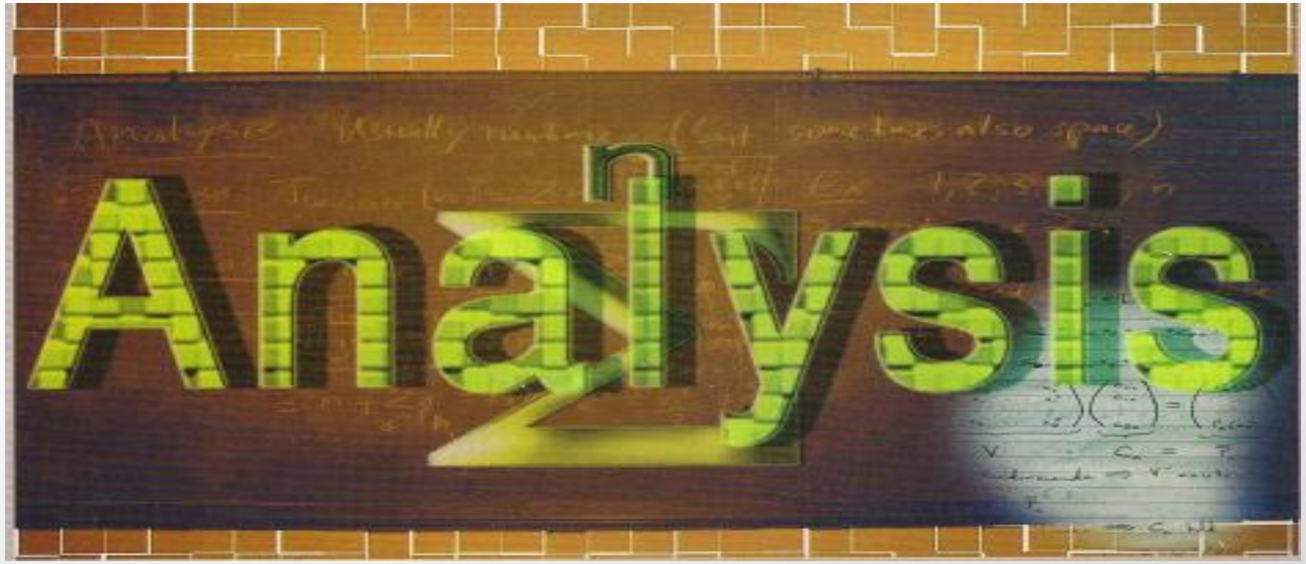
به نام خدا



عنوان جلسه چهارم

درونیابی

بخش

فرمولهای چند جمله ای تفضلات تقسیم شده پیشرو و پسرو

روش کمترین مربعات

دکتر سمیه ایزدی

ریاضی کاربردی.گرایش آنالیز عددی

مدرس دانشگاه آزاد اسلامی

عنوان درس; مبانی آنالیز عددی

جلسه چهارم

کاربرد تفاضلات متناهی

یکی از کاربردهای تفاضلات متناهی تعیین درجهٔ یک چندجمله‌ای مناسب برای تقریب یک تابع جدولی است. در زیر نشان می‌دهیم که اگر تابع f یک چندجمله‌ای درجهٔ n باشد تفاضلات مرتبهٔ nام آن ثابت و تفاضلات مراتب بالاتر آن صفرند. از عکس این مطلب می‌توان برای تعیین یک چندجمله‌ای مناسب برای تقریب زدن با تابع جدولی f استفاده کرد.

مثال

جدول تفاضلات تابع $f(x) = x^۳$ را برای نقاط

$x_i = ۰/۱ \times i \quad , \quad i = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴$

تشکیل دهید و نتیجه را توجیه کنید.

حل:

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^۲ f_i$	$\Delta^۳ f_i$	$\Delta^۴ f_i$
۰	۰				
		۰/۰۰۱			
۰/۱	۰/۰۰۱				
			۰/۰۰۶		
		۰/۰۰۷		۰/۰۰۶	
۰/۲	۰/۰۰۸				
			۰/۰۱۲		
		۰/۰۱۹		۰/۰۰۶	
۰/۳	۰/۰۲۷				
			۰/۰۱۸		
		۰/۰۳۷			
۰/۴	۰/۰۶۴				

قضیه

اگر $f(x)= x^n$ آنگاه $\Delta^n f_i= n!\ h^n$ و اگر $m>n$ آنگاه $\Delta^m f_i= 0$

مثال

جدول تفاضلات مربوط به تابع $f(x)= e^x$ را برای

$$x_i = ۰/۱ + i \times ۰/۰۱ \quad , \quad i = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴$$

تشکیل دهید و درجهٔ چندجمله‌ای مناسب برای تقریب زدن این تابع را به‌دست آورید.

حل: جدول تفاضلات، با منظور کردن اعداد تا ۵ رقم اعشار، چنین است.

x_i	$f(x_i)= e^{x_i}$	تفاضلات اول	تفاضلات دوم	تفاضلات سوم
۰/۱	۱/۱۰۵۱۷			
		۰/۰۱۱۱۱		
۰/۱۱	۱/۱۱۶۲۸		۰/۰۰۰۱۱	
		۰/۰۱۱۲۲		۰
۰/۱۲	۱/۱۲۷۵۰		۰/۰۰۰۱۱	
		۰/۰۱۱۳۳		۰
۰/۱۳	۱/۱۳۸۸۳		۰/۰۰۰۱۱	
		۰/۰۱۱۴۴		
۰/۱۴	۱/۱۵۰۲۷			

نتایج مندرج در جدول نشان می‌دهد که یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم برای این تابع، در بازهٔ [۰/۱ , ۰/۱۴]، مناسب است.

تمرین

جدول تفاضلات مربوط به تابع $f(x)= e^x$ را برای نقاط

$$x_i= ۰/۱ + ۰/۰۵ \times i \quad , \quad i= ۰, ۱, ۲, ۳,..., ۸$$

تشکیل دهید و درجهٔ چندجمله‌ای مناسب برای تقریب زدن با f را به‌دست آورید.

قضیه (فرمول تفاضلات پیشرو نیوتن برای چندجمله‌ای درونیاب):

اگر نقاط x_i متساوی‌الفاصله باشند و $x = x_0 + \theta h$ در این صورت

$$P(x) = f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \dots + \frac{\theta(\theta-1)\dots(\theta-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

مثال

فرمول چندجمله‌ای درونیاب مربوط به تابع جدولی زیر را با استفاده از تفاضلات پیشرو به‌دست اورید.

x_i	۱	۲	۳	۴
f_i	۲	۵	۱۰	۱۷

حل: ابتدا جدول تفاضلات پیشرو را تشکیل می‌دهیم. جدول زیر نشان می‌دهد، گرچه چهار نقطه داریم، چون $\Delta^3 f_0$ برابر صفر است چندجمله‌ای درونیاب از درجهٔ دو است.

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
۱	۲			
		۳		
۲	۵		۲	
		۵		۰
۳	۱۰		۲	
		۷		
۴	۱۷			

چندجمله‌ای درونیاب، بر حسب θ، عبارت است از:

$$P(x) = f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \Delta^2 f_0$$

با توجه به این‌که

$h = 1 \quad , \quad x_0 = 1$

داریم

$x = 1 + \theta$

قرار دهیم $\theta = x - 1$ چندجمله‌ای درونیاب بر حسب x به‌دست می‌آید.

$$P(x) = (x-1)^2 + 2(x-1) + 2 = x^2 + 1$$

مثال

جدول زیر مربوط به $f(x)=\sin x$ برای $x=0^\circ, 10^\circ, \ldots, 50^\circ$ است. مطلوب است برآورد $\sin 5^\circ$ با استفاده از چندجمله‌ای درونیاب.

x_i	۰°	۱۰°	۲۰°	۳۰°	۴۰°	۵۰°
$\sin x_i$	۰	۰/۱۷۳۶	۰/۳۴۲۰	۰/۵	۰/۶۴۲۸	۰/۷۶۶۰

حل: جدول تفاضلات مربوط به تابع جدولی f چنین است:

x_i	$\sin x_i$	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$	$\Delta^5 f_i$
۰°	۰					
		۰/۱۷۳۶				
۱۰°	۰/۱۷۳۶		-۰/۰۰۵۲			
		۰/۱۶۸۴		-۰/۰۰۵۲		
۲۰°	۰/۳۴۲۰		-۰/۰۱۰۴		۰/۰۰۰۴	
		۰/۱۵۸۰		-۰/۰۰۴۸		۰
۳۰°	۰/۵		-۰/۰۱۵۲		۰/۰۰۰۴	
		۰/۱۴۲۸		-۰/۰۰۴۴		
۴۰°	۰/۶۴۲۸		-۰/۰۱۹۶			
		۰/۱۲۳۲				
۵۰°	۰/۷۶۶۰					

چون $x=5^\circ$ می‌توان از $x=0^\circ$ یا $x_1=10^\circ$ استفاده کرد.

ما قرارمی‌دهیم

$$x_0=0^\circ$$

در نتیجه

$$\theta=\frac{x-x_0}{h}=\frac{5-0}{10}=\frac{1}{2}$$

و داریم

$$\sin 5^\circ \simeq 0+\frac{1}{2}\times 0{,}1736+\frac{\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}\times(-0{,}0052)$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)}{6}\times(-0{,}0052)$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{5}{2}\right)}{24}\times(0{,}0004)=0{,}0871$$

مقدار واقعی $\sin 5^\circ$ برابر ۰/۰۸۷۲ است (تا چهار رقم اعشار).

فرمول چندجمله‌ای درونیاب برحسب تفاضلات پسرو

برای تخمین مقدار $f(x)$، وقتی x نزدیک به انتهای جدول تفاضلات است، لازم است که از تفاضلات پسرو، که برحسب مقادیر تابع در نقاط انتهایی جدول بیان می‌شوند، استفاده کنیم.

قضیه

چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ عبارت است از:

$$P(x) = f_n + \theta \nabla f_n + \frac{\theta(\theta+1)}{2!}\nabla^2 f_n + \ldots + \frac{\theta(\theta+1)\ldots(\theta+n-1)}{n!}\nabla^n f_n$$

مثال

با استفاده از جدول تفاضلات مربوط به تابع جدولی مثال قبل تخمینی از $\sin 45^\circ$ حساب کنید.

حل: قرار می‌دهیم $x_4 = x_i = 40^\circ$ در نتیجه

$$\theta = \frac{x - x_i}{h} = \frac{45-40}{10} = \frac{1}{2}$$

و با قراردادن $i=4$ در فرمول (۴۰.۴) و کمک گرفتن از اعدادی که در بالای خط مورب کشیده شده در جدول مثال ۴ـ۸ـ۱۱ قراردارند، داریم:

$$\sin 45^\circ \simeq 0{,}6428 + \frac{1}{2}\times(0{,}1428) + \frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}}{2}\times(-0{,}0152)$$
$$+\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}}{6}\times(-0{,}0048) + \frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{7}{2}}{24}\times(0{,}0004)$$
$$= 0{,}7071$$

حل: جدول تفاضلات مربوط به تابع جدولی f چنین است:

x_i	$\sin x_i$	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$	$\Delta^5 f_i$
۰°	۰					
		۰/۱۷۳۶				
۱۰°	۰/۱۷۳۶		-۰/۰۰۵۲			
		۰/۱۶۸۴		-۰/۰۰۵۲		
۲۰°	۰/۳۴۲۰		-۰/۰۱۰۴		۰/۰۰۰۴	
		۰/۱۵۸۰		-۰/۰۰۴۸		۰
۳۰°	۰/۵		-۰/۰۱۵۲		۰/۰۰۰۴	
		۰/۱۴۲۸		-۰/۰۰۴۴		
۴۰°	۰/۶۴۲۸		-۰/۰۱۹۶			
		۰/۱۲۳۲				
۵۰°	۰/۷۶۶۰					

تبدیل درونیابی معکوس به درونیابی مستقیم

اگر

$$y=f(x)$$

و f تابع معکوس داشته باشد داریم

$$x=f^{-1}(y)$$

لذا، به جای جدول

x_i	x_0	x_1	...	x_n
f_i	f_0	f_1	...	f_n

می‌توان جدول زیر را در نظر گرفت

f_i	f_0	f_1	f_2	...	f_n
x_i	x_0	x_1	x_2	...	x_n

با توجه به این که معمولاً فاصلهٔ f_iها یکسان نیست و انتخاب آنها نیز در اختیار ما نیست نمی‌توان از فرمولهای پیشرو و پسرو نیوتن استفاده کرد. از این‌رو، تنها روش مؤثر که همواره قابل استفاده است جدول تفاضلات تقسیم شده است که در آن نقش x_iها و f_iها عوض شده است.

مثال

جدول زیر در مورد تابع $f(x)=\sin x$ در دست است xی را تعیین کنید که به ازای آن $f(x)=۰/۲$.

x_i	۰°	۱۰°	۲۰°	۳۰°	۴۰°	۵۰°
f_i	۰	۰/۱۷۳۶	۰/۳۴۲۰	۰/۵	۰/۶۴۲۸	۰/۷۶۶۰

حل: جدول تفاضلات تقسیم شدهٔ زیر را تشکیل می‌دهیم، توجه کنید که $f(x)$ها طوری قرارگرفته‌اند که $|f(x) - ۰/۲|$ صعودی باشد، این عمل برای کم کردن خطای گرد کردن لازم است و باید همیشه صورت گیرد.

تفاضلات تقسیم شدهٔ:

f_i	x_i	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم
۰/۱۷۳۶	۱۰					
		۵۹/۳۸				
۰/۳۴۲۰	۲۰		۵/۱۸			
		۵۸/۴۸		۱۳/۶۰		
۰	۰		۹/۶۲		۱۳/۳۸	
		۶۰/۰۰		۱۹/۸۸		۳۴/۸۶
۰/۵	۳۰		۱۵/۶۰		۳۴/۰۳	
		۷۰/۰۳		۳۴/۳۱		
۰/۶۴۲۸	۴۰		۴۱/۸۸			
		۸۱/۱۷				
۰/۷۶۶	۵۰					

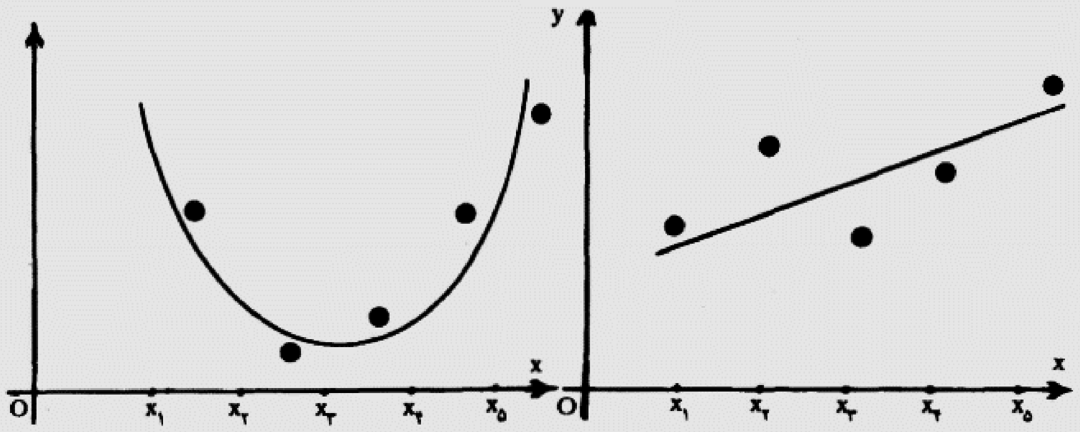
داریم

$$
\begin{aligned}
x \simeq\ & ۱۰ + (۰/۲-۰/۱۷۳۶)\times ۵۹/۳۸ + (۰/۲-۰/۱۷۳۶)(۰/۲-۰/۳۴۲۰)\times ۵/۱۸ \\
& + (۰/۲-۰/۱۷۳۶)(۰/۲-۰/۳۴۲۰)(۰/۲-۰)\times ۱۳/۶۰ \\
& + (۰/۲-۰/۱۷۳۶)(۰/۲-۰/۳۴۲۰)(۰/۲-۰)(۰/۲-۰/۵)\times ۱۳/۳۸ \\
& + (۰/۲-۰/۱۷۳۶)(۰/۲-۰/۳۴۲۰)(۰/۲-۰)(۰/۲-۰/۵)(۰/۲-۰/۶۴۲۸)\times ۳۴/۸۶ \\
=\ & ۱۰ + ۱/۵۶۷۶ - ۰/۰۱۹۴ - ۰/۰۱۰۲ + ۰/۰۰۳۰ - ۰/۰۰۳۵ \\
=\ & ۱۱/۵۳۷۵
\end{aligned}
$$

بنابراین، جواب تقریباً ۱۱/۵۳۷۵ درجه است.

برازش منحنی

واقعیت این است که مقادیر f_i در یک تابع جدولی تقریبی هستند زیرا از طریق اندازه‌گیری یا آزمایش به دست می‌آیند. بنابراین، اصرار در این که چندجمله‌ای درونیاب در نقاط x_i مقدار f_i را داشته باشد بیهوده است. در عمل اکثراً نقاط جدولی را به وسیلهٔ یک منحنی چنان برازش می‌کنند که خطا به نوعی حداقل باشد.



الف ـ خط کمترین مربعات

ب ـ سهمی کمترین مربعات

تعریف

فرض کنید نقاط (x_i,y_i) ، $i=1,2,\ldots,n$ ، مفروض باشند. و چند جمله‌ای $P(x)$ چنان باشد که

$$S=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-P(x_i)\right)^2$$

کمترین مقدار را داشته باشد. در این صورت $P(x)$ را *چندجمله‌ای تقریب کمترین مربعات*[2] برای داده‌های (x_i,y_i) ، $i=1,\ldots,n$ ، نامند

در حالت کلی برای به دست آوردن $P(x)$ فرض کنید که

$$P(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_0\,,\quad (a_m\neq 0)$$

برای به دست آوردن ضرایب $P(x)$ قرارمی‌دهیم:

$$\frac{\partial S}{\partial a_j}=0\,,\ j=0,1,\ldots,m.$$

معادلات فوق تشکیل یک دستگاه شامل $m+1$ معادله برای $m+1$ مجهول a_0 ، a_1 ، … ، a_m می‌دهد.

خط کمترین مربعات

یکی از متداولترین روشهای برازش منحنی انتخاب خط کمترین مربعات برای برازش n نقطهٔ مفروض (x_1,y_1)، ... ،(x_n,y_n) است. در این روش

$$P(x) = ax+b$$

و باید a و b را چنان تعیین کرد که

$$S=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-(ax_i+b)\right]^2$$

مینیمم باشد. از این‌رو، قرارمی‌دهیم:

$$\frac{\partial S}{\partial a}=0 \quad , \quad \frac{\partial S}{\partial b}=0$$

اما داریم:

$$\begin{cases}\frac{\partial S}{\partial a}=\sum_{i=1}^{n}-2x_i\left[y_i-(ax_i+b)\right]=0\\ \frac{\partial S}{\partial b}=\sum_{i=1}^{n}-2\left[y_i-(ax_i+b)\right]=0\end{cases}$$

پس از ساده کردن، معادلات فوق دستگاه زیر را نتیجه می‌دهند

$$\begin{cases}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)a+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)b=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\\ \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)a+nb=\sum_{i=1}^{n}y_i\end{cases}$$

از دستگاه بالا مقادیر a و b به دست می‌آیند که توسط آنها خط کمترین مربعات y=ax+b مشخص می‌شود.

مثال

خط کمترین مربعات مربوط به تابع جدولی زیر را تعیین کنید

x_i	−۲	−۱	۰	۱	۲
f_i	۰	۱	۲	۲	۳

حل: در این مثال داریم:

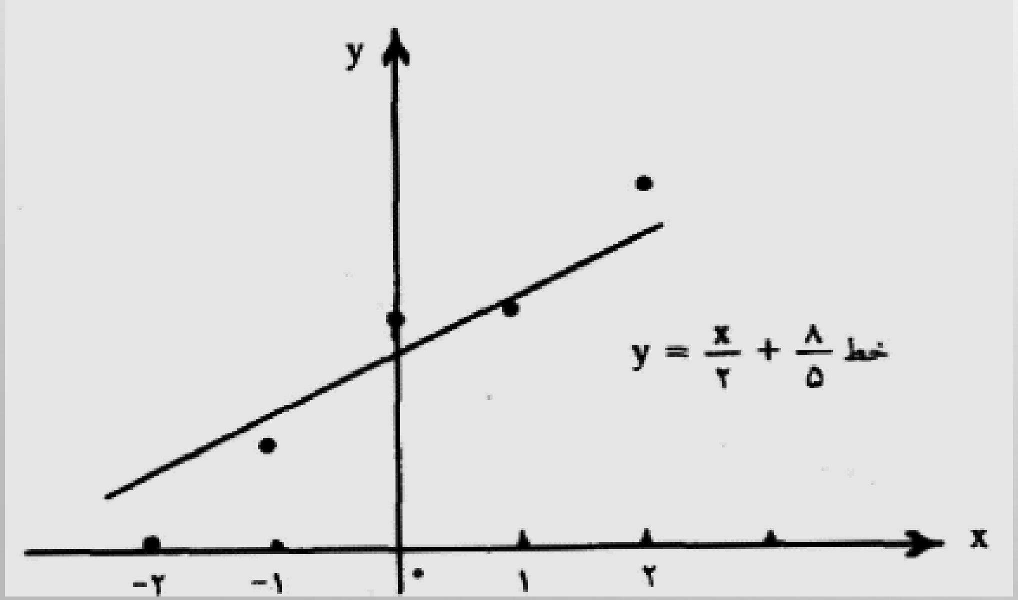
$$n=۵,\quad \sum_{i=۱}^{۵} x_i = ۰,\quad \sum_{i=۱}^{۵} x_i^{۲} = ۱۰,\quad \sum_{i=۱}^{۵} x_i y_i = ۵,\quad \sum_{i=۱}^{۵} y_i = ۸$$

بنابراین،

$$\begin{cases} ۱۰a = ۵ \\ ۵b = ۸ \end{cases}$$

که از آن نتیجه می‌شود $a=\frac{۱}{۲}$ و $b=\frac{۸}{۵}$.

خط کمترین مربعات و نقاط جدول بالا، در شکل زیر نشان داده شده است.



تمرین

ـ خط کمترین مربعات مربوط به تابع جدولی زیر را تعیین کنید.

x_i	−۳	−۲	+۱	۲	۳
y_i	۱	۳	۰	۲	۵

ـ خط کمترین مربعات مربوط به تابع جدولی زیر را تعیین کنید و مقدار مینیمم S را به‌دست آورید.

x_i	−۱	۰	۱	۲	۳
y_i	−۰/۹	۰/۳	۱/۶	۲/۸	۴

ـ چندجمله‌ای کمترین مربعات مربوط به شکل $P(x) = ax^2+b$ را برای جدول داده‌های زیر به دست آورید.

x_i	−۲	−۱	۰	۱	−۲
y_i	۵/۵	۲/۵	۲	۲/۵	۵/۵

پایان جلسه