به نام خدا

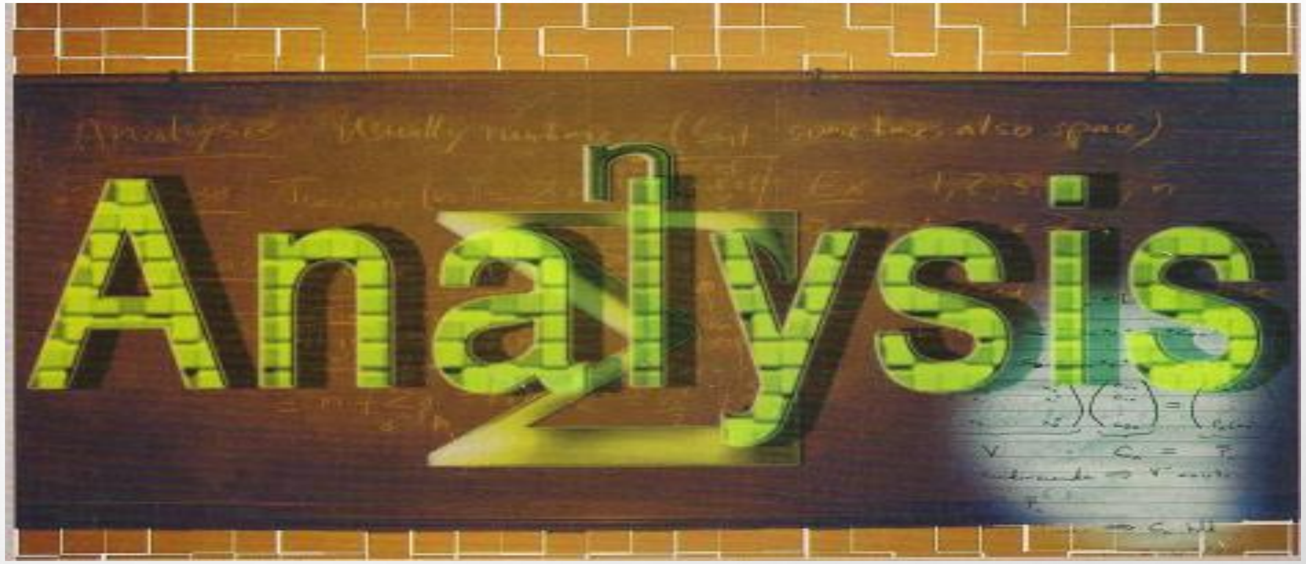
دکتر سمیه ایزدی

ریاضی کاربردی.گرایش آنالیز عددی

مدرس دانشگاه آزاد اسلامی

عنوان درس; مبانی آنالیز عددی

جلسه پنجم



عنوان جلسه پنجم

مشتق گیری و انتگرال گیری عددی

ادامه بخش قاعده سیمسون و نقطه میانی

قاعدهٔ رامبرگ

با استفاده از قاعدهٔ رامبرگ، و به کمک مقادیر تقریبی که از روشهای ساده‌ای همچون قاعدهٔ ذوزنقه‌ای و قاعده سیمسون برای $\int_a^b f(x)\,dx$ حساب می‌شود، و بدون محاسبهٔ تابع f در نقاط اضافی، می‌توان تقریبهای بهتری برای $\int_a^b f(x)\,dx$ حساب کرد. اساس این روش بر این مطلب استوار است که می‌دانیم

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = T(h) + a_2 h^2 + a_4 h^4 + a_6 h^6 + \dots \qquad (۴۷.۵)$$

که در آن a_i ها مستقل از h و متناسب با مشتق iام تابع f هستند.

اگر در (۴۷.۵)، h را به $\frac{h}{2}$ تبدیل کنیم خواهیم داشت:

$$I = T\left(\frac{h}{2}\right) + a_2\left(\frac{h}{2}\right)^2 + a_4\left(\frac{h}{2}\right)^4 + a_6\left(\frac{h}{2}\right)^6 + \dots \qquad (۴۸.۵)$$

برای حذف a_2 از معادلات (۴۷.۵) و (۴۸.۵) معادلهٔ (۴۷.۵) را از چهار برابر (۴۸.۵) کم می‌کنیم تا حاصل شود

$$4I - I = 4T\left(\frac{h}{2}\right) - T\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{a_4}{4}h^4 - a_4h^4 + \frac{a_6}{16}h^6 - a_6h^6 + \dots$$

در نتیجه

$$I = \frac{4T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h)}{3} - \frac{a_4}{4}h^4 - \frac{5a_6}{16}h^6 + \dots \qquad (۴۹.۵)$$

رابطهٔ بالا نشان می‌دهد که مقدار

$$\frac{4T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h)}{3}$$

تقریبی از I است که خطای آن متناسب با h^4 است (خطای $T(h)$ و $T(\frac{h}{2})$ متناسب با h^2 است).

مثال

تقریبهایی از $\int_{0}^{1} x^{3}dx$ را به قاعدهٔ ذوزنقه‌ای و با $h = 1, \frac{1}{2}$ حساب کنید و بعد به قاعدهٔ رامبرگ تقریب بهتری با استفاده از دو مقدار تقریبی حاصل را به دست آورید.

حل: داریم

$$T(1) = \frac{1}{2}(0^{3}+1^{3}) = \frac{1}{2}$$

$$T\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{2}\left(0^{3}+2\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+1^{3}\right) = \frac{5}{16}$$

و بنابر قاعدهٔ رامبرگ داریم:

$$\frac{4T\left(\frac{1}{2}\right)-T(1)}{3} = \frac{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{3}{4}}{3} = \frac{1}{4}$$

از طرف دیگر، $\int_{0}^{1} x^{3}dx = \frac{1}{4}$ یعنی تقریبی که از قاعدهٔ رامبرگ به دست می‌آید با مقدار واقعی انتگرال مساوی‌است. این نتیجه با استفاده از (۴۹.۵) قابل توجیه است. زیرا، خطای کسر بالا مساوی است با

$$a'_{4}h^{4}+a'_{6}h^{6}+\dots$$

که در آن a'_{i} متناسب با مشتق iام تابع $f(x)=x^{3}$ است. اما می‌دانیم که از مشتق مرتبهٔ چهارم به بعد این تابع صفر است، در نتیجه، مقدار کسر با مقدار واقعی انتگرال برابر است.

قاعدهٔ رامبرگ برای هر دنباله از اعداد تقریبی که خطای آنها در رابطه‌ای به شکل (۴۷.۵) صدق کند قابل اجراست.

تعمیم قاعدهٔ رامبرگ

در عمل تلفیقی از قاعدهٔ ذوزنقه‌ای و قاعدهٔ رامبرگ به کار می‌رود. ابتدا به قاعدهٔ ذوزنقه‌ای مقادیر زیر حساب می‌شود

$$h_0 = (b-a) \quad : \quad T(h_0) = T_{00}$$

$$h_1 = \frac{b-a}{2} = \frac{h_0}{2} \quad : \quad T(h_1) = T_{01}$$

$$h_2 = \frac{b-a}{2^2} \quad : \quad T(h_2) = T_{02}$$

$$\vdots$$

$$h_{k-1} = \frac{b-a}{2^{k-1}} \quad : \quad T(h_{k-1}) = T_{0(k-1)}$$

$$h_k = \frac{b-a}{2^k} \quad : \quad T(h_k) = T_{0k}$$

خطای T_{0i} متناسب با h_i^2 است. بعد به قاعدهٔ رامبرگ و به کمک T_{0i} ها مقادیر زیر را به دست می‌آوریم، که خطای هریک متناسب با h^4 است.

$$T_{10} = \frac{4T_{01} - T_{00}}{3}$$

$$T_{11} = \frac{4T_{02} - T_{01}}{3}$$

$$\vdots$$

$$T_{1(k-1)} = \frac{4T_{0k} - T_{0(k-1)}}{3}$$

می‌توان باز هم به کمک T_{1i} ها تقریبهای بهتری برای $\int_a^b f(x)\,dx$ حساب کرد. برای این منظور (۴۹.۵) را چنین می‌نویسیم، برای h_i به جای h،

$$I = T_{1i} + a'_4 h_i^4 + a'_6 h_i^6 + \dots \qquad (50.5)$$

اگر در تساوی بالا به جای h_i مقدار $\frac{h_i}{۲}$ را قرار دهیم به دست می‌آوریم

$$I = T_{۱(i+۱)} + a'_۴\left(\frac{h_i}{۲}\right)^۴ + a'_۶\left(\frac{h_i}{۲}\right)^۶ + \dots \qquad (۵۱.۵)$$

حال (۵۰.۵) را از ۴۲ برابر (۵۱.۵) کم می‌کنیم تا حاصل شود

$$I = ۴^۲\frac{T_{۱(i+۱)} - T_{۱i}}{۴^۲ - ۱} + a''_۶h^۶ + \dots$$

که در آن $a''_۶$ مستقل از h و متناسب با مشتق ششم تابع f است. به این ترتیب بعد از محاسبهٔ $T_{۱i}$ها به محاسبهٔ $T_{۲i}$ها ($T_{۲i}$ را، تِ دو آی بخوانید) به قرار زیر، می‌پردازیم.

$$T_{۲۰} = \frac{۴^۲T_{۱۱} - T_{۱۰}}{۴^۲ - ۱}$$

$$T_{۲۱} = \frac{۴^۲T_{۱۲} - T_{۱۱}}{۴^۲ - ۱}$$

$$\vdots$$

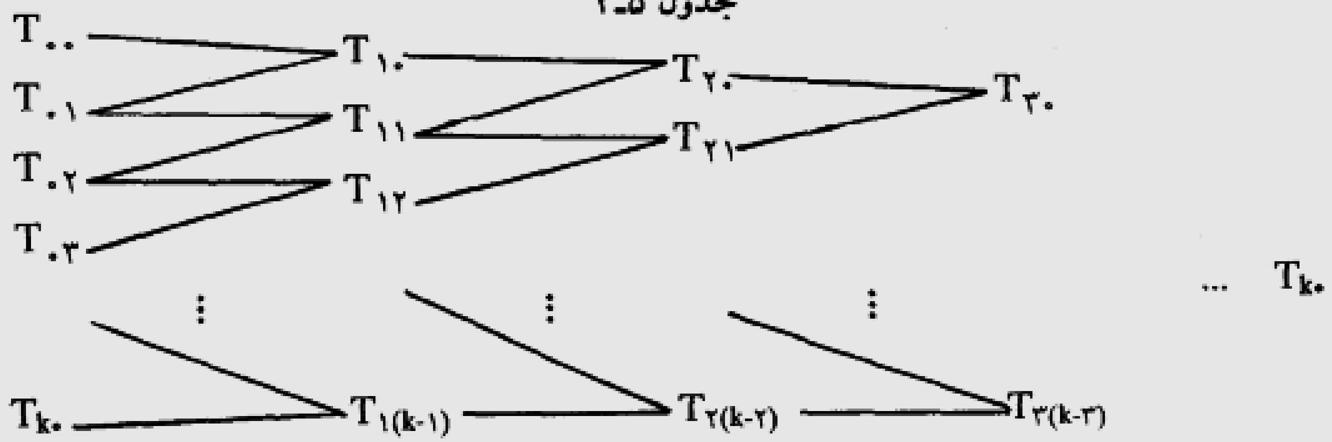
$$T_{۲i} = \frac{۴^۲T_{۱(i+۱)} - T_{۱i}}{۴^۲ - ۱}$$

در مرحلهٔ Pام از قاعدهٔ رامبرگ داریم

$$T_{pi} = \frac{۴^p T_{(p-۱)(i+۱)} - T_{(p-۱)i}}{۴^p - ۱} \quad , \quad i = ۰, ۱, ۲, \dots, \qquad p = ۱,۲,۳,\dots$$

و خطای T_{pi} متناسب با h_i^{2p+2} است و برای چندجمله‌ایهای تا درجهٔ $2p+1$ دقیق است. با استفاده از فرمول بالا اعداد جدول زیر حساب می‌شوند:

جدول ۳ـ۵



ثابت می‌شود که، به [۱۹] رجوع کنید،

$$\lim_{p\to\infty} T_{p0} = \int_a^b f(x)\,dx$$

بنابراین، در عمل T_{p0}ها را حساب می‌کنیم و وقتی، برای ε مفروض، داشته باشیم

$$\left| T_{(p+1)0} - T_{p0} \right| < \varepsilon$$

عملیات را متوقف و $T_{(p+1)0}$ را به عنوان تقریبی از $\int_a^b f(x)\,dx$ می‌پذیریم. توجه داشته باشید که T_{pi} به کمک T_{0i} های اولیه که از قاعدهٔ ذوزنقه‌ای حاصل می‌شوند به دست می‌آید و نیازی به محاسبهٔ مجدد تابع ندارد.

مثال

تقریبهایی از $\int_{\cdot}^{۲} x^{۵}dx$ را به قاعدهٔ ذوزنقه‌ای به ازای $h=۲,۱,\frac{۱}{۲}$ حساب کنید و با استفاده از مقادیر حساب شده، و به قاعدهٔ رامبرگ، تقریبی بهتر برای این انتگرال به دست آورید.

حل: داریم، $a=\cdot$ ، $b=۲$ و $f(x)=x^{۵}$ بنابراین،

$$T(۲)=\frac{۲}{۲}(\cdot^{۵}+۲^{۵})=۳۲$$

$$T(۱)=\frac{۱}{۲}(\cdot^{۵}+۲(۱)^{۵}+۲^{۵})=۱۷$$

$$T\left(\frac{۱}{۱۲}\right)=\frac{۱}{۴}\left[\cdot^{۵}+۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۵}+۲(۱)^{۵}+۲\left(\frac{۳}{۲}\right)^{۵}+۲^{۵}\right]=\frac{۱۹۷}{۱۶}$$

حال جدولی نظیر جدول (۵-۳) تشکیل می‌دهیم

$$T_{\cdot\cdot}=۳۲ \qquad T_{۱\cdot}=\frac{۴\times ۱۷-۳۲}{۳}=۱۲$$

$$T_{\cdot ۱}=۱۷ \qquad T_{۲\cdot}=\frac{۴^{۲}\times\frac{۴۳}{۴}-۱۲}{۴^{۲}-۱}=\frac{۳۲}{۳}$$

$$T_{\cdot ۲}=\frac{۱۹۷}{۱۶} \qquad T_{۱۱}=\frac{\frac{۱۹۷}{۴}-۱۷}{۳}=\frac{۴۳}{۴}$$

از طرف دیگر

$$\int_{\cdot}^{۲} x^{۵}dx=\frac{x^{۶}}{۶}\Big|_{\cdot}^{۲}=\frac{۳۲}{۳}$$

مشاهده می‌شود که مقدار $T_{۲\cdot}$ دقیقاً با مقدار انتگرال برابر است و این بدین‌خاطر است که $T_{۲\cdot}$ برای توابع تا درجهٔ ۵=۱+۲×۲ دقیق است (یعنی خطایش صفر است!)

خودآزمایی

۱ـ تقریبهایی از انتگرالهای زیر، به ازای hهای مشخص شده، حساب کنید و بعد به قاعدهٔ رامبرگ تقریبهای بهتری برای انتگرالها به دست آورید.

(آ) $\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{\cos x}$ $\qquad h = ۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}$

(ب) $\int_{۰}^{۱} \frac{\sin x}{x} dx$ $\qquad \left(\frac{\sin ۰}{۰} = ۱\right)$ $\qquad h = ۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}$

(پ) $\int_{۰}^{۱} e^{x} \cos x \, dx$ $\qquad h = ۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}$

روش گاوس

در این روش نقاط و ضرایب همگی مجهول فرض می‌شوند پس در فرمول

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k) + E$$

$(m+1)$ نقطهٔ $x_0, \ldots, x_m$ و $(m+1)$ ضریب $w_0, \ldots, w_m$ مجهول هستند. جهت به دست آوردن این $2m+2$ مجهول قرارمی‌دهیم $E=0$ برای

$f(x) = 1, x, x^2, \ldots, x^{2m+1}$

به عبارت دیگر کاری می‌کنیم که $\sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k)$ برای چند جمله‌ایهای تا درجهٔ $2m+1$ دقیق باشد. واضح است که این روش از روشهای متناظر در روش نیوتن ـ کوتز دقیقتر است.

فرمول قاعدهٔ دو نقطه‌ای گاوس

به دلایلی که بعداً شرح می‌دهیم، فرمولهای گاوس را برای بازه [۱،۱-] به‌دست می‌آوریم. واضح است که بازه‌های [a,b] و [۱،۱-] را به سادگی می‌توان به هم تبدیل کرد. با تغییر متغیر

$$x = \frac{1}{2}\left[(b-a)u + (b+a)\right]$$

و $dx = \frac{(b-a)}{2}\, du$ به دست می‌آوریم:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \psi(u)\,du$$

که در آن

$$\psi(u) = \frac{(b-a)}{2} f\left(\frac{1}{2}\left((b-a)u + (b+a)\right)\right)$$

پس، فرمول دو نقطه‌ای گاوس را برای

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx$$

به دست می‌آوریم.

می‌خواهیم داشته باشیم

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{1} w_k f(x_k) + E$$

برای تعیین x_0، x_1، w_0 و w_1 قرار می‌دهیم $E=0$ برای

$f(x) = 1, x, x^2, x^3$

همان طور که در روش نیوتن ـکوتز عمل کردیم، در اینجا نیز دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$f(x)=1: \quad \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 = w_0 + w_1 \tag{1}$$

$$f(x)=x: \quad \int_{-1}^{1} x\,dx = 0 = w_0 x_0 + w_1 x_1 \tag{2}$$

$$f(x)=x^2: \quad \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3} = w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 \tag{3}$$

$$f(x)=x^3: \quad \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0 = w_0 x_0^3 + w_1 x_1^3 \tag{4}$$

مشاهده می‌شود که چهار معادله و چهار مجهول داریم که نسبت به w_0 و w_1 خطی ولی نسبت به x_0 و x_1 غیرخطی هستند (مشکل حل این دستگاهها تا مدتی مانع از کاربرد آنها بود). این دستگاه را به طریق زیر حل می‌کنیم.

معادلهٔ (۲) را در x_0^2 ضرب و با معادله (۴) جمع می‌کنیم تا حاصل شود

$$w_1x_1^3 - w_1x_0^2 x_1 = 0$$

بنابراین، باید داشته باشیم

$$w_1 x_1 (x_1 - x_0)(x_1 + x_0) = 0 \tag{5}$$

در زیر ثابت می‌کنیم که تنها $(x_1+x_0)=0$ و بقیهٔ عوامل سمت چپ تساوی (۵) مخالف صفر هستند. این مطلب را به برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض کنید

$$w_1x_1 = 0 \tag{6}$$

از این تساوی و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$w_0 x_0 = 0 \tag{7}$$

(۶) و (۷) و (۳) نتیجه می‌دهند

$$\frac{2}{3}=0$$

که یک تناقض است. پس فرض $w_1x_1=0$ باطل است و $w_1x_1\neq 0$. بازهم فرض می‌کنیم $x_1-x_0=0$ که از آن نتیجه می‌شود

$$x_1=x_0 \qquad (۸)$$

(۸) و (۲) نتیجه می‌دهند

$$0=(w_0+w_1)\,x_1$$

که با توجه به (۱) نتیجه می‌گیریم

$$0=2x_1$$

که خلاف $w_1x_1\neq 0$ است (چرا؟) پس $x_1-x_0\neq 0$

از این رو، باید داشته باشیم

$$x_1+x_0=0$$

یعنی،

$$x_1=-x_0$$

چون x_0 و x_1 صفر نیستند و معمولاً x_0 کوچکتر از x_1 فرض می‌شود

$$x_1>0 \quad , \quad x_0<0 \qquad (۱۰)$$

از (۹) و (۳) به دست می‌آوریم

$$\frac{2}{3}=w_0x_0^2+w_1x_0^2=(w_0+w_1)x_0^2$$

که با توجه به (۱) نتیجه می‌دهد

$$x_0^2=\frac{1}{3}$$

بنابراین، با توجه به (۱۰)،

$$x_0=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

و

$$x_1=-x_0=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

ضمناً از (۹) و (۲) نتیجه می‌شود که

$$0=w_0x_0-w_1x_0=(w_0-w_1)x_0$$

که چون $x_0\neq 0$ نتیجه می‌دهد

$$w_0-w_1=0$$

از (۱) و (۱۱) به دست می‌آوریم

$$w_{\cdot} = w_{1} = 1$$

بنابراین، فرمول دو نقطه‌ای گاوس عبارت است از

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq w_{\cdot} f(x_{\cdot}) + w_{1} f(x_{1}) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \qquad (56.5)$$

این فرمول برای چندجمله‌ایهای تا درجهٔ سوم دقیق است (مطابق آنچه عمل کردیم) و تنها از دو مقدار تابع استفاده می‌کند. بنابراین، قاعدهٔ دو نقطه‌ای گاوس از نظر دقت و خطا تقریباً نظیر قاعده سیمسون است که از سه مقدار تابع استفاده می‌کند، در نتیجه از آن بهتر است.

خوشبختانه مقادیر $x_{\cdot}$، x_{1}، ...، و $w_{\cdot}$، w_{1}، ... حساب شده‌اند و در جدولهایی در اختیار استفاده‌کنندگان از این روش قرارمی‌گیرند. جدول (۵-۵) این مقادیر را نشان می‌دهد.

از جمله خصوصیات این دسته از فرمولهای انتگرالگیری گاوس این است که اگر m فرد باشد تعداد نقاط زوج است و داریم

$$\begin{cases} x_{m-i} = -x_i, \\ w_{m-i} = w_i, \end{cases} \qquad i = 0, 1, \ldots, \frac{m-1}{2} \qquad (57.5)$$

و اگر m زوج باشد تعداد نقاط فرد است و داریم

$$\begin{cases} x_{m-i} = -x_i & i = 0, 1, \ldots, \frac{m}{2} - 1 \\ x_{\frac{m}{2}} = 0 & \\ w_{m-i} = w_i & i = 0, 1, \ldots, \frac{m}{2} - 1 \end{cases} \qquad (58.5)$$

خصوصیات مندرج در (۵۷.۵) و (۵۸.۵) در جدول (۵-۵) آمده است. (برای اثبات مطالب بالا می‌توانید به [۲۰] مراجعه کنید.)

خصوصیات مندرج در (۵۷.۵) و (۵۸.۵) در جدول (۵ـ۵) آمده است. (برای اثبات مطالب بالا می‌توانید به [۲۰] مراجعه کنید.)

m	x_i	w_i
۱	$x=-x_{۰}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$w_{۱}=w_{۰}=۱$
۲	$x_{۱}=۰$	$w_{۱}=\frac{۸}{۹}$
	$x_{۲}=-x_{۰}=\sqrt{\frac{۳}{۵}}$	$w_{۲}=w_{۰}=\frac{۵}{۹}$
۳	$x_{۲}=-x_{۱}\simeq ۰/۳۳۹۹۸۱۰۴$	$w_{۲}=w_{۱}\simeq ۰/۶۵۲۱۴۵۱۵$
	$x_{۳}=-x_{۰}\simeq ۰/۸۶۱۱۳۶۳۱$	$w_{۳}=w_{۰}=۰/۳۴۷۸۵۴۸۵$
۴	$x_{۲}=۰$	$w_{۲}=۰/۵۶۸۸۸۸۸۹$
	$x_{۳}=-x_{۱}=۰/۵۳۸۴۶۹۳۱$	$w_{۳}=w_{۱}=۰/۴۷۸۶۲۸۶۷$
	$x_{۴}=-x_{۰}=۰/۹۰۶۱۷۹۸۵$	$w_{۴}=w_{۰}=۰/۲۳۶۹۲۶۸۹$

از خصوصیات بارز فرمولهای انتگرالگیری گاؤس آن است که تمام ضـرایب w_i مـثبت هستند و مهمتر این که $|w_i| \leq ۱$. این ویژگی و دقت بالای این فرمولها استفاده از آنها را اجتناب ناپذیر می‌کند. تنها اشکال روش انتگرالگیری گاؤس استفاده از بازهٔ $[-۱،۱]$ است که $\int_a^b f(x)\,dx$ ابتدا به $\int_{-۱}^{۱} \psi(u)\,du$ تبدیل شود. اشکال دیگر، که با ظهور کامپیوترها عمده نیست، اصـم بودن نقاط و ضرایب است که استفاده از این روشها را با دست خسته‌کننده می‌کند. ولی با یک برنامهٔ کامپیوتری می‌توان یکبار، و برای همیشه، نقاط و ضـرایب را بـه کـامپیوتر داد و بـرای همیشه از آنها استفاده کرد.

مثال

۱ـ با استفاده از فرمول چهار نقطه‌ای گاوس تقریبی از انتگرال زیر را حساب کنید.

$$I = \int_{1}^{3} \frac{\sin^{2} x}{x} dx$$

حل: با تغییر متغیر $x=u+2$ داریم

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\sin^{2}(u+2)}{u+2} du$$

که با توجه به جدول (۵ـ۵)، به ازای $n=3$، به دست می‌آوریم

$I \simeq 0/79422833.$

۲ـ فرمول چهار نقطه‌ای گاؤس را برای محاسبهٔ تقریبی از انتگرال زیر به کار برید

$$I=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin t\, dt$$

حل: با تغییر متغیر $x=\frac{\pi}{۴}(u+۱)$ به دست می‌آوریم

$$\int^{\frac{\pi}{۲}} \sin t\, dt=\frac{\pi}{۴}\int_{-۱}^{۱} \sin\frac{\pi(u+۱)}{۴} du=۱/۰۰۰۰۰۰$$

می‌توانید تحقیق کنید که تقریب ۱/۰۰۰۰۰۰ را با ۶۵ نقطه و به قاعدهٔ سیمسون می‌توان به دست آورد!

پایان