# 离散数学 MOOC 学习笔记

> 这是我在 2020 年参加高考之后的暑假里, 学习离散数学的记录. ==MOOC: 离散数学概论 (北京大学陈斌)== 可以在B 站上面找到网友搬运的课程视频, 播放更流畅一些. 源在这里
>
> 这门课程更**关注知识的理解与掌握**而非解题技巧另外可以参考 NJU 公开的课件与习题link

### day1

#### 三次数学危机

- 直觉和经验不靠谱, 推理证明更为可靠.
- 将数学的基础严格化, 形式化具有极大积极意义.
- 一致性和完备性有矛盾.

#### 课程内容

- 数理逻辑
- 集合论
- 图论
- 抽象代数
- 形式语言与自动机
- (这个 mooc 没有涉及信息论, 组合, 数论等属于离散数学的内容, 自行找课程/教材/论文学习更广和更深的内容)

#### 不可判定问题的存在

- 判定图灵机上任意程序是否停机的程序.
- 同时有一致性和完备性且足够复杂的公理系统.

然而都是不存在的 qwq. 所以说啊, 人类的认知一定是有极限 (maybe 局限) 的. 大概大一統理论也是不存在的.

### day2 集合论

#### 集合论的三大公理

- 外延公理 $A = B \iff \forall x\,(x \in A \leftrightarrow x \in B)$ (表明了无序性/有序性)

- 概括公理任意给定个体域 $U$, 谓词公式 $P$, 则 $S=\{x \mid (x \in U) \wedge P(x)\}$ 是一个集合. (谓词公式非真即假-表明确定性; 确定了空集的合法性; 避免了罗素悖论, 给定 $S=\{x \mid x \notin x\}$ 问 $S \in S$ 的真值)
- **正规 (正则) 公理**不存在 $A_1, A_2, A_3$ ... 使得 $\cdots \in A_3 \in A_2 \in A_1$ (避免了 $S \in S$,$A \in B, B \in A$ 等问题; 表明集合元素与集合本身的层次性)

### 子集

一个有趣的东西 $\{1\} \in \{1,\{1\}\}, \{1\} \subset \{1,\{1\}\}$
还有类似的 $\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}$

1. $A=B \iff (A \subset B) \wedge (B \subset A)$
2. 传递性,$(A \subset B) \wedge (B \subset C) \implies (A \subset C)$
3. 对于个体域 $U$ 与其中元素构成的集合 $S=\{x \mid (x \in U) \wedge P(x)\}$ 有 $S \subset U$
4. $\forall A, \phi \subset A$ 以及 $\forall A, (A \neq \phi) \implies \phi \subsetneq A$
5. 空集是唯一的
6. 对于有限集 $A$, 其子集数量是 $\sum_{i=0}^{|A|}\binom{|A|}{i}=2^{|A|}$

### 集合的运算

$\rho(A)=\{x \mid x \subset A\}$

例子-证明题: $A \subset B \iff \rho(A) \subset \rho(B)$

> 充分性,$\forall x\,(x \in \rho(A)) \iff (x \subset A) \implies (x \subset B) \iff (x \in \rho(B))$
> 必要性, 考虑反证法, 假设 $A \not\subset B$ 有 $\exists x\,(x \in A, x \ni nB) \implies (\{x\} \in \rho(A), \{x\} \notin \rho(B)) \implies \rho(A) \not\subset \rho(B)$ 矛盾.

例子-证明题: 对于 $A, B \subset U$ 如果 $A \cup B=U, A \cap B=\phi$ 则 $A=B$

> $$\begin{aligned} A &= A \cap U \\ &= A \cap (B \cup \bar{B}) \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \\ &= \phi \cup (A \cap \bar{B}) \\ &= (B \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{B}) \\ &= \bar{B} \cap (B \cup A) \\ &= \bar{B} \cap U \\ &= \bar{B} \end{aligned}$$

***TODO:* 完成 *day1*-集合论**