplicatividad con $x = 0$ y cualquier y da

$$f(0) \;=\; f(0 \cdot y) \;=\; f(0)\,f(y).$$

- Si existe y tal que $f(y) \neq 1$, entonces de $f(0) = f(0)\,f(y)$ se deduce forzosamente $f(0) = 0$.
- Si por el contrario, $f(y) = 1$ para **todo** $y \neq 0$, entonces f sería la función "igual a 1" en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y tendría que ser continua en 0, forzosamente con $f(0) = 1$. Pero en ese caso, $f(x) \equiv 1$ para $x \neq 0$ es multiplicativa, sí, pero su imagen es $\{1\}$, que no contiene valores negativos. De modo que tampoco nos sirve.

Por lo tanto, si queremos que la imagen de f contenga valores negativos y sea multiplicativa, debemos tener necesariamente

$$f(0) \;=\; 0\,.$$

En efecto, en cualquier otro caso (por ejemplo $f \equiv 1$ fuera de 0) se contradice la hipotesis de existir valores negativos en la imagen. Con esto:

> **Conclusión 2.3.**
>
> $$f(0) \;=\; 0.$$
>
> Además, salvo en el caso "identicamente nulo", no hay ninguna otra opción en 0.

2.4. Valor en negativos: uso de (-1)

Para deducir la forma de $f(x)$ cuando $x < 0$, observamos:

1. Si $x < 0$, podemos escribir $x = (-1) \cdot |x|$.
2. La multiplicatividad da entonces

$$f(x) \;=\; f\big((-1)\cdot|x|\big) \;=\; f(-1)\,\underbrace{f\big(|x|\big)}_{=(|x|)^c}.$$

Por tanto

$$f(x) \;=\; f(-1)\,\big|x\big|^c, \qquad x<0.$$

3. Como f es continua en $x=-1$ y ya sabemos que para valores positivos $f(t)=t^c$, hace falta que $f(-1)$ satisfaga

$$f(-1)\neq 0 \quad \text{y además} \quad f(-1)\cdot f(-1) = f\big((-1)\cdot(-1)\big) = f(1) = 1.$$

De allí se deduce

$$f(-1)=\pm 1.$$

Sea

$$\varepsilon \;=\; f(-1) \;\in\; \{+1,\,-1\}.$$

4. Resumiendo, la **forma general** de toda función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua y multiplicativa, que no sea la trivial cero, es

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x=0,\\ x^c, & x>0, \\ \varepsilon\,\big|x\big|^c, & x<0, \end{cases} \quad \text{donde } c\in\mathbb{R},\ \varepsilon\in\{+1,\,-1\}. \qquad (*)$$

Debe además verificarse la continuidad en $x=0$. Observemos:

- Para $c>0$,
  $\lim\limits_{x\to 0^+} x^c = 0, \quad \lim\limits_{x\to 0^-} \varepsilon\,|x|^c = 0.$
  Por lo tanto, si tomamos $f(0)=0$, la definición es continua en todo $\mathbb{R}$.
- Si $c=0$, entonces $x^c=1$ para $x>0$, y para $x<0$ se tiene $\varepsilon\cdot\big|x\big|^0=\varepsilon$.
  Entonces

  $$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x)=\varepsilon.$$

  Para que haya continuidad en 0 se necesitaría $1=\varepsilon$ y $f(0)=1$. Pero eso implicaría $f(x)\equiv 1$ para $x\neq 0$ (caso que no lleva negativos). Así, no hay forma de que un $c=0$ produzca una función continua en todo $\mathbb{R}$ **y** tenga imágenes negativas.
- Si $c<0$, entonces $\lim_{x\to 0^+} x^c=+\infty$, por lo que no se puede definir $f(0)$ de modo continuo. Así, los casos $c\leq 0$ no conducen a una función continua en $x=0$ (salvo el caso $f\equiv 0$, ya descartado).

Conclusión intermedia:

> La única forma de que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sea **continua** en todo $\mathbb{R}$, **multiplicativa**, y con valores negativos en su imagen, es elegir
>
> - "$c>0$,"
> - "$\varepsilon=f(-1)=-1$,"
> - "**y definir** $f(0)=0$."
>
> En ese caso,
>
> $$\boxed{f(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x=0,\\ x^c, & x>0, \quad (c>0).\\ -\big|x\big|^c, & x<0, \end{cases}}$$
>
> De hecho, es equivalente escribir

> $$f(x) \;=\; \operatorname{sgn}(x)\,\bigl|x\bigr|^{c}, \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$
>
> pues para $x = 0$ conviene tomar $\operatorname{sgn}(0) = 0$ y $|0|^c = 0$.

---

3. Apartado (a): Inyectividad y sobreyectividad

Dado que, **para satisfacer la hipótesis de valores negativos**, estamos forzados a tomar la forma

$$f(x) \;=\; \operatorname{sgn}(x)\,|x|^{c}, \qquad c > 0,$$

luego analizamos inyectividad y sobreyectividad de esta familia.

3.1. Inyectividad

Sea $f(x) = \operatorname{sgn}(x)\,|x|^c$ con $c > 0$. Para ver si f es inyectiva, comparemos dos valores $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x_1) \;=\; f(x_2).$$

- **Caso 1.** $x_1 = 0$. Entonces $f(x_1) = 0$. Si $f(x_2) = 0$, necesariamente $x_2 = 0$, porque sólo $x = 0$ lleva a $f(x) = 0$. Concluimos que en ese caso $x_2 = 0$ también, y no hay ambigüedad.
- **Caso 2.** $x_1 > 0$. Entonces $f(x_1) = x_1^c > 0$. Para que $f(x_2) = x_1^c > 0$, hace falta $f(x_2) > 0$, lo cual obliga $x_2 > 0$. En ese caso $f(x_2) = x_2^c$. De la igualdad

  $$x_1^c \;=\; x_2^c, \quad x_1, x_2 > 0,$$

  por ser $t \mapsto t^c$ una función **estrictamente creciente** en $(0, +\infty)$ (pues $c > 0$), se deduce

  $$x_1 = x_2.$$

- **Caso 3.** $x_1 < 0$. Entonces $f(x_1) = -\,|x_1|^c < 0$. Para que $f(x_2)$ sea igual, es necesario que $f(x_2) < 0$, es decir, que $x_2 < 0$. En ese caso

  $$f(x_2) \;=\; -\,|\,x_2|^c.$$

  Y de $-\,|x_1|^c = -\,|x_2|^c$ se deduce $|x_1|^c = |x_2|^c$. Nuevamente, como $|x| \mapsto |x|^c$ es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$, surge $|x_1| = |x_2|$. Pero, dado que ambos son negativos, eso implica también $x_1 = x_2$.

En ninguno de los casos es posible tener dos valores distintos mapeados al mismo valor.

> **Por tanto, para $c > 0$, $f(x) = \operatorname{sgn}(x)\,|x|^c$ es una función inyectiva**.

3.2. Sobreyectividad

Hay que ver si, dados **todos** los posibles valores $y \in \mathbb{R}$, existe x tal que $f(x) = y$.

1. **Si** $y = 0$. Tomamos $x = 0$. Como definimos $f(0) = 0$, estamos cubriendo el valor $y = 0$.
2. **Si** $y > 0$. Queremos $f(x) = y$. Dado que $y > 0$, la única manera es buscar $x > 0$ (pues si $x < 0$, $f(x)$ sería negativo). Para $x > 0$, $f(x) = x^c$. Entonces

   $$x^c = y > 0 \implies x = y^{1/c} > 0,$$

la raíz real y única.

3. **Si** $y < 0$. Análogamente, para que $f(x) = y < 0$, necesitamos $x < 0$ (pues en $\mathbb{R}_{>0}$ sólo se generan imágenes positivas). Si $x < 0$, entonces $f(x) = -|x|^c$. Queremos

$$-|x|^c \ = \ y \ < 0 \quad \Longrightarrow \quad |x|^c = -y \ > \ 0 \quad \Longrightarrow \quad |x| = \left(-y\right)^{1/c} \quad \Longrightarrow \quad x = -\left(-y\right)^{1/c} \ < 0.$$

Hay una única solución negativa.

Por lo tanto, para **cada** $y \in \mathbb{R}$ existe **exactamente un** $x \in \mathbb{R}$ que satisface $f(x) = y$.

> **Conclusión 3.2.**
> La función $f(x) = \operatorname{sgn}(x)\,|x|^c$ con $c > 0$ es **sobreyectiva** sobre $\mathbb{R}$.

3.3. Resumen del apartado (a)

- **Inyectividad:**
  Cualquier función continua multiplicativa no trivial que tome valores negativos **debe** tener la forma

  $$f(x) = \operatorname{sgn}(x)\,|x|^c, \quad c > 0.$$

  La demostración anterior muestra que tal forma es estrictamente monótona creciente a lo largo de $\mathbb{R}$, de modo que **es inyectiva**.

- **Sobreyectividad:**
  También acabamos de ver que, para cada $y \in \mathbb{R}$, hay un único x que produce $f(x) = y$. En consecuencia, toda función de la forma $f(x) = \operatorname{sgn}(x)\,|x|^c$ (con $c > 0$) es **sobreyectiva** sobre $\mathbb{R}$.

Por tanto, bajo las hipótesis del enunciado (continua, multiplicativa, imagen con valores negativos), la función es **biyección** $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

---

4. Apartado (b): Ejemplo explícito

Para ejemplificar, basta con escoger cualquier $c > 0$. Los ejemplos más sencillos son:

1. **Opción** $c = 1$.

$$f(x) \ = \ \operatorname{sgn}(x)\,|x|^1 \ = \ \operatorname{sgn}(x)\,|x| \ = \ \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x, & x > 0, \\ -(-x) = x, & x < 0, \end{cases}$$

es decir,

$$f(x) \ = \ x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Efectivamente,

- Para $x > 0$, $f(x) = x$.
- Para $x < 0$, $\operatorname{sgn}(x) = -1$ y $|x| = -x$, de modo que $\operatorname{sgn}(x)\,|x| = -1 \cdot (-x) = x$.
- Y $f(0) = 0$.

Claramente $f(xy) = xy = f(x)\,f(y)$. Su imagen cubre todo $\mathbb{R}$. Es continua y toma valores negativos (por ejemplo, $f(-2) = -2 < 0$). Cumple todos los requisitos.

En cierto sentido, este es el ejemplo "más trivial" del mundo: la propia función identidad $f(x) = x$.

2. **Opción** $c = 2$**.**

$$f(x) \;=\; \operatorname{sgn}(x)\,|x|^2 \;=\; \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x^2, & x > 0, \\ -\,(-x)^2 = -\,x^2, & x < 0. \end{cases}$$

Aquí se ve que:

- Si $x > 0$, $f(x) = x^2$.
- Si $x < 0$, $f(x) = -\,x^2$, que es un número negativo.
- Además, $f(xy) = \operatorname{sgn}(xy)\,|x\,y|^2 = \big[\operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(y)\big]\,(|x|\,|y|)^2 = \big[\operatorname{sgn}(x)\,|x|^2\big]\,\big[\operatorname{sgn}(y)\,|y|^2\big] = f(x)\,f(y)$.
- Se comprueba continuidad, inyectividad y sobreyectividad, y claramente la imagen contiene números negativos (por ejemplo, $x = -1 \implies f(-1) = -1$).

Cualquiera de estos ejemplos (correspondientes a $c = 1$, $c = 2$ —o en general a **cualquier** $c > 0$) sirve para mostrar que existe al menos una función que cumple todas las condiciones del enunciado.

---

5. Apartado (c): ¿Cuántas funciones existen?

Del apartado 2 hemos visto que, **excluyendo la función trivial** $f \equiv 0$ (que no tiene valores negativos distintos de cero), toda función continua, multiplicativa y con imagen negativa viene forzada a la forma

$$\boxed{f_c(x) \;=\; \operatorname{sgn}(x)\,|x|^c\,, \qquad c > 0.}$$

Cada elección de $c > 0$ genera una función distinta. Ahora bien:

1. **Dominio de** c**.**
   - No podemos tomar $c \le 0$ porque fallaría la continuidad en $x = 0$ (si $c < 0$, $f(x) \to +\infty$ o $-\infty$ al acercarse a 0, y para $c = 0$ nos quedamos con la función constante en $\{+1, -1\}$ fuera de cero, que no genera valores negativos gestionables).
   - Por ende, el parámetro c ha de pertenecer a $\big(0, +\infty\big)$.
2. **Infinidad y cardinalidad.**
   - El conjunto $(0, +\infty)$ es un intervalo **no numerable** de números reales.
   - Para cada $c \in (0, +\infty)$ hay **exactamente una** función f_c.
   - Por tanto, el número de funciones que satisfacen las condiciones (continuas, multiplicativas, imagen conteniendo negativos) es la misma cardinalidad que $(0, +\infty)$, es decir, **infinitamente muchas** (más precisamente, su cardinalidad es la del continuo, $|\mathbb{R}|$).
3. **¿Hay alguna otra solución aparte de esa familia parametrizada por** c**?**
   - La parte esencial de la demostración es:
     1. Para $x > 0$, la continuidad y la multiplicatividad imponen $f(x) = x^c$ (o bien $f(x) \equiv 0$, caso que descartamos).
     2. Para $x < 0$, la condición de multiplicatividad fija $f(x) = f(-1)\,|x|^c$, y $f(-1)$ sólo puede valer ± 1.
     3. Para tener negativos en la imagen, hace falta $f(-1) = -1$.
     4. La continuidad en $x = 0$ impone $c > 0$ y $f(0) = 0$.

   De ahí no queda margen para otra posibilidad. Ninguna otra construcción discontinua, ni con signo diferente de $\operatorname{sgn}(x)$, ni con exponentes variables, puede satisfacer simultáneamente:

- la *multiplicatividad*
- la *continuidad en* $\mathbb{R}$
- y la imagen conteniendo valores negativos.

En consecuencia, **todas** las funciones viables están descritas por

$$\{\, f_c : x \mapsto \operatorname{sgn}(x)\,|x|^c \ \mid\ c > 0 \,\}.$$

> **Conclusión final (apartado c).**
> Existen **infinitamente muchas** funciones continuas y multiplicativas cuya imagen contiene valores negativos. De hecho, la familia de todas ellas es un parámetro continuo $c \in (0, +\infty)$, de modo que su cardinalidad es la misma que la del intervalo $(0, +\infty)$.

---

6. Resumen y respuestas finales

(a) Inyectividad y Sobreyectividad

- **Inyectividad.** Una función continua y multiplicativa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que toma valores negativos se ve forzada a la forma

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x)\,|x|^c, \qquad c > 0.$$

  Con esa expresión, se prueba que f es estrictamente creciente (pasa de $-\infty$ a 0 al recorrer $(-\infty, 0)$, y de 0 a $+\infty$ al recorrer $(0, +\infty)$), luego es **inyectiva**.

- **Sobreyectividad.** Dado cualquier valor $y \in \mathbb{R}$, existe un único punto $x \in \mathbb{R}$ que produce $f(x) = y$ (si $y > 0$ buscándolo en $x > 0$; si $y < 0$ en $x < 0$; si $y = 0$, $x = 0$). Por tanto, f es **sobreyectiva**.

> **Por ende, toda función continua y multiplicativa cuya imagen contenga negativos es, de hecho, una biyección $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.**

(b) Ejemplo de función que cumpla las condiciones

Basta tomar, por ejemplo,

$$\boxed{f(x) \ = \ x\,, \quad \text{o bien} \quad f(x) = \operatorname{sgn}(x)\,|x|^2,}$$

ambas son continuas, multiplicativas y su imagen contiene valores negativos (por ejemplo, $f(-1) = -1$ en el segundo caso, o $f(-2) = -2$ en el primero).

(c) Cardinalidad de las funciones que verifican las propiedades

- La familia de funciones continuas, multiplicativas y con imagen negativa está dada **únicamente** por

$$f_c(x) \ = \ \operatorname{sgn}(x)\,|x|^c, \quad c > 0.$$

- El parámetro c puede ser **cualquier** número real **estrictamente positivo**.
- Por lo tanto, existen **infinitas** tales funciones, con cardinalidad $|(0, +\infty)|$ (la del continuo).

Respuesta final compacta:

1. (a) Toda función continua y multiplicativa con valores negativos debe ser de la forma $f(x) = \operatorname{sgn}(x)\,|x|^c$ para algún $c > 0$. Cualquiera de esas funciones es estrictamente creciente, luego **inyectiva**, y satisface además que para cada $y \in \mathbb{R}$ hay exactamente un x tal que $f(x) = y$, por lo que es **sobreyectiva**.
2. (b) Un ejemplo concreto es $f(x) = x$ (caso $c = 1$), o también $f(x) = \operatorname{sgn}(x)\,|x|^2$.
3. (c) Hay **infinitas** funciones de este tipo: la familia se parametriza por $c \in (0, +\infty)$. Combinando todas ellas, su cardinalidad es la del continuo.

Problema 2: """
Dadas tres rectas en el plano, suponiendo que son todas distintas (no hay dos rectas coincidentes), determinar la cantidad de circunferencias tangentes (simultáneamente a las tres rectas) existente.
"""

- Se me pregunta cuántos círculos son tangentes a tres líneas distintas en el plano. En general, hay 8 círculos tangentes a tres líneas en posición general, dado que por cada línea, el círculo puede ser tangente interna o externamente (2^3 = 8). Sin embargo, la respuesta depende de la configuración de las líneas. Si las tres líneas forman un triángulo, como el incírculo y los tres excírculos, entonces hay cuatro círculos tangentes a todas las líneas.
- Cuando se tienen tres líneas en el plano, si no son paralelas, se forman puntos de intersección que definen un triángulo. Los bisectores de ángulos de este triángulo se cruzan en 4 puntos diferentes: el incentro y tres excentros. Estos son los centros de los cuatro círculos tangentes a las tres líneas. Sin embargo, considerando diferentes combinaciones y signos de distancias, hay 8 posibles soluciones. Si las líneas son paralelas, el número de círculos tangentes será menor.
- Las tres líneas pueden estar en posición general, formando un triángulo con sus intersecciones, o dos pueden ser paralelas, con la tercera intersectando. Si las líneas se cruzan en un solo punto, no es posible tener un círculo tangente a las tres a menos que sea degenerado. Si tres líneas son paralelas, también es imposible que un círculo las toque todas. En otros casos, como dos líneas paralelas y una transversal, podrían existir soluciones, pero la cantidad depende de la configuración específica.

Listo

Resolución detallada y estructurada

Planteamiento del problema

Se tienen tres rectas distintas en el plano (ninguna coincide con otra). Denotémoslas por

$$L_1,\ L_2,\ L_3 \subset \mathbb{R}^2,$$

con la única hipótesis de que no hay dos rectas coincidentes. Se pide determinar cuántas circunferencias (no degeneradas) existen que sean **simultáneamente tangentes** a las tres rectas dadas.

> **Observación importante.** Dependiendo de la posición relativa de las tres rectas (si forman un triángulo, si hay dos paralelas, si concurren en un punto, etc.), el número de circunferencias tangentes simultáneamente puede variar. Por tanto, conviene clasificar las configuraciones posibles y, en cada caso, contar cuántas soluciones existen.

---

1. Conceptos básicos: círculo tangente a una recta

Sea L una recta en el plano y C una circunferencia de radio $r > 0$, de ecuación

$$C: \ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \ = \ r^2,$$

con centro (x_0, y_0). Diremos que C es **tangente** a L si la distancia del centro (x_0, y_0) a la recta L es exactamente r. Es decir, si la ecuación de L puede escribirse en forma normalizada

$$L: \ a\,x + b\,y + c = 0, \quad \sqrt{a^2 + b^2} = 1,$$

entonces la condición de tangencia se resume en

$$\bigl|\,a\,x_0 + b\,y_0 + c\,\bigr| \ = \ r.$$

Geométricamente, hay dos "lados" de la recta L; si el signo de $a\,x_0 + b\,y_0 + c$ es positivo, la circunferencia queda en un lado; si es negativo, en el otro. Pero en todo caso el valor absoluto es r.

---

2. Clasificación de posiciones relativas de las tres rectas

Se distinguen cuatro situaciones "tipo" (sin pérdida de generalidad, pues cualquier conjunto de tres rectas cae en uno de estos casos, salvo coincidencia que descartamos):

1. **Las tres rectas se cortan dos a dos formando un triángulo**.
   - Es la configuración "genérica" en la que no hay pares paralelos ni tres concurrentes en un solo punto.
   - Llamaremos a las intersecciones $A = L_2 \cap L_3, \ B = L_3 \cap L_1, \ C = L_1 \cap L_2$.
2. **Exactamente un par de rectas es paralelo y la tercera las corta**.
   - Por ejemplo, $L_1 \parallel L_2$ y L_3 no es paralelo a ninguna de ellas (por tanto, las corta).
   - Geométricamente, dos rectas horizontales con distinta ecuación $y = k_1$ y $y = k_2$, y una recta inclinada o vertical que las atraviesa.
3. **Las tres rectas son paralelas dos a dos**.
   - Es decir, $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$.
   - Aquí no hay intersecciones finitas entre ellas.
4. **Las tres rectas concurren en un mismo punto**.
   - Es decir, $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{P\}$ para algún $P \in \mathbb{R}^2$.
   - Geométricamente es como tres semirrectas que salen del mismo vértice, extendidas a rectas completas.

A cada configuración le corresponde un número distinto de circunferencias posibles que sean tangentes a las tres. A continuación, analizamos cada caso:

---

3. Caso 1: Tres rectas formando un triángulo

Hipótesis. Ninguna pareja es paralela y las tres no son concurrentes. En consecuencia, definen un triángulo $\triangle ABC$, donde

$$A = L_2 \cap L_3, \quad B = L_3 \cap L_1, \quad C = L_1 \cap L_2.$$

Las rectas $L_1,\ L_2,\ L_3$ son las rectas que contienen los lados $BC,\ CA,\ AB$, respectivamente.

3.1. Construcción clásica: incentro y excentros

En la geometría clásica de los triángulos se demuestran los siguientes hechos:

1. **Incentro.**
   - Es el punto I donde concurren las tres bisectrices internas de los ángulos $\angle A, \angle B, \angle C$.
   - El círculo de radio r_{in} centrado en I es tangente a los tres lados **por dentro**.
   - A este círculo se le llama **incircle** o circunferencia inscrita del triángulo.
2. **Excentros.**
   - Para cada vértice (por ejemplo, A) se define la bisectriz externa de $\angle A$ (la recta que bisecta el ángulo suplementario a $\angle A$).
   - Hay a su vez dos bisectrices (interna y externa) en cada vértice, de modo que al tomar "externa" en A y "interna" en B, C, esas tres bisectrices concurren en un punto, al que se le llama **excentro** opuesto a A.
   - Se obtiene un total de tres excentros, uno por cada vértice, y cada excentro genera un círculo **exterior** al triángulo, tangente a los tres lados (pero "rodeando" al triángulo).

> **Teorema.** En un triángulo no degenerado, existen exactamente **cuatro** círculos que son tangentes a sus tres lados (las tres rectas que contienen esos lados):
> 1. **"El incircle (incentro)."**
> 2. **"Tres excircles (excentro A, excentro B y excentro C)."**

Estos cuatro (1 incircle + 3 excircles) corresponden exactamente a las **cuatro** posibles elecciones de signo en las distancias dirigidas a cada lado (uno para incircle —tangencia interna a los tres lados— y tres para los excircles —tangencia interna a dos lados, externa a uno —).

3.1.1. Justificación breve del número "4"

Cada círculo tangente a las tres rectas L_1, L_2, L_3 puede "tocar" cada recta por un lado u otro (internamente o "externamente" respecto al triángulo). Para cada recta hay dos posibilidades de elegir el "lado de la tangencia". En principio, eso sugeriría $2^3 = 8$ maneras de escoger el signo de la distancia a (L_1, L_2, L_3). Sin embargo:

- De esas 8 combinaciones, **cuatro** llevan a centros de circunferencia que están "por fuera" de la región del triángulo y generan un solo excentro.
- Las otras cuatro combinaciones producen puntos ficticios o se traducen en un mismo excentro duplicado (por cuestiones de simetrías de las bisectrices).
- En realidad, en un triángulo "no degenerado" las bisectrices (internas/externas) se distribuyen de modo que sólo surgen vértices comunes de tres bisectrices en **cuatro** puntos distintos: 1 incentro (+,+,+) y 3 excentros (por ejemplo, (+,+,−), (+,−,+), (−,+,+), donde el signo indica qué lado de la recta se toma).
- Una forma rápida de verlo es: en cada vértice hay dos bisectrices (interna y externa). Un excentro es la intersección de las dos bisectrices "externas/internas" elegidas de modo adecuado. Cuando se rastrean todas las combinaciones geométricas, aparecen únicamente 4 intersecciones distintas de triples de bisectrices.

Por tanto, **la respuesta** en este caso es:

> **Número de circunferencias tangentes a las tres rectas que forman un triángulo:**
>
> $$\boxed{4.}$$

4. Caso 2: Dos rectas paralelas y la tercera las corta

Supongamos que, por ejemplo,

$$L_1 \ \| \ L_2, \quad L_3 \text{ no es paralela a } L_1 \text{ (ni a } L_2),$$

de modo que L_3 **corta** a las dos paralelas L_1, L_2. (Este es el prototipo: dos horizontales y una inclinada, o dos verticales y una transversal, etc.)

4.1. Coordenadas modelo

Para visualizar el argumento, podemos tomar un sistema de coordenadas tal que:

1. L_1 sea la recta $y = 0$.
2. L_2 sea la recta $y = d$, con $d > 0$.
   - Con esto, $L_1 \parallel L_2$ están separadas por una distancia vertical d.
3. L_3 puede ser cualquier recta no paralela a ellas; sin pérdida de generalidad tomemos

$$L_3 : \ y \ = \ m\,x + b, \quad m \neq 0,$$

   de modo que corta a ambas horizontales en dos puntos distintos.

4.2. Ecuaciones de tangencia

Buscamos todas las circunferencias de centro (h, k) y radio $r > 0$ tales que:

1. **Tangencia a $L_1 : \ y = 0$.**

$$\operatorname{Dist}\big((h,k),\ y = 0\big) \ = \ |\,k - 0\,| \ = \ r \quad \Longrightarrow \quad |\,k\,| = r.$$

   (I) $k = +r$ ó $k = -r$.

2. **Tangencia a $L_2 : \ y = d$.**

$$\operatorname{Dist}\big((h,k),\ y = d\big) \ = \ |\,k - d\,| = r.$$

   (II) $k - d = +r$ ó $k - d = -r$.

3. **Tangencia a $L_3 : \ y = m\,x + b$.**
   Si normalizamos su ecuación en forma $m\,x - y + b = 0$, la distancia al centro (h, k) es

$$\operatorname{Dist}\big((h,k),\ L_3\big) \ = \ \frac{|\,m\,h \ - \ k \ + \ b\,|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} \ = \ \frac{|\,m\,h - k + b\,|}{\sqrt{m^2 + 1}} \ = \ r.$$

   Equivalente a

$$|\,m\,h \ - \ k \ + \ b\,| \ = \ r\,\sqrt{m^2 + 1}. \tag{III}$$

4.3. Resolución de las relaciones (I) y (II)

Analicemos primero las combinaciones posibles para (I) y (II), es decir, la tangencia simultánea a las dos paralelas $y = 0$ y $y = d$.

- De (I) sabemos que $k = \pm\,r$.
- De (II) tenemos $k - d = \pm\,r$.

Para hallar (k, r) que satisfaga ambas, combinamos:

1. **Opción a.** $k = +r$ y $k - d = +r$.

- De $k = r$ sustituimos en $k - d = r \to r - d = r \to d = 0$.
- Imposible, ya que asumimos $d > 0$.

2. **Opción b.** $k = +r$ y $k - d = -r$.
   - Sustituyendo $k = r$ en $r - d = -r \to 2r = d \to r = \frac{d}{2}$.
   - Entonces $k = +r = +\frac{d}{2}$.
3. **Opción c.** $k = -r$ y $k - d = +r$.
   - De $k = -r$, se obtiene $-r - d = +r \to -d = 2r \to r = -\frac{d}{2}$.
   - Pero $r > 0$ por definición de radio, así que queda descartado (no hay $r > 0$ que satisfaga).
4. **Opción d.** $k = -r$ y $k - d = -r$.
   - Reemplazando $k = -r$ en $-r - d = -r \to -d = 0 \to d = 0$.
   - Contradicción porque $d > 0$.

Por tanto, la **única** posibilidad consistente es

$$\boxed{r = \frac{d}{2}, \quad k \;=\; \frac{d}{2}.}$$

Es decir, el centro de toda circunferencia que toque a ambas horizontales $y = 0$ y $y = d$ debe hallarse en la línea horizontal $k = \frac{d}{2}$, con radio $r = \frac{d}{2}$. Geométricamente, el círculo "se coloca" justo a mitad de camino en y-coordenada, de modo que la distancia vertical a $y = 0$ y a $y = d$ es la misma ($= \frac{d}{2}$).

4.4. Resolución de (III): tangencia a la recta oblicua

Ahora imponemos la tangencia a $L_3 : \; y = m\,x + b$. Ya sabemos que

$$r = \frac{d}{2}, \quad k = \frac{d}{2},$$

así que en (III) sustituimos r y k. Queda

$$\bigl|\, m\,h - k + b \,\bigr| \;=\; r\,\sqrt{m^2+1} \quad\Longleftrightarrow\quad \bigl|\, m\,h - \tfrac{d}{2} + b \,\bigr| \;=\; \Bigl(\tfrac{d}{2}\Bigr)\,\sqrt{m^2+1}.$$

Definamos

$$T(h) \;:=\; m\,h \;-\; \frac{d}{2} \;+\; b, \quad R \;:=\; \frac{d}{2}\,\sqrt{m^2+1}.$$

La ecuación de tangencia es $\,|\,T(h)\,| = R$. Esto produce dos soluciones reales en h, siempre que $R > 0$, pues

1. $m\,h - \frac{d}{2} + b = +R$
$$\Longrightarrow \quad h \;=\; \frac{\frac{d}{2} - b + R}{m}.$$
2. $m\,h - \frac{d}{2} + b = -R$
$$\Longrightarrow \quad h \;=\; \frac{\frac{d}{2} - b - R}{m}.$$

Dado que $d > 0$ y $\sqrt{m^2+1} > 0$, se cumple $R > 0$. Por tanto, **siempre** hay dos valores distintos de h. Cada uno da un centro $\bigl(h, \frac{d}{2}\bigr)$ con radio $r = \frac{d}{2}$. Así:

> **En el caso "dos paralelas y una transversal" existen exactamente **2 **circunferencias** (radio $\frac{d}{2}$) que tocan simultáneamente a $L_1 : y = 0$, $L_2 : \; y = d$ y $L_3 : \; y = m\,x + b$.

4.5. Interpretación geométrica

- Las dos circunferencias halladas tienen su centro sobre la línea horizontal $y = \frac{d}{2}$, equidistante de L_1 y L_2.
- Para cada uno de los dos puntos de intersección entre esa horizontal y las **dos** rectas paralelas a L_3 situadas a distancia $\pm R$ (paralelas a L_3 a distancia r), surge un centro distinto.
- En otras palabras, si "desplazamos" la recta L_3 una distancia r hacia arriba y otra distancia r hacia abajo (paralelas a sí misma), obtenemos dos líneas, cada una de las cuales corta a $y = \frac{d}{2}$ en un punto. Su intersección con $y = \frac{d}{2}$ da los dos centros posibles.

Por tanto:

> **Número de circunferencias tangentes a dos rectas paralelas y una transversal:**
>
> $$\boxed{2.}$$

---

5. Caso 3: Tres rectas paralelas

Supongamos que

$$L_1 \parallel L_2 \parallel L_3,$$

es decir, hay tres rectas distintas pero todas con la misma dirección (pueden escribirse como $ax + by + c_1 = 0,\ ax + by + c_2 = 0,\ ax + by + c_3 = 0$, con $(a, b) \neq (0, 0)$ y c_1, c_2, c_3 distintos dos a dos).

5.1. Condición de tangencia simultánea

Sea $L_i :\ a\,x + b\,y + c_i = 0$ con $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$ y c_1, c_2, c_3 distintos. La distancia del centro (h, k) a L_i ha de ser r, es decir:

$$\bigl|\,a\,h + b\,k + c_i\,\bigr| \;=\; r, \quad i = 1, 2, 3.$$

Para cada i, esto define dos "bandas paralelas" a la recta L_i, separadas a distancia r.

Pero, dado que las tres rectas L_1, L_2, L_3 son paralelas y tienen constantes c_1, c_2, c_3 diferentes, las tres parejas de bandas nunca concurren en un mismo punto (h, k) salvo en situaciones singulares

- Para que un mismo (h, k) satisfaga $|a\,h + b\,k + c_1| = |a\,h + b\,k + c_2| = |a\,h + b\,k + c_3| = r$, deberá hallarse la misma "línea de centro" equidistante de las tres rectas.
- Esto sólo es posible si dos de las rectas están a la misma distancia de la tercera y hay un simetría central. Pero cuando c_1, c_2, c_3 son independientes, esa coincidencia no se da en general.

De hecho, *en un conjunto de tres paralelas sin ninguna simetría, no existe ningún punto (h, k) cuya distancia numérica a las tres líneas sea la misma, a menos que esa distancia (radio) sea cero y el punto esté "exactamente sobre" la intersección degenerada (imposible porque son paralelas y no se cruzan).**

Por consiguiente:

> **Número de circunferencias tangentes a tres rectas paralelas distintas:**
>
> $$\boxed{0.}$$
>
> (No existe ninguna circunferencia de radio $r > 0$ que toque simultáneamente a las tres paralelas, salvo el caso degenerado $r = 0$, que no cuenta como circunferencia.)

6. Caso 4: Las tres rectas concurren en un mismo punto

Supongamos ahora que

$$L_1,\ L_2,\ L_3$$

concurren en $P = (x_P, y_P)$. Es decir, existe un único punto P tal que

$$P = L_1 \cap L_2 \cap L_3.$$

Geométricamente, se trata de tres rectas "radiales" que parten de P (ángulos distintos, digamos $\theta_1, \theta_2, \theta_3$), aunque las extendamos como rectas completas.

6.1. ¿Puede haber una circunferencia tangente a las tres?

Sea C una circunferencia de centro (h, k) y radio $r > 0$. Para que sea tangente a L_i, hace falta que la distancia de (h, k) a cada L_i valga r. Pero obsérvese:

- Todas las rectas pasan por P.
- La única forma de que (h, k) esté a la misma distancia r de tres rectas concurrentes en P es que (h, k) sea un **punto de cruce de las tres líneas que están a distancia r de cada L_i**.
- Sin embargo, si trasladamos cada recta L_i paralelamente a distancia r (hacia "arriba" o "abajo" del lado normal), obtenemos tres rectas paralelas a cada L_i.
- Para que las tres rectas "desplazadas" coincidan en un mismo punto (h, k), sería necesario que ese punto P estuviera a distancia exacta r de cada una de las tres, **pero** como las rectas originales se cruzan en ángulos distintos, esas tres líneas paralelas "trasladadas" **no pueden** concurrir en un solo punto (salvo en el caso trivial $r = 0$, pues la única manera de que tres semirrectas radiales en diferentes direcciones tengan un punto a distancia cero de las tres es en el mismo vértice P, pero eso no define un círculo de radio > 0).

Más explícitamente:

- Tome la recta $L_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ con $\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = 1$, y análogamente para L_2, L_3. Todas pasan por P, con lo que $a_i x_P + b_i y_P + c_i = 0$.
- Si C es tangente a L_i, debe cumplirse $\left|a_i h + b_i k + c_i\right| = r$.
- Pero como (h, k) no está, en general, en la misma dirección normal respecto a las tres (a_i, b_i cambian según i), no hay forma de hallar un $(h, k) \neq P$ con la misma $r > 0$ para los tres índices $i = 1, 2, 3$.
- En el único caso degenerate (r=0), el único punto a distancia cero de cada recta es precisamente el propio P. Entonces la "circunferencia" de radio 0 degenera a un punto, no es una circunferencia propiamente dicha.

> **Por tanto, en el caso de tres rectas concurrentes (ángulos distintos en P) NO EXISTE NINGUNA circunferencia de radio > 0 que sea tangente a las tres**.

Respuesta:

> **Número de circunferencias tangentes a tres rectas concurrentes en un punto:**
>
> $$\boxed{0.}$$

7. Resumen final de todos los casos

Reuniendo lo demostrado:

Configuración de las tres rectas	# de circunferencias tangentes simultáneamente
1) Forman un triángulo (no paralelas, no concurrentes)	4
2) Dos paralelas y la tercera las corta	2
3) Tres paralelas	0
4) Tres concurrentes	0

De modo más explícito:

1. **Tres rectas formando un triángulo**
   - Existen exactamente **4** circunferencias:
     1. La circunferencia inscrita (incircle)
     2. Las tres circunferencias excéntricas (excircles)
2. **Dos rectas paralelas y la tercera las corta**
   - Existen exactamente **2** circunferencias.
3. **Tres rectas paralelas**
   - No existe ninguna circunferencia de radio > 0 tangente simultáneamente a las tres escenas.
4. **Tres rectas concurrentes en un mismo punto**
   - Tampoco existe ninguna circunferencia de radio > 0 tangente a las tres.

---

8. Conclusión final

Respuesta al problema.

> Dadas tres rectas distintas L_1, L_2, L_3 en el plano, el número de circunferencias no degeneradas que son simultáneamente tangentes a las tres depende de la posición relativa de las rectas:
>
> 1. **“Si las tres rectas se cortan dos a dos formando un triángulo:**
> 4 **circunferencias (una inscrita y tres excéntricas).”**
> 2. **“Si hay exactamente un par de rectas paralelas y la tercera las corta:**
> 2 **circunferencias.”**
> 3. **“Si las tres rectas son todas paralelas entre sí:**
> 0 **circunferencias (no hay solución).”**
> 4. **“Si las tres rectas concurren en un mismo punto:**
> 0 **circunferencias (no hay solución).”**

De este modo, el problema queda resuelto por **clasificación de casos** y cuenta de soluciones en cada uno.

Problema 3: """
Tres amigos se sientan en una mesa circular a probar un juego de apuestas. Por suerte, para que nadie haga trampas, junto con las reglas del juego, un árbitro les acompaña en

su aventura. Cada uno apuesta (sin que nadie más que el mismo jugador y el árbitro sepa la cantidad del jugador en cuestión) una cantidad de euros múltiplo de 12 y, por supuesto, de al menos 1 euro. Esta apuesta será la cantidad de dinero con que operarán. El árbitro indica que cada uno de los jugadores le pase al jugador de su derecha, en orden secuencial y hasta terminar un ciclo completo (es decir, hasta que todos hayan pasado dinero una vez, pero solo una vez), respectivamente un medio, un tercio y un cuarto de sus tenencias al momento en que le toca pasar dinero. El jugador que primero pasa el dinero se decide de manera aleatoria. Gana, y por tanto se lleva todo el dinero, el jugador que cuente con más dinero al finalizar este intercambio. Una vez concluido el intercambio, el árbitro, exaltado por la emoción, exclama: "¡qué casualidad que tengáis el mismo dinero con el que empezasteis!". ¿Se puede saber con exactitud la cantidad de dinero que había apostado cada uno? ¿Se puede saber, solo con esta información, quién gana? ¿Existe posibilidad de tablas, es decir, que al menos dos jugadores tengan el mismo dinero y el tercero no les supere?
"""

- Tenemos un acertijo: tres amigos A, B y C están sentados en círculo. Cada uno apuesta una cantidad multiplicada por 12, siendo al menos 12 euros. La descripción menciona "al menos 1 euro", pero eso parece contradictorio, porque un múltiplo de 12 debe ser al menos 12. Probablemente enfatizan que son cantidades positivas e enteras. Cada uno pasa una fracción de su dinero: uno pasa la mitad, otro el tercio, y otro la cuarta parte. Lo hacen de forma secuencial, pasándose el dinero hacia la derecha.
- En este enigma, tres personas pasan dinero en fracciones de su cantidad actual: la primera pasa la mitad, la siguiente pasa un tercio y la última pasa un cuarto, pero hay algo ambiguo en cómo se asignan esas fracciones. La pregunta es si podemos determinar las cantidades iniciales exactas de cada jugador y quién ganaría (aunque terminan con lo mismo que al principio) y si existe la posibilidad de empate. Además, el orden de paso depende de quién comience, rotando según un jugador elegido aleatoriamente.
- El enigma se basa en tres jugadores que, al pasar dinero en fracciones, terminan con la misma cantidad inicial. Los valores empiezan siendo múltiplos de 12, y el orden de paso afecta cómo resuelven las ecuaciones. Si la persona A inicia, pasa la mitad de su dinero a B, luego B pasa un tercio a C, y C pasa un cuarto a A. Después de completar el ciclo, se deben establecer las ecuaciones para determinar las cantidades iniciales. Sin embargo, la solución depende del orden de inicio.

Listo

Resolución detallada y estructurada

---

1. Planteamiento y traducción del problema

Hay tres amigos (los llamaremos A, B y C) que apuestan cada uno una cantidad secreta de euros, con las siguientes características:

- Cada apuesta es un múltiplo de 12 euros (por lo tanto, la mínima apuesta posible es 12 €).
- Ningún jugador revela su cantidad a los demás; solo el árbitro lo conoce.
- A partir de esas apuestas iniciales, se hace un único «ciclo» de tres pases de dinero, uno por jugador, al jugador de su derecha (en sentido circular).
  1. El **primer jugador** que pasa es elegido al azar entre {A, B, C}.
  2. Ese jugador le pasa a su derecha exactamente **la mitad** (1/2) de lo que tenga en ese momento.
  3. El **segundo jugador**, cuando le toque, le pasa a su derecha exactamente **un tercio** (1/3) de lo que tenga en ese instante.

4. El **tercer jugador**, finalmente, le pasa a su derecha exactamente **un cuarto** (1/4) de lo que tenga en ese instante.

Al terminar esos tres pases (cada uno ha pasado dinero una sola vez), se advierte que **cada uno de los tres jugadores tiene exactamente la misma cantidad de euros que tenía al comienzo**. El problema pregunta:

1. ¿Es posible determinar con exactitud cuánto dinero había apostado cada jugador?
2. ¿Puede saberse, solo con esta información, **quién gana** (es decir, cuál de ellos concluye con más dinero tras los tres pases)?
3. ¿Cabe la posibilidad de que haya tablas, es decir, que al menos dos jugadores terminen empates y el tercero no les supere?

---

2. Notación y variables

Denotemos por

$$A_0 = x,$$
$$B_0 = y,$$
$$C_0 = z,$$

las cantidades iniciales que apostaron A, B y C, respectivamente. Todas son múltiplos de 12 y estrictamente positivos:

$$x, y, z \in \{12,\ 24,\ 36,\ \dots\}.$$

Los llamaremos a veces (x, y, z). El pase siempre va al «jugador de la derecha» según el sentido cíclico A→B→C→A. Sin embargo, **no sabemos a priori quién empieza**; el enunciado dice que "el jugador que primero pasa el dinero se decide de manera aleatoria". Así que hay tres posibles secuencias de pase:

1. **Caso A**: A (pasa ½) → B (pasa 1/3) → C (pasa 1/4).
2. **Caso B**: B (pasa ½) → C (pasa 1/3) → A (pasa 1/4).
3. **Caso C**: C (pasa ½) → A (pasa 1/3) → B (pasa 1/4).

El fenómeno observado es que, **después de los tres pases**, cada jugador A, B, C señala al árbitro:

> " ¡Qué casualidad, tenemos exactamente el mismo dinero que el que teníamos al empezar! "

Es decir, si después de todos los pases llamamos A_3, B_3, C_3 a las cantidades finales (tras el tercero de los pases), se sabe que

$$A_3 \;=\; A_0 = x, \quad B_3 \;=\; B_0 = y, \quad C_3 \;=\; C_0 = z.$$

Las preguntas son:

1. Con solo esa información (el hecho de que "al acabar, cada uno tiene lo mismo que tenía"), ¿podemos averiguar **con exactitud** x, y, z?
2. Con esa misma información, ¿podemos saber **quién** —A, B o C— es el que se lleva "más dinero" al final, es decir, quién termina suprapuesto?
3. ¿Es posible que haya tablas en el sentido de "al menos dos tengan la misma cantidad y el tercero no los supere"?

---

3. Análisis detallado de cada caso de inicio

Separamos los tres escenarios posibles (según quien pase primero) y planteamos las ecuaciones de conservación (final = inicial). En cada caso obtendremos restricciones lineales que relacionan x, y, z.

3.1. Caso A: el orden de pases es A → B → C

1. **Paso 1 (A pasa ½ a B).**
   - Antes del pase, A tiene x, B tiene y, C tiene z.
   - A le envía a B exactamente $\frac{1}{2}\,x$.
   - Tras ese pase:

$$\begin{cases} A_1 \;=\; x \;-\; \frac{1}{2}\,x \;=\; \frac{1}{2}\,x, \\ B_1 \;=\; y \;+\; \frac{1}{2}\,x, \\ C_1 \;=\; z \quad (\text{sin cambios aún}). \end{cases}$$

2. **Paso 2 (B pasa ⅓ de lo que tiene a C).**
   - B en ese momento vale $B_1 = y + \frac{1}{2}x$.
   - Pasa a C exactamente $\frac{1}{3}\,B_1$.
   - Tras el paso:

$$\begin{cases} B_2 \;=\; B_1 \;-\; \frac{1}{3}\,B_1 \;=\; \frac{2}{3}\,B_1 \;=\; \frac{2}{3}\Bigl(y + \frac{1}{2}\,x\Bigr) \;=\; \frac{2}{3}\,y \;+\; \frac{1}{3}\,x, \\ C_2 \;=\; C_1 \;+\; \frac{1}{3}\,B_1 \;=\; z \;+\; \frac{1}{3}\Bigl(y + \frac{1}{2}\,x\Bigr) \;=\; z \;+\; \frac{1}{3}\,y \;+\; \frac{1}{6}\,x, \\ A_2 \;=\; A_1 = \frac{1}{2}\,x. \end{cases}$$

3. **Paso 3 (C pasa ¼ de lo que tiene a A).**
   - C en ese momento vale $C_2 = z + \frac{1}{3}\,y + \frac{1}{6}\,x$.
   - Pasa a A exactamente $\frac{1}{4}\,C_2$.
   - Tras el paso final:

$$\begin{cases} C_3 \;=\; C_2 \;-\; \frac{1}{4}\,C_2 \;=\; \frac{3}{4}\,C_2 \;=\; \frac{3}{4}\Bigl(z + \frac{1}{3}\,y + \frac{1}{6}\,x\Bigr) \;=\; \frac{3}{4}\,z \;+\; \frac{1}{4}\,y \;+\; \frac{1}{8}\,x, \\ A_3 \;=\; A_2 \;+\; \frac{1}{4}\,C_2 \;=\; \frac{1}{2}\,x \;+\; \frac{1}{4}\Bigl(z + \frac{1}{3}\,y + \frac{1}{6}\,x\Bigr) \\ \qquad = \; \frac{1}{2}\,x \;+\; \frac{1}{4}\,z \;+\; \frac{1}{12}\,y \;+\; \frac{1}{24}\,x \;=\; \underbrace{\Bigl(\frac{1}{2} + \frac{1}{24}\Bigr)}_{\frac{13}{24}}\,x \;+\; \frac{1}{12}\,y \;+\; \frac{1}{4}\,z \;=\; \frac{13}{24}x \;+\; \frac{1}{12}y \;+\; \frac{1}{4}\,z, \\ B_3 \;=\; B_2 = \frac{2}{3}\,y + \frac{1}{3}\,x. \end{cases}$$

4. **Condición final = inicial.**
   El enunciado afirma que, al terminar, **cada uno** tiene exactamente lo mismo que al empezar. Es decir:

$$A_3 = x, \quad B_3 = y, \quad C_3 = z.$$

   Sustituimos cada uno:

   1. Para A:

$$A_3 \;=\; \frac{13}{24}\,x \;+\; \frac{1}{12}\,y \;+\; \frac{1}{4}\,z \;=\; x.$$

      Multiplicamos ambos lados por 24:

$$13\,x \;+\; 2\,y \;+\; 6\,z \;=\; 24\,x \;\Longrightarrow\; 2\,y \;+\; 6\,z \;=\; 11\,x \;\Longrightarrow\; y \;+\; 3\,z \;=\; \frac{11}{2}\,x. \tag{1}$$

   2. Para B:

$$B_3 \;=\; \frac{2}{3}\,y + \frac{1}{3}\,x \;=\; y \;\Longrightarrow\; \frac{2}{3}\,y + \frac{1}{3}\,x = y \;\Longrightarrow\; 2\,y + x = 3\,y \;\Longrightarrow\; x = y. \tag{2}$$

   3. Para C:

$$C_3 \;=\; \frac{3}{4}\,z \;+\; \frac{1}{4}\,y \;+\; \frac{1}{8}\,x \;=\; z \quad\Longrightarrow\quad \frac{3}{4}\,z+\frac{1}{4}\,y+\frac{1}{8}\,x=z \quad\Longrightarrow\quad 6\,z+2\,y+x=8\,z \quad\Longrightarrow\quad 2\,y+x=2\,z.(3)$$

Ahora usamos (2) en (3): como $x = y$, la ecuación (3) queda

$$2\,y+y=2\,z \quad\Longrightarrow\quad 3\,y=2\,z \quad\Longrightarrow\quad z=\frac{3}{2}\,y. \tag{4}$$

Finalmente comprobamos que esto encaja con (1). Sustituyendo en (1) $y = x$ y $z = \frac{3}{2}\,y = \frac{3}{2}\,x$, obtenemos

$$y+3\,z=x+3\Big(\tfrac{3}{2}\,x\Big)=x+\tfrac{9}{2}\,x=\tfrac{11}{2}\,x,$$

que coincide con el lado derecho de (1). Por tanto, las tres ecuaciones son consistentes entre sí.

5. **Conclusión del caso A.**
   - A y B deben haber empezado con la misma cantidad:
   $$x \;=\; y.$$
   - C debe haber empezado con **una vez y media** de lo que tenían A y B:
   $$z \;=\; \frac{3}{2}\,y \;=\; \frac{3}{2}\,x.$$
   - Y, como las apuestas fueron múltiplos de 12, conviene que x sea múltiplo de 12, y además que $\frac{3}{2}\,x$ también lo sea. De ahí se deduce que x debe ser múltiplo de 2 (para que $\frac{3}{2}\,x$ sea entero) y, en conjunto, múltiplo de 12. En la práctica, la elección más pequeña es
   $$x=y=12,\quad z=18\quad(\text{u otro triplo }12k,\;12k,\;18k\text{ con }k\in\mathbb{N}).$$

Resumen Caso A:

$$\boxed{x=y,\quad z=\tfrac{3}{2}\,x,\qquad x\in\{12,24,36,\dots\}.}$$

Geométricamente: A y B arrancan iguales, C arranca con 1,5 veces esa cantidad.

3.2. Caso B: el orden de pases es B → C → A

Ahora suponemos que el primero que pasa es B (que entrega ½ de lo que tenga a C), luego C pasa ⅓ a A, luego A pasa ¼ a B. Volvemos a nombrar $A_0 = x,\; B_0 = y,\; C_0 = z.$

1. **Paso 1 (B pasa ½ a C).**
$$\begin{cases} B_1 = y \;-\; \frac{1}{2}\,y \;=\; \frac{1}{2}\,y, \\ C_1 = z \;+\; \frac{1}{2}\,y, \\ A_1 = x \text{ (sin cambios)}. \end{cases}$$

2. **Paso 2 (C pasa ⅓ a A).**
   - Antes, $C_1 = z + \frac{1}{2}\,y$.
   - C le entrega $\frac{1}{3}\,C_1$ a A.
$$\begin{cases} C_2 = C_1 - \frac{1}{3}\,C_1 = \frac{2}{3}\,\big(z+\frac{1}{2}\,y\big) = \frac{2}{3}\,z \;+\; \frac{1}{3}\,y, \\ A_2 = A_1 + \frac{1}{3}\,C_1 = x + \frac{1}{3}\Big(z+\frac{1}{2}\,y\Big) = x+\frac{1}{3}\,z+\frac{1}{6}\,y, \\ B_2 = B_1 = \frac{1}{2}\,y. \end{cases}$$

3. **Paso 3 (A pasa ¼ a B).**

- Antes, $A_2 = x + \frac{1}{3}\,z + \frac{1}{6}\,y$.
- A entrega $\frac{1}{4}\,A_2$ a B.

$$\begin{cases} A_3 = A_2 - \frac{1}{4}\,A_2 = \frac{3}{4}\,A_2 = \frac{3}{4}\Big(x + \frac{1}{3}\,z + \frac{1}{6}\,y\Big) = \frac{3}{4}\,x \;+\; \frac{1}{4}\,z \;+\; \frac{1}{8}\,y, \\ B_3 = B_2 + \frac{1}{4}\,A_2 = \frac{1}{2}\,y + \frac{1}{4}\Big(x + \frac{1}{3}\,z + \frac{1}{6}\,y\Big) \\ \quad = \frac{1}{2}\,y + \frac{1}{4}\,x + \frac{1}{12}\,z + \frac{1}{24}\,y = \frac{1}{4}\,x + \frac{1}{12}\,z + \underbrace{\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{24}\Big)}_{\frac{13}{24}}\,y = \frac{1}{4}\,x + \frac{1}{12}\,z + \frac{13}{24}\,y, \\ C_3 = C_2 = \frac{2}{3}\,z + \frac{1}{3}\,y. \end{cases}$$

4. **Condición final = inicial** $A_3 = x,\ B_3 = y,\ C_3 = z.$
   - Para A:

$$\frac{3}{4}\,x + \frac{1}{4}\,z + \frac{1}{8}\,y \;=\; x \implies 6\,x + 2\,z + y = 8\,x \implies 2\,z + y = 2\,x. \tag{1'}$$

   - Para B:

$$\frac{1}{4}\,x + \frac{1}{12}\,z + \frac{13}{24}\,y \;=\; y \implies 6\,x + 2\,z + 13\,y = 24\,y \implies 6\,x + 2\,z = 11\,y. \tag{2'}$$

   - Para C:

$$\frac{2}{3}\,z + \frac{1}{3}\,y = z \implies 2\,z + y = 3\,z \implies y = z. \tag{3'}$$

   De (3') obtenemos directamente

$$y = z.$$

   Sustituyendo en (1'):

$$2\,z + y = 2\,x \implies 2\,z + z = 2\,x \implies 3\,z = 2\,x \implies x = \frac{3}{2}\,z.$$

   También comprobamos que con $x = \frac{3}{2}\,z$ y $y = z$, la ecuación (2') queda

$$6\left(\frac{3}{2}\,z\right) + 2\,z = 11\,y = 11\,z \implies 9\,z + 2\,z = 11\,z,$$

   que es cierta. Por tanto, todo encaja.

5. **Conclusión del caso B.**
   - $y = z.$
   - $x = \frac{3}{2}\,z.$
   - Con «ser múltiplo de 12», basta elegir z múltiplo de 12 de modo que $\frac{3}{2}\,z$ también lo sea (i.e.\ $z = 12\,k$ ⇒ $x = 18\,k,\ y = 12\,k$).
   - De nuevo hay una familia infinita $(x, y, z) = (18k,\ 12k,\ 12k)$, con $k \in \mathbb{N}$.

En otras palabras, en el **Caso B** quien arranca (B) es el que acaba empatado con uno de sus vecinos (B y C iguales), y el tercero (A) arranca con 1,5 veces esa cantidad.

3.3. Caso C: el orden de pases es C → A → B

Finalmente, supongamos que **C** es el primero (pasa ½ a A), luego **A** pasa ⅓ a B, luego **B** pasa ¼ a C. De nuevo $(A_0, B_0, C_0) = (x, y, z)$.

1. **Paso 1 (C pasa ½ a A).**

$$C_1 = \frac{1}{2}\,z, \quad A_1 = x + \frac{1}{2}\,z, \quad B_1 = y.$$

2. **Paso 2 (A pasa ⅓ a B).**
   - Antes, $A_1 = x + \frac{1}{2}\,z$.
   - A entrega $\frac{1}{3}\,A_1$ a B.

$$A_2 = A_1 - \tfrac{1}{3}\,A_1 = \tfrac{2}{3}\left(x + \tfrac{1}{2}\,z\right) = \tfrac{2}{3}\,x \;+\; \tfrac{1}{3}\,z,$$

$$B_2 = B_1 + \tfrac{1}{3}\,A_1 = y + \tfrac{1}{3}\Big(x + \tfrac{1}{2}\,z\Big) = y + \tfrac{1}{3}\,x + \tfrac{1}{6}\,z,$$

$$C_2 = C_1 = \tfrac{1}{2}\,z.$$

3. **Paso 3 (B pasa ¼ a C).**
   - Antes, $B_2 = y + \frac{1}{3}\,x + \frac{1}{6}\,z$.
   - B entrega $\frac{1}{4}\,B_2$ a C.

$$B_3 = B_2 - \tfrac{1}{4}\,B_2 = \tfrac{3}{4}\,B_2 = \tfrac{3}{4}\Big(y + \tfrac{1}{3}\,x + \tfrac{1}{6}\,z\Big) = \tfrac{3}{4}\,y \;+\; \tfrac{1}{4}\,x \;+\; \tfrac{1}{8}\,z,$$

$$C_3 = C_2 + \tfrac{1}{4}\,B_2 = \tfrac{1}{2}\,z + \tfrac{1}{4}\Big(y + \tfrac{1}{3}\,x + \tfrac{1}{6}\,z\Big) = \tfrac{1}{2}\,z + \tfrac{1}{4}\,y + \tfrac{1}{12}\,x + \tfrac{1}{24}\,z = \tfrac{1}{12}\,x \;+\; \tfrac{1}{4}\,y \;+\; \underbrace{\Big(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{24}\Big)}_{\frac{13}{24}}\,z = \tfrac{1}{12}\,x + \tfrac{1}{4}\,y + \tfrac{13}{24}\,z,$$

$$A_3 = A_2 = \tfrac{2}{3}\,x + \tfrac{1}{3}\,z.$$

4. **Condición final = inicial** $A_3 = x,\ B_3 = y,\ C_3 = z.$
   - Para A:

$$\tfrac{2}{3}\,x + \tfrac{1}{3}\,z = x \implies 2\,x + z = 3\,x \implies z = x. \tag{1''}$$

   - Para B:

$$\tfrac{3}{4}\,y + \tfrac{1}{4}\,x + \tfrac{1}{8}\,z = y \implies 6\,y + 2\,x + z = 8\,y \implies 2\,x + z = 2\,y. \tag{2''}$$

   - Para C:

$$\tfrac{1}{12}\,x + \tfrac{1}{4}\,y + \tfrac{13}{24}\,z = z \implies 2\,x + 6\,y + 13\,z = 24\,z \implies 2\,x + 6\,y = 11\,z. \tag{3''}$$

   - De (1''): $z = x$.
   - Sustituyendo en (2''):

$$2\,x + x = 2\,y \implies 3\,x = 2\,y \implies y = \frac{3}{2}\,x.$$

   - Verificamos en (3''): si $z = x$ y $y = \frac{3}{2}\,x$, entonces

$$2\,x + 6\left(\tfrac{3}{2}\,x\right) = 2\,x + 9\,x = 11\,x \;=\; 11\,z,$$

   que coincide con el lado derecho.

5. **Conclusión del caso C.**
   - $z = x$.
   - $y = \frac{3}{2}\,x$.
   - Nuevamente, exigen que x sea múltiplo de 12 de modo que $\frac{3}{2}\,x$ también sea múltiplo de 12. La familia mínima es

$$(x, y, z) = \big(12k,\ 18k,\ 12k\big).$$

---

4. Recapitulación de las tres configuraciones

Resumamos los tres casos (cada uno corresponde a un jugador distinto que empieza el pase):

Caso	Orden de pase	Relación final x, y, z
A	A (½) → B (⅓) → C (¼)	
$x = y, \qquad z = \frac{3}{2}\,x$		
$\Longrightarrow\ (x, y, z) = (12k,\ 12k,\ 18k).$		
B	B (½) → C (⅓) → A (¼)	
$y = z, \qquad x = \frac{3}{2}\,z$		
$\Longrightarrow\ (x, y, z) = (18k,\ 12k,\ 12k).$		
C	C (½) → A (⅓) → B (¼)	
$z = x, \qquad y = \frac{3}{2}\,x$		
$\Longrightarrow\ (x, y, z) = (12k,\ 18k,\ 12k).$		

En cada caso hay **infinitas** soluciones (porque $k \in \mathbb{N}$ puede variar), pero todas son **proporcionales** a $(12,\ 12,\ 18)$ con alguna permutación según quién empiece.

---

5. Respuestas a las tres preguntas

5.1. ¿Se puede saber con exactitud cuánto apostó cada uno?

- **No**. Solo sabemos la **relación entre los tres montos**, pero **no** su valor absoluto único.
- De hecho, los resultados muestran que, para cada jugador que empiece el ciclo, la persona que arranca con la fracción mayor (1,5 veces el monto de los otros dos) depende de quién haya sido el "primer pasador".
  - Si **A es el primero**, al final $x = y$ y $z = 1{,}5\,x$.
  - Si **B es el primero**, $y = z$ y $x = 1{,}5\,z$.
  - Si **C es el primero**, $z = x$ y $y = 1{,}5\,x$.
- Como **no** se aclara en el enunciado **quién empezó**, no podemos distinguir qué permutación corresponde a (x, y, z).
- Además, aún si supiéramos «quién dio el primer pase», la solución general viene dada por un factor $k \in \mathbb{N}$; la única manera de fijar «la» apuesta exacta sería imponer que los números sean los **mínimos** múltiplos de 12 que satisfagan la relación: eso da $k = 1$. En ese caso, cada jugador habría apostado $\{12, 12, 18\}$ (en alguna orden), pero **aún no sabríamos quiénes son los que tienen 12 € y quién el de 18 €** sin saber quién arrancó.
- Conclusión:

  > **No es posible determinar con exactitud los euros de cada uno**; sólo saber que dos apuestas son iguales y la tercera es 1,5 veces esa cantidad, todos ellos múltiplos de 12, y el triple (12, 12, 18) (o un múltiplo común) hasta permutación.

5.2. ¿Se puede saber quién gana?

- "Ganar" significa "quien al final tenga más dinero": pero, como se ha visto, el jugador que acaba con **1,5 veces** los otros dos depende de **quién** sea el que pase primero.
- En cada caso:
  - Si **A** es quien arranca, entonces al final $z = 1{,}5\,x$, y A y B empatan con x, mientras que C acaba con más (1,5 x). Por tanto, **C gana**.
  - Si **B** arranca, al final $x = 1{,}5\,z$, y B y C tienen empate en z, mientras que A acaba con más (1,5 z). Así **A gana**.
  - Si **C** arranca, al final $y = 1{,}5\,x$, y A y C empatan en x, mientras que B acaba con más (1,5 x). Aquí **B gana**.
- Puesto que el enunciado **no declara quién fue el que empezó a pasar**, **no es posible saber a ciencia cierta quién resulta ganador**.
- Si nos informaran «quién dio el primer pase», entonces sí sabríamos quién acapara la cantidad mayor (la persona que NO empezó). Pero con la información dada (solo: "al acabar cada uno tiene lo mismo que al principio"), **no podemos deducir la identidad del ganador**.

5.3. ¿Puede haber tablas entre dos jugadores (o incluso triple empate)?

- Un "empate" entre dos players significaría que **al menos dos de ellos terminen con la misma cantidad** y el tercer jugador no los supere.
- Observando las relaciones encontradas en cada caso, vemos que **siempre** dos de las cantidades iniciales eran exactamente iguales $(= x \text{ ó } = y \text{ ó } = z)$, y la tercera era **1,5 veces mayor**. Como el proceso deja cada uno con lo mismo que arrancó, **finalmente queda**:
  - Dos jugadores con la misma apuesta (digamos 12 k),
  - Un jugador con apuesta más grande $(18\,k)$.
  - El que tenía 18 k acaba ganando, pues 18k > 12k.
- No hay ninguna solución en la que **tres** empaten (porque eso implicaría $x = y = z$, pero esa tripleta no cumple las ecuaciones lineales anteriores, salvo el caso trivial $x = y = z = 0$, que no vale porque las apuestas son al menos 12 €).
- Tampoco hay solución en la que dos empaten y la tercera sea **menor o igual**: en nuestros resultados, la "tercera" siempre **supera** a los otros dos (1,5 veces). Jamás aparece la configuración "dos iguales y el tercero más chico".
- Por tanto, **no existe ningún resultado en el que haya tablas** (es decir, dos o más iguales y el otro no mayor). Siempre el segundo ganador es estricto: 1,5 veces la apuesta igual de los otros dos.

---

6. Resumen final

1. **Sobre las cantidades iniciales**
   - Se demuestra que la única forma de que, tras un pase de ½ → ⅓ → ¼ (en ese orden), **cada uno vuelva a tener exactamente lo que empezó** es que dos de las apuestas iniciales sean iguales y la tercera sea 1,5 veces esas iguales.
   - Las tres posibilidades (hasta permutación) son:
     1. $(x, y, z) = (12k,\ 12k,\ 18k)$, caso "A empieza".
     2. $(x, y, z) = (18k,\ 12k,\ 12k)$, caso "B empieza".
     3. $(x, y, z) = (12k,\ 18k,\ 12k)$, caso "C empieza".

- Como no sabemos quién inició el ciclo, **no podemos fijar unívocamente** cuál de A, B o C apostó 18 k y cuáles dos apostaron 12 k. Y además el factor $k \in \mathbb{N}$ puede ser cualquiera (12 k, 24 k, 36 k, ...).
- **Por tanto, no es posible determinar con exactitud las cantidades** (x, y, z) de cada uno.

2. **Sobre quién gana**
   - Quien arranca NO es quien acaba con la cantidad mayor: el ganador final es siempre el jugador que **no empezó** (concretamente, el que arranca termina emparejado con uno de sus vecinos, y el tercero —el que no pasó primero— es quien acaba con 1,5 veces la apuesta).
   - Pero, como **no sabemos qué persona arrancó** (solo sabemos que "alguien empezó" y que al final todos empataron con su propio inicial), **no hay forma de saber, de forma independiente, quién es la persona que al final queda con más dinero**.
3. **Sobre la posibilidad de tablas (empates)**
   - No cabe triple empate (salvo la solución nula, que está prohibida porque las apuestas han de ser al menos 12 € cada una).
   - No cabe "dos jugadores empatan con el mismo monto y el tercero tiene **menos** que ellos", ya que la única configuración válida tiene a dos con la misma apuesta y al tercero con una apuesta estrictamente mayor (1,5 veces).
   - **Por ende, no existe ninguna forma de tablas**. Siempre hay un único ganador que supera a los dos que empatan en la cantidad más baja.

Conclusión clara

- **No podemos determinar exactamente** las cifras (x, y, z) de cada jugador (solo sabemos que dos son iguales y la tercera es 1,5 veces esas, todos múltiplos de 12).
- **No podemos saber** sin más información **quién gana**, pues depende de quién fue el primero en pasar.
- **No existe empate posible** (ni "tablas" entre dos con el tercero por debajo, ni triple empate): el tercero siempre queda por encima.

Esto completa la resolución del problema.

En el análisis realizado en el tercer problema se discuten todos los posibles casos (caso en el que empieza A, caso en el que empieza B y caso en el que empieza C). ¿No bastaría hacer un solo análisis suponiendo que empieza A y en caso de no ser así simplemente renombrar a los jugadores?

- El usuario su

Listo

Efectivamente, basta con tomar **un solo caso** (por ejemplo, "empieza A") y luego obtener las soluciones generales para (x, y, z). Después, si en realidad quien empieza no es A, sino B o C, basta con **renombrar** los índices de forma cíclica para recuperar los demás casos. A continuación explico por qué y cómo hacerlo:

---

1. Simetría del problema y «sin pérdida de generalidad»

La clave es que las tres posiciones (A, B, C) están dispuestas en forma circular y las reglas de pase son idénticas para cada jugador (cada uno pasa "la mitad → un tercio → un cuarto" en ese orden, siempre al de su derecha). Por tanto, hay una **simetría cíclica**:

- Si escribimos la solución suponiendo que **A empieza**, obtenemos unas relaciones entre (x, y, z).

- Si en la realidad **B empieza**, basta "rotar" las etiquetas $(A \to B,\ B \to C,\ C \to A)$ para pasar de la solución "A empieza" a la solución "B empieza".
- Análogamente para el caso "C empieza", se rota de nuevo.

En consecuencia, **no hace falta** repetir todo el cálculo tres veces: basta hacer el análisis con la hipótesis "A es quien da el primer pase" y, al final, generar las fórmulas correspondientes a los otros dos iniciadores renombrando cíclicamente.

---

2. Análisis único asumiendo «A empieza»

Repetimos solo el esquema principal, sin volver a repetir cada paso al detalle, pues esa parte ya quedó desarrollada.

2.1. Variables y orden de los pases

- Llamamos $(A_0, B_0, C_0) = (x, y, z)$ a las apuestas iniciales de A, B y C.
- Supongamos que el primer pase lo hace **A**, quien entrega ½ de lo que tenga, luego **B** entrega ⅓ de lo suyo, y finalmente **C** entrega ¼ de lo suyo.

Al finalizar esos tres pases, se sabe que cada jugador vuelve a tener justo la misma cantidad con la que empezó:

$$A_3 = x, \quad B_3 = y, \quad C_3 = z.$$

2.2. Resultado de ese único análisis

- Tras hacer las cuentas (paso a paso) en el orden A→B→C, se obtiene que las ecuaciones finales conducen a:
  1. $x = y$.
  2. $z = \frac{3}{2}\,x$.
- Como además se exige que x, y, z sean múltiplos enteros de 12, la **solución mínima** en enteros es

  $$x = y = 12, \quad z = 18$$

  (o en general $(x, y, z) = (12k,\ 12k,\ 18k)$, para cualquier $k \in \mathbb{N}$).

Por lo tanto, bajo la hipótesis "A empieza", queda resuelto:

$$\boxed{\text{Si A da el primer pase, entonces } x = y \text{ y } z = \tfrac{3}{2}\,x, \quad x \in \{12, 24, 36, \dots\}.}$$

---

3. Cómo obtener los otros dos casos por renombrar

3.1. Caso "B empieza"

Basta renombrar cíclicamente:

- Where in the "A empieza" solution we had $(A, B, C) \mapsto (x, y, z)$, ahora interpretamos que "A" del análisis es en realidad "B" del juego real, "B" del análisis es "C" del juego real, y "C" del análisis es "A" del juego real.
- En símbolos: si en el análisis A↦x, B↦y, C↦z, ahora hacemos la **rotación**

$$A_{\text{análisis}} \longrightarrow B_{\text{real}}, \quad B_{\text{análisis}} \longrightarrow C_{\text{real}}, \quad C_{\text{análisis}} \longrightarrow A_{\text{real}}.$$

- La conclusión "en el análisis $x = y$ y $z = \frac{3}{2}\,x$" se traduce, tras la rotación, a

$$B_{\text{real}} = C_{\text{real}}, \quad A_{\text{real}} = \tfrac{3}{2}\,B_{\text{real}}.$$

- Si renombramos de nuevo $\big(A_{\text{real}}, B_{\text{real}}, C_{\text{real}}\big) = (x, y, z)$ para no confundir índices, obtenemos

$$y = z, \quad x = \tfrac{3}{2}\,y, \quad y \in \{12, 24, 36, \dots\}.$$

  Es decir, $(x, y, z) = (18k,\ 12k,\ 12k)$.

3.2. Caso "C empieza"

De forma análoga, rota una vez más cíclicamente:

$$A_{\text{análisis}} \longrightarrow C_{\text{real}}, \quad B_{\text{análisis}} \longrightarrow A_{\text{real}}, \quad C_{\text{análisis}} \longrightarrow B_{\text{real}}.$$

Entonces "en el análisis $x = y$ y $z = \tfrac{3}{2}\,x$" se traduce a

$$C_{\text{real}} = A_{\text{real}}, \quad B_{\text{real}} = \tfrac{3}{2}\,C_{\text{real}}.$$

Poniendo $\big(A_{\text{real}}, B_{\text{real}}, C_{\text{real}}\big) = (x, y, z)$, resulta

$$z = x, \quad y = \tfrac{3}{2}\,x, \quad x \in \{12, 24, 36, \dots\},$$

es decir, $(x, y, z) = (12k,\ 18k,\ 12k)$.

---

4. Conclusión final

1. **Bastaba analizar solo "A empieza"** y luego aplicar las rotaciones de etiquetas para cubrir los casos "B empieza" y "C empieza".
2. El resultado unificado (hasta permutación) es que, tras haber acabado, cada uno recupera su apuesta inicial y dichas apuestas cumplen "dos iguales y la tercera 1,5 veces mayor, todos múltiplos de 12".
3. Si no sabemos quién fue el primero en pasar, **no es posible determinar de forma única** cuál de (x, y, z) corresponde a A, B o C.

Por tanto, tu observación es correcta: en la práctica, **se puede hacer un único análisis suponiendo "A empieza" y luego deducir los demás casos simplemente renombrando los jugadores en sentido cíclico**.