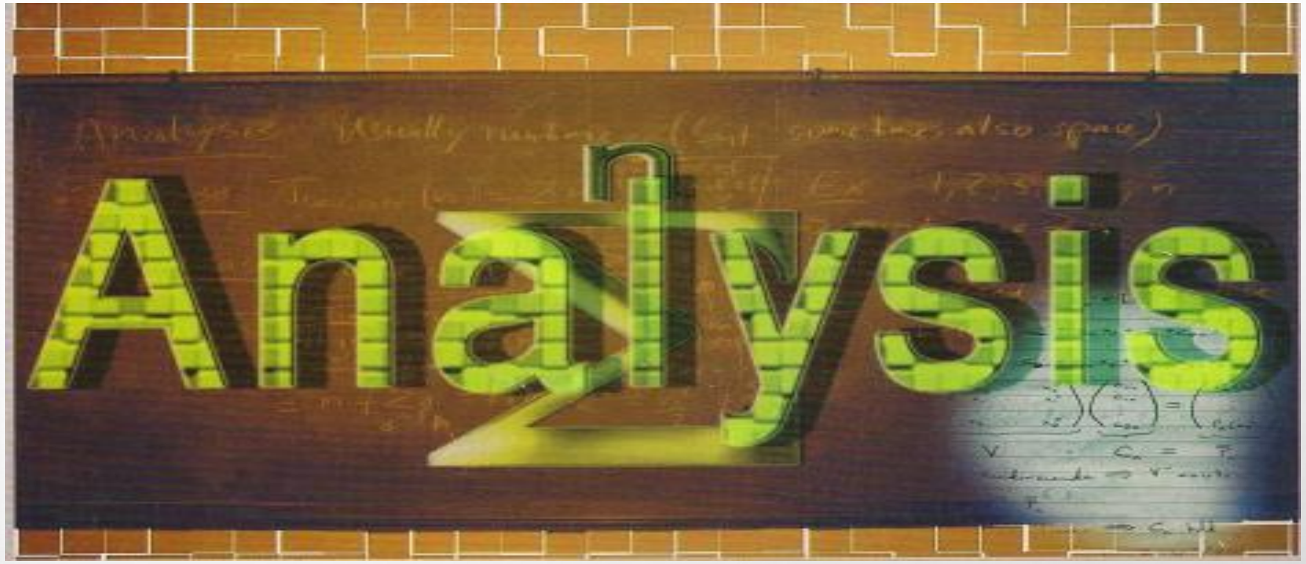
به نام خدا

مشخصه درس; 3698925 و 3698926



دکتر سمیه ایزدی

ریاضی کاربردی.گرایش آنالیز عددی

مدرس دانشگاه آزاد اسلامی

عنوان درس; مبانی آنالیز عددی

جلسه چهارم

عنوان جلسه چهارم

درونیابی

بخش دوم

مشتق گیری و انتگرال گیری عددی

مشتقگیری و انتگرالگیری عددی

مقدمه

در ابتدای این فصل روشهای پیدا کردن تقریبهایی برای $f'(x)$، به ازای مقادیر مختلف x را ارائه کنیم. سپس به تعیین تقریب برای

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

می‌پردازیم. همان‌گونه که می‌دانید توابع فراوانی موجودند که تابع اولیه ندارند، یعنی تابعی چون $F(x)$ نیست که به ازای $a \le x \le b$

$$F'(x) = f(x).$$

از این رو، محاسبهٔ این انتگرالها با روش عادی امکان‌پذیر نیست. از این جمله‌اند انتگرالهای زیر که اغلب کاربردهای عملی دارند.

$$\int_۰^۱ \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$$\int_{-۲}^{۲} e^{-x^۲}\,dx$$

مشتقگیری عددی

برای مشتقگیری عددی، همان‌طور که قبلاً اشاره شد، از چندجمله‌ای درونیاب استفاده می‌کنیم.

چند جمله‌ای درونیاب f در x_i، x_{i+1}، ...، x_{i+k} را چنین به دست آوردیم:

$$p(x)=f_i+\theta\Delta f_i+\frac{\theta(\theta-1)}{2!}\Delta^2 f_i+\frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!}\Delta^3 f_i+\frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)(\theta-3)}{4!}\Delta^4 f_i+\dots+\frac{\theta(\theta-1)\dots(\theta-k+1)}{k!}\Delta^k f_i \qquad (1.5)$$

که در آن، $x=x_i+\theta h$ و $x_{i+1}-x_i=h$ برای $i=0,1,\dots,n-1$. چون $P(x)$ برحسب θ ارائه شده است می‌نویسیم

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}\simeq\frac{dP(x)}{dx}=\frac{dP(x)}{d\theta}\times\frac{d\theta}{dx} \qquad (2.5)$$

اما داریم، $dx=hd\theta$ که در نتیجه

$$\frac{d\theta}{dx}=\frac{1}{h} \qquad (3.5)$$

بنابراین، با مشتقگیری از (۱.۵) و در نظر گرفتن (۲.۵) و (۳.۵)

$$f'(x\simeq\frac{1}{h}\left[\Delta f_i+\left(\theta-\frac{1}{2}\right)\Delta^2 f_i+\left(\frac{\theta^2}{2}-\theta+\frac{1}{3}\right)\Delta^3 f_i+\left(\frac{\theta^3}{6}-\frac{\theta^2}{2}+\frac{5\theta}{12}-\frac{1}{2}\right)\Delta^4 f_i\dots\right] \qquad (4.5)$$

اگر قرار دهیم $\theta=0$، با توجه به $x=x_i+\theta h$، داریم $x=x_i$ و از (۴.۵) نتیجه می‌شود

$$f'(x_i)=f'_i\simeq\frac{1}{h}\left(\Delta f_i-\frac{1}{2}\Delta^2 f_i+\frac{1}{3}\Delta^3 f_i-\frac{1}{2}\Delta^4 f_i+\dots\right)$$

معمولاً برای محاسبهٔ تقریبی از f'_i یک یا چندجمله‌ای از سمت راست انتخاب می‌شود.

مثلاً،

$$f'_i \simeq \frac{1}{h}\Delta f_i = \frac{f_{i+1}-f_i}{h} \qquad (۵.۵)$$

و یا

$$f'_i \simeq \frac{1}{h}\left[\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i\right] = \frac{1}{h}\left[f_{i+1}-f_i-\frac{1}{2}\left(f_{i+2}-2f_{i+1}+f_i\right)\right] ,$$

که در نتیجه

$$f'_i \simeq \frac{2f_{i+1}-\frac{1}{2}f_{i+2}-\frac{3}{2}f_i}{h} \qquad (۶.۵)$$

ضمناً، اگر قراردهیم $\theta=\frac{1}{2}$، با توجه به $x=x_i+\theta h$ به دست می‌آوریم $x = x_i + \frac{1}{2}h$ و از (۴.۵) نتیجه می‌شود:

$$f'\left(x_i+\frac{h}{2}\right) \simeq \frac{1}{h}\left(\Delta f_i - \frac{1}{24}\Delta^3 f_i + \frac{1}{48}\Delta^4 f_i + \dots\right)$$

از این رو، اگر تنها جملهٔ اول داخل پرانتز سمت راست را انتخاب کنیم:

$$f'\left(x_i+\frac{h}{2}\right) \simeq \frac{\Delta f_i}{h} = \frac{f_{i+1}-f_i}{h} \qquad (۷.۵)$$

و اگر دو جملهٔ اول را منظور کنیم

$$f'\left(x_i+\frac{h}{2}\right) \simeq \frac{1}{h}\left(\Delta f_i - \frac{1}{24}\Delta^3 f_i\right) \qquad (۸.۵)$$

مثال

با توجه به جدول زیر تقریبی از f'_i، $i=$ ۰،۱،۲،۳ را یک بار با استفاده از فرمول (۵.۵) و بار دیگر با استفاده از (۶.۵) حساب کنید.

x_i	۰/۱	۰/۱۵	۰/۲	۰/۲۵	۰/۳
f_i	۱/۱۰۵۱۷	۱/۱۶۱۸۳	۱/۲۲۱۴۰	۱/۲۸۴۰۳	۱/۳۴۹۸۶

حل: جدول تفاضلات f را با توجه به جدول بالا تشکیل دهیم.

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
۰/۱	۱/۱۰۵۱۷			
		۰/۰۵۶۶۶		
۰/۱۵	۱/۱۶۱۸۳		۰/۰۰۲۹۱	
		۰/۰۵۹۵۷		۰/۰۰۰۱۵
۰/۲	۱/۲۲۱۴۰		۰/۰۰۳۰۶	
		۰/۰۶۲۶۳		۰/۰۰۰۱۴
۰/۲۵	۱/۲۸۴۰۳		۰/۰۰۳۲۰	
		۰/۰۶۵۸۳		
۰/۳	۱/۳۴۹۸۶			

از این‌رو، با توجه به فرمولهای (۵.۵) و (۶.۵) داریم ($h =$ ۰/۰۵):

f_i	$f'_i \simeq \dfrac{\Delta f_i}{h}$	$f'_i \simeq \dfrac{\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i}{h}$
۱/۱۰۵۱۷	۱/۱۳۳۲	۱/۱۰۴
۱/۱۶۱۸۳	۱/۱۹۱۴	۱/۱۶۰۸
۱/۲۲۱۴۰	۱/۲۵۲۶	۱/۲۲۰۶
۱/۲۸۴۰۳	۱/۳۱۶۶	—

اعداد f_i که در این مثال داده شده‌اند مربوط به تابع $f(x)=e^x$ هستند که مشتق آن با خودش برابر است. بنابراین، در جدول اخیر، باید اعداد موجود در هر سه ستون یکسان باشند! که نیستند. البته مشاهده می‌شود اعدادی که از فرمول (۶.۵) به دست آمده‌اند، دقیقتر از اعدادی هستند که از (۵.۵) به دست می‌آیند.

مثال

با توجه به تابع جدولی مثال (۵ـ۱ـ۱) تقریبهایی از $f'(x_i+\frac{h}{۲})$، با به کار بردن (۷.۵) و (۸.۵) حساب کنید.

x_i	۰/۱	۰/۱۵	۰/۲	۰/۲۵	۰/۳
f_i	۱/۱۰۵۱۷	۱/۱۶۱۸۳	۱/۲۲۱۴۰	۱/۲۸۴۰۳	۱/۳۴۹۸۶

حل: با توجه به جدول تفاضلاتی که در مثال (۵ـ۱ـ۱) به دست آوردیم، داریم:

$x_i+\frac{h}{۲}$	$f\left(x_i+\frac{h}{۲}\right)$	$f'\left(x_i+\frac{h}{۲}\right)\simeq\frac{\Delta f_i}{h}$	$f'\left(x_i+\frac{h}{۲}\right)\simeq\frac{\Delta f_i-\frac{۱}{۲۴}\Delta^۳ f_i}{h}$
۰/۱۲۵	۱/۱۳۳۱۵	۱/۱۳۳۲	۱/۳۳۸۰
۰/۱۷۵	۱/۱۹۱۲۵	۱/۱۹۱۴	۱/۱۹۱۲۸
۰/۲۲۵	۱/۲۵۲۳۲	۱/۲۵۲۶	—
۰/۲۷۵	۱/۳۱۶۵۳	۱/۳۱۶۶	—

در جدول بالا دو ستون از سمت چپ فقط برای مقایسهٔ مقادیر به دست آمده، درج شده‌اند. ضمناً، در ستون آخر به دلیل عدم وجود $\Delta^۳ f_۲$ و $\Delta^۳ f_۳$ بقیهٔ فقره‌ها حساب نشده‌اند. نتایج این جدول، با توجه به این‌که $f(x) = f'(x)$ نشان می‌دهند که $\frac{\Delta f_i}{h}$ بسیار نزدیک به $f'(x_i+\frac{h}{۲})$ هستند. به عبارت دیگر، $\frac{\Delta f_i}{h}$ که هم‌تقریبی‌از $f'(x_i)$ و هم‌تقریبی از $f'(x_i+\frac{h}{۲})$ است به $f'(x_i+\frac{h}{۲})$ نزدیکتر است تا به $f'(x_i)$.

خطای مشتقگیری عددی

برای پیدا کردن خطای فرمولهای مختلفی که از (۴.۵) برای $f'(x)$ حاصل می‌شود از بسط تیلر استفاده می‌کنیم. مثلاً،

$$f_{i+1} = f(x_{i+1}) = f(x_i+h)$$

در نتیجه،

$$f_{i+1} = f_i + hf'_i + \frac{h^2}{2} f''_i + \frac{h^3}{6} f_i''' + \dots \qquad (9.5)$$

با توجه به (۵.۵) و با در نظر گرفتن (۹.۵)، داریم

$$\frac{f_{i+1} + f'_i}{h} = f_i + \frac{h}{2} f''_i + \dots \qquad (10.5)$$

از این رو، $\frac{f_{i+1}-f_i}{h}$، به عنوان تقریبی از f'_i، عبارت است از

$$\frac{f_{i+1} - f_i}{h} - f'_i = \frac{h}{2} f_i'' + \frac{h^2}{6} f_i''' + \dots$$

با توجه به این که h کوچک گرفته می‌شود **جملهٔ غالب** در سمت راست $\frac{h}{2} f''_i$ است که اصطلاحاً گفته می‌شود خطا متناسب با h است و یا نوشته می‌شود:

$$\frac{f_{i+1} - f_i}{h} - f'_i = O(h) \qquad (11.5)$$

تعریف (اوی بزرگ) O

اگر $f(h)$, $g(h)$ دو تابع از h باشند، همواره $g(h)\neq 0$ و داشته باشیم

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{g(h)} = C\neq 0$$

در این صورت می‌گوییم $f(h)=O(g(h))$.

در حالت خاصی که $g(h)=h^p$، که در آن p عدد حقیقی مثبتی است، داریم

$$f(h)=O(h^p)$$

هرچه p بزرگتر باشد $f(h)$ سریعتر به صفر میل می‌کند.

تعریف (اوی کوچک) o

اگر f,$g(h)$ دو تابع از h باشند، همواره $g(h)\neq 0$ و داشته باشیم

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{g(h)} = 0$$

در این صورت می‌گوییم $f(h) = o(g(h))$ و اگر $g(h)= h^p$ آن‌گاه

$$f(h) = o(h^p)$$

به عبارت دیگر، $f(h)$ سریعتر از h^p به صفر میل می‌کند.

قضیه

$$f'\left(x_i+\frac{h}{2}\right)-\frac{f_{i+1}-f_i}{h}=O(h^2) \qquad (12.5)$$

مشتقات مراتب بالا

با توجه به آنچه گفته شد می‌توان مشتق مرتبهٔ دوم، سوم و... را نیز برآورد کرد. با توجه به مطالبی که در مورد خطای مشتقگیری عددی گفته شد تنها $f''(x)$ را بررسی می‌کنیم.

می‌دانیم که

$$f''(x)=\frac{d\,f'(x)}{dx}\simeq\frac{d\,p'(x)}{d\theta}\times\frac{d\theta}{dx}$$

با استفاده از (۳.۵) و (۴.۵) داریم:

$$f''(x)\simeq\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 f_i+(\theta-1)\Delta^3 f_i+\left[\frac{\theta^2}{2}-\theta+\frac{5}{12}\right]\Delta^4 f_i+\ldots\right] \qquad (14.5)$$

در اینجا هم می‌توان یک یا چند جمله از عبارت سمت راست را به عنوان تقریبی از $f''(x)$ اختیار کرد. مثلاً، اگر $\theta=0$ آن گاه $x=x_i$ و

$$f''_i=f''(x_i)\simeq\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 f_i-\Delta^3 f_i+\frac{5}{12}\Delta^4 f_i+\ldots\right)$$

که از آن تقریبهای زیر حاصل می‌شود:

$$f''_i\simeq\frac{\Delta^2 f_i}{h^2} \qquad (15.5)$$

و یا

(۱۶.۵)

$$f'_i\simeq\frac{\Delta^2 f_i-\Delta^3 f_i}{h^2}$$

همچنین، اگر $\theta=1$ داریم $x=x_i+h$ یعنی، $x=x_{i+1}$ و در نتیجه

$$f''_{i+1}\simeq\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 f_i-\frac{1}{12}\Delta^4 f_i+\ldots\right) \qquad (17.5)$$

$$f''_{i+1}\simeq\frac{\Delta^2 f_i}{h^2} \qquad (18.5)$$

مثال $f''_{i+1} \simeq \frac{\Delta^{۲} f_i - \frac{۱}{۱۲}\Delta^{۴} f_i}{h^{۲}}$

با استفاده از جدول تفاضلات مثال (۵ـ۱ـ۱) و فرمولهای (۱۵.۵) و (۱۶.۵) تقریبهایی از f''_i حساب کنید.

حل: با توجه به فرمولهای مذکور داریم:

f''_i از (۱۶.۵)	f''_i از (۱۵.۵)	f_i	x_i
۱/۱۰۴	۱/۱۶۴	۱/۱۰۵۱۷	۰/۱
۱/۱۶۸	۱/۲۲۴	۱/۱۶۱۸۳	۰/۱۵
–	۱/۲۸	۱/۲۲۱۴۰	۰/۲

همان‌طور که قبلاً ذکر شد f_i مساوی e^{x_i} است. بنابراین، باید اعداد به دست آمده تقریباً با f_iها مساوی باشند. ملاحظه می‌شود که $\frac{\Delta^{۲} f_i - \Delta^{۳} f_i}{h^{۲}}$ تقریب بهتری برای f''_i است تا $\frac{\Delta^{۲} f_i}{h^{۲}}$. ضمناً، فرمول (۱۷.۵) و نتایج مندرج در ستون سوم جدول بالا نشان می‌دهند که $\frac{\Delta^{۲} f_i}{h^{۲}}$ تقریب بهتری برای f''_{i+1} است تا f''_i.

انتگرالگیری عددی

محاسبۀ انتگرالهای معین به شکل

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

که در آن a و b متناهی و f(x) بر [a,b] معین باشد، به روشهای تحلیلی، یعنی با استفاده از تابع اولیه f(x)، غالباً یا مشکل است یا غیر ممکن. بنابراین، حتی در صورت موجود بودن تابع اولیه برای f(x) نیز از انتگرالگیری عددی استفاده می‌شود. واضح است که انتگرال معین را می‌توان به عنوان مساحت سطح زیر منحنی y=f(x) که محصور به محور x و خطوط x=a و x=b است، تعبیر کرد و با تقسیم بازۀ [a,b] به زیر بازه‌ها و جمع‌کردن مساحتهای مربوط به این زیربازه‌ها آن را محاسبه کرد. با استفاده از این خاصیت و چند جمله‌ای درونیاب می‌توان تقریبهای مناسبی برای $\int_a^b f(x)\,dx$ به دست آورد.

ابتدا روشی را به کار می‌بریم که در آن [a,b] به n قسمت متساوی تقسیم می‌شود، یعنی [a,b] به زیر بازه‌های

$$[x_i , x_{i+1}]=h \quad , \quad i= 0,1,\dots , n-1$$

تقسیم می‌شود که در آن

$$x_{i+1} - x_i=h \ , \ i= 0,1,\dots, n-1$$

و در نتیجه

$$h= \frac{b-a}{n} \quad ,$$

و بعد چندجمله‌ای درونیاب $P_m(x)$ در نقاط x_i ، x_{i+1}،...، x_{i+m}، با استفاده از

$$P(x) = f_i + \theta \Delta f_i + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \Delta^2 f_i + \dots + \frac{\theta(\theta-1)\dots(\theta-k+1)}{k!} \Delta^k f_i$$

حساب می‌شود و بعد

$$\int_{x_i}^{x_{i+m}} P_m(x)\,dx$$

به دست می‌آید. با جمع کردن این مقادیر، تقریبی برای

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x}^{x_n} f(x)\,dx$$

به دست می‌آید. در زیر، حالتهایی راکه $m=1$ و $m=2$ بررسی می‌کنیم.

قاعدهٔ ذوزنقه‌ای

در این قاعده چند جمله‌ای درونیاب تابع f را در نقاط x_i و x_{i+1} به دست می‌آوریم، که یک خط است. معادلهٔ این خط عبارت است از (با توجه به ۳۷.۴)

$$p_1(x) = f_i + \theta \Delta f_i \qquad (۲۰.۵)$$

در نتیجه، با تغییر متغیر $x = x_i + \theta h$،

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P(x)\,dx = \int_0^1 (f_i + \theta \Delta f_i) h\, d\theta$$

$$= h\left[\theta f_i + \frac{\theta^2}{2}\Delta f_i\right]_0^1$$

$$= h\left(f_i + \frac{1}{2}\Delta f_i\right)$$

اگر به جای Δf_i قراردهیم $f_{i+1} - f_i$ به دست می‌آوریم:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P(x)\,dx = \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})$$

بنابراین، قرارمی‌دهیم

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})$$

فرمول قاعدهٔ ذوزنقه‌ای

برای پیداکردن فرمول تقریبی برای $\int_a^b f(x)$ می‌نویسیم

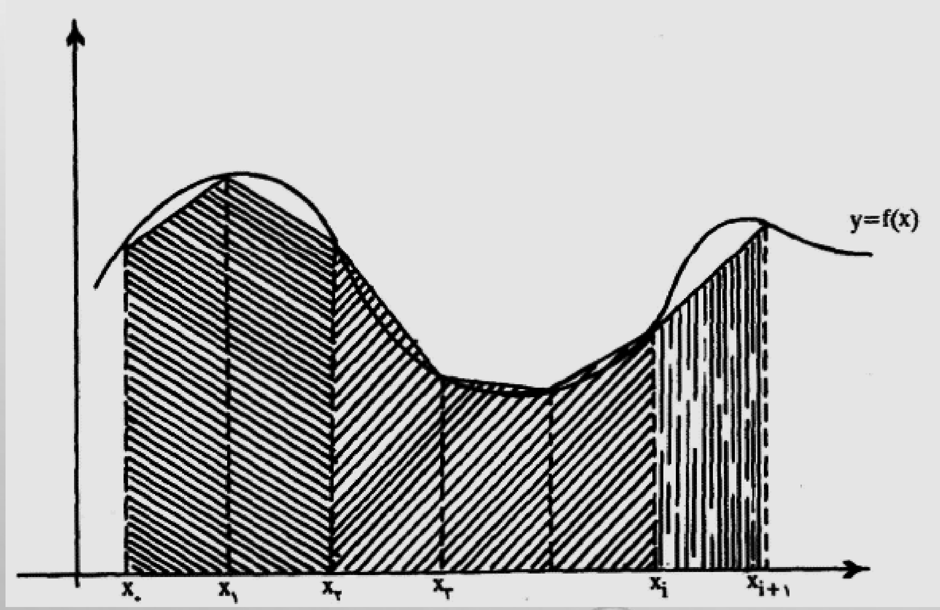
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \dots + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

$$+\dots+\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}(f_0+f_1)+\frac{h}{2}(f_1+f_2)+\dots$$

$$+\frac{h}{2}(f_i+f_{i+1})+\dots+\frac{h}{2}(f_{n-1}+f_n)=\frac{h}{2}(f_0+2f_1+\dots+2f_{n-1}+f_n)$$

عبارت اخیر را، با توجه به حرف اول کلمهٔ لاتین معادل ذوزنقه‌ای، $T(h)$ می‌نامیم. بنابراین،

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq T(h)=\frac{h}{2}\left(f_0+2f_1+\dots+2f_{n-1}+f_n\right)$$ قاعدهٔ ذوزنقه‌ای مرکب



شکل نشان می‌دهد که هرچه h کوچکتر اختیار شود خطا کمتر است

مثال

تقریبهایی از $\int_0^1 x^2 dx$ را، به روش ذوزنقه‌ای، و به ازای $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$,$h=1$ حساب و خطای این مقادیر را نیز تعیین کنید.

حل: با توجه به اینکه $a=0$، $b=1$, $f(x)=x^2$، و بنابر فرمول قاعده ذوزنقه مرکب یعنی

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq T(h)=\frac{h}{2}\left(f_0+2f_1+\dots+2f_{n-1}+f_n\right)$$

داریم

$$T(1)=\frac{1}{2}(f(0)+f(1))=\frac{1}{2}(0+1)=\frac{1}{2}$$

$$T\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{2}\left[f(0)+2f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right]=\frac{1}{4}\left[0+2\times\frac{1}{4}+1\right]=\frac{3}{8}$$

$$T\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\frac{1}{4}}{2}\left[f(0)+2f\left(\frac{1}{4}\right)+2f\left(\frac{1}{2}\right)+2f\left(\frac{3}{4}\right)+f(1)\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left[0+2\times\frac{1}{16}+2\times\frac{1}{4}+2\times\frac{9}{16}+1\right]=\frac{11}{32}.$$

مقدار واقعی چنین حساب می‌شود!

$$\int_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

ملاحظه می‌شود که هرچه h کوچکتر می‌شود $T(h)$ نیز به $\frac{1}{3}$ نزدیکتر می‌شود.
خطای مطلق مقادیر حساب شده عبارت است از

$$T(1)-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$$T\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}=\frac{3}{8}-\frac{1}{3}=\frac{1}{24}$$

$$T\left(\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{3}=\frac{11}{32}-\frac{1}{3}=\frac{1}{96}$$

مثال

۱ـ تقریبی از $\int_{0}^{1} f(x)\,dx$ را با استفاده از جدول مقادیر زیر حساب کنید.

x_i	۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۱
f_i	۱	۱/۲۲۱۴	۱/۴۹۱۸	۱/۸۲۲۱	۲/۲۲۵۵	۲/۷۱۸۳

حل: مشاهده می‌شود که در این مثال خبری از ضابطهٔ تابع f نیست. با توجه به نقاط جدولی می‌توانیم قاعدهٔ ذوزنقه‌ای را با فرض h=۰/۲ به کار بریم.

$$T(۰/۲) = \frac{۰/۲}{۲}(f(۰) + ۲\,(f(۰/۲) + f(۰/۴) + f(۰/۶) + f(۰/۸)) + f(۱))$$

که با توجه به جدول مقادیر، چنین نوشته می‌شود:

$$T(۰/۲) = ۰/۱\,(۱+۲\times۶/۷۶۰۸ + ۲/۷۱۸۳) = ۱/۷۲۳۹۹$$

اعداد جدول بالا مربوط به مقادیر تابع $f(x) = e^x$ هستند، برای این تابع داریم

$$\int_{0}^{1} e^x\,dx = e^x\Big|_{0}^{1} = e-۱= ۱/۷۱۸۲۸ \quad (۵D)$$

ملاحظه می‌شود که خطا برابر است با

۲ـ تقریبی از $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin x\, dx$ را با استفاده از $h=\frac{\pi}{۸}$ حساب کنید و با مقدار واقعی انتگرال مقایسه کنید.

حل:

$$T\left(\frac{\pi}{۸}\right) = \frac{\pi}{۱۶}\left(\sin ۰ + ۲\sin\frac{\pi}{۸} + ۲\sin\frac{\pi}{۴} + ۲\sin\frac{۳\pi}{۸} + \sin\frac{\pi}{۲}\right)$$

$$= \frac{\pi}{۱۶}\left(۰ + ۲(۰/۳۸۲۶۸ + ۰/۷۰۷۱۱ + ۰/۹۲۳۸۸) + ۱\right)$$

$$= \frac{\pi}{۱۶} \times ۵/۰۲۷۳۴.$$

بنابراین،

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin x\, dx \simeq T\left(\frac{\pi}{۸}\right) = ۰/۹۸۷۱۲.$$

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} = ۱$$

مقدار واقعی انتگرال عبارت است از

مقدار واقعی ـ $T(\frac{\pi}{۸}) = ۱ - ۰/۹۸۷۱۲ = ۰/۰۱۲۸۸$

قضیه

خطای قاعدهٔ ذوزنقه‌ای از فرمول زیر به دست می‌آید

$$\int_{x_i}^{x_{j+1}} f(x)\,dx - \frac{h}{۲}(f_i + f_{i+۱}) = -\frac{h^۳}{۱۲} f''(\eta_i)$$

که در آن η_i بین x_i و $x_{i+۱}$ است، به شرط آن که $f''(x)$ پیوسته باشد.

قضیه

با توجه به علامات به کار برده شده در این فصل و پیوسته بودن $f''(x)$ بر $[a,b]$

$$ET(h) = \int_a^b f(x)\,dx - T(h) = -\frac{(b-a)}{۱۲} h^۲ f''(\eta),$$

که $a \le \eta \le b$.

نتیجه

خطای قاعدهٔ ذوزنقه‌ای مرکب متناسب با $h^۲$ است و این قاعده برای توابع چندجمله‌ای حداکثر از درجهٔ اول دقیق است.

نتیجه

اگر $M_۲$ یک کران بالا برای $|f''(x)|$ باشد، یعنی

$$\max_{a\leq x\leq b} |f''(x)| \leq M_۲$$

آن‌گاه

$$|ET(h)| \leq \frac{(b-a)}{۱۲} h^۲ M_۲$$

مثال

تقریبی از $\int_0^1 x \sin x \, dx$، به قاعدهٔ ذوزنقه‌ای، حساب کنید که خطای آن از 10^{-2} کمتر باشد.

حل: ابتدا M_2 را به دست می‌آوریم. برای این منظور مشتق مرتبهٔ دوم

$$f(x) = x \sin x$$

را حساب می‌کنیم.

$$f'(x) = \sin x + x \cos x \quad , \quad f''(x) = 2\cos x - x \sin x$$

بنابراین، با توجه به این‌که $0 \le x \le 1$،

$$\left| f''(x) \right| = \left| 2\cos x - x \sin x \right| \le 2 \left| \cos x \right| + \left| x \right| \left| \sin x \right| \le 2 + 1 = 3$$

پس، $M_2 = 3$ و h را از نامساوی زیر به دست می‌آوریم.

$$\frac{b-a}{12} h^2 M_2 = \frac{h^2}{12} \times 3 = \frac{h^2}{4} \le 10^{-2}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$h \le 0/2$$

از این رو، قرارمی‌دهیم $h = 0/2$ و $T(h)$ را حساب می‌کنیم (اعداد میانی را تا چهار رقم اعشار گرد می‌کنیم).

$$T(0/2) = \frac{0/2}{2} (0 + 2(0/2 \sin 0/2 + 0/4 \sin 0/4 + 0/6 \sin 0/6 + 0/8 \sin 0/8) + \sin 1)$$

$$= 0/1(0 + 2(0/0397 + 0/1557 + 0/3387 + 0/5738) + 0/8414)$$

$$= 0/3058$$

با محاسبهٔ جواب واقعی به طریق زیرخطای $T(h)$ نیز حساب می‌شود.

$$\int_0^1 x \sin x \, dx = (\sin x - x \cos x) \Big|_0^1 = \sin 1 - \cos 1 = 0/84147 - 0/54030$$

$$= 0/30117 (5D)$$

بنابراین،

$$\left| ET(h) \right| = \left| 0/30117 - 0/30578 \right| = 0/00461$$

ملاحظه می‌شود که $\left| ET(h) \right| < 10^{-2}$

پایان