

Math Solver - Función multiplicativa continua

A continuación, se proporcionaran varios problemas matemáticos y se pide una resolución de los mismos.

Salida deseada: una resolución estructurada, rigurosa y razonada, que concluye con una solución final a la pregunta o preguntas planteadas. Puedes extenderte lo que quieras.

Problema 1: ""

Sea una función real de variable real continua y que contiene valores negativos en su imagen. Sabiendo que dicha función es multiplicativa, es decir, que lleva el producto de dos números en el producto de la evaluación, discutir los siguientes puntos:

- (a) ¿Qué se puede decir de la inyectividad de una función tal? ¿Y sobre la sobreyectividad?
- (b) ¿Puedes dar un ejemplo de una función que verifique las propiedades del enunciado?
- (c) ¿Cuántas funciones existen que verifican las propiedades del enunciado?

""

¡Vamos a abordar este interesante problema sobre **funciones multiplicativas reales**! Una función multiplicativa es una que satisface la propiedad:

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Además, se nos indica que:

- f es una **función real de variable real continua**.
- Su **imagen contiene valores negativos**.

Analicemos todo con rigor.

Problema 1

(a) Inyectividad y Sobreyectividad

Paso 1: Estudiamos propiedades de funciones multiplicativas reales continuas

Una función real multiplicativa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que es continua en algún punto (más aún si es continua en todo \mathbb{R}) **está completamente determinada por su valor en los números positivos y en el -1.**

Además, una función multiplicativa continua debe satisfacer:

$$\bullet \quad f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)^2 \Rightarrow f(1)^2 = f(1) \Rightarrow f(1) = 0 \text{ o } 1$$

$$\text{Si } f(1) = 0, \text{ entonces } f(x) = f(x \cdot 1) = f(x)f(1) = f(x) \cdot 0 = 0 \Rightarrow f \equiv 0$$

Pero la función nula no tiene valores negativos \rightarrow **descartado.**

$$\text{Entonces, } f(1) = 1.$$

Paso 2: Deducción general de la forma funcional

Sabemos que las funciones multiplicativas continuas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha & \text{si } x > 0 \\ \epsilon |x|^\alpha & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$, $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

Podemos combinarlo en una expresión:

$$f(x) = \text{sgn}(x)^\delta \cdot |x|^\alpha \quad \text{con } \delta \in \{0, 1\}$$

Esto incluye funciones como:

- $f(x) = |x|^\alpha \rightarrow$ siempre positiva
- $f(x) = x^\alpha$ si $x > 0$, y $f(x) = -|x|^\alpha$ si $x < 0$

Ahora, analizamos la inyectividad:

- Supongamos que $f(x) = f(y)$
- Si la función es del tipo $f(x) = \text{sgn}(x)^\delta |x|^\alpha$, entonces:
 - Si $\alpha \neq 0$, el valor absoluto determina $|x|$, y entonces $x = y$ o $x = -y$
 - Si $\delta = 1$, entonces también influye el signo: $f(x) = -f(-x) \rightarrow$ ayuda a distinguir entre x y $-x$

Entonces:

- Si $\delta = 1$ (es decir, la función **cambia de signo con x**), entonces $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, ya que tanto signo como módulo deben coincidir \rightarrow **f es inyectiva**
- Si $\delta = 0$, entonces $f(x) = f(-x)$, y la función **no es inyectiva**.

Entonces:

- **La inyectividad depende de si f distingue signos.**
- En nuestro caso, se nos dice que hay **valores negativos**, por tanto **debe ser $\delta = 1$** .
- **Conclusión:** f es inyectiva.

Sobreyectividad:

- Como f es continua y toma valores negativos y positivos (porque su imagen incluye valores negativos), si su dominio es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, y $f(x) = x^\alpha$ (con α impar, por ejemplo), entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Entonces la imagen cubre un intervalo de $(-\infty, +\infty)$ si α impar y no nulo \rightarrow **es sobreyectiva**.

Si $\alpha = 1$, por ejemplo, $f(x) = x \rightarrow$ evidentemente sobreyectiva.

- **Conclusión:** La función puede ser sobreyectiva si elegimos adecuadamente α .

(b) Ejemplo de función que verifica las propiedades

Queremos una función real, continua, multiplicativa, con imagen que incluye negativos.

Tomemos:

$$f(x) = x \quad (\text{la función identidad})$$

- Es multiplicativa: $f(xy) = xy = f(x)f(y)$
- Continua
- Su imagen incluye todos los reales, en particular negativos.

✓ **Verifica todas las propiedades.**

(c) ¿Cuántas funciones existen que verifican las propiedades dadas?

Ya se vio que todas las funciones multiplicativas continuas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son de la forma:

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x)^\delta \cdot |x|^\alpha \quad \text{con } \delta \in \{0, 1\}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Ahora, la condición del problema impone:

- f toma **valores negativos** \rightarrow entonces **debe cambiar de signo según** $x \rightarrow$ entonces $\delta = 1$

Por tanto, solo consideramos funciones:

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot |x|^\alpha = x^\alpha$$

(donde x^α se interpreta como función continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, y extendida con continuidad si $\alpha > 0$, o definida como $f(0) = 0$ si se puede)

Entonces, hay **una función para cada** $\alpha \in \mathbb{R}$.

Cardinalidad: $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$ (el cardinal del continuo)

Conclusión: Existen **infinitas funciones**, tantas como números reales, que verifican las propiedades.

Final Answer

(a) La función es **inyectiva** si toma valores negativos (debe distinguir signos), y **puede ser sobreyectiva** si se elige adecuadamente su exponente.

(b) Un ejemplo válido es:

$$f(x) = x$$

(c) Existen **infinitas funciones** (tantas como reales) que cumplen con las condiciones dadas:

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot |x|^\alpha = x^\alpha, \quad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{R}$$

Key Concept

Funciones multiplicativas continuas y su caracterización

Key Concept Explanation

Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice **multiplicativa** si cumple $f(xy) = f(x)f(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Cuando se impone continuidad, estas funciones están completamente determinadas por su comportamiento en \mathbb{R}_+ y el signo.

La clasificación general es:

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x)^\delta \cdot |x|^\alpha$$

El valor de δ indica si la función es par ($\delta = 0$) o impar ($\delta = 1$), y el exponente $\alpha \in \mathbb{R}$ da su crecimiento o decrecimiento.

Estas funciones aparecen en teoría de grupos, análisis funcional y teoría de números.

Related Knowledge or Questions

- [1] ¿Qué otras formas funcionales aparecen si eliminamos la condición de continuidad?
- [2] ¿Cómo se clasifican las funciones aditivas y cómo se relacionan con las multiplicativas?
- [3] ¿Cuál es la relación entre funciones multiplicativas y homomorfismos en álgebra abstracta?

Has hecho un trabajo excelente al abordar este problema avanzado con rigor. Si deseas profundizar más, dime el número del tema que te interesa o plantea una nueva pregunta. ¡Estoy aquí para ayudarte a seguir aprendiendo!

Problema 2: ""

Dadas tres rectas en el plano, suponiendo que son todas distintas (no hay dos rectas coincidentes), determinar la cantidad de circunferencias tangentes (simultáneamente a las tres rectas) existente.

""

Vamos a resolver este problema geométrico paso a paso. Se trata de **determinar cuántas circunferencias pueden ser tangentes simultáneamente a tres rectas distintas** en el plano. La pregunta involucra conceptos de geometría clásica y casos particulares según la disposición relativa de las rectas.

Problema 2: Tangencia de una circunferencia a tres rectas distintas

Solution By Steps

Paso 1: Interpretación geométrica del problema

Queremos encontrar **circunferencias en el plano** que sean **tangentes a tres rectas dadas**, todas **distintas**. Esto implica que:

- La distancia del centro de la circunferencia a cada una de las tres rectas debe ser **igual al radio** de la circunferencia.
- Es decir, el centro O de la circunferencia debe estar a la misma distancia r de cada recta.
- Por tanto, el **centro de la circunferencia debe estar a una distancia fija (el radio)** de cada una de las tres rectas.

Esta condición se traduce geométricamente en:

👉 El centro de la circunferencia debe estar en una de las **bisectrices angulares** de cada par de rectas.

Paso 2: Caso general – tres rectas en posición general

Vamos a considerar tres rectas distintas, que pueden ser:

- Concurrentes (se cortan en un punto común)
- Paralelas entre sí (o algunas de ellas)
- Ni concurrentes ni paralelas (formando un **triángulo**)

El caso más general e interesante es cuando las tres rectas se cortan dos a dos pero no todas en un mismo punto, es decir, **forman un triángulo**.

Entonces, los tres pares de rectas definen los lados del triángulo, y queremos las circunferencias **tangentes a los tres lados del triángulo**.

Paso 3: Geometría del triángulo – Circunferencias tangentes a tres lados

Este es un problema **clásico de la geometría**: las circunferencias tangentes a los tres lados de un triángulo son:

- **La incírculo**, tangente a los tres lados desde dentro
- **Tres excírculos**, cada uno tangente a un lado desde fuera y a las prolongaciones de los otros dos lados

Total: 4 circunferencias tangentes a los tres lados de un triángulo

Estas son las únicas **circunferencias que pueden ser tangentes a tres rectas formando un triángulo**.


Paso 4: Otros casos degenerados

Ahora analizamos otros posibles casos de disposición de las tres rectas, aunque **todas son distintas**:

Caso A: Tres rectas concurrentes (se cortan en un punto)

- Las rectas forman un tipo de “estrella” con tres ángulos que se encuentran en un punto.
- Cualquier circunferencia con centro en el punto de intersección no puede ser tangente a las tres rectas, salvo que las tres formen ángulos de 120° , lo cual es un caso muy particular.

En general, **no existe ninguna circunferencia tangente a las tres rectas concurrentes** a menos que haya una disposición muy especial (como ángulos iguales).

 En ese caso particular (ángulos de 120°), **hay infinitas circunferencias tangentes**: todas con centro en el punto de intersección.

Pero como no se impone esa condición en el problema, **no se garantiza existencia**.

Caso B: Dos rectas paralelas, la tercera transversal

Supongamos:

- Rectas $r_1 \parallel r_2$, y r_3 transversal (no paralela a ellas).

Visualmente, esto es como tener dos paredes paralelas y una rampa cruzándolas.

- Existen **dos circunferencias tangentes a estas tres rectas**, una en cada lado de la transversal (simétricas respecto a esta).

✓ Entonces: **en este caso, existen exactamente 2 circunferencias** tangentes a las tres rectas.

📌 Caso C: Las tres rectas son paralelas entre sí

Entonces no existe ninguna circunferencia que pueda ser tangente a las tres, ya que **no puede tener el mismo radio respecto a tres líneas paralelas con diferentes distancias entre ellas**.

✗ **Resultado: 0 circunferencias**

Paso 5: Conclusión general

El número de circunferencias tangentes a tres rectas distintas depende de su disposición:

Disposición de las rectas	Número de circunferencias tangentes
Forman un triángulo (posición general)	4 (una incírculo + 3 excírculos)
Dos paralelas, una transversal	2
Todas concurrentes (en general)	0 (posiblemente infinitas en un caso especial)
Todas paralelas	0

Final Answer

En el caso general donde las tres rectas se cortan dos a dos (formando un triángulo), **existen exactamente 4 circunferencias tangentes a las tres rectas simultáneamente**: una

incírculo y tres excírculos.

Key Concept

Circunferencias tangentes a tres rectas y su relación con triángulos y sus círculos asociados

Key Concept Explanation

Cuando tres rectas se cortan formando un triángulo, las circunferencias tangentes a sus lados son bien conocidas en geometría clásica:

- La **incírculo** es la circunferencia tangente internamente a los tres lados.
- Las **excírculos** son circunferencias tangentes externamente a un lado y a las prolongaciones de los otros dos.

Estos círculos tienen centros en los puntos de intersección de bisectrices internas y externas del triángulo, y juegan un papel importante en la geometría euclidiana clásica.

El número de tales circunferencias cambia dependiendo de la disposición geométrica de las tres rectas.

Related Knowledge or Questions

[1] ¿Cómo se construye la incírculo y los excírculos de un triángulo usando solo regla y compás?

[2] ¿Qué sucede si se busca una circunferencia tangente a tres curvas o más generales (no rectas)?

[3] ¿Qué condiciones geométricas deben cumplirse para que tres rectas concurrentes admitan una familia de circunferencias tangentes?

Excelente iniciativa en abordar problemas de geometría avanzada. Si deseas profundizar en alguno de los puntos relacionados, indícame el número correspondiente o plantea tu próxima pregunta. ¡Estoy aquí para seguir fortaleciendo tu aprendizaje!

Problema 3: ""

Tres amigos se sientan en una mesa circular a probar un juego de apuestas. Por suerte, para que nadie haga trampas, junto con las reglas del juego, un árbitro les acompaña en su aventura. Cada uno apuesta (sin que nadie más que el mismo jugador y el árbitro sepa la cantidad del jugador en cuestión) una cantidad de euros múltiplo de 12 y, por supuesto, de al menos 1 euro. Esta apuesta será la cantidad de dinero con que operarán. El árbitro indica que cada uno de los jugadores le pase al jugador de su derecha, en orden secuencial y hasta terminar un ciclo completo (es decir, hasta que todos hayan pasado dinero una vez, pero solo una vez), respectivamente un medio, un tercio y un cuarto de sus tenencias al momento en que le toca pasar dinero. El jugador que primero pasa el dinero se decide de manera aleatoria. Gana, y por tanto se lleva todo el dinero, el jugador que cuente con más dinero al finalizar este intercambio. Una vez concluido el intercambio, el árbitro, exaltado por la emoción, exclama: "¡qué casualidad que tengáis el mismo dinero con el que empezasteis!". ¿Se puede saber con exactitud la cantidad de dinero que había apostado cada uno? ¿Se puede saber, solo con esta información, quién gana? ¿Existe posibilidad de tablas, es decir, que al menos dos jugadores tengan el mismo dinero y el tercero no les supere?

""

Vamos a abordar este hermoso problema que mezcla **aritmética, lógica, simetría circular y fracciones**, resolviendo paso a paso todas sus implicaciones. El problema da lugar a una **ecuación cíclica** con transferencias de fracciones del capital entre tres jugadores en una mesa circular.

Problema 3: Tres jugadores, transferencias y fracciones cíclicas

Solution By Steps

Paso 1: Notación e hipótesis

Denotemos a los tres jugadores como A, B, C , sentados en orden circular (por ejemplo, en sentido horario). Denotamos por:

- a : la cantidad de dinero apostada por el jugador A
- b : por B
- c : por C

Sabemos que:

- $a, b, c \in \mathbb{N}$
- $a, b, c \geq 12$ y múltiplos de 12

Además:

- Uno pasa la mitad ($\frac{1}{2}$), otro un tercio ($\frac{1}{3}$), otro un cuarto ($\frac{1}{4}$) de su dinero **actual** a su vecino de la derecha.
- El orden es aleatorio, pero el resultado es que **todos terminan con exactamente la misma cantidad que tenían al inicio**.

Nuestra tarea:

- Determinar si se puede encontrar a, b, c de forma **única**
- Saber si es posible decidir quién gana, o si hay empate
- Ver si pueden darse **tablas** entre dos o tres jugadores

Paso 2: Modelado algebraico del proceso

Como los jugadores están en círculo, usaremos un esquema con transferencia **de i a $i + 1 \pmod{3}$** , y llamaremos a cada jugador con índice:

- $P_1 \rightarrow a, P_2 \rightarrow b, P_3 \rightarrow c$

Supongamos que:

- P_1 entrega $\frac{1}{2}$ de lo que tiene a P_2
- P_2 entrega $\frac{1}{3}$ de lo que tiene a P_3
- P_3 entrega $\frac{1}{4}$ de lo que tiene a P_1

Sea x, y, z los saldos finales de P_1, P_2, P_3 . La condición es:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c \quad (\text{saldos finales iguales a los iniciales})$$

Vamos a escribir las **ecuaciones de balance de cada jugador**:

Para P_1 :

- Pierde $\frac{1}{2}a$ (dado a P_2)
- Gana $\frac{1}{4}c$ (recibido de P_3)

$$\text{Final de } P_1 : \quad a - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}c = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}c$$

Requiere que esto sea igual a a (saldo final = saldo inicial):

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}c = a \Rightarrow \frac{1}{4}c = \frac{1}{2}a \Rightarrow c = 2a \quad (\text{Ecuación 1})$$

Para P_2 :

- Pierde $\frac{1}{3}b$ (dado a P_3)
- Gana $\frac{1}{2}a$ (recibido de P_1)

$$b - \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}a = \frac{2}{3}b + \frac{1}{2}a = b \Rightarrow \frac{2}{3}b + \frac{1}{2}a = b \Rightarrow \frac{1}{2}a = \frac{1}{3}b \Rightarrow a = \frac{2}{3}b \quad (\text{Ecuación 2})$$

Para P_3 :

- Pierde $\frac{1}{4}c$ (dado a P_1)
- Gana $\frac{1}{3}b$ (recibido de P_2)

$$c - \frac{1}{4}c + \frac{1}{3}b = \frac{3}{4}c + \frac{1}{3}b = c \Rightarrow \frac{3}{4}c + \frac{1}{3}b = c \Rightarrow \frac{1}{3}b = \frac{1}{4}c \Rightarrow b = \frac{3}{4}c \quad (\text{Ecuación 3})$$

Paso 3: Resolver el sistema de ecuaciones

Usamos ecuaciones:

- (1) $c = 2a$
- (2) $a = \frac{2}{3}b \Rightarrow b = \frac{3}{2}a$
- (3) $b = \frac{3}{4}c$

Verifiquemos consistencia entre (1) y (3):

- De (1): $c = 2a \Rightarrow \frac{3}{4}c = \frac{3}{4}(2a) = \frac{3}{2}a$
- Entonces: $b = \frac{3}{2}a$ — coincide con (2)

✓ Sistema consistente

Paso 4: Encontrar valores numéricos

Queremos $a, b, c \in \mathbb{N}$, múltiplos de 12

De antes:

- $b = \frac{3}{2}a \Rightarrow a$ debe ser múltiplo de 2
- $c = 2a$

Queremos que **todos sean múltiplos de 12**:

Busquemos el **mínimo común múltiplo** de 12 que verifique las condiciones. Tomamos el **mínimo valor de a** tal que:

- $a \in 12\mathbb{N}$
- $b = \frac{3}{2}a \in \mathbb{N}$
- $c = 2a \in \mathbb{N}$

El menor tal valor es $a = 24$

Entonces:

- $a = 24$
- $b = \frac{3}{2}a = \frac{3}{2} \cdot 24 = 36$
- $c = 2a = 48$

Comprobemos que son todos múltiplos de 12: ✓

Paso 5: ¿Quién gana?

Después de las transferencias, el árbitro dice que **cada uno termina con la misma cantidad que empezó**, pero el **juego consiste en transferir dinero**, y gana quien termina con más dinero.

Pero como **cada uno termina con lo que tenía**, nadie gana más que nadie.

✓ Cada uno conserva exactamente su capital inicial, luego el que empezó con más dinero, gana.

Entonces:

- $A = 24$
- $B = 36$
- $C = 48$

🏆 Gana el jugador C (el que apostó 48 euros)

Paso 6: ¿Es posible un empate?

Para que haya un **empate**, necesitaríamos:

- Que al menos dos jugadores tengan el **mismo capital inicial**





Pero de la estructura:

- $a = \frac{2}{3}b$
- $c = 2a$

No hay forma de que $a = b$ o $b = c$, a menos que $a = b = c = 0$, lo cual está prohibido (mínimo 1 euro).

✗ No puede haber empate

Final Answer

-  **Sí, se puede saber con exactitud cuánto apostó cada jugador:**
 $A = 24, B = 36, C = 48$ (todos múltiplos de 12)
 -  **Sí, se puede saber quién gana:**
 El jugador C , quien empezó con más dinero
 -  **No puede haber tablas:** no existen soluciones con dos o tres jugadores empatados sin violar las condiciones dadas
-

Key Concept

Sistemas cíclicos de transferencias y conservación de cantidades bajo operaciones proporcionales

Key Concept Explanation

El problema es un excelente ejemplo de cómo aplicar álgebra básica para modelar una **situación cíclica de transferencias proporcionales**, reduciendo el problema a un sistema de ecuaciones lineales entre las cantidades. Se explota la **simetría** y se aplica consistencia con las condiciones iniciales (múltiplos de 12, conservación del capital). Este enfoque permite deducir cantidades exactas y analizar si puede haber empates o soluciones múltiples.

Related Knowledge or Questions

[1] ¿Cómo se resuelve un sistema de ecuaciones cíclico generalizado con fracciones arbitrarias?

[2] ¿Qué sucede si agregamos un cuarto jugador y extendemos las reglas de transferencia?

[3] ¿Cómo se puede representar este sistema con matrices y resolver algebraicamente?

Excelente razonamiento hasta aquí. Si quieres continuar, dime el número del tema que más te interese o plantéame una nueva pregunta. ¡Sigamos explorando juntos el mundo de la matemática!

He analizado la solución $(A, B, C) = (24, 36, 48)$ y no es válida. En detalle y por pasos: (1) A le da a B 12, luego A queda con 12 y B queda con 48; (2) B le da a C 16, luego B queda con 32 y C con 64; y (3) C le da a A 16, luego C queda con 48 y A con 28. Es decir, queda $(A, B, C) = (28, 32, 48)$, que no es lo que tenían al principio. Sin embargo, he probado con $(A, B, C) = (24, 24, 36)$ y resulta ser una solución válida.

¡Excelente observación y muy bien verificado! Vamos a **reanudar el problema con rigor** y corregir el análisis con base en tu descubrimiento. Tu evaluación revela que la solución que propuse inicialmente no cumple con el ciclo de transferencias definido por las reglas. Vamos entonces a **reanalizar cuidadosamente y construir una solución correcta** a partir del criterio fundamental: al terminar el ciclo de intercambios, **cada jugador debe tener exactamente lo que tenía al principio**.

Análisis del Problema 3 (corregido y detallado)

Solution By Steps

Paso 1: Variables y reglas

Denotemos las cantidades iniciales:

- A, B, C : las cantidades iniciales de los jugadores A, B, C respectivamente.

Las reglas del juego son:

1. El jugador que comienza (digamos A) pasa **la mitad de lo que tiene** a su derecha (B).
2. Luego B pasa **un tercio de lo que tiene en ese momento** a C .
3. Luego C pasa **un cuarto de lo que tiene en ese momento** a A .

Al finalizar el ciclo, cada uno debe quedar con su cantidad inicial.

Paso 2: Modelado paso a paso del ciclo

Llamamos:

- A_0, B_0, C_0 : cantidades **iniciales**
 - A_1, B_1, C_1 : después de la primera transferencia ($A \rightarrow B$)
 - A_2, B_2, C_2 : después de la segunda ($B \rightarrow C$)
 - A_3, B_3, C_3 : después de la tercera ($C \rightarrow A$), es decir, el final
-

Primera transferencia: A da la mitad de lo que tiene a B

$$\begin{aligned}A_1 &= A_0 - \frac{1}{2}A_0 = \frac{1}{2}A_0 \\B_1 &= B_0 + \frac{1}{2}A_0 \\C_1 &= C_0\end{aligned}$$

Segunda transferencia: B da un tercio de lo que tiene a C

$$\begin{aligned}B_2 &= B_1 - \frac{1}{3}B_1 = \frac{2}{3}B_1 \\C_2 &= C_1 + \frac{1}{3}B_1 \\A_2 &= A_1\end{aligned}$$

Tercera transferencia: C da un cuarto de lo que tiene a A

$$\begin{aligned}C_3 &= C_2 - \frac{1}{4}C_2 = \frac{3}{4}C_2 \\A_3 &= A_2 + \frac{1}{4}C_2 \\B_3 &= B_2\end{aligned}$$

Queremos que:

$$A_3 = A_0, \quad B_3 = B_0, \quad C_3 = C_0$$

Paso 3: Sustitución algebraica total

Comencemos a expresar todo en función de los valores iniciales A_0, B_0, C_0 :

 A:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2}A_0 \\ A_2 &= A_1 = \frac{1}{2}A_0 \\ C_2 &= C_1 + \frac{1}{3}B_1 = C_0 + \frac{1}{3}(B_0 + \frac{1}{2}A_0) = C_0 + \frac{1}{3}B_0 + \frac{1}{6}A_0 \\ A_3 &= A_2 + \frac{1}{4}C_2 = \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{4}\left(C_0 + \frac{1}{3}B_0 + \frac{1}{6}A_0\right) \\ A_3 &= \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{4}C_0 + \frac{1}{12}B_0 + \frac{1}{24}A_0 = \left(\frac{13}{24}A_0 + \frac{1}{12}B_0 + \frac{1}{4}C_0\right) \end{aligned}$$

Queremos que $A_3 = A_0$. Entonces:

$$A_0 = \frac{13}{24}A_0 + \frac{1}{12}B_0 + \frac{1}{4}C_0 \Rightarrow A_0 - \frac{13}{24}A_0 = \frac{1}{12}B_0 + \frac{1}{4}C_0 \Rightarrow \frac{11}{24}A_0 = \frac{1}{12}B_0 + \frac{1}{4}C_0 \quad (1)$$

 B:

$$\begin{aligned} B_1 &= B_0 + \frac{1}{2}A_0 \\ B_2 &= \frac{2}{3}B_1 = \frac{2}{3}(B_0 + \frac{1}{2}A_0) = \frac{2}{3}B_0 + \frac{1}{3}A_0 \\ B_3 &= B_2 \Rightarrow B_3 = \frac{2}{3}B_0 + \frac{1}{3}A_0 = B_0 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\frac{2}{3}B_0 + \frac{1}{3}A_0 = B_0 \Rightarrow \frac{1}{3}A_0 = \frac{1}{3}B_0 \Rightarrow A_0 = B_0 \quad (2)$$

 C:

$$\begin{aligned}C_1 &= C_0 \\C_2 &= C_0 + \frac{1}{3}B_1 = C_0 + \frac{1}{3}(B_0 + \frac{1}{2}A_0) = C_0 + \frac{1}{3}B_0 + \frac{1}{6}A_0 \\C_3 &= \frac{3}{4}C_2 = \frac{3}{4}\left(C_0 + \frac{1}{3}B_0 + \frac{1}{6}A_0\right)\end{aligned}$$

Queremos que $C_3 = C_0$. Entonces:

$$C_0 = \frac{3}{4}C_0 + \frac{1}{4}B_0 + \frac{1}{8}A_0 \Rightarrow C_0 - \frac{3}{4}C_0 = \frac{1}{4}B_0 + \frac{1}{8}A_0 \Rightarrow \frac{1}{4}C_0 = \frac{1}{4}B_0 + \frac{1}{8}A_0 \quad (3)$$

Multiplicamos por 8:

$$2C_0 = 2B_0 + A_0 \quad (3')$$

Paso 4: Sustituir usando (2): $A_0 = B_0$

De (3'):

$$2C_0 = 2A_0 + A_0 = 3A_0 \Rightarrow C_0 = \frac{3}{2}A_0 \quad (4)$$

Ahora usemos en (1):

$$\begin{aligned}\frac{11}{24}A_0 &= \frac{1}{12}A_0 + \frac{1}{4}C_0 = \frac{1}{12}A_0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2}A_0 = \frac{1}{12}A_0 + \frac{3}{8}A_0 \\&= \left(\frac{1}{12} + \frac{3}{8}\right)A_0 = \left(\frac{2}{24} + \frac{9}{24}\right)A_0 = \frac{11}{24}A_0\end{aligned}$$

✓ Confirmado: satisface todas las ecuaciones.

Paso 5: Determinar valores concretos

Sabemos que:

- $A = B$
- $C = \frac{3}{2}A$

Queremos que todos sean **múltiplos de 12**

Buscamos el **mínimo A** tal que $A \in 12\mathbb{N}$, y $\frac{3}{2}A \in \mathbb{N}$

Mínimo valor: $A = 24$, entonces:

- $A = 24$
- $B = 24$
- $C = 36$

Verificamos el proceso:

1. A da 12 a B \rightarrow A: 12, B: 36, C: 36
2. B da 12 a C \rightarrow A: 12, B: 24, C: 48
3. C da 12 a A \rightarrow A: 24, B: 24, C: 36

100 ¡Regresaron a sus valores originales!

Final Answer

✅ Sí, se puede saber con exactitud cuánto apostó cada uno:

- A = 24 euros
- B = 24 euros
- C = 36 euros

✅ Sí, se puede saber quién gana:

🏆 El jugador C gana (36 euros, más que A y B)

✅ Sí puede haber empate entre dos jugadores (A y B empatan), pero no hay triple empate ni hay otro jugador que iguale a C

Key Concept

Sistemas de ecuaciones cíclicas y modelado paso a paso con fracciones

Key Concept Explanation

Este problema representa una situación de transferencia cíclica de cantidades proporcionales. Se modela como un sistema de ecuaciones con condiciones de conservación. La clave está en seguir **paso a paso** cada cambio, acumularlos en forma de expresiones algebraicas, y luego igualar a las condiciones finales. Es una excelente aplicación de razonamiento algebraico, proporciones, y conservación.

Related Knowledge or Questions

- [1] ¿Cómo modelar procesos de transferencia con más jugadores o pasos?
- [2] ¿Cómo expresar este sistema como una transformación lineal?
- [3] ¿Puede este tipo de proceso convertirse en un sistema dinámico iterativo?

Fantástico tu trabajo en revisar, analizar y encontrar la solución correcta. Si deseas profundizar más en cualquiera de estos temas o plantear un nuevo problema, dime el número correspondiente o pregúntame libremente. ¡Sigue así!