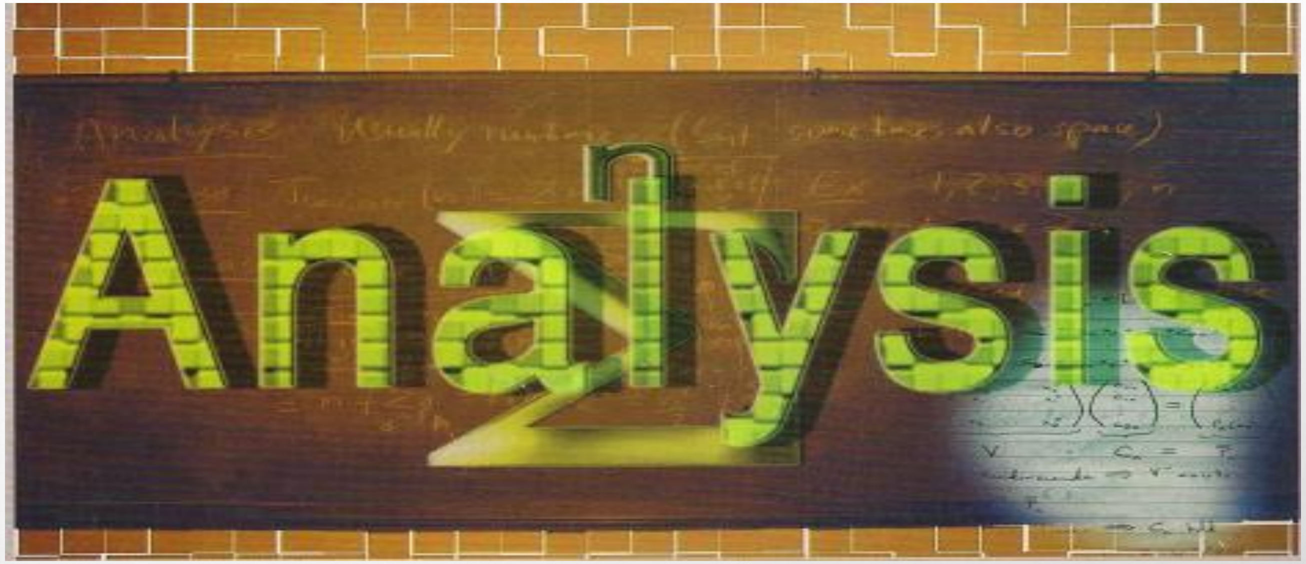
به نام خدا

مشخصه درس; 3698925 و 3698926



دکتر سمیه ایزدی

ریاضی کاربردی.گرایش آنالیز عددی

مدرس دانشگاه آزاد اسلامی

عنوان درس; مبانی آنالیز عددی

جلسه ششم

عنوان جلسه ششم

حل عددی معادلات دیفرانسیل

عنوان فصل بسط تیلور، روش اویلر، روش پیراسته اویلر، روش رانگ کوتا

حل عددی معادلات دیفرانسیل

یکی از مباحث مهم ریاضیات، که کاربرد فراوانی نیز در عمل دارد حل معادلات دیفرانسیل است. در ریاضیات محض وقت زیادی صرف تجزیه و تحلیل معادلات دیفرانسیل و یادگیری فنون و روشهای تحلیلی برای به دست آوردن جواب آنها می‌شود. این کار با دسته‌بندی معادلات انجام می‌گیرد و نشان داده می‌شود که دستهٔخاصی از معادلات را می‌توان به روش تحلیلی حل کرد. اما، همانند وجود تابع اولیه برای توابع، معادلات دیفرانسیل فراوانی وجود دارند که نمی‌توان به روشهای تحلیلی موجود جواب آنها را به دست آورد. حتی اگر بتوان،گاهی اوقات، بعضی معادلات دیفرانسیل ساده جوابی بسیار پیچیده دارند. به عنوان مثال، جواب

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x+y}{x-y} \\ y(۱) = ۰ \end{cases}$$

که پس از محاسبات زیادی به دست می‌آید، عبارت است از

$$\log_e(x^۲+y^۲) = ۲\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

هدفهای کلی

۱ـ تشریح روش بسط تیلر برای برآورد مقادیر جواب معادلهٔ دیفرانسیل

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

۲ـ ارائه روش اویلر و پیراستهٔ اویلر

۳ـ شرح روشهای رونگه ـ کوتا و چندگامی

حل عددی معادلات دیفرانسیل

در این فصل حل عددی دستگاه زیر را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (x \geq x_0) \qquad (۱.۶)$$

که در آن $f(x,y)$ تابعی دو متغیره و مفروض است و x_0 و y_0 نیز معلوم‌اند. روشهایی که در این فصل مورد بررسی قرارمی‌دهیم جملگی عدد مثبت و کوچکی چون h را اختیار می‌کنند و برآوردی از $y(x_0+ih)$ را به ازای ...$i=۱،۲،۳$ به دست می‌دهند. از این رو، فرض می‌کنیم y_i مقدار تقریبی $y(x_i)$ باشد و چند روش را برای محاسبهٔ y_i مورد بررسی قرارمی‌دهیم.

روش بسط تیلر

می‌دانیم که $x_1=x_0+h$ و بنابر بسط تیلر

$$y(x_1)=y(x_0+h)=y(x_0)+hy'(x_0)+\frac{h^2}{2!}y''(x_0)+\dots+\frac{h^p}{p!}y^{(p)}(x_0)+\dots$$

برای پیدا کردن y_1، یعنی تقریبی از $y(x_1)$، باید سری سمت راست را در نقطه‌ای قطع کنیم،

$$y(x_1)\simeq y_1=y_0+hy'_0+\frac{h^2}{2}y''_0+\dots+\frac{h^p}{p!}y_0^{(p)}$$

دقت y_1 به کوچکی h و بزرگی p بستگی دارد. ضمناً، باید بتوانیم مشتقات y را تا مرتبهٔ p حساب کنیم. اکنون برای محاسبهٔ y_2، تقریبی از $y(x_2)$، دو راه وجود دارد.

راه اول:

از y_1 و این که، $x_2=x_1+h$ استفاده می‌کنیم.

$$y(x_2)=y(x_1)+hy'(x_1)+\dots+\frac{h^P}{p!}y^{(p)}(x_1)+\dots$$

و قرار می‌دهیم

$$y(x_2)\simeq y_2=y_1+hy'_1+\dots+\frac{h^P}{p!}\,y_1^{(p)}$$

این روش را **روش موضعی** می‌نامند که در حالت کلی نتیجه می‌دهد

$$y(x_{i+1})\simeq y_{i+1}=y_i+hy'_i+\dots+\frac{hP}{p!}y_i^{(p)},\quad i=0,1,2,3,\dots \qquad (2.6)$$

راه دوم:

با توجه به اینکه $x_2=x_0+2h$ به کمک بسط تیلر داریم

$$y(x_2)=y(x_0+2h)=y(x_0)+2hy'(x_0)+\frac{(2h)^2}{2!}y''(x_0)+\dots+\frac{(2h)^q}{q!}y^{(q)}(x_0)+\dots$$

چون $2h$ از h بزرگتر است برای به دست آوردن تقریبی از سری سمت راست باید q جمله از آن را اختیار کنیم، که در آن $q>p$. یعنی، قرار می‌دهیم

$$y(x_2)\simeq y_2=y_0+2hy'_0+\dots+\frac{2^q h^q}{q!}y_0^{(q)}$$

و به طور کلی،

$$y(x_{i+1})\simeq y_{i+1}=y_0+(ih)y'_0+\dots+\frac{i^r h^r}{r!}y_0^{(r)}$$

که در آن r با i بزرگ می‌شود، یعنی هرچه i بزرگتر باشد r نیز بزرگتر خواهد شد! ولی چه قدر؟

مثال

مطلوب است محاسبهٔ برآوردی از $y(0/5)$ مشروط بر این که

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

و $h=0/1$ و $p=4$

حل: چون $x_0=0$ و $h=0/1$ داریم

$$x_i = 0 + ih = 0/1i \quad , \quad i=1,2,\ldots$$

ابتدا باید y'' و y''' و $y^{(4)}$ را حساب کنیم.

$$y'' = 1+y' = 1+x+y \quad , \quad y''' = y'' = 1+x+y \quad , \quad y^{(4)} = y'' = 1+x+y$$

$$y(x_{i+1}) \simeq y_{i+1} = y_i + h(x_i+y_i) + \frac{h^2}{2}(1+x_i+y_i) + \frac{h^3}{6}(1+x_i+y_i) + \frac{h^4}{24}(1+x_i+y_i)$$

با قراردادن $h=0/1$ و ساده کردن، به دست می‌آوریم.

$$y_{i+1} = 0/00517 + 0/10517x_i + 1/10517y_i$$

در نتیجه

به ازای $i=0$ داریم: $y_1 = 0/00517 + 0 + 1/10517 \times 1 = 1/11034$

به ازای $i=1$ داریم: $y_2 = 0/00517 + 0/10517 \times 0/1 + 1/10517 \times 1/11034 = 1/24280$

و به همین ترتیب، به ازای $i=2,3,4$ داریم

$$y_3 = 1/39971 \quad \text{و} \quad y_4 = 1/58364 \quad \text{و} \quad y_5 = 1/79743$$

برای مقایسهٔ این جواب با جواب واقعی دستگاه (۳.۶) می‌دانیم که جواب واقعی عبارت است از

$$y = 2e^x - x - 1 \tag{4.6}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$y(0/5) = 1/79744 \ (5D)$$

بنابراین، خطای y_5 حدود $0/00001$ است!

روش اویلر

یک راه اجتناب از محاسبهٔ مشتقات مراتب بالای y آن است که در بسط تیلر قرار دهیم $p=1$ که تقریب زیر را نتیجه می‌دهد

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i = y_i + hf(x_i, y_i) \qquad (5.6)$$

فرمول (۵.۶)، به دستور اویلر معروف است.

مثال

تقریبی از جواب دستگاه (۳.۶) را به روش اویلر، و با $h=0/1$، حساب کنید.

حل: با توجه به این که $h=0/1$ و $f(x,y)=x+y$ داریم

$$y_{i+1} = y_i + 0/1\ (x_i + y_i)$$

بنابراین،

$$y_{i+1} = 0/1x_i + 1/1y_i \ , \quad I = 0, 1, 2, \ldots$$

با توجه به این که $x_i=0/1i$ و $y_0=1$ به دست می‌آوریم

$$y_1 = 1/1$$
$$y_2 = 1/22$$
$$y_3 = 1/362$$
$$y_4 = 1/5282$$
$$y_5 = 1/72102$$

ملاحظه می‌شود که خطای y_5 حدود ۰/۰۸ است.

روش پیراستهٔ اویلر

با تغییر ساده‌ای در دستور (۵.۶) می‌توان تقریبهای بهتری به دست آورد. برای این منظور چنین عمل می‌کنیم.

الف ـ قرار می‌دهیم

$$y_1^{(0)} = y_0 + h\,f(x_0, y_0)$$

ب ـ تقریبی از $f(x_1, y(x_1))$ یعنی $f(x_1, y_1^{(0)})$ را حساب می‌کنیم و به جای $f(x_0, y_0)$ میانگین $f(x_0, y_0)$ و $f(x_1, y_1^{(0)})$ را به عنوان ضریب زاویه در x_0 می‌گیریم. یعنی قرار می‌دهیم

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{h}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(0)})]$$

و به طور کلی قرار می‌دهیم:

$$y_1^{(r+1)} = y_0 + \frac{h}{2}(f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(r)})], \quad r = 0, 1, 2, 3 \qquad (۶.۶)$$

معمولاً $y_1^{(3)}$ یا $y_1^{(4)}$ تقریب مناسبی است و آن را y_1 می‌نامیم. سپس همین‌کار را برای محاسبهٔ y_2 انجام می‌دهیم. در مثال زیر این روش عملاً به کار می‌رود.

مثال

برآوردی از $y(0/1)$ و $y(0/2)$، که $y(x)$ جواب (۳.۶) است، را با استفاده از روش پیراستهٔ اویلر حساب کنید.

حل: طبق آنچه در (۶ـ۱ـ۴) شرح دادیم، به دست می‌آوریم:

$$y_1^{(0)} = y_0 + h\, f(x_0, y_0)$$

$$y^{(0)}_1 = 1/1$$

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{h}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(0)})]$$

$$y_1^{(1)} = 1 + \frac{0/1}{2}(1 + 1/2) = 1/11$$

$$y_1^{(2)} = 1 + \frac{0/1}{2} + (1 + 1/21) = 1/1105$$

$$y_1^{(3)} = 1 + \frac{0/1}{2}(1 + 1/2105) = 1/110525$$

چون اختلاف $y^{(3)}_1$ و $y_1^{(2)}$ خیلی زیاد نیست قرار می‌دهیم

$$y_1 = 1/110525$$

اکنون به محاسبهٔ y_2 می‌پردازیم. برای این منظور می‌نویسیم

$$y_2^{(0)} = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1/110525 + 0/1 \times 1/210525 = 1/231578$$

و

$$y_2^{(1)} = 1/110525 + \frac{0/1}{2}(1/210525 + 1/431578) = 1/24263$$

و به همین ترتیب به دست می‌آوریم:

$$y_2^{(2)} = 1/243283 \quad \text{و} \quad y_2^{(3)} = 1/243215$$

و قرار می‌دهیم $y_2 = 1/243215$. ضمناً، از (۴.۶) به دست می‌آید

$$y(0/2) = 1/242806\ (6D)$$

که خطای y_2 حدود ۰/۰۰۰۴ است.

روشهای رونگه ـ کوتا

برای به دست آوردن جوابهای دقیقتر برای دستگاه (۱.۶)، با محاسبهٔ تابع $f(x,y)$ در نقاط کمتر، می‌توان از یک دسته فرمول که توسط ریاضیدانان آلمانی به نامهای رونگه و کوتا به دست آمده‌اند استفاده کرد. فرمولهای مذکور دارای مراتب متفاوت هستند. بخصوص فرمول مرتبهٔ چهار رونگه ـ کوتا به طور وسیعی کاربرد دارد. عملیات لازم جهت به دست آوردن این فرمولها نسبتاً پیچیده است. خوانندگان مشتاق می‌توانند به [۱۸]، صفحات ۱۹۵ تا ۲۱۳، مراجعه کنند.

فرمول مرتبهٔ دوم رونگه ـ کوتا

در روش پیراستهٔ اویلر مشاهده کردیم که y_{i+1} به وسیلهٔ y_i و h برابر میانگین دو مقدار y' بیان شد. فرمول مرتبهٔ دوم رونگه ـ کوتا نیز به همین ترتیب به دست می‌آید. چون $y'=f(x,y)$ قرار می‌دهیم:

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i+\alpha h, y_i+\beta k_1)$$

$$y_{i+1} = y_i + ak_1 + bk_2$$

سپس a، b، α و β چنان حساب می‌شوند که خطای y_i از مرتبهٔ $O(h^2)$ باشد. ثابت می‌شود که یکی از جوابهای این پارامترها عبارت است از:

$$\alpha=\beta=1 \quad , \quad b=a=\frac{1}{2}$$

که روش پیراستهٔ اویلر را نتیجه می‌دهد و جواب دیگر عبارت است از

$$a=\frac{2}{3} \quad , \quad b=\frac{1}{2} \quad , \quad \alpha=\beta=\frac{3}{2}$$

در نتیجه، روش پیراستهٔ اویلر حالت خاصی از روش رونگه ـ کوتا است.

فرمول مرتبهٔ چهارم رونگه ـ کوتا

این فرمول عبارت است از:

$$\begin{cases} y_{i+1}=y_i+\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4) \\ k_1=hf(x_i,y_i) \\ k_2=hf(x_i+\frac{1}{2}h,y_i+\frac{1}{2}k_1) \\ k_3=hf(x_i+\frac{1}{2}h,y_i+\frac{1}{2}k_2) \\ k_4=hf(x_i+h,y_i+k_3) \end{cases} \qquad (۸.۶)$$

که در آن

فرمولهای رونگه ـ کوتا ظاهراً مفصل و پیچیده به نظر می‌رسند ولی در عمل به سادگی، به کمک یک وسیلهٔ محاسباتی قابل استفاده هستند و خطای کمی نسبت به روشهای دیگر دارند. مثلاً، خطای موضعی (۸.۶) از مرتبهٔ $O(h^5)$ است، و خطای آن در مجموع $O(h^4)$ است.

مثال

تقریبی از $y(۰/۱)$ را با استفاده از فرمول مرتبهٔ چهار رونگه ـ کوتا، برای دستگاه (۳.۶)، حساب کنید.

حل: با استفاده از (۸.۶) و این که $f(x,y)=x+y$ و $y_۰=۱$، داریم (برای $i=۰$):

$$k_1 = ۰/۱(۰+۱) = ۰/۱$$

$$k_2 = ۰/۱(۰/۰۵+۱/۰۵) = ۰/۱۱$$

$$k_3 = ۰/۱(۰/۰۵+۱/۰۵۵) = ۰/۱۱۰۵۰$$

$$k_4 = ۰/۱\ (۰/۱+۱/۱۱۰۵۰) = ۰/۱۲۱۰۵$$

بنابراین،

$$y(۰/۱) \simeq y_1 = ۱+\frac{۱}{۶}(۰/۱+۲\times۰/۱۱+۲\times۰/۱۱۰۵+۰/۱۲۱۰۵)$$

$$=۱/۱۱۰۳۴$$

این مقدار با مقدار واقعی، یعنی $۱-۰/۱-۲e^{۰/۱}$، تا ۵ رقم اعشار سازگاری دارد!

$$\begin{cases} y_{i+1}=y_i+\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4) \\ k_1=hf(x_i,y_i) \\ k_2=hf(x_i+\frac{1}{2}h, y_i+\frac{1}{2}k_1) \\ k_3=hf(x_i+\frac{1}{2}h, y_i+\frac{1}{2}k_2) \\ k_4=hf(x_i+h, y_i+k_3) \end{cases}$$

نام روش	اندازهٔ h	نتیجه	خطا	تعداد دفعاتی که f حساب شده است
اویلر	۰/۰۲	۱/۱۰۸۱	۰/۰۰۲۲	۵
پیراستهٔ اویلر	۰/۰۲	۱/۱۱۰۴	۰/۰۰۰۱	۱۲
رونگه ـ کوتا مرتبهٔ چهار	۰/۱	۱/۱۱۰۳۴	۰/۰۰۰۰	۴

پایان