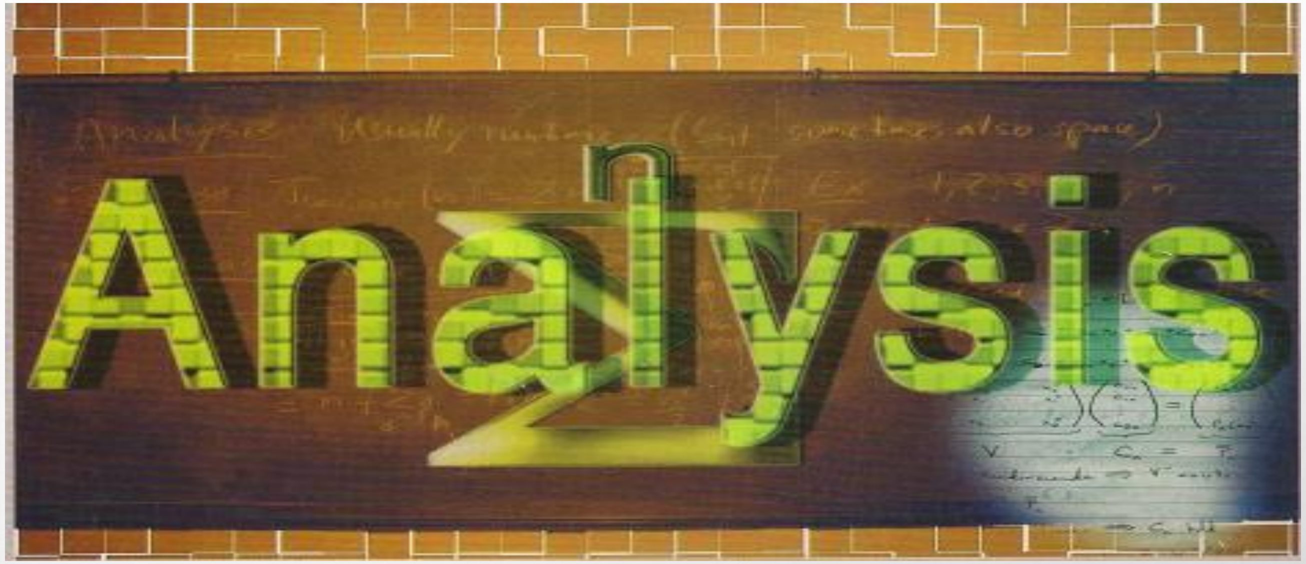
به نام خدا

مقطع درس; 3698925 و 3698926



دکتر سمیه ایزدی

ریاضی کاربردی.گرایش آنالیز عددی

مدرس دانشگاه آزاد اسلامی

عنوان درس; مبانی آنالیز عددی

جلسه پنجم

عنوان جلسه پنجم

مشتق گیری و انتگرال گیری عددی

ادامه بخش قاعده سیمسون و نقطه میانی

قاعدهٔ ذوزنقه‌ای

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P(x)\,dx = \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})$$

فرمول قاعدهٔ ذوزنقه‌ای

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})$$

قاعدهٔ ذوزنقه‌ای مرکب

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \simeq T(h) = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n\right)$$

نتیجه

خطای قاعدهٔ ذوزنقه‌ای مرکب متناسب با h^2 است و این قاعده برای توابع چندجمله‌ای حداکثر از درجهٔ اول دقیق است.

نتیجه

اگر M_2 یک کران بالا برای $|f''(x)|$ باشد، یعنی

$$\max_{a \le x \le b} |f''(x)| \le M_2$$

آن‌گاه

$$|ET(h)| \le \frac{(b-a)}{12} h^2 M_2$$

مشتقگیری و انتگرالگیری عددی

فرمول قاعدهٔ سیمسون

ابتدا چند جمله‌ای درونیاب f را در نقاط x_i ، x_{i+1} ، x_{i+2} می‌نویسیم. این چندجمله‌ای بنا

$$P(x_{i+1})=f_i+\Delta f_i=f_i+(f_{i+1}-f_i)=f_{i+1}$$

عبارت است از

$$P(x)=f_i+\theta\Delta f_i+\frac{\theta(\theta-1)}{2}\Delta^2 f_i$$

بنابراین، قرارمی‌دهیم

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\,dx \simeq \int_{x_i}^{x_{i+2}} P(x)\,dx$$

و انتگرال سمت راست را حساب می‌کنیم.

با تغییر متغیر $x=x_i+\theta h$ داریم

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} P(x)\,dx=\int_0^2\left(f_i+\theta\Delta f_i+\frac{\theta(\theta-1)}{2}\Delta^2 f_i\right)h\,d\theta$$

$$=h\left[\theta f_i+\frac{\theta^2}{2}\Delta f_i+\left(\frac{\theta^3}{6}-\frac{\theta^2}{4}\right)\Delta^2 f_i\right]_0^2$$

بنابراین،

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P(x)\,dx=h\left(2f_i+2\Delta f_i+\frac{1}{3}\Delta^2 f_i\right),$$

که با توجه به روابط

$$\Delta f_i=f_{i+1}-f_i \quad , \quad \Delta^2 f_i=f_{i+2}-2f_{i+1}+f_i$$

چنین ساده می‌شود

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} P(x)\,dx=\frac{h}{3}\left(f_i+4f_{i+1}+f_{i+2}\right).$$

بنابراین **فرمول قاعدهٔ سیمسون** عبارت است از

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left[f_i+4f_{i+1}+f_{i+2}\right]. \qquad (۳۲.۵)$$

مشتقگیری و انتگرالگیری عددی

فرمول قاعده سیمسون در سراسر بازهٔ $[x_0,x_n]$

برای به دست آوردن فرمول قاعده سیمسون در سراسر بازهٔ $[x_0,x_n]$ ، چون (۳۲.۵) تقریبی برای بازهٔ $[x_i,x_{i+2}]$ است لذا باید n زوج باشد تا بتوان (۳۲.۵) را به کار برد. با فرض زوج بودن n داریم:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx$$

با به کار بردن (۳۲.۵) به ازای $i=0,2,\dots,n-2$ به دست می‌آوریم:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}(f_0+4f_1+f_2)+\frac{h}{3}(f_2+4f_3+f_4)+\dots+\frac{h}{3}(f_{n-2}+4f_{n-1}+f_n).$$

عبارت اخیر را، با توجه به حرف اول کلمه سیمسون، $S(h)$ می‌نامیم. بنابراین،

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \simeq S(h)=\frac{h}{3}(f_0+4f_1+2f_2+4f_3+2f_4+\dots+2f_{n-2}+4f_{n-1}+f_n). \qquad (۳۳.۵)$$

این فرمول قاعدهٔ سیمسون مرکب است.

مشتقگیری و انتگرالگیری عددی

مثال

تقریبی از $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$ ، به قاعدهٔ سیمسون، با $h=\frac{\pi}{4}$ و تقریب دیگری به ازای $h=\frac{\pi}{8}$ حساب کنید.

حل:

$$S\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{\pi}{4}}{3}\left(\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{12}(0 + 2\sqrt{2} + 1) = \frac{\pi(2\sqrt{2}+1)}{12} = 1{,}00228$$

به ازای $h=\frac{\pi}{8}$ داریم (با توجه به (۳۳.۵))

$$S\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\frac{\pi}{8}}{3}\left(\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{8} + 2\sin\frac{\pi}{4} + 4\sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{24}(0 + 1{,}53073 + 1{,}41421 + 3{,}69552 + 1)$$

$$= \frac{\pi \times 7{,}64046}{24} = 1{,}00013$$

ملاحظه می‌شود که چون

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$S(\frac{\pi}{4})$ و بخصوص $S(\frac{\pi}{8})$، نسبتاً دقیق هستند. جالب این که در $S(\frac{\pi}{8})$ با توجه به این‌که $\sin 0$ و $\frac{\pi}{\sin 2}$ را می‌دانیم، نیاز به محاسبهٔ سه مقدار تابع $\sin x$ داریم.

ضمناً، $S(\frac{\pi}{4})$ خیلی دقیقتر از $T(\frac{\pi}{8})$ است که در مثال (۵-۲-۴) به دست آوردیم

مشتقگیری و انتگرالگیری عددی

مثال

تقریبی از $\int_0^1 x^3 dx$ را به قاعدهٔ سیمسون حساب کنید.

حل: بزرگترین مقداری که برای h می‌توان اختیار کرد $h=\frac{1}{2}$ است (زیرا، تعداد زیر فاصله‌ها باید زوج باشد). بنابراین، داریم

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{3}\left[f(0)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right]$$
$$=\frac{1}{6}\left[0+4\times\frac{1}{8}+1\right]=\frac{1}{4}$$

اما،

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

یعنی،

$$S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

البته این اتفاقی نیست و در ادامه ثابت خواهیم کرد که قاعدهٔ سیمسون برای چندجمله‌ایهای تا درجهٔ سوم دقیق است.

مشتقگیری و انتگرالگیری عددی

خطای S(h)

برای تعیین خطای S(h) ابتدا خطای (۳۲.۵) را حساب می‌کنیم. برای این منظور، و سادگی عملیات، تفاضل زیر را حساب می‌کنیم

$$E_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - \frac{h}{3}\left(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}\right)$$

در نهایت

$$ES(h) \sim -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\eta)$$

مثال

تقریبی از $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$ را به روش سیمسون حساب کنید که خطای آن کمتر از 10^{-5} باشد.

حل: با توجه به این که $f(x) = x\cos x$ داریم

$$f'(x) = \cos x - x\sin x \quad , \quad f''(x) = -2\sin x - x\cos x$$

$$f'''(x) = -3\cos x + x\sin x \quad , \quad f^{(4)}(x) = 4\sin x + x\cos x$$

بنابراین، با توجه به این که $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ ، M_4 را به دست می‌آوریم:

$$\left| f^{(4)}(x) \right| = |\,4\sin x + x\cos x\,| \le 4\,|\sin x| + |x|\,|\cos x| \le 4 + \frac{\pi}{2} < 6$$

پس، $M_4=6$ و قرار می‌دهیم

$$\frac{b-a}{180}h^4 M_4 = \frac{\frac{\pi}{2}-0}{180}h^4 \times 6 = \frac{\pi h^4}{60} \le 10^{-5}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$h \le 0/1 \times \sqrt[4]{\frac{6}{\pi}} \simeq 0/1176$$

چون $nh = b-a = \frac{\pi}{2}$، پس

$$n = \frac{\pi}{2h} \ge 13/357$$

چون در روش سیمسون n باید زوج باشد قرار می‌دهیم $n=14$ که در نتیجه h مربوط به آن، که حتماً از ۰/۱۱۷۶ کمتر است، چنین به دست می‌آید

$$h = \frac{\frac{\pi}{2}}{n} = \frac{\pi}{28} \simeq 0/1122$$

تمرین

۱ـ تقریبی از هریک از انتگرالهای زیر را به قاعدهٔ سیمسون، حساب کنید که خطای آنها از 10^{-3} کمتر باشد.

(آ) $\int_0^1 e^x\,dx$

(ب) $\int_1^2 xe^x\,dx$

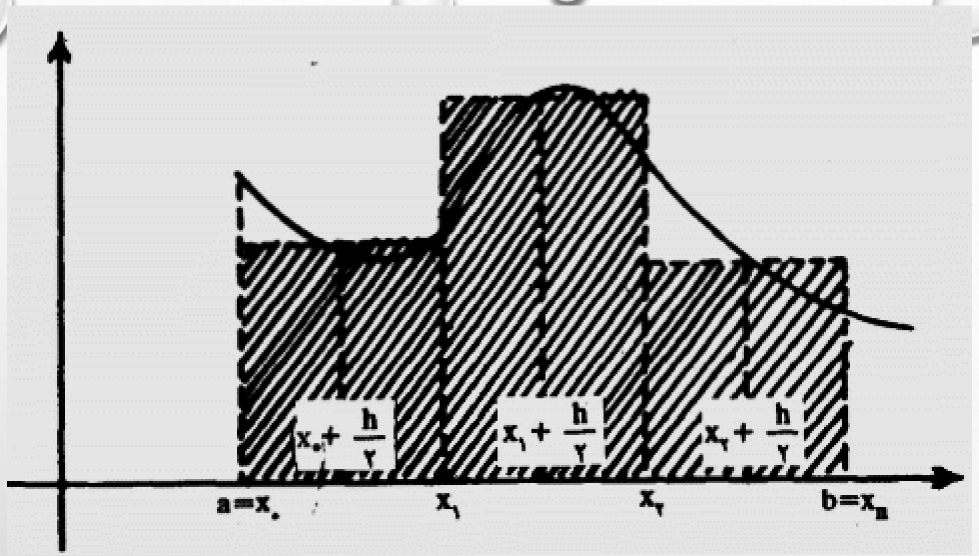
(پ) $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$

(ت) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

۲ـ حدود h را برای محاسبهٔ تقریبی

$$\int_0^1 e^x \sin x\,dx$$

مشتقگیری و انتگرالگیری عددی



قاعدهٔ نقطه میانی

روشهای انتگرالگیری ذوزنقه‌ای و سیمسون که تا کنون شرح داده‌ایم از نقاط ابتدایی و انتهایی بازهٔ انتگرالگیری استفاده می‌کنند. بنابراین، محاسبهٔ تقریبهایی از انتگرالهای نظیر

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \qquad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

به این روشها میسر نیست. در این قسمت روش ساده‌ای را شرح می‌دهیم که می‌توان تقریبهایی از $\int_a^b f(x)\,dx$ را، وقتی f(a) یا f(b) نامعین هستند، به وسیلهٔ آن حساب کرد.

فرمول قاعدهٔ نقطهٔ میانی

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \simeq +\, h\, f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq M(h) = h\left(f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)+f\left(x_1+\frac{h}{2}\right)+\dots+f\left(x_{n-1}+\frac{h}{2}\right)\right)$$

مثال

تقریبی از $\int_{۰}^{۰/۰۹} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ حساب کنید.

حل: اولاً مقدار واقعی انتگرال چنین به دست می‌آید:

$$\int_{۰}^{۰/۰۹}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[۲\sqrt{x}\right]_{۰}^{۰/۰۹} = ۰/۶$$

ضمناً با استفاده از فرمول

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq M(h) = h\left(f\left(x_{۰}+\frac{h}{۲}\right)+f\left(x_{۱}+\frac{h}{۲}\right)+\dots+f\left(x_{n-۱}+\frac{h}{۲}\right)\right)$$

به دست می‌آوریم (با انتخاب $h=۰/۰۳$):

$$\int_{۰}^{۰/۰۹}\frac{dx}{\sqrt{x}} \simeq ۰/۰۳\left(f(۰/۰۱۵)+f(۰/۰۴۵)+f(۰/۰۷۵)\right)$$

$$= ۰/۰۳(۸/۱۶۵۰+۴/۷۱۴۰+۳/۶۵۱۵)$$

بنابراین،

$$\int_{۰}^{۰/۰۹}\frac{dx}{\sqrt{x}} \simeq ۰/۰۳\times ۱۶/۵۳۰۵ = ۰/۴۹۵۹۱۵$$

مشاهده می‌شود که این مقدار تقریبی حدود ۰/۱۰۴ خطا دارد که قابل توجه است. از این‌رو، توصیه می‌شود که در نزدیکی نقاطی که $f(a)$ یا $f(b)$ بینهایت هستند مقدار h بسیار کوچک اختیار شود.

با انتخاب $h=۰/۰۱$ به دست می‌آوریم

$$\int_{۰}^{۰/۰۹}\frac{dx}{\sqrt{x}} \simeq ۰/۰۱\left(\frac{۱}{\sqrt{۰/۰۰۵}}+\frac{۱}{\sqrt{۰/۰۱۵}}+\frac{۱}{\sqrt{۰/۰۲۵}}+\dots+\frac{۱}{\sqrt{۰/۰۸۵}}\right)$$

$$= ۰/۵۳۹۵۸۷$$

خطای این مقدار تقریبی حدود ۰/۰۷ است. به طور کلی در چنین انتگرالهایی باید برای قسمتی که نزدیک نقطهٔ منفرد تابع است h را بسیار کوچک اختیار کرد و برای بقیه بازهٔ h را خیلی کوچک نگرفت. مثلاً، قرار دهید

$$\int_{۰}^{۰/۰۹} f(x)\,dx = \int_{۰}^{۰/۰۱} f(x)\,dx + \int_{۰/۰۱}^{۰/۰۹} f(x)\,dx$$

و برای $\int_{۰}^{۰/۰۱} f(x)\,dx$ مقدار h را ۰/۰۰۲ و برای $\int_{۰/۰۱}^{۰/۰۹} f(x)\,dx$ مقدار h را ۰/۰۲ در نظر بگیرید، با این انتخابها به دست می‌آوریم

$$\int_{۰}^{۰/۰۱} f(x)\,dx \simeq ۰/۰۰۲\left(\frac{۱}{\sqrt{۰/۰۰۱}}+\frac{۱}{\sqrt{۰/۰۰۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۰/۰۰۵}}+\frac{۱}{\sqrt{۰/۰۰۷}}+\frac{۱}{۰/۰۰۹}\right)$$

$$= ۰/۰۰۲(۳۱/۶۲۲۸+۱۸/۲۵۷۴+۱۴/۱۴۲۱+۱۱/۹۵۲۳+۱۰/۵۴۰۹)$$

$$= ۰/۱۷۳۰۳۱$$

همچنین داریم:

$$\int_{۰/۰۱}^{۰/۰۹} f(x)\,dx \simeq ۰/۰۲\left(\frac{۱}{\sqrt{۰/۰۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۰/۰۴}}+\frac{۱}{\sqrt{۰/۰۶}}+\frac{۱}{\sqrt{۰/۰۸}}\right)$$

$$= ۰/۰۲(۷/۰۷۱۱+۵+۴/۰۸۲۵+۳/۵۳۵۵)$$

$$= ۰/۰۲\times ۱۹/۶۸۹۱ = ۰/۳۹۳۷۸۲$$

پس،

$$\int_{۰}^{۰/۰۹} \frac{dx}{\sqrt{x}} \simeq ۰/۱۷۳۰۳۱+۰/۳۹۳۷۸۲ = ۰/۵۶۶۸۱۳$$

اختلاف این مقدار، با مقدار واقعی ۰/۶ ، برابر است با ۰/۰۳۳۱۸۷ . اما، برای کم کردن خطا، **h** را باید کوچک گرفت، که در این صورت نیاز به کامپیوتر خواهد بود تا تعداد زیاد جملات را حساب کند.

مشتقگیری و انتگرالگیری عددی

خطای قاعدهٔ نقطهٔ میانی

$$EM(h) = \left(\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \right) + \dots + \left(\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx - f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}\right) \right)$$

$$\simeq \frac{h^3}{24}\left(f''_0 + f''_1 + \dots + f''_{n-1}\right)$$

که با استفاده از قضیهٔ

نتیجه می‌دهد

$$EM(h) \simeq \frac{h^3}{24} \times n f''(\eta) \qquad (x_0 \le \eta \le x_n)$$

چون $nh = b-a$، پس

$$EM(h) \simeq \frac{(b-a)h^2}{24} f''(\eta) \qquad (a \le \eta \le b)$$

و یا

$$|EM(h)| \le \frac{(b-a)}{12} h^2 M_2$$

مثال

تقریبی از $\int_{0}^{1/2} f(x)\,dx$ را با استفاده از جدول مقادیر زیر، و روش نقطهٔ میانی حساب کنید.

x_i	۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۱	۱/۲
f_i	۱	۱/۲۲۱۴	۱/۴۹۱۸	۱/۸۲۲۱	۲/۲۲۵۵	۲/۷۱۸۳	۳/۳۲۰۱

حل: برای استفاده از روش نقطهٔ میانی و جدول مقادیر بالا، تنها می‌توان h را ۰/۴ اختیار کرد. با انتخاب h=۰/۴ مقادیر تابع در نقاط زیر

۰/۲ ، ۰/۶ ، ۱

مورد نیاز است. بنابراین،

$$\int_{0}^{1/2} f(x)\,dx \simeq 0/4\,(f(0/2)+f(0/6)+f(1)) = 2/3042$$

اگر بخواهیم از h=۰/۲ استفاده کنیم مقدار تابع در نقاط زیر مورد نیاز است

۰/۱ ,۰/۳ ,۰/۵ ,۰/۷ ,۰/۹ ,۱/۱

که هیچ‌کدام در جدول نیستند و باید مقادیر تابع را در این نقاط به کمک درونیابی برآورد کرد!

پایان