استفاده از نقشه ها ی مفهومی در فصل های کتاب ریاضی نهم

یکی از ابزار مهم در یادگیری استفاده از نقشه ی مفهومی است .

همیشه وجود نظم در هنگام آموزش باعث می شود تا یادگیری به سادگی انجام گیرد .

نقشه ی مفهومی به شما کمک می کند تا یک نظم منطقی بین مباحث هر فصل را پیدا کنید .

این کار باعث می شود تا :

۱– هنگام تدریس معلم ، شما بخوبی متوجه ارتباط موضو ع ها با یکدیگر باشید .

۲– مانع فراموشی شود . وقتی می خواهید موضوعی را به یاد آورید با دانستن ارتباط موضوع در ذهن تان یکراست به سراغ موضوع می روید .

۳– قدرت درک شما از موضوع بیشتر شود .

در این جزوه ی کمک آموزشی با استفاده از نقشه ی مفهومی ارتباط تمام مفاهیم هر فصل کتاب ریاضی نهم نشان داده شده است .

هر فصل شامل قسمت های زیر می باشد :

- **نقشه ی مفهومی**
- **نکات مهم ، رابطه ها و فرمول ها**
- **آزمون**

موفق باشید – محمود رضا میرزایی

فصل ۱ :

- مجموعه ها
  - برابری مجموعه ها و نمایش آنها
    - مفهوم برابری مجموعه ها و رابطه ی آن با زیر مجموعه
    - مجموعه های عددی و نمایش مجموعه ها
  - معرفی مجموعه ها
    - مفهوم عضویت و مجموعه ی تهی
    - مفهوم زیر مجموعه و نمودار ون
  - اعمال روی مجموعه ها
    - اعمال اجتماع اشتراک و تفاضل مجموعه ها
    - نمایش تعداد اعضای یک مجموعه
  - مجموعه ها و احتمال
    - یادآوری احتمال
    - کاربرد نمادهای مجموعه ها در حل مسائل احتمال

$1 \in A$ می خوانیم یک عضو A است .

$A \subseteq B$ می خوانیم B زیر مجموعه ی A است .

$A \cup B$ می خوانیم A اجتماع B

$A \cap B$ می خوانیم A اشتراک B

$A - B$ می خوانیم A منهای B

$n(A) = 3$ یعنی تعداد عضوهای A سه است

با علامت های ریاضی فصل آشنا شوید

مجموعه : یک مفهوم اولیه است و تعریف نمی شود

در ریاضی برای بیان دسته ای از اشیا **مشخص** و **متمایز** استفاده می شود

مجموعه های متناهی : اعضای این مجموعه ها قابل شمارش است .

زیر مجموعه:اگرتمام عضوهای A در B باشد می گوییم A زیر مجموعه ی B است . $A \subseteq B$

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$A \subseteq B$ و $B \subseteq A \Rightarrow A = B$

اجتماع:اگر A و B دو مجموعه باشند آنگاه :

$$A \cup B = \{x | x\epsilon A \text{ یا } x\epsilon B\}$$

اشتراک:اگر A و B دو مجموعه باشند آنگاه :

$$A \cap B = \{x | x\epsilon A \text{ و } x\epsilon B\}$$

دو مجموعه جدا از هم :اگر A و B دو مجموعه و $A \cap B = \emptyset$ باشد ، آنگاه این دو مجموعه جدا از هم هستند.

تفاضل دو مجموعه:اگر A و B دو مجموعه باشند آنگاه

$$A - B = \{x | x\epsilon A \text{ و } x \notin B\}$$

اگرمجموعه ی **S** شامل همه ی حالت های ممکن در یک احتمال و مجموعه ی **A** شامل همه ی حالت های مطلوب باشد

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

مجموعه های نا متناهی : اعضای این مجموعه ها قابل شمارش نیست .

مجموعه ی اعداد طبیعی

$\mathbb{N} = \{۱.۲.۳. \ldots\}$

مجموعه ی **اعداد اول** ومجموعه ی **اعداد مرکب** دو زیر مجموعه ی مهم مجموعه اعداد طبیعی هستند .

مجموعه ی اعداد صحیح

$\mathbb{Z} = \{۰. \mp ۱. \mp ۲. \mp ۳. \ldots\}$

مجموعه ی اعداد گویا

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \middle| a.b\epsilon\mathbb{Z} . b \neq ۰\right\}$

مجموعه ی اعدادگنگ

هر عددی که نتوان آنرا به صورت عددی اعشاری حقیقی و یا متناوب بنویسیم

$\mathbb{Q}'$ مثل $\sqrt{۲}$

مجموعه ی اعداد حقیقی

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

$\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$

باسمه تعالی

آزمون فصل ۱

۱- کامل کنید. ۱/۵ نمره

الف- با جابجایی عضوهای یک مجموعه ،مجموعه ی جدیدی ساخته(می شودO/نمی شودO).

ب- مجموعه ی عددهای زوج اول دارای................... زیر مجموعه است. ج- مجموعه ی $\left\{\{\{\emptyset\}\}\text{و}\left\{\emptyset\text{و}\{\emptyset\}\right\}\right\}$ **دارای .... عضو است. د- مجموعه ی عددهای طبیعی کوچکتر از صفر یک مجموعه ی .... است.**

ه- مجموعه ی Z زیر مجموعه ی .... است. و- اگر A= {a, c,b,a} **باشد آنگاه** ....= n (A)

۲- عبارات $(A-B$ **و** $A\cup B$ **و** $A\cap B$ **و** $B-A)$ **را در محل مناسب بنویسید. (یک عبارت اضافی است) ۱/۵ نمره**

$\{x | x\epsilon A \text{ یا } x\epsilon B\} = \cdots$ $\{x | x \notin A \text{ و } x\epsilon B\} = \cdots$ $\{x | x\epsilon A \text{ و } x\epsilon B\} = \cdots$

۳-کدامیک از عبارت های زیر یک مجموعه را مشخص می کند ؟ اعضای آن را بنویسید . ۱نمره

الف- چهار حرف از الفبای فارسی ب- اعداد صحیح یک رقمی و کوچکتر از صفر

۴- جاهای خالی را طوری پر کنید که دو مجموعه با هم برابر باشند. ۱ نمره

$\{\text{...........}، \frac{۳}{۴}، -۲ ، -\sqrt{۱۶}، ۰/۸\} = \{۰/۷۵ \text{ و } ۰/۲-۱ \text{ و ....}، \frac{۱۲}{-۶}، \frac{\sqrt{۴}}{-۲}\}$

۵-الف- مجموعه {۵،۴،۳،۲} چند زیر مجموعه دارد؟ (با استفاده از رابطه تعداد زیر مجموعه را بنویسید)

ب- تمام زیر مجموعه های A= {{۲}. ∅. ۲} **را بنویسید. ۲نمره**

۶- مجموعه های زیر را بصورت ریاضی بنویسید. ۲ نمره

B={ -۳ ، -۲ ، -۱ } =

C ={ ۱ ،۴ ،۹ ، ۱۶ ، ...} =

۷- عضوهای مجموعه های زیر را بنویسید. ۲ نمره

D= $\{x \mid x \in N ، -۲ < x \leq ۵\}$ =

$G = \left\{\frac{۱}{K+۲} \middle| k\epsilon Z . -۶ \leq k \leq -۱\right\} =$

۸- مجموعه های روبرو را با نماد ریاضی نمایش دهید. ۲ نمره الف- مجموعه ی اعداد فرد طبیعی ب- مجموعه ی اعداد گویا

۹- - تمام زیر مجموعه های دو عضوی، مجموعه ی $A=\{x|x=۰.۲.۳.-۱ .-۳\}$ **را بنویسید. ۲ نمره**

۱۰- اگر A={۱،۲،۳،۴،۵،۶} **و** B={۱ ، ۳ ،۵} **و** C={۲ ، ۴ ، ۶ ، ۸} **باشد . هریک از مجموعه های زیر را با عضوهایشان بنویسید. ۲ نمره**

$(A \cup B) - C =$		$(A \cap B) \cup (C \cap A) =$

$A \cap B \cap C =$		C −A=

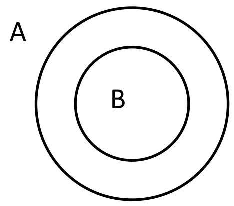
۱۱- جدول زیر را با گذاشتن اعداد و علامت های مناسب کامل کنید. ۱ نمره

مجموعه ی اعداد زوج و اول	A ۲۸-	$B=\{۳K \mid K \in Z\}$	C .... {۴و۴-}	....
{............................}	A={۳-و۲-و۱-و.....}	B={.......................}	C =**مجموعه ی اعدادزوج**	**زیرمجموعه ی همه ی مجموعه ها**

۱۲- درستی و یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید. ۱ نمره

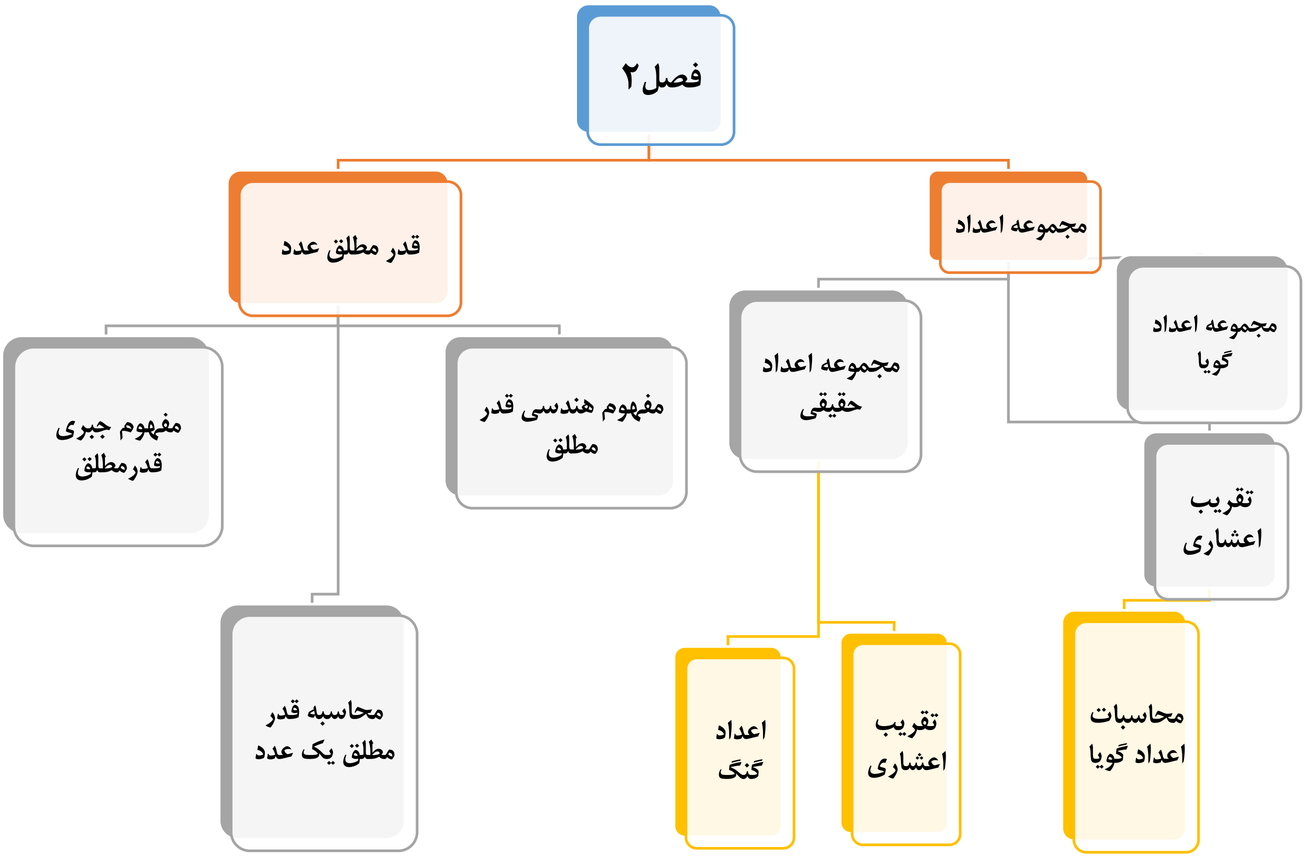
N ⊈ Z		N ⊆ Q		$N \cap Z = \emptyset$		$(Z \cup N) \subseteq Q$

۱۳- با توجه به رابطه ی گفته شده نمودار زیر را سایه بزنید. ۱ نمره



فصل ۲

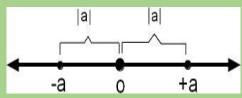
عددهای حقیقی



معرفی مجموعه های مهم در اعداد فصل ۲ کتاب ریاضی نهم

مجموعه	زیر مجموعه های مهم	توضیحات لازم
مجموعه ی اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$) $\mathbb{N} = \{۱.۲.۳. ...\}$ ✓ حاصل جمع هر دو عدد طبیعی ،عددی طبیعی است. (این مجموعه نسبت به عمل + بسته است .) ✓ حاصل ضرب هردو عدد طبیعی ، عددی طبیعی است. (این مجموعه نسبت به عمل ضرب بسته است .)	**مجموعه ی اعداد اول**	این مجموعه بی شمار عضو دارد (نامتناهی است .)
	مجموعه ی مرکب	این مجموعه بی شمار عضو دارد (نامتناهی است .)
	مجموعه ی اعداد زوج طبیعی	$E = \{۲\,x \mid x \epsilon \mathbb{N}\} = \{۲.۴.۶. ...\}$
	مجموعه ی اعداد فرد طبیعی	$O = \{۲\,x - ۱ \mid x \epsilon \mathbb{N}\} = \{۱.۳.۵. ...\}$
مجموعه ی اعداد صحیح ($\mathbb{Z}$) $\mathbb{Z} = \{۰. \mp ۱. \mp ۲. \mp ۳. ...\}$ ✓ این مجموعه نسبت به عمل ضرب و جمع و تفریق بسته است .	مجموعه ی اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$)	$\mathbb{N} = \{۱.۲.۳. ...\}$
	مجموعه ی اعداد حسابی (W)	$W = \{\,x - ۱ \mid x \epsilon \mathbb{N}\} = \{۰.۱.۲.۳. ...\}$
	مجموعه ی اعداد زوج صحیح	$E = \{۲\,x \mid x \epsilon\ \mathbb{Z}\} = \{۰. \mp ۲. \mp ۴. ...\}$
	مجموعه ی اعداد فرد صحیح	$O = \{۲\,x - ۱ \mid x \epsilon \mathbb{Z}\} = \{\mp ۱. \mp ۳. \mp ۵. ...\}$
مجموعه ی اعداد گویا ($\mathbb{Q}$) $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \middle\vert a.b \epsilon \mathbb{Z}\,.\, b \neq ۰\right\}$	مجموعه ی اعداد صحیح ($\mathbb{Z}$)	$\mathbb{Z} = \{۰. \mp ۱. \mp ۲. \mp ۳. ...\}$
	مجموعه ی تمام اعداد اعشاری علامت دار	این اعداد به سه دسته ی ۱- مختوم ۲- متناوب ساده ۳- متناوب مرکب تقسیم می شوند
	مجموعه ی تمام اعداد کسری علامت دار	۱- کسرهایی که عدد اعشاری مختوم می سازند (در مخرج این کسرها پس از ساده کردن و تجزیه فقط عامل ۲ یا ۵ یا هردو دیده می شود) ۲- کسرهایی که عدد اعشاری متناوب ساده می سازند (در مخرج این کسرها پس از ساده کردن و تجزیه عامل دیگری بجز ۲ یا ۵ دیده می شود) ۳- کسرهایی که عدد اعشاری متناوب مرکب می سازند (در مخرج پس از ساده کردن علاوه بر ۲ و ۵ عامل اول دیگری هم وجود دارد .)
مجموعه ی اعداد گنگ ($\mathbb{Q}'$)		هر عددی که رقم های اعشار بی شماری داشته باشد و تناوب در میان اعداد اعشاری نباشد ، عددی گنگ است. ($\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$)
مجموعه ی اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$	$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ $\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$	مجموعه ی اعداد حقیقی را مجموعه ی مرجع می گویند.

تعریف قدر مطلق : فاصله ی نقطه ی نمایش a از مبدا ، را قدر مطلق a می نامیم . $|a|$



$a \geq 0 \rightarrow |a| = a$

$a < 0 \rightarrow |a| = -a$

$|a| \times |b| = |ab|$

$|a| \div |b| = \left|\frac{a}{b}\right|$

$|a^n| = |a|^n$

$|a + b| \leq |a| + |b|$

$|a - b| \geq \big||a| - |b|\big|$

$\sqrt{a^2} = |a|$

معادلات و نامعادلات قدر مطلق

$|x| = a \Rightarrow x = \mp a$

$|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$

$|x| \geq a \Rightarrow x \geq a$ یا $x \leq -a$

روابط منطقی بین اعداد

$a < 0 , b > 0 \Rightarrow ab < 0$

$a < 0 , b < 0 \Rightarrow ab > 0 , a + b < 0$

$a > 0 , b > 0 \Rightarrow ab > 0 , a + b > 0$

$a - b > 0 \Rightarrow |a - b| = a - b$

$a + b > 0 \Rightarrow |a + b| = a + b$

$a - b < 0 \Rightarrow |a - b| = -(a - b) = b - a$

$a + b < 0 \Rightarrow |a + b| = -(a + b) = b - a$

آزمون ریاضی فصل ۲

۱– گزینه ی مناسب را با علامت × مشخص کنید . هر مورد ۰/۵

A : کدام گزینه صحیح است ؟

الف) $\mathbb{Q}\cup\acute{\mathbb{Q}}'=\emptyset$ O　ب) $\mathbb{Q}-\mathbb{Q}'\acute{=}\emptyset$ O　ج) $\mathbb{Q}\cap\acute{\mathbb{Q}}'=\emptyset$ O　د) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}=\mathbb{Q}$ O

B : کدام گزینه صحیح است ؟

الف) $\frac{۳}{۴}=۰/\overline{۷۵}$ O　ب) $\frac{۷}{۶}=۱/۱۶$ O　ج) $\frac{۳}{۸}=۰/۳۷\overline{۵}$ O　د) $\frac{۳}{۱۱}=۰/\overline{۲۷}$ O

C : کدامیک از کسرهای زیر از بقیه کوچکتر است ؟

الف- $\frac{۷}{۸}$ O　ب- $\frac{۲}{۳}$ O　ج- $\frac{۵}{۶}$ O　د- $\frac{۶}{۷}$ O

D : حاصل عبارت $\frac{۴}{۵}-\frac{۳}{۴}\times\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۲}$ کدام است ؟

الف- $\frac{-۱}{۵}$ O　ب- $\frac{۱}{۵}$ O　ج- $\frac{-۷}{۴۰}$ O　د- $\frac{۷}{۴۰}$ O

۲- پاسخ کوتاه دهید . (نیازی به ارائه ی راه حل نیست .) هر مورد ۰/۵ نمره

الف- کسری بنویسید که درست وسط $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۲}{۵}$ باشد ؟

ب- دو عدد گنگ بین ۴ و۵ بنویسید ؟

ج- نمایش اعشاری $\frac{۱}{۱۲}$ را بنویسید ؟

د- حاصل عبارت $\left|\sqrt{۲}-۲\right|$ با برداشتن قدر مطلق چیست ؟

۳- عبارات را کامل کنید . هر مورد ۰/۲۵

الف- حاصل جمع یک عدد صحیح با یک عدد گنگ همیشه عددی .... است .

ب- عدد π عددی گنگ است زیرا رقم های اعشارش .... بوده و .... ندارد .

ج- کسر $\frac{۸}{۱۴}$ مولد یک عدد اعشاری .... (متناوب ساده / متناوب مرکب)است .

۴– در جایی که لازم است ،پاسخ را با راه حل کامل بنویسید .

۴/۱ – عبارت های روبرو را با هم مقایسه کنید　$|-۳|^{۲} \ldots |-۳^{۲}|$ و $|-۸|+|+۵| \ldots |-۸+۵|$　۱ نمره

۴/۲ – حاصل عبارت مقابل را به دست آورید . **۱ نمره**

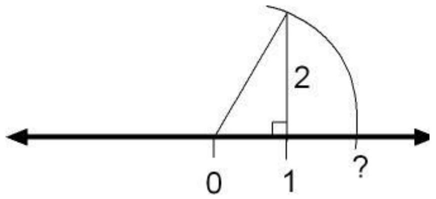
$$\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۲-\frac{۳}{۵}}}=$$

۴/۳ – مجموعه ی $A=\{x|-۳\le x\le ۵/۵\}$ را روی محور نشان دهید و سپس درستی و نادرستی هر عبارت را بنویسید . **۲نمره** $-\sqrt{۲}\ \epsilon A$ و $\sqrt{۱۷}\epsilon A$ $۵/\bar{۵}\ \epsilon A$ و $۰\ \epsilon A$

۴/۴ – عبارات زیر را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید . **۲ نمره**

$|\sqrt{۳}-\sqrt{۵}|=$ $\left|\frac{۳}{۴}-\frac{۲}{۳}\right|=$

۴/۵- علامت ؟ چه عددی را نشان می دهد ؟ **۱ نمره**



۴/۶- اگر $a=\frac{۱}{۲}$ و $b=\sqrt{۲}$ و $c=-۳$ باشد حاصل عبارت $|a+b+c|$ به دست آورید . **۲ نمره**

۴/۷= حاصل عبارت مقابل را به دست آورید . **۱ نمره** $\sqrt{(۱-\sqrt{۱۰})^{۲}}\ =$

۴/۸- در جدول زیر جاهای خالی را طوری پر کنید تا روابط منطقی بوجود آید . (راهنمایی : از علامت های < و> از صفر استفاده کنید .)

۱نمره

$a<۰$ و $b<۰$	$a<۰$ و $b>۰$
$\frac{a}{a+b}\ldots$	$a^{۲}+b^{۲}\ \ldots$

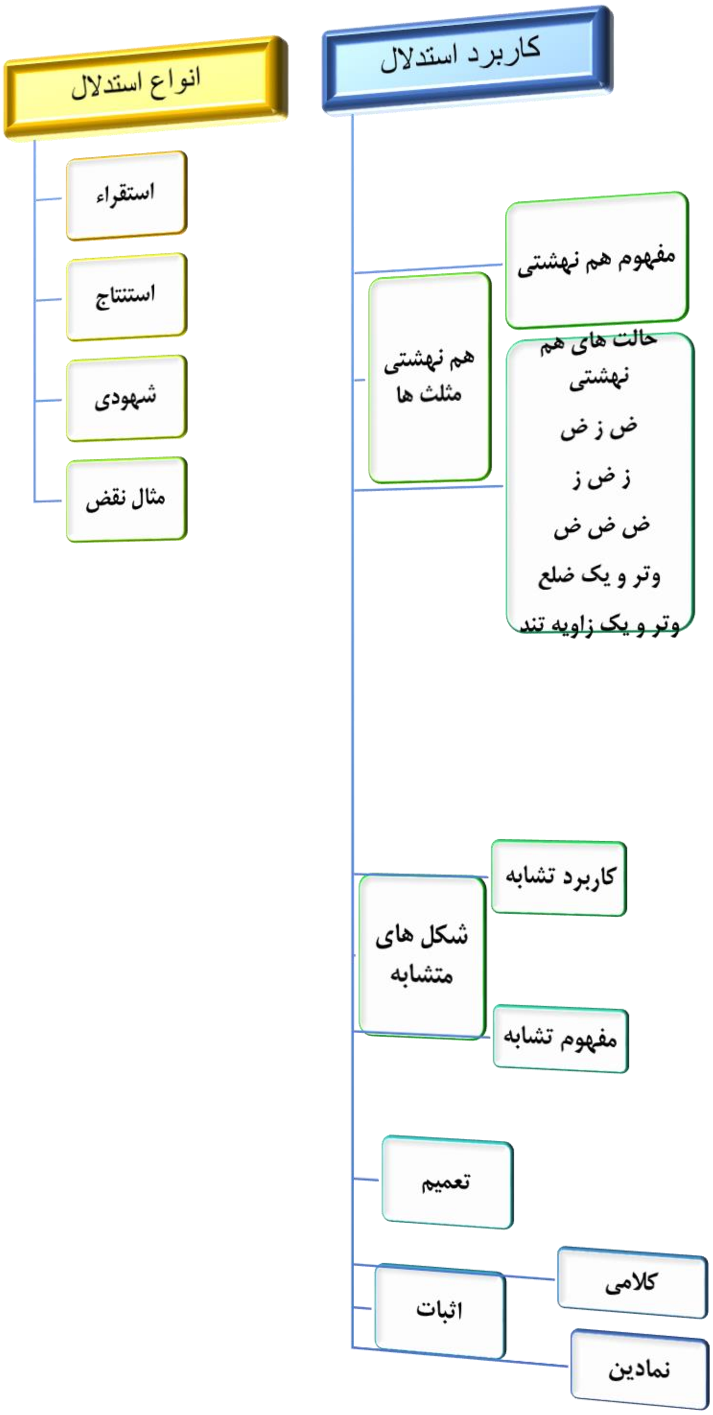
۴/۹- طرف دوم تساوی های زیر را کامل کنید . **۲نمره**

$\mathbb{N}\cup\mathbb{Z}=$ $\mathbb{N}\cap\mathbb{Z}=$ $\mathbb{R}\cup\mathbb{Z}=$ $\mathbb{R}\cap\mathbb{Q}'=$

۴/۱۰ – با استفاده از محور نشان دهید که عدد $\sqrt{۵}-۱$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار می گیرد ؟ **۲ نمره**

موفق باشید . جمع نمرات ۲۰

فصل ۳ : استدلال در هندسه



نقشه ی مفهومی چند ضلعی ها

چند ضلعی ها

سه ضلعی

۱- مجموع زوایای داخلی ۱۸۰ درجه است .
۲- مجموع زوایای خارجی ۳۶۰ درجه است .
۳- اندازه ی هر زاویه خارجی برابر است با مجموع دو زاویه ی داخلی غیر مجاورش
۴- عمود منصف ها همرس هستند (خطهایی که بر هر ضلع عمود بوده و آنها را نصف می کنند .)
۵- محل همرسی عمود منصف ها ،مرکز دایره ی محیطی مثلث است .
۶- دارای سه ارتفاع همرس هستند . (ارتفاع از راس بر ضلع مقابل عمود است .)
۷- دارای سه نیمساز همرس است . (نیمساز زاویه را نصف می کند .)
۸- دارای سه میانه ی همرس است . (میانه از راس به وسط ضلع مقابل می رسد .)

مثلث متساوی الاضلاع

۱- یک سه ضلعی منتظم است .(اضلاع باهم و زاویه ها با هم برابرند .)
۲- اندازه ی هر زاویه ۶۰ درجه است .
۳- همه ی مثلث های متساوی الاضلاع با هم متشابهند .
۴- نیمسازها و ارتفاع ها و میانه ها در داخل همرس بوده و برهم منطبق هستند .

مثلث متساوی الساقین

۱- دارای دو ساق مساوی است .
۲- زوایای روبرو به ساق ها با هم برابرند.

مثلث قائم الزاویه

۱- دارای یک زاویه ی ۹۰ درجه است .
۲- ضلع روبرو به زاویه ی قائمه وتر نام داشته و از دو ضلع دیگر بزرگتر است .
۳- رابطه ی فیثاغورس : مربع وتر برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر.
۴- ضلع روبرو به زاویه ی ۳۰ درجه نصف وتر است .
۵- ضلع روبرو به زاویه ۶۰ درجه $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است .
۶- ضلع روبرو به زاویه ۴۵ درجه $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ وتر است .

چهار ضلعی

۱- مجموع زوایای داخلی ۳۶۰ درجه است . $((n-۲)\times ۱۸۰)$
۲- مجموع زوایای خارجی ۳۶۰ درجه است .
۳-درهر nضلعی تعداد قطرها از رابطه ی $\frac{n(n-۳)}{۲}$ بدست می آید پس ۴ ضلعی دارای ۲ قطر است .
۴- چهار ضلعی **محدب** است که اگر یکی از ضلع ها را از دو طرف امتداد دهیم تمام شکل در یک طرف قرار گیرد .

متوازی الاضلاع

تعریف : هر چهار ضلعی که هر دو ضلع روبرو با هم موازی باشند
۱- هر دو ضلع مقابل و هر دو زاویه ی مقابل با هم مساویند.
۲- هر دو زاویه ی مجاور مکملند .
۳- قطرها همدیگر را نصف می کنند .

مستطیل

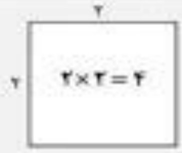
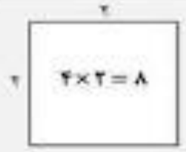
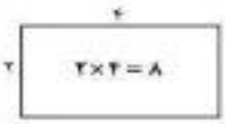
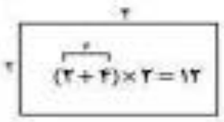
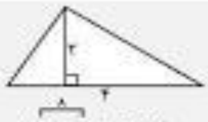
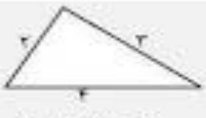
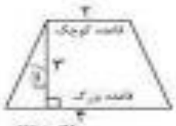
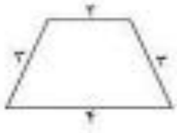
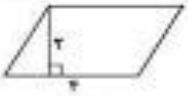
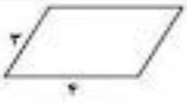
تعریف : متوازی الاضلاعی که زاویه ی قائمه دارد .
۱-چون متوازی الاضلاع است تمام ویژگی های آن را دارد .
۲- قطرها با هم مساویند .
هر متوازی الاضلاع که قطرهای مساوی داشته باشد مستطیل است.

مربع

تعریف : هر مستطیل که چهار ضلع مساوی داشته باشد
۱- بنابر تعریف مربع تمام ویژگی های مستطیل را دارد
۲- در مربع قطرها عمود منصف هم هستند .
در هر چهار ضلعی که قطرها عمود منصف هستند مساحت برابر است با نصف حاصل ضرب قطرها
۳- مربع یک چهار ضلعی منتظم است .

لوزی

تعریف : هر چهارضلعی که چهار ضلع مساوی داشته باشد
۱- لوزی نوعی متوازی الاضلاع هست .
۲- در لوزی قطرها عمود منصف هم هستند .
در هر چهار ضلعی که قطرها عمود منصف هستند مساحت برابر است با نصف حاصل ضرب قطرها
همه مربع ها لوزی هستند ولی همه لوزی ها مربع نیستند.

نام شکل	رابطه مساحت	رابطه محیط	مثال برای مساحت	مثال برای محیط
مـــــربع	یک ضلع × خودش	یک ضلع × ۴	 ۲×۲=۴	 ۴×۲=۸
مسـتطیل	طـول × عـرض	(طول + عرض) ×۲	 ۲×۴=۸	 (۲+۴)×۲=۱۲
مثلث	۲ ÷ (قاعده × ارتفاع)	مجموع سه ضلع	 (۴×۲)÷۲=۴	 ۴+۲+۳=۹
ذوزنقه	ارتفاع × $\frac{\text{قاعده بزرگ + قاعده کوچک}}{۲}$	مجموع چهار ضلع	 $\frac{(۲+۴)}{۲}$×۳=۹	 ۲+۴+۳+۳=۱۲
دایره	۳/۱۴ × شعاع × شعاع نکته: برای بدست آوردن شعاع، قطر دایره را تقسیم بر ۲ می‌کنیم.	۳/۱۴ × قطر	 شعاع ۲ = ۲ ÷ ۴ ⇒ ۳/۱۴×۲×۲=۱۲/۵۶	 ۳/۱۴×۵=۱۵/۷
متوازی الاضلاع	قاعده × ارتفاع	مجموع دو ضلع متوالی × ۲	 ۴×۲=۸	 (۴+۳)×۲=۱۴
لوزی	۲ ÷ (قطر بزرگ × قطر کوچک)	یک ضلع × ۴	 $\frac{(۶×۳)}{۲}$=۹	 (۳×۴)=۱۲

آزمون ۱

سئوالات کا مل کردنی

۱- استدلال یعنی دلیل آوردن و استفاده از ....

۲- مثالی که نادرستی مطلبی را نشان دهد ....نام دارد .

۳- در مسئله ی« در هر لوزی زاویه های روبرو با هم مساویند » فرض .... می باشد .

۴- اگر خاصیتی را اثبات کردیم و آنرا برای سایر اعضای مجموعه نیز بیان کردیم به این کار .... می گویند.

سئوالات کوتاه پاسخ

۱- در هر مثلث اندازه ی زاویه خارجی برابر با چیست ؟

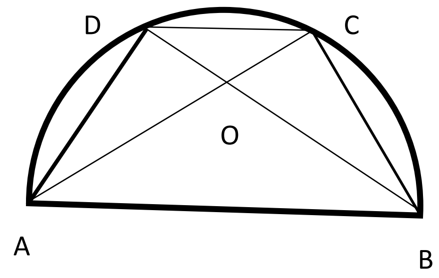
۲- در مسئله ی « زاویه های متقابل به راس با هم برابرند » حکم چیست ؟

۳- برای اثبات اینکه زوایای داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است ، از مثلث متساوی الاضلاعی که اندازه ی هر ضلعش ۶۰ درجه است ، استفاده کرده ایم ، چرا این اثبات نا معتبر است ؟

۴- اندازه ی زاویه ی محاطی روبرو به قطر چند است ؟

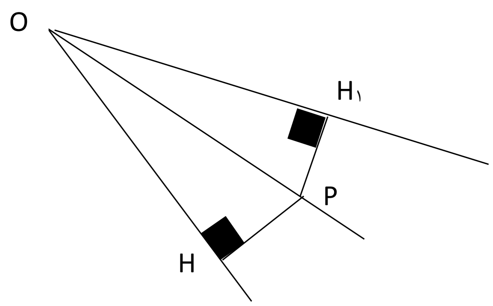
سئوالات تشریحی

۱- با توجه به شکل زیر ابتدا فرض و حکم را نوشته و سپس بگویید چرا AC=DB . (AB قطر دایره است و AD=BC)



۲- در شکل زیر OP نیمساز زاویه ی O است .

چرا $PH=PH_1$ ؟



۳- آیا استدلال زیر درست است ؟ پاسخ خود را توضیح دهید .

در هر مربع ضلع ها با هم برابرند
ABCD مربع نیست
همه ضلعهای ABCD با هم برابر نیستند

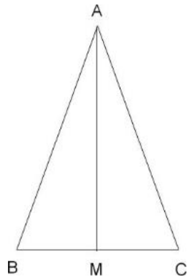
آزمون ۲

(توجه : در مسائل زیر فرض و حکم را بنویسید .)

۱- در مثلث متساوی الساقین ABC میانه ی AM را رسم کرده ایم .

الف- مثلث های AMB و AMC به چه حالتی هم نهشت هستند؟

ب- چرا AM نیمساز زاویه ی A است ؟ ۱/۵ نمره

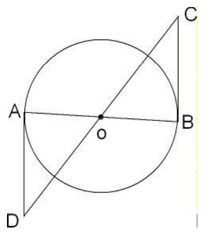


فرض:

حکم:

۲- در شکل زیر O مرکز دایره است و BC و AD بردایره مماس هستند .

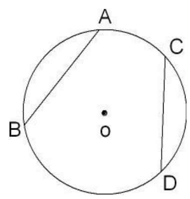
ثابت کنید که , AD و BC با هم مساویند ؟ ۱ نمره



فرض:

حکم:

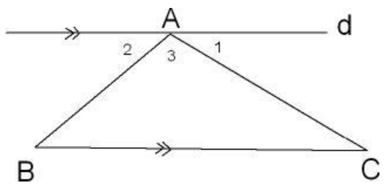
۳- در شکل زیر O مرکز دایره است ، اگر کمان های AB و CD با هم برابر باشند ،ثابت کنید وترهای آنها نیز با هم برابر هستند ؟ ۱ نمره



فرض:

حکم:

٤- با توجه به شکل زیر ثابت کنید مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است ؟ (خط d موازی با ضلع BC رسم شده است .) ۱/۵نمره

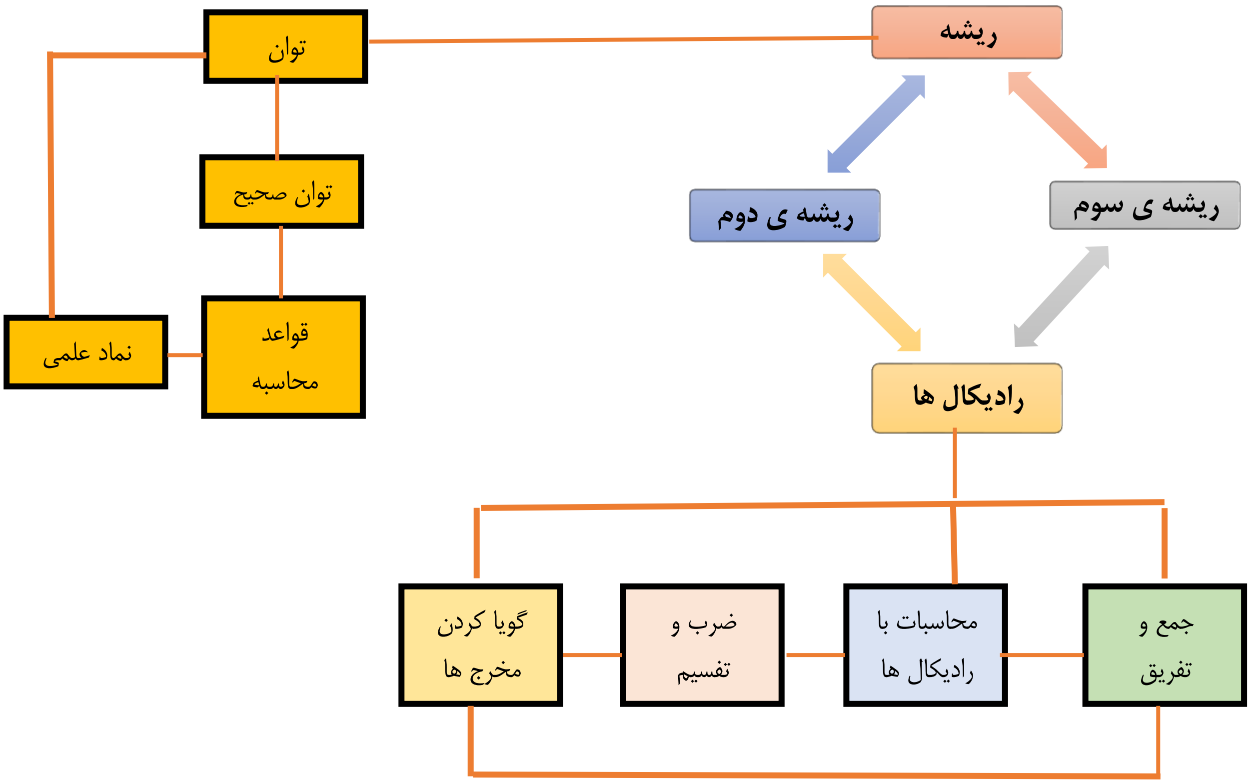


فرض:

حکم:

فصل ۴:

توان و ریشه



توان : **همیشه نشان می دهد که پایه چند بار در خودش ضرب شده است**

مثال : $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$

ضرب

پایه ها مساویند : $a^m \times a^n = a^{m+n}$

توان ها مساویند : $a^m \times b^m = (ab)^m$

توان مجدد : $(a^m)^n = a^{mn}$

توان های مثبت عدد۱۰ : برای نوشتن عددهای بزرگ بکار می رود .

مثال : $۳۵۰۰۰۰ = ۳۵ \times ۱۰۰۰۰ = ۳۵ \times ۱۰^۴$

تقسیم

توان ها مساویند : $a^m \div b^m = (\frac{a}{b})^m$

پایه ها مساویند : $a^m \div a^n = a^{m-n}$

اگر : $m > n$ توان مثبت . **اگر**: $m < n$ توان منفی

اگر: $m = n$ توان صفر

$a^{\cdot} = ۱$

$a \neq \cdot$

$a^{-m} = \frac{۱}{a^m}$

$a \neq \cdot$

توان های منفی عدد۱۰ : برای نوشتن عددهای کوچک بکار می رود .

مثال : $\cdot/۳۵ = \frac{۳۵}{۱۰۰} = \frac{۳۵}{۱۰^۲} = ۳۵ \times ۱۰^{-۲}$

نماد علمی هر عدد اعشاری مثبت به صورت $a \times ۱۰^n$ است که در آن $۱ \leq a < ۱۰$ و n عددی صحیح است.

مثال : $۲۳۰۰۰۰۰ = ۲/۳ \times ۱۰^۶$ یا $\cdot/\cdot\cdot\cdot\cdot۳ = ۳ \times ۱۰^{-۵}$

مجذور : **نوان دوم** **مکعب** : **توان سوم**

جذر و ریشه

مجذورعدد b رابصورت b^2 می نویسم و جذر یا ریشه ی دوم را بصورت $\sqrt{b}$ نمایش می دهیم .

مکعب عدد a را بصورت a^3 می نویسم و ریشه سوم آنرا بصورت $\sqrt[3]{a}$ نمایش می دهیم .

بطور کلی : $\sqrt[۳]{ab} = \sqrt[۳]{a} \times \sqrt[۳]{b}$

بطور کلی : $\sqrt[۳]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[۳]{a}}{\sqrt[۳]{b}}$

$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[nm]{a^n} \times \sqrt[nm]{b^m} = \sqrt[nm]{a^n b^m}$

$\sqrt[m]{a} + \sqrt[m]{a} = ۲\sqrt[m]{a}$

سئوالات مربوط به فصل ۴ - پایه ی نهم

۱- از دو عدد $(\frac{۱}{۸})^{۵}$ و $۱۶^{-۳}$ کدامیک بزرگتر است ؟

۲- حاصل را به صورت توانداز به دست آورید . $۰/۲۵^{-۷} \times ۸^{۵} =$

۳- ثلث عدد $۲۷^{۱۲}$ چه عددی است ؟

۴- حاصل عبارت را به صورت توانداز بنویسید $۴^{۳} + ۴^{۳} + ۴^{۳} + ۴^{۳} =$

۵- حاصل عبارت را به دست آورید . $x^{-۱} + (۲\,x)^{-۱} + (۳\,x)^{-۱} =$

۶- حاصل را به صورت علمی بنویسید ؟ $۱/۱۴ \times ۱۰^{-۱} \times ۲۵ =$

۷- اگر قطر مربعی $۳\sqrt{۶}$ سانتی متر باشد ، محیط این مربع چقدر است ؟

۸- مخرج کسر را گویا کنید . $\frac{a}{\sqrt[۳]{a}} =$

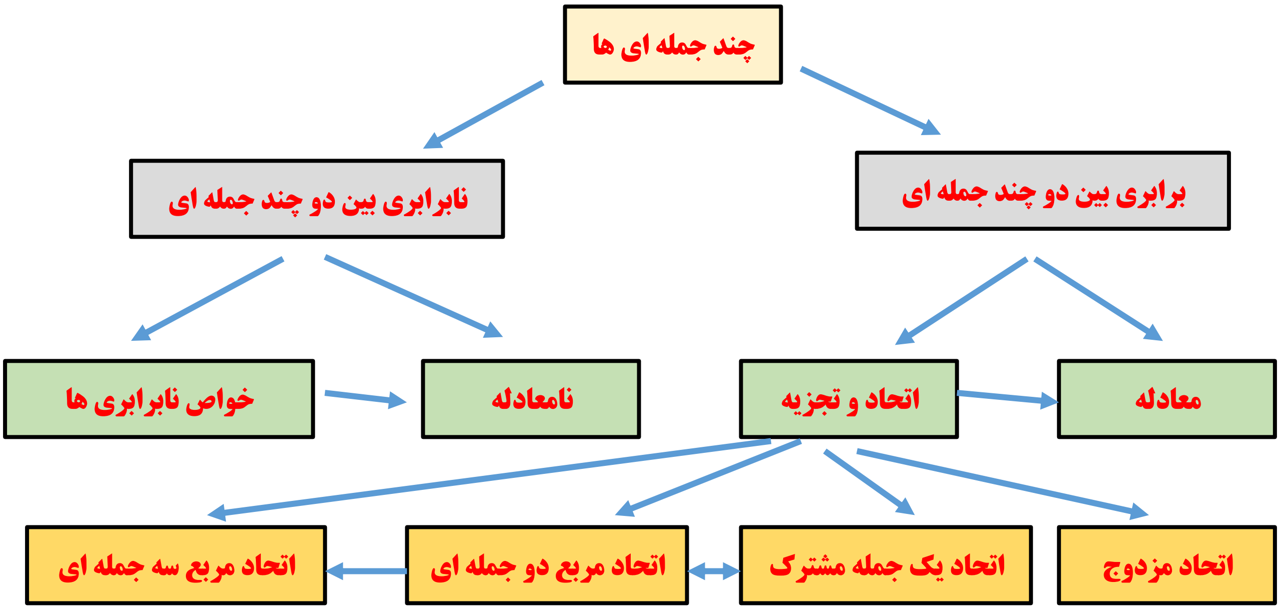
۹- حاصل را به ساده ترین شکل بنویسید . $\sqrt{۵۴} + ۳\sqrt{۶} - ۵\sqrt{۲۴} =$

۱۰- حاصل را بنویسید . $(\sqrt{۲} + \sqrt{۵})^{۲} =$

۱۴- حاصل را بنویسید . $(۴\sqrt{۵} - \sqrt{۶})(\sqrt{۶} + ۳\sqrt{۵}) =$

۱۵- حاصل را به دست آورید . $\sqrt{۳} \times \sqrt{۱۲} \div ۶\sqrt{۳} =$

فصل ۵　　عبارتهای جبری



اتحادهای مهم :

۱- اتحاد مربع دو جمله ای :　$(a+b)^{۲} = a^{۲} + ۲ab + b^{۲}$

$(a-b)^{۲} = a^{۲} - ۲ab + b^{۲}$

۲- اتحاد مزدوج :　$(a-b)(a+b) = a^{۲} - b^{۲}$

۳- اتحاد یک جمله مشترک :　$(x+a)(x+b) = x^{۲} + (a+b)x + ab$

۴- اتحاد مربع سه جمله ای :　$(a+b+c)^{۲} = a^{۲} + b^{۲} + c^{۲} + ۲ab + ۲ac + ۲bc$

تمرینات مربوط به فصل عبارتهای جبری (اتحاد مربع دو جمله ای) شماره ۱

۱– طرف دوم اتحادهای زیر را بنویسید .

$(\sqrt{2}-\sqrt{7})^2 =$ $\qquad$ $(2a+\sqrt{7})^2 =$

$(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}x^2)^2 =$ $\qquad$ $(\frac{2}{3}a+1)^2 =$

۲– مانند نمونه حاصل را بنویسید . $(101)^2 = (100+1)^2 = \cdots + \cdots \quad + \cdots$

$(99)^2 =$

۳– حاصل را به ساده ترین شکل بنویسید . $2x^2y^2-(xy-3)^2+xy(3xy) =$

۴– عبارتهای زیر را تجزیه کنید .

$25a^2-10a+1 =$ $\qquad$ $x^2-x+\frac{1}{4} =$

$\frac{4}{9}x^2+\frac{4}{3}x+1 =$ $\qquad$ $9x^2+4+12x =$

$12a^7b^8c^9-18b^{12}c^4 =$ $\qquad$ $13^{78}-13^{77} =$

۵– عبارتهایی را که می توان با استفاده از اتحاد مربع دو جمله ای تجزیه کرد ، پیدا کرده و سپس آنها را تجزیه کنید .

الف) $2x^2+4x+1$ $\qquad$ **ب)** $-4x^2-12x-9$ $\qquad$ **ج)** $4a^3+4a^2+a$

۶– حاصل را به دست آورید .

$(x+y)^2-(x-y)^2 =$ $\qquad$ $(x+y)^2+(x-y)^2 =$

۷– عبارات زیر را کامل کنید :

$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(\dots+\cdots+\cdots) = a^2+ab+ac+\cdots+\cdots+\cdots+$
$ca+\cdots+\cdots =$

بنابر حاصل به دست آمده ، برای *مربع سه جمله ای* می توان نتیجه ی زیر را نوشت :

$\boxed{(a+b+c)^2 = \qquad\qquad\qquad\qquad}$

۸– طرف دوم اتحاد زیر را بنویسید .

$(x+2a+1)^2 =$

سوالات قسمت دوم

عبارتهای زیر را تجزیه کنید :

$x^{۲} + ۴x + ۴ =$

$a^{۲} - a + \frac{۱}{۴} =$

$x^{۲} - x - ۱۲ =$

$x^{۳}y - xy^{۳} =$

$x^{۲} - ۲x - ۱۵ =$

$۴x^{۲} - ۴x + ۱ =$

$۴a^{۲} - ۲۵ =$

$۳x^{۴} - ۳ =$

$ax^{۲} - a + kx^{۲} - k =$

$۸۵۰^{۲} - ۷۵۰^{۲} =$

سئوالات تکمیلی مربوط به فصل ۵

ریاضی پایه نهم (قسمت سوم)

۱- درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید .

الف) عبارت $\sqrt{a}\ x^{۲}$ یک جمله ای است .

ب) عبارت $m^{۲} + ۹$ را می توان بصورت $(x-۳)(x+۳)$ تجزیه کرد .

ج) درجه چند جمله ای $۲\,x^{۳}y^{۳} + ۵y^{۷}$ بر حسب x و y برابر ۶ است .

د) به تساوی بین دو عبارت جبری ، اتحاد گفته می شود .

۲- عبارت جبری زیر را ساده و سپس حاصل را بصورت توان های نزولی مرتب کنید .

$$((۲\,x + ۱)^{۲})^{۲}$$

۳- جاهای خالی را کامل کنید .

$$(\cdots + m)^{۲} = \cdots + \cdots + ۲۵\, a^{۲}$$

$$۲(\cdot\cdot + \cdot\cdot)(\cdot\cdot - \cdot\cdot) = ۸m^{۲} - ۲$$

$$(\cdot\cdot + \cdot\cdot)(\cdot\cdot - ۲) = x^{۲} + \cdots - ۶$$

۴- حاصل ضرب های زیر را با استفاده از اتحاد به دست آورید .

$$۱۰۴ \times ۹۶ =$$

$$۱۰۱ \times ۱۰۲ =$$

۵- حاصل را با استفاده از اتحاد به دست آورید .

$$(۲\, x + ۳)(۲\, x - ۳)(۴x^{۲} + ۹) =$$

۶- عبارات زیر را تجزیه کنید .

الف) $۱۶x^{۲} - ۳۶y^{۲} =$

ب) $۳a^{۳}b - ۱۲\, ab^{۳} =$

پ) $۵x^{۲} - ۳۰\, x + ۴۰ =$

ت) $۴x^{۴} - ۱۲\, x^{۲}a + ۹a^{۲} =$

ث) $a^{۴} + a^{۳} + a^{۲}b + ab =$

ج) $۱ - m^{۴} =$

چ) $۹x^{۲} + ۶\, x - ۸ =$

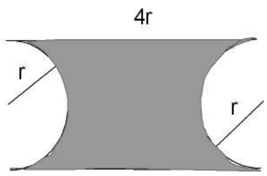
ح) ❋❋ $۱۰\,x^{۲} + ۱۷\,x + ۶ =$

خ) $x^{۳} + x^{۲} - ۹\,x - ۹ =$

د) $-y^{۳} + y^{۲} + ۲۰\,y =$

مسائل تکمیلی مربوط به فصل ۵

۱- در شکل زیر عبارت جبری مربوط به مساحت قسمت سایه زده را بنویسید .



۲- اگر $x + y = ۵$ و $x^{۲} - y^{۲} = -۴۵$ باشد ، مقدار $x - y$ را به دست آورید .

۳- اگر x+y = ۷ و xy=۱۰ حاصل عبارت زیر را به دست آورید . $x^2+y^2=...$

۴- اگر $a^{۲} + b^{۲} + c^{۲} = ۵۰$ و $a + b + c = ۱۰$

باشد . حاصل $ab + ac + bc$ را تعیین کنید .

۵- اگر $(۲\,x + y)^{۲} = ۲\,xy$ باشد . حاصل $\frac{(۲\,x+y)^{۲}}{۴x^{۲}+y^{۲}}$ را پیدا کنید .

۶- اگر $A = (x + ۱)^{۲} - ۲(x + ۱) + ۱$ و $B = (x^{۲} + ۲\,)^{۲} + ۱$ باشند آنگاه حاصل A-B را به دست آورید .

۷- نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه ی جواب را روی محور اعداد نشان دهید .

$$-۲(۲\,x+۳\,) \le ۶(x-۲)+۱$$

$$\frac{x-۸}{۱۶} \ge \frac{x-۱}{۸}$$

$$۳(x+۲)^{۲}-۲\,x < ۳\,x(x+۵)+۲$$

$$۱۵ \le ۷-\frac{۲}{۵}\,x \le ۲۱$$

۸- اعدادی را تعیین کنید که اگر نصف آنها را با عدد ۲ جمع کنیم ،کوچکتر از جمع آن اعداد با ۴ باشد .

۹- محیط مستطیلی که عرض آن ۸ سانتی متر است باید حداکثر ۴۰ سانتی متر باشد . طول آن چه عددهایی می تواند باشد ؟

۱۰- عبارات زیر را تجزیه کنید .

الف) $۳۷a^{۵}x-۳۳۳a^{۳}x=$

ب) $۹(k+۵)^{۲}-k^{۲}(k+۵)^{۲}=$

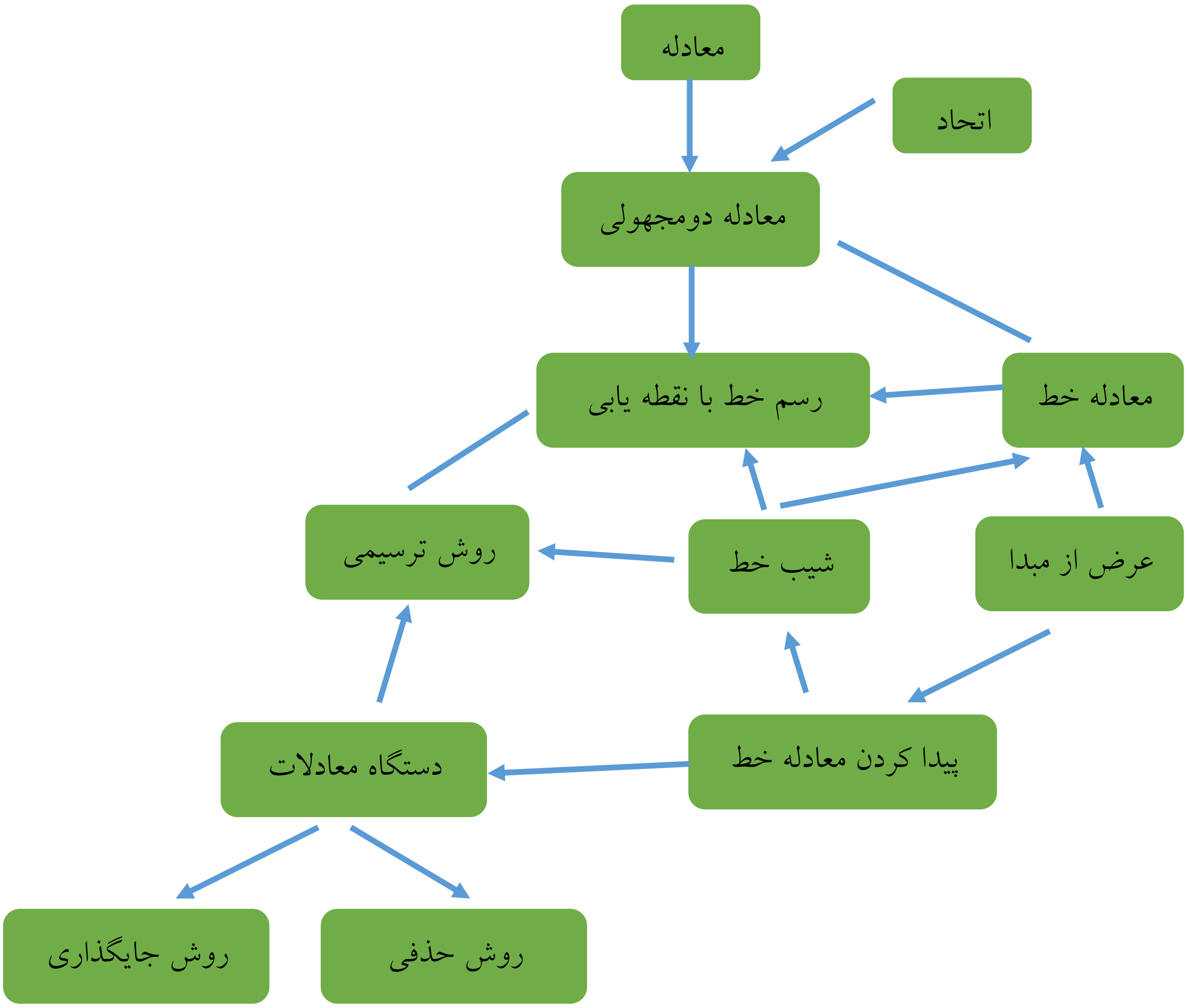
پ) $۱۰a^{۳}+۵a^{۲}-۳۰\,a=$

ت) $x^{۳}+x^{۲}+x+۱=$

ث) $a^{۳}+a^{۲}-۴\,a-۴=$

فصل ۶

معادلات خط



توضیحات کامل راجع به خط و معادله ی خط

در این فصل شما باید بتوانید :

۱- معادله ی خط را با استفاده از اطلاعاتی که مسئله داده بنویسید .

۲ – خطی را که معادله ی آن داده شده است را رسم کنید .

۳- تعیین کنید که آیا نقطه ای روی خطی که معادله ی آن داده شده است قرار می گیرد ؟

۴- دستگاه دو معادله با دو مجهول را حل کنید .

نوشتن معادله ی خط

ابتدا لازم است به معنی معادله بیشتر توجه کنیم .

معادله در واقع به رابطه ها می پردازد ، مثلاً وقتی می گوییم معادله ۱۴=۷ +**x** ، یعنی رابطه ای بین ۱۴ و **x** وجود دارد . این رابطه می گوید اگر به **x** هفت واحد اضافه کنیم به ۱۴ می رسیم .

وقتی می گوییم وزن احمد دو برابر وزن علی است یعنی رابطه ی وزن ها ۲ به ۱ است که می توان نوشت : وزن ۲ تا علی =وزن احمد ، اگر وزن احمد **y** و وزن علی **x** باشد معادله به صورت : $y = ۲\,x$ نوشته می شود .

بنابراین برای نوشتن معادله ی خط باید رابطه ی بین **x** و **y** را پیدا کنیم . به مثال های زیر توجه کنید .

مثال :در نیمساز ربع اول و سوم همیشه عرض نقاط برابر طول آن نقاط است . **y=x**

مثال : اگر به ۲برابر طول نقطه ای ۱ واحد اضافه کنیم ، عرض نقطه بدست می آید . $y = ۲\,x + ۱$

مثال :در فعالیت ص۹۶ مطلب بالا را بیان کرده است یعنی بین مسافت طی شده (y) توسط دوچرخه سوار و زمان سپری شده (x) رابطه ای وجود دارد . $y = ۲\,x$

زمان x	۰	۱	۱/۵	۲	۳	۳/۵	۴	۵
مسافت y	۰	۲	۳	۴	۶	۷	۸	۱۰

نکته : سرعت ثابت دوچرخه باعث می شود تمام نقاط جدول بالا روی یک خط راست قرار گیرند .

مثال : در کار در کلاس ص ۹۷ یک مثال را در دو حالت بررسی کرده است .

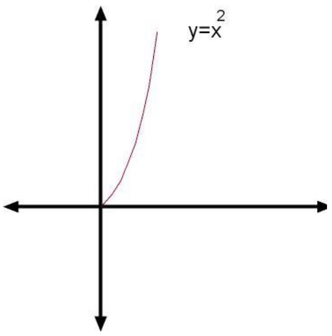
در قسمت اول رابطه ی بین ضلع مربع (x) و محیط مربع (y) را بیان کرده است . می دانیم که محیط مربع همیشه ۴ برابر اندازه ی یک ضلعش است . پس معادله ی آن به صورت : $y = ۴\,x$ است .

نکته : تمام نقاط سئوال ۱ روی یک خط راست قرار می گیرند .

در قسمت دوم رابطه ی بین مساحت مربع (y) و ضلع مربع (X) را مطرح کرده است . می دانیم مساحت هر مربعی برابر است با مجذور اندازه ی یک ضلعش . پس معادله بصورت : $y = x^{۲}$ است .

نکته : نقاط سئوال ۲ روی منحنی قرار می گیرند .

پس برخی از معادله ها مربوط به خط راست نیستند .



y=ax صورت کلی معادله ی خطهایی است که از مبداء مختصات می گذرند . در این معادله a شیب خط نام دارد .

$y = ۴\,x$ معادله ی خط راستی است که از مرکز مختصات عبور می کند و شیب آن ۴ است .

$y = \frac{۴}{۵}\,x$ خطی است که از مرکز گذشته و شیب آن $\frac{۴}{۵}$ است .

نیمساز ناحیه ی دوم و چهارم خطی است که از مرکز مختصات می گذرد و شیب آن ۱– است .معادله ی آن $y = -\,x$ می باشد .

نکته : برای بدست آوردن شیب ، اگر خط از مبداء می گذرد کافی است عرض نقطه ای که بر روی آن قرار دارد را بر طولش تقسیم کنیم .

مثال : معادله ی خطی را بنویسید که از نقاط $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ می گذرد .

چون این خط از مبداء می گذرد پس برای بدست آوردن شیب ،عرض نقطه ی دوم را بر طولش تقسیم می کنیم و سپس مقدار به دست آمده را در فرمول کلی قرار می دهیم . $a = \frac{۳}{-۱} = -۳$ و $y = -۳\,x$

مثال : در فعالیت ص ۹۹ سؤال ۱ چون هردو خط از مبداء می گذرند پس :

معادله ی الف) y=-x و معادله ی ب) $y = \frac{۱}{۳}\,x$ می باشد . (برای به دست آوردن شیب (a) ،عرض نقطه را به طولش تقسیم کرده ایم .)

مثال: به ازای چه مقدار m از خط $۲(۳\,x - m) = ۳(x + y + ۱)$ ، این خط از مبدا مختصات می گذرد

حل : ابتدا معادله را مرتب می کنیم تا به صورت معادله کلی در آید .

$$۶\,x - ۲\,m = ۳\,x + ۳\,y + ۳ \rightarrow ۳\,y = ۶\,x - ۲\,m - ۳\,x - ۳ \rightarrow ۳\,y = ۳\,x - ۲\,m - ۳ \rightarrow y = x - (\tfrac{۲}{۳}m + ۱)$$

سپس آنرا با معادله ی $y = ax$ مقایسه کنیم و بنا برآن داریم :

$$\frac{۲}{۳}\,m + ۱ = ۰ \rightarrow ۲\,m + ۳ = ۰ \rightarrow m = \frac{-۳}{۲}$$

گاهی اوقات خطوطی وجود دارند که از مرکز مختصات عبور نمی کنند بلکه در جاهایی دیگر محورهای xوy را قطع می کنند .

به محلی که خط محور طول ها را قطع می کند طول از مبداء و محلی که خط محور عرض ها را قطع می کند عرض از مبداء می گوییم .

$y = ax + b$ صورت کلی معادله ی خطهایی است که از مبداء نمی گذرند . در این معادله b همان عرض از مبداء است و a نیز همچنان شیب خط است .

پس با دانستن شیب و عرض از مبداء نیز می توان معادله ی خط را نوشت .

مثال : کار در کلاس ص ۱۰۳

۱- برای نوشتن شیب و عرض از مبداء هر معادله را با معادله ی کلی مقایسه می کنیم ،بنابراین :

۲ شیب و ۴- عرض از مبداء در معادله ی $y = ۲x - ۴$

$\frac{-۲}{۳}$ شیب و عرض از مبداء صفر در معادله ی $y = \frac{-۲}{۳}x$

۳- شیب و ۱ + عرض از مبداء در معادله ی $y = -۳x + ۱$

۲- در معادله ی کلی به جای شیب و عرض از مبدا ء عدد گذاری می کنیم .

الف) $y = -۲x - ۱$ ب) $y = \frac{۱}{۲}x + ۳$

نکته : دو خط موازی دارای شیب های مساوی هستند .

نکته : اگر b عرض از مبداء باشد مختصات عرض از مبداء را بصورت $\begin{bmatrix} ۰ \\ b \end{bmatrix}$ می نویسیم .

نکته : اگر L طول از مبداء باشد مختصات آن را بصورت $\begin{bmatrix} L \\ ۰ \end{bmatrix}$ می نویسیم .

ج) $y = ۲x + ۴$

۳- برای نوشتن معادله ی خطی که شیب آن داده شده ولی به جای عرض از مبداء ،مختصات نقطه ای دیگر را داده اند به ترتیب زیر عمل می کنیم :

ابتدا شیب را در معادله ی کلی جایگذاری می کنیم . $y = ax + b \rightarrow y = ۲x + b$

سپس به جای x و y مختصات نقطه را قرار می دهیم . $۲ = ۲ \times ۱ + b \rightarrow b = ۲ - ۲ = ۰$

پس معادله ی خط به صورت $y = ۲x + ۰ = ۲x$ می باشد .

نکته : برای نوشتن معادله ی خط این فرمول خیلی به ما کمک می کند : $y - y_۱ = m(x - x_۱)$ دراین معادله m شیب و $y_۱$ و $x_۱$ عرض و طول نقطه ی داده شده هستند .

مثال :معادله ی خطی را بنویسید که شیب آن ۴ باشد و از نقطه ی $A = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ بگذرد .

حل :در معادله ی $y - y_۱ = m(x - x_۱)$ اعداد را جایگزین می کنیم و سپس عبارت را ساده می کنیم .

$$y - ۳ = ۴(x - ۲) = ۴x - ۸ \rightarrow y = ۴x - ۵$$

مثال: مقدار b چند باشد تا عرض از مبدا خط $y - b + ۵ = ۳x + ۷$ برابر ۶- شود ؟

حل : ابتدا معادله را مرتب می کنیم : $y = ۳x + ۷ - ۵ + b = ۳x + (۲ + b)$

با مقایسه با $y = ax + b$ متوجه می شویم که : $۲ + b = -۶ \Rightarrow b = -۶ - ۲ = -۸$

برای بدست آوردن شیب خطی که از مبداء نمی گذرد ولی مختصات دو نقطه از خط را داریم کافی است اختلاف عرض ها را بر اختلاف طولها تقسیم کنیم . $A=\begin{bmatrix} x_۱ \\ y_۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} x_۲ \\ y_۲ \end{bmatrix}$ شیب $=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$

مثال : معادله ی خطی را بنویسید که از نقاط $A=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۵ \\ ۵ \end{bmatrix}$ می گذرد .

حل: ابتدا شیب خط را به دست می آوریم . $\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱} = \frac{۵-۳}{-۵-۲} = -\frac{۲}{۷}$ سپس معادله ی $y-y_۱ = m(x - x_۱)$ را در نظر گرفته و شیب و مختصات یکی از نقاط را جایگذاری می کنیم :

$$y - y_۱ = m(x - x_۱) \rightarrow y - ۳ = -\frac{۲}{۷}(x - ۲) = -\frac{۲}{۷}x + \frac{۴}{۷} \rightarrow y = -\frac{۲}{۷}x + ۳\frac{۴}{۷}$$

مثال : اگر شیب خطی که از دو نقطه ی $A = \begin{bmatrix} -a \\ a - ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ می گذرد و با شیب خطی که محور X را در طول ۳- و محور y را در عرض ۱- قطع می کند برابر باشد، a چقدر است؟

حل: $m_۱ = \frac{۲-(a-۳)}{۱-(-a)} = \frac{۵-a}{۱+a}$

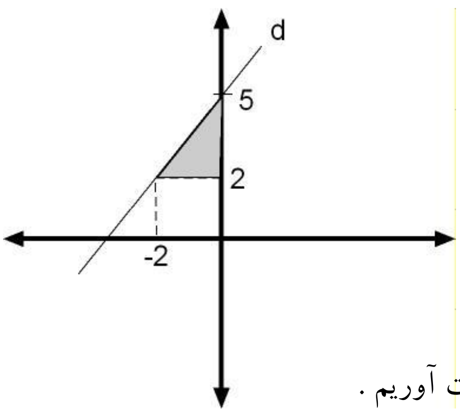
$m_۲ = \frac{-۱-۰}{۰-(-۳)} = -\frac{۱}{۳}$

$m_۱ = m_۲ \Rightarrow \frac{۵-a}{۱+a} = \frac{-۱}{۳}$

$\Rightarrow ۱۵ - ۳a = -۱ - a \Rightarrow ۱۶ = ۲a \Rightarrow a = ۸$

برای اینکه بدانیم چرا برای به دست آوردن شیب باید اختلاف ها را به هم تقسیم کنیم به مثال و شکل زیر توجه کنید :

مثال : می خواهیم شیب خطی را که رسم شده است پیدا کنیم :



حل : بافرض اینکه می دانیم از تقسیم اضلاع قائم مثلث می توانیم شیب را به دست آوریم و اینکه ضلع عمودی بر ضلع افقی تقسیم شود ناچاریم که اندازه های هر ضلع را با استفاده از اختلاف عددها به دست آوریم .

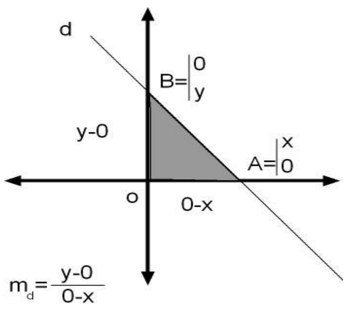
یعنی : اندازه ی ضلع قائم برابر است با ۳=۲-۵ و اندازه ی ضلع افقی برابر است با ۲=(۲-)-۰

نکته : اندازه ها همیشه به صورت قدر مطلق بیان می شوند .

بنا براین شیب این خط برابر است با $\frac{۳}{۲}$

نکته : اگر خط با جهت + محور طول ها زاویه ی تند درست کند شیب مثبت دارد و اگر زاویه ی باز داشته باشد شیب منفی دارد .

مثال : تمرین ۴ ص ۱۰۷ اشاره به همین مطلب را دارد .



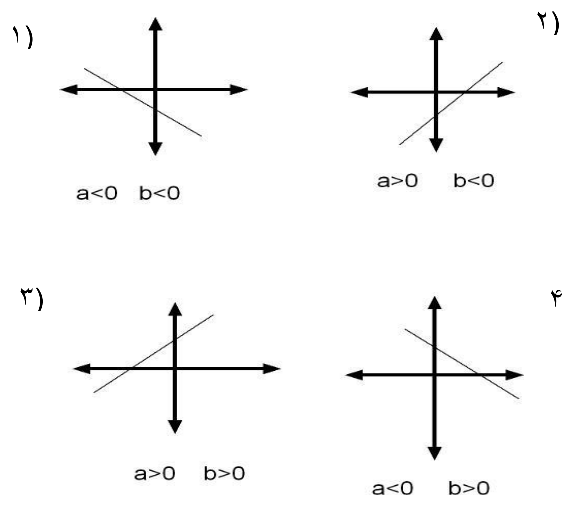
نکته : برای خطی به معادله ی $y = ax + b$ که a شیب و b عرض از مبدا است چهار حالت در صفحه در نظر می گیریم :

۱) خط از ناحیه ی اول نمی گذرد.

۲)خط از ناحیه ی دوم نمی گذرد.

۳) خط از ناحیه ی چهارم نمی گذرد.

۴)خط از ناحیه سوم نمی گذرد.



مثال : تمرین ۸ ص ۱۰۷ با داشتن دو نقطه ابتدا شیب را پیدا می کنیم :

. $\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱} = \frac{-۱-۲}{۴-۳} = -\frac{۳}{۱} = -۳$ سپس از رابطه ی $y-y_۱ = m(x - x_۱)$ استفاده کرده و اعداد را جایگزین می کنیم . $y-۲ = -۳(x-۳) = -۳x + ۹ \rightarrow y = -۳x + ۱۱$

صورت کلی معادله های خطی $ax+by=c$ می باشد . (توجه داشته باشید در این معادلات a و b شیب و عرض از مبداء نمی باشند .)

مثال : تمرین ۳ ص ۱۰۶ معادله ی $۴x - ۲y = ۸$ معادله ی یک خط راست می باشد . برای پیدا کردن شیب دو راه وجود دارد :

راه اول– معادله را طوری مرتب کنیم تا به صورت $y = ax + b$ در بیاید .

برای این کار ابتدا x را از y جدا می کنیم سپس همه ی عبارت را به ضریب y تقسیم می کنیم .

$۴x - ۲y = ۸ \rightarrow -۲y = -۴x + ۸ \rightarrow y = ۲x - ۴$ پس شیب ۲ و عرض از مبداء ۴- است.

راه دوم– در این معادلات شیب و عرض از مبداء از رابطه های زیر به دست می آیند :

$m = \frac{-a}{b}$ شیب $d = \frac{c}{b}$ عرض از مبداء بنابراین

$m = \frac{-a}{b} = \frac{-۴}{-۲} = ۲$ و $d = \frac{c}{b} = \frac{۸}{-۲} = -۴$

مثال : **فعالیت ۴ ص ۱۰۶** هر تمرین را با یکی از راهها حل کرده ایم .

$۳x - ۲y = ۶ \rightarrow m = \frac{-۳}{-۲} = \frac{۳}{۲} \rightarrow d = \frac{۶}{-۲} = -۳$

$x + ۳y - ۹ = ۰ \rightarrow ۳y = -x + ۹ \rightarrow y = -\frac{۱}{۳}x + ۳$ پس $d = ۳$ و $m = -\frac{۱}{۳}$

نکته : معادله خطهایی که موازی با محور طول ها هستند بصورت y=a و معادله خطهایی که موازی با محور عرض ها هستند x=a است .

نکته : شیب خطهایی که موازی با محور xها است برابر صفر و شیب خطهایی که موازی محور y ها هستند نامعین و یا تعریف نشده اند .

مثال : کاردر کلاس ۳ ص ۱۰۶ چون خط موازی محور xها است پس معادله ی آن به صورت y=۱ است.

مثال : **فعالیت ۱ ص ۱۰۵** چون نقطه ها دارای طول مساوی ۲ هستند پس خط موازی محور yها است .

پس معادله ی آن به صورت x=۲ می باشد .

رسم خطی که معادله ی آن داده شده است

برای رسم خط ما باید حداقل مختصات ۲ نقطه را داشته باشیم لذا با کشیدن جدولی مقادیری را برای x انتخاب کرده و از روی آن مقدار y را به دست می آوریم .

مثال : دو خط $y = ۲x$ و $y = ۲x + ۳$ را روی دستگاه محورهای مختصات رسم کنید . آیا این دو خط با هم موازیند ؟ چرا؟

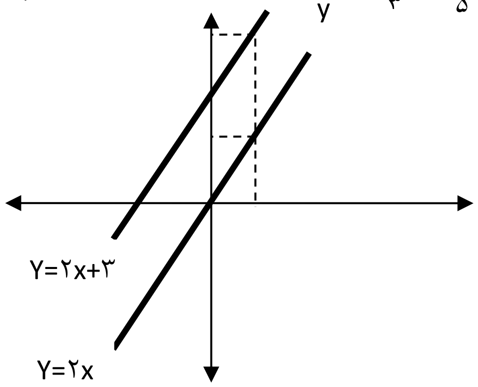
برای رسم هر خط کافی است مختصات دو نقطه از آن را داشته باشیم .

$y = ۲x$

x	۰	۱
y	۰	۲

$y = ۲x + ۳$

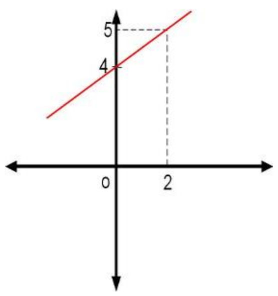
x	۰	۱
y	۳	۵



برای رسم خطی که معادله ی آن بصورت کلی گفته شده است بهتر است ابتدا یکبار x=۰ باشد و مقدار y را بدست آورد و بار دیگر y=۰ باشد و مقدار x را بدست آورد .

مثال : تمرین ۱ ص ۱۰۰ برای رسم خط $y = \frac{۱}{۲}x + ۴$ ابتدا جدولی رسم می کنیم .

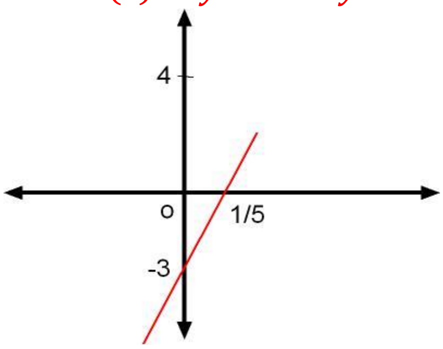
$y = \frac{۱}{۲}(۲) + ۴ = ۵$ $\qquad$ $y = \frac{۱}{۲}(۰) + ۴ = ۴$



x	۰	۲
y	۴	۵
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۰ \\ ۴ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \end{bmatrix}$

مثال : تمرین ۳ ص ۱۰۶ برای رسم خط ،جدول می کشیم . لازم به یادآوری است چون معادله به صورت کلی داده شده بهتر است یکبار x=۰ و یکبار y=۰ باشد . $۲x - y = ۳ \rightarrow ۲(۰) - y = ۳ \rightarrow y = -۳$

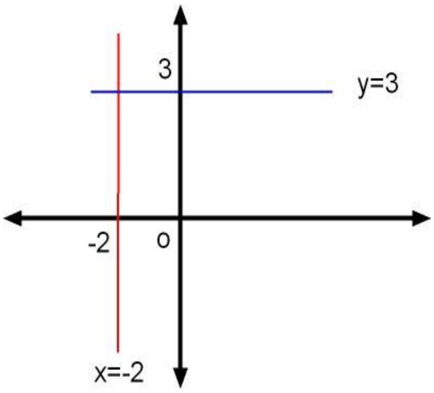
x	۰	۱/۵
y	-۳	۰
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۰ \\ -۳ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۱/۵ \\ ۰ \end{bmatrix}$



$$۲x - y = ۳ \rightarrow ۲x - ۰ = ۳ \rightarrow x = \frac{۳}{۲} = ۱/۵$$

نکته : برای رسم خط های موازی با محور نیازی به کشیدن جدول نیست .

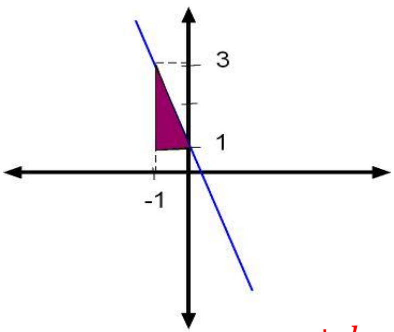
مثال : تمرین ۱ ص ۱۰۶



مثال : تمرین ۲ ص ۱۰۶

معادله ی محور طول ها $y=۰$ و معادله ی محور عرض ها $x=۰$

مثال : تمرین ۵ ص ۱۰۷



ابتدا با استفاده از مثلث شیب را به دست می آوریم :

$a = \frac{۲}{۱}$ اما چون خط با محورxها زاویه ی باز ساخته

پس شیبش منفی است و از طرفی b= ۱ پس $y = ax + b \rightarrow y = -۲x + ۱$

تعیین مختصات نقطه روی یک خط

گاهی اوقات از ما مختصات نقطه ای را می خواهند که روی خط واقع است . در این صورت با دانستن x یا y و قرار دادن آن در معادله دیگری را پیدا می کنیم .

مثال : کاردرکلاس ۱ ص ۱۰۰

مختصات نقطه ای به طول ۲ را روی خط $y = ۲\,x - ۱$ پیدا کنید .

$$y = ۲\,x - ۱ \rightarrow y = ۲(۲) - ۱ = ۴ - ۱ = ۳ \qquad \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

مثال : کاردر کلاس ۲ ص ۱۰۰

مختصات نقطه ای به عرض ۳- را روی خط $y = -\frac{۱}{۲}\,x + ۲$ پیدا کنید .

$$y = -\frac{۱}{۲}\,x + ۲ \rightarrow -۳ = -\frac{۱}{۲}x + ۲ \rightarrow \frac{۱}{۲}x = ۳ + ۲ \rightarrow x = ۱۰ \qquad \begin{bmatrix} ۱۰ \\ -۳ \end{bmatrix}$$

مثال : کار در کلاس ۳ ص ۱۰۰

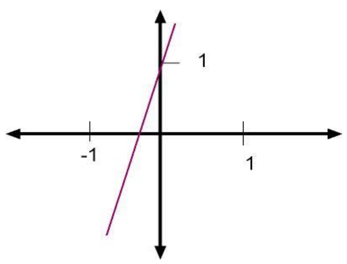
مختصات محل برخورد خط $y = ۵\,x + ۱$ را با محورهای مختصات پیدا کنید .

می دانیم که محل برخورد خط با محور طول ها دارای عرض مساوی صفر است . پس در معادله به جای y صفر می گذاریم تا x به دست آید .

$$y = ۵\,x + ۱ \rightarrow ۵\,x + ۱ = ۰ \rightarrow ۵\,x = -۱ \rightarrow x = -\frac{۱}{۵}$$ پس $\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۵} \\ ۰ \end{bmatrix}$

همچنین میدانیم که محل برخورد خط با محور عرض ها دارای طول مساوی صفر است پس اینبار به جای x در معادله صفر قرار می دهیم تا y به دست آید .

$$y = ۵\,x + ۱ \rightarrow y = ۵(۰) + ۱ \rightarrow y = ۱$$ پس $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$



مثال : تمرین ۶ ص ۱۰۱

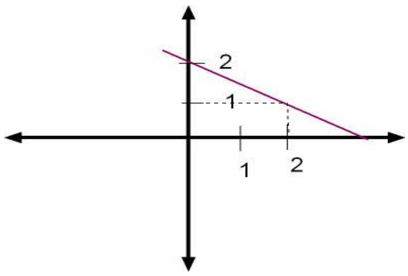
مختصات نقطه ای از خط به معادله ی $y = -\frac{۳}{۵}\ x + ۴$ را بیابید که طول آن نقطه ۵ باشد .

$$y = -\frac{۳}{۵}\ (۵) + ۴ = -۳ + ۴ = ۱ \qquad \begin{bmatrix} ۵ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

مثال : تمرین ۷ ص ۱۰۱

خط $y = -\frac{۱}{۲}\ x + ۲$ را رسم کنید .

X	۰	۲
Y	۲	۱
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$



آیا نقطه ی $\begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ روی این خط قرار دارد؟ باید مختصات نقطه را در معادله قرار دهیم اگر دو طرف مساوی شدند قرار دارد . $y = -\frac{۱}{۲}\ x + ۲ \rightarrow ۳ = -\frac{۱}{۲}(-۲) + ۲ \rightarrow ۳ = +۱ + ۲ = ۳$ پس قرار دارد

مثال : آیا نقطه $\begin{bmatrix} \frac{۱}{۵} \\ ۳ \end{bmatrix}$ روی خط $۵\ x - ۴\ y = ۱۱$ قرار دارد ؟

$۵\ \left(\frac{۱}{۵}\right) - ۴\ (۳) = ۱۱ \rightarrow ۱ - ۱۲ = ۱۱ \rightarrow ۱۱ = ۱۱$ پس قرار دارد .

دستگاه معادله های خطی

هرگاه دو یا چند معادله را همزمان با هم حل کنیم ، به آن دستگاه معادله می گوییم . اگر این معادلات مربوط به خط راست باشند به آن دستگاه معادلات خطی می گوییم .

نکته : می دانیم که دو خط راست در یک نقطه همدیگر را قطع می کنند . بنابراین ممکن است دو خطی که در یک دستگاه معادله ی آنها را نوشته اند یکدیگر را قطع کنند (متقاطع باشند) در این صورت با حل کردن دستگاه مختصات محل تقاطع به دست می آید .

حل دستگاه معادلات خطی با روش جایگزینی :

در این روش یکی از مجهول ها را بر حسب مجهول دیگر حساب می کنیم تا معادله ی یک مجهولی داشته باشیم و با حل آن به روش معمول مقدارهای لازم را به دست می آوریم . به مثال ها دقت کنید .

مثال : کاردرکلاس ۱ ص۱۱۲ :

$\begin{cases} x-۳y=۷ \\ ۲x-۷y=۱۵ \end{cases}$ ابتدا با استفاده از معادله ی اولی x را برحسب y حساب می کنیم :

$$x-۳y=۷ \rightarrow x=۷+۳y$$

حال در معادله ی دوم به جای x مقداری که به دست آورده ایم را می نویسیم :

$$۲x-۷y=۱۵ \rightarrow ۲(۷+۳y)-۷y=۱۵ \rightarrow ۱۴+۶y-۷y=۱۵ \rightarrow y=-۱$$

حال با جایگزینی ۱− به جای y مقدار x را به دست می آوریم : $x=۷+۳y \rightarrow x=۷-۳=۴$

مثال : کار در کلاس ۲ ص۱۱۲

نکته : در معادلاتی که ضرایب کسری هستند بهتر است ابتدا مخرج را بوسیله ی ضرب در مخرج مشترک از بین ببریم تا معادله ی ساده تری به دست بیاید .

$\begin{cases} ۳x-y=۶ \\ ۲x+\frac{۱}{۳}y=۸ \end{cases}$ ابتدا معادله ی دوم را در ۳ (مخرج مشترک) ضرب می کنیم تا معادله ی ساده تری به دست آید . $۲x+\frac{۱}{۳}y=۸ \rightarrow ۳\times ۲x+۳\times\frac{۱}{۳}y=۳\times ۸ \rightarrow ۶x+y=۲۴$

از این معادله مقدار y را بر حسب x حساب می کنیم : $۶x+y=۲۴ \rightarrow y=۲۴-۶x$

مقدار به دست آمده را در معادله ی اولی جایگزین و معادله را حل می کنیم .

$$۳x-y=۶ \rightarrow ۳x-(۲۴-۶x)=۶ \rightarrow ۳x-۲۴+۶x=۶ \rightarrow ۹x=۳۰ \rightarrow x=\frac{۱۰}{۳}$$

مقدار y را نیز به دست می آوریم . $y=۲۴-۶x=۲۴-۶\left(\frac{۱۰}{۳}\right)=۲۴-۲۰=۴$

حل دستگاه معادلات خطی به روش حذفی :

در این راه حل باید ابتدا یکی از مجهول ها را حذف کنیم . این کار بوسیله ی ضرب اعداد در تمام معادله حاصل می شود ، زیرا می دانیم که اگر دو طرف معادله ای را در عددی غیر صفر ضرب کنیم ، حاصل تغییری نمی کند . به مثال های زیر توجه کنید :

مثال : کار در کلاس ۱ ص ۱۱۰

$$\begin{cases} x - y = ۳ \\ ۴x + ۲y = ۶ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -۴(x - y = ۳) \\ ۴x + ۲y = ۶ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -۴x + ۴y = -۱۲ \\ ۴x + ۲y = ۶ \end{cases}$$

دو معادله را با هم جمع می کنیم . می دانیم که x ها با هم و y ها با هم و اعداد باهم جمع می شوند . در اینجا x ها به علت قرینه بودن حذف می شوند . پس : $۶y = -۶ \rightarrow y = -۱$

مانند قبل با جایگزینی ۱− به جای y در یکی از معادله ها (معادله ای که حل آن ساده تر باشد) مقدار x به دست می آید . $x - y = ۳ \rightarrow x - (-۱) = ۳ \rightarrow x + ۱ = ۳ \rightarrow x = ۲$

مثال : کار در کلاس ۲ ص ۱۱۰ توجه داشته باشید در هنگام جابجایی ضرایب ،یکی از آنها باید قرینه شود .

$$\begin{cases} ۳x - ۵y = ۱ \\ ۲x + ۳y = ۷ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -۲(۳x - ۵y = ۱) \\ ۳(۲x + ۳y = ۷) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -۶x + ۱۰y = -۲ \\ ۶x + ۹y = ۲۱ \end{cases}$$

دو معادله را جمع می کنیم و چون x ها قرینه هستند حذف می شوند . $۱۹y = ۱۹ \rightarrow y = ۱$

عمل جایگزینی را انجام می دهیم : $۳x - ۵y = ۱ \rightarrow ۳x - ۵(۱) = ۱ \rightarrow ۳x = ۶ \rightarrow x = ۲$

نکته : گاهی فقط با قرینه کردن می توان یکی از مجهول ها را حذف کرد .

مثال : کار در کلاس ۳ ص ۱۱۰

$$\begin{cases} ۳x + ۲y = ۵۰ \\ ۲x + ۲y = ۳۵ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۳x + ۲y = ۵۰ \\ -(۲x + ۲y = ۳۵) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۳x + ۲y = ۵۰ \\ -۲x - ۲y = -۳۵ \end{cases}$$

دو معادله را جمع می کنیم و چون y ها قرینه هستند حذف می شوند .

$$(\quad) \qquad ۲x + ۲y = ۳۵$$

برای یادگیری بهتر تمرین ها و مثال ها را یک بار دیگر خودتان حل کنید .

نمونه سئوالات مربوط به معادله ی خط و حل دستگاه های معادلات دو مجهولی

۱– اگر $A=\begin{bmatrix}۲m+۱\\۲n-۶\end{bmatrix}$ روی محور طول ها و $B=\begin{bmatrix}m-۱\\-۲n+۲\end{bmatrix}$ روی محور عرض ها باشد. محیط مثلث OAB (O مبداء مختصات است) را به دست آورید.

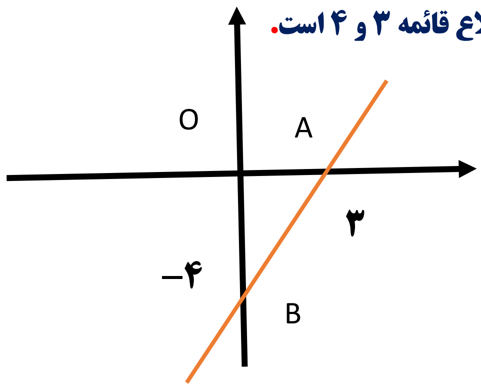
حل: می دانیم که اگر نقطه ای روی محور طول ها باشد عرض آن صفر و اگر روی محور عرض ها باشد طول آن صفر است.

پس در نقطه A می توان نوشت: $n=۳ \quad \to \quad ۲n-۶=۰$ ①

در نقطه B نیز می توان نوشت: $m=۱ \to m-۱=۰$ ②

از ① و ② می توان نتیجه گرفت: $A=\begin{bmatrix}۳\\۰\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۰\\-۴\end{bmatrix}$ و حالا نقطه ها را روی محورها پیدا کرده و مثلث را رسم می کنیم.

مثلثی که به دست می آید قائمه الزاویه به اضلاع قائمه ۳ و ۴ است.



اندازه ی وتر از رابطه فیثاغورس برابر ۵ است. پس محیط برابر ۱۲=۳+۴+۵ می باشد.

۲–به ازای کدام مقدار m نقطه ی A به مختصات $\begin{bmatrix}\frac{-m}{۳}\\-m+۳\end{bmatrix}$ روی خط $y=۲x+۷$ قرار دارد؟

حل: می دانیم هرگاه یک نقطه روی خط قرار دارد می توانیم x و y نقطه را در معادله قرار دهیم.

پس مختصات نقطه A را در معادله قرار می دهیم.

$$-m+۳=۲\left(\frac{-m}{۳}\right)+۷ \quad \to \quad -m+\frac{۲}{۳}m=۷-۳ \ \to \frac{-۱}{۳}m=۴ \ \to m=-۱۲$$

۳– اگر خط $x+y=۲mx+۱$ با خطی که از دو نقطه ی $\begin{bmatrix}-۴\\۲\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۸\\۲m\end{bmatrix}$ می گذرد موازی باشد، m را پیدا کنید.

حل: می دانیم دو خط موازی شیب های مساوی دارند.

ابتدا معادله خط را استاندارد می کنیم: $y=۲mx-x+۱ \to y=(۲m-۱)x+۱$ پس شیب $=۲m-۱$ ①

می دانیم که شیب برابر است با اختلاف عرض ها تقسیم بر اختلاف طول ها یعنی: $\frac{۲m-۲}{۸-(-۴)}=\frac{۲(m-۱)}{۱۲}=\frac{m-۱}{۶}$ ②

چون دو خط موازی هستند پس دو شیب باید مساوی باشند : یعنی با توجه به ① و ② داریم:

$$۲m-۱=\frac{m-۱}{۶} \rightarrow ۱۲m-۶=m-۱ \rightarrow ۱۱m=۵ \rightarrow m=\frac{۵}{۱۱}$$

نکته :اگر دستگاه معادله ی خط به صورت زیر باشد :

$$\begin{cases} a_۱x+b_۱y=c_۱ \\ a_۲x+b_۲y=c_۲ \end{cases}$$

الف) اگر $\frac{a_۱}{a_۲} \neq \frac{b_۱}{b_۲}$ در این صورت دو خط در یک نقطه همدیگر را قطع می کنند .(دستگاه دارای جواب است .)

ب) اگر $\frac{a_۱}{a_۲}=\frac{b_۱}{b_۲} \neq \frac{c_۱}{c_۲}$ در این صورت دو خط موازی هستند (شیب مساوی دارند) . (دستگاه جواب ندارد .)

ج) اگر $\frac{a_۱}{a_۲}=\frac{b_۱}{b_۲}=\frac{c_۱}{c_۲}$ در این صورت دو خط بر هم منطبق هستند . (دستگاه بی شمار جواب دارد .)

۴– در مورد تعداد جواب های دستگاههای زیر توضیح دهید .

الف) $\begin{cases} ۲x-۳y=۱ \\ ۴x-۶y=۲ \end{cases}$

حل: الف) $\frac{۲}{۴}=\frac{-۳}{-۶}=\frac{۱}{۲}$ دستگاه بی شمار جواب دارد .

ب) $\begin{cases} ۲x-۳y=۱ \\ ۴x+۶y=۲ \end{cases}$

حل : ب) $\frac{۲}{۴} \neq \frac{-۳}{۶}$ دستگاه جواب دارد .

ج) $\begin{cases} -x-y=۱ \\ x+y=۱ \end{cases}$

حل : ج) $\frac{-۱}{۱}=\frac{-۱}{۱} \neq \frac{۱}{۱}$ دستگاه جواب ندارد .

۵– مسائل زیر را از طریق دستگاه معادلات دو مجهولی حل کنید .

الف) دو زاویه مکمل یکدیگرند . اگر اختلاف آنها ۲۲/۵ درجه باشد . اندازه ی هریک چقدر است ؟

حل: ابتدا دستگاه را تشکیل می دهیم . $\begin{cases} x+y=۱۸۰ \\ x-y=۲۲/۵ \end{cases}$ **در این دستگاه چون y در دو معادله قرینه است پس کافی است آنها را حذف کنیم .**

$$\begin{cases} X+\cancel{Y}=180 \\ X-\cancel{Y}=22.5 \end{cases}$$

$$2X=202.5 \longrightarrow X=101.25$$

$$Y=78.75$$

ب) طول یک مستطیل از دو برابر عرض آن ۴ واحد کمتر است . اگر محیط مستطیل ۴۶ واحد باشد . طول و عرض مستطیل را پیدا کنید .

حل : فرض می کنیم طول X و عرض Y باشد .

$$\begin{cases} X+4=2Y \\ 2X+2Y=46 \end{cases} \qquad \begin{cases} X-\cancel{2Y}=-4 \\ 2X+\cancel{2Y}=46 \end{cases}$$

$$3X=42 \longrightarrow X=14$$

$$2Y=14+4=18 \longrightarrow Y=9$$

سئوالات مربوط به فصل ۶

نکته : در عباراتی نظیر (۳ و ۲) همیشه از سمت چپ عدد اولی x و عدد دومی y می باشد . x=۲ , y=۳

۱- هریک از خط های زیر را رسم کنید.

$$y=\frac{۲}{-۳}x$$

$$y=۴/۵\ x-۵$$

۲- معادله ی خطی را بنویسید که از مبدا ء مختصات و نقطه ی (۲, ۱)=A بگذرد.

۳- آیا نقطه(۱,۳) =A روی خط y=۲ x - ۵ قرار دارد. چرا؟

۴- خط ۸-=۲ x+ ۲ y- را رسم کنید.

۵- شیب و عرض از مبدا ء خط های به معادلات زیر را بدست آورید.

۲ y = ۴ x+۶

۴ x – ۲ y +۸=۰

۶- آیاخطهای y=-۲x+۱ و ۵y+۱۰x=۱۲ با هم موازیند ؟ چرا؟

۷- عدد m را چنان تعیین کنید که خط y= (m-۱) x +۲ با خط y= - ۴ x موازی باشد.

۸- معادله ی خطی را بنویسید که شیب آن صفر و عرض از مبداء آن ۳ باشد.

۹- معادله ی خطی را بنویسید که شیب آن ۳- و از نقطه (۴, ۰) بگذرد.

۱۰- معادله ی خطی را بنویسید که با خط ۴= y + x ۲ موازی بوده و از نقطه (۳-. ۰) بگذرد.

۱۱- معادله ی خطی را بنویسید که از نقاط (۴-, ۳) و (۴-, ۲-) بگذرد . این خط را رسم کنید.

۱۲- a را طوری تعیین کنید که خط y = ax +۳ از نقطه ی (۲,۵-) بگذرد.

۱۳- مقدار a را در معادله ی خط ۲y= ax -۴ طوری تعیین کنید که این خط از (۰, ۳) بگذرد.

۱۴- b را طوری تعیین کنید که خط L به معادله ی $y=\frac{۳}{۲}x+b$ از نقطه ی (۴, ۲) بگذرد.

۱۵- مقدار m را طوری تعیین کنید که خط y+ mx =۱۲ از نقطه ی (۲,۴) گذشته باشد.

۱۶- نقطه ای روی خط y=۳ x-۲ پیدا کنید که طول آن ۱ باشد.

۱۷- نقطه ای روی خط y =۳ x+۳ پیدا کنید که عرض آن ۳- باشد.

۱۸- در معادله ی خط y = ۲ x + b مقدار b را چنان تعیین کنید که خط محور طول ها را در نقطه ی ۱+ قطع کند.

۱۹- مقدار m را چنان تعیین کنید که دو خط ۳ x-۲ y=۲ و y= mx+۱ موازی باشند.

۲۰- اگر M=(a , a +۲) باشد مقدار a را چنان تعیین کنید که عرض نقطه ۳برابر طول آن باشد.

۲۱- نقطه ای ازخط y=-۳ x+۱ تعیین کنید که عرض آن ۴+ باشد.

۲۲- معادله ی خطی را بنویسید که از نقاط (۳+, ۰) و (۰, ۱-) بگذرد.

۲۳- دو خط y= ۰/۵ x-۱ و y=۲ در چه نقطه ای یکدیگر را قطع می کنند.

۲۴- در معادله ی ۲ x + ay=۲ مقدار a را چنان تعیین کنید که شیب خط ۱+ باشد.

۲۵- خط y=-۲ x – ۲ محور عرض ها و طول ها را در چه نقاطی قطع می کند

۲۶- شیب و عرض از مبداء خط $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ را تعیین کنید.

۲۷- معادله ی خطی را بنویسید که از نقطه (۲, ۱) بر محور طول ها عمود شود .

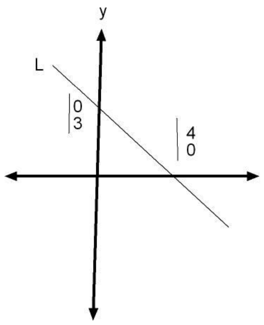
۲۸- معادله ی خطی را بنویسید که از نقطه (۱-, ۳) موازی با محور طول ها رسم شود .

۲۹- معادله ی خطی را بنویسید که از دو نقطه ی (۰,۰) و (۲- , $\frac{1}{2}$) می گذرد.

۳۰- معادله ی خطی را بنویسید که که از دو نقطه ی (۲, ۲) و (۳-, ۳-) بگذرد.

۳۱- شیب و عرض از مبداء خط $2x=\frac{y-1}{2}$ را پیدا کنید . این خط را رسم کنید .

۳۲- معادله ی خط L را بنویسید .



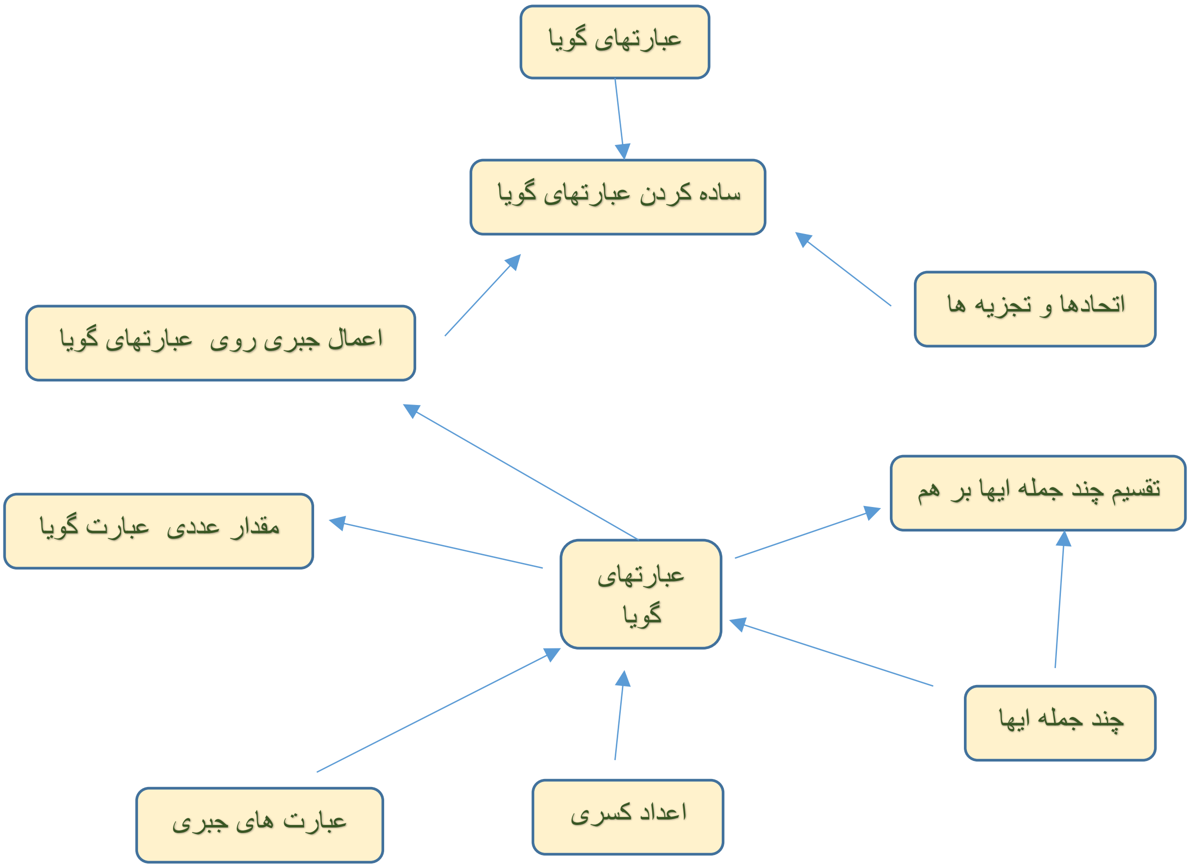
۳۳- معادله ی خطی را بنویسید که از نقاط (۲ ،۱) و (۱، ۲) می گذرد.

۳۴- آیا نقطه ی ($\frac{5}{6}$ و $\frac{-1}{2}$) بر روی خط $y+x=\frac{1}{3}$ قرار دارد ؟

۳۵- عرض از مبداء خطی را پیدا کنید که از نقاط (۲ و ۱-) و (۱- و۲) می گذرد.

فصل ۷

عبارت های گویا



(یکی دیگر از راههای یادگیری حاشیه نویسی در کتاب است .)

به‌طور کلی هر عبارت گویا، کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای باشد. ← تعریف عبارت گویا

مثال: $\frac{2x}{x+2}$ ← یک جمله‌ای ، ← دو جمله‌ای

اما عبارت‌های زیر گویا نیستند. (چرا؟)

$\frac{1}{\sqrt{x-2}}$ → متغیر زیر رادیکال و $|x-y|$ ← متغیر داخل قدر مطلق و $\frac{\sqrt{x}}{x+y}$ و $\sqrt{xy}$ ← متغیر زیر رادیکال

کدام‌یک از عبارت‌های زیر گویاست؟

$\frac{|x|+|y|}{x}$ و $\frac{\sqrt{2x}}{25}$ و $\frac{\sqrt{3}+x}{5}$ و $\frac{ah}{2}$ و $\frac{x+6}{3}$ و $\frac{7}{x-1}$

برای تعیین همه مقادیری که به‌ازای آنها یک عبارت گویا تعریف می‌شود، باید مقادیری از متغیر را حذف کنیم که به‌ازای آنها مخرج کسر صفر می‌شود؛ به‌عبارت دیگر این مقادیر را نمی‌توان به‌جای متغیر در عبارت جبری قرار داد و حاصل را محاسبه کرد.

مثال: به ازای چه مقادیری از x عبارت زیر تعریف نمی‌شود؟ $\frac{3x}{x-1}$

توجه: کسری تعریف نمی‌شود که مخرج آن صفر باشد پس:

$x-1=0 \Rightarrow x=1$ کسر در $x=1$ تعریف نمی‌شود. (توجه داشته باشید به صورت کاری نداریم.)

مثال : عبارت گویای $\frac{7x^2+1}{(x-1)(x+2)}$ به‌ازای چه مقادیری از x تعریف نشده است؟

حل : چه مقادیری مخرج کسر را صفر می کند؟

برای یافتن این عددها، مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم؛ یعنی :

$(x-1)(x+2)=0$

از طرفی وقتی حاصل‌ضرب چند عبارت برابر صفر شود، حداقل یکی از آنها صفر است؛ لذا :

$x-1=0 \rightarrow x=1$

$x+2=0 \rightarrow x=-2$ $\Rightarrow$ $x=1, -2$ در عبارت تعریف نمی‌شود

هر یک از عبارت‌های زیر به‌ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده است؟

الف) $\frac{8x+5}{2}$ ← مخرج هیچ‌گاه صفر نمی‌شود پس به ازای همه مقادیر تعریف می‌شود

ب) $\frac{7+x}{x} \rightarrow x=0$ در صفر تعریف نمی‌شود

ج) $\frac{2b+1}{2b-1} \rightarrow b=\frac{1}{2}$ ، $2b-1=0$

د) $\frac{3x}{x^2+4}$ ← توان دو همیشه مثبت و هیچ‌گاه صفر نمی‌شود

هـ) $\frac{x}{x^2-1}$ ، $(x-1)(x+1)$

$x-1=0 \rightarrow x=1$

$x+1=0 \rightarrow x=-1$

و) $\frac{a+5}{a^2-5a+6}$ ، $(a-2)(a-3)=0$

$a-2=0 \rightarrow a=2$

$a-3=0 \rightarrow a=3$

ساده کردن یک عبارت گویا: همانند ساده کردن کسرها عمل می‌کنیم.

مثال :

$$\frac{\cancel{16}^{2}\cancel{x^2}y^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{24}^{3}x^{\cancel{3}\,}\cancel{y}} = \frac{2y^2}{3x}$$

مثال :

$$\frac{3x-3}{x^2-1} = \frac{3\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}$$

به مثال‌ها توجه کنید :

ج) $\dfrac{y^2-9}{3y+9} = \dfrac{\cancel{(y+3)}(y-3)}{3\cancel{(y+3)}} = \dfrac{y-3}{3}$

د) $\dfrac{8ab^7}{20a^2b^3} = \dfrac{2b^4}{5a}$

هـ) $\dfrac{b-5}{5-b} = \dfrac{\cancel{b-5}}{-\cancel{(b-5)}} = -1$

۱ـ عبارت‌های گویای زیر را ساده کنید :

الف) $\dfrac{m^2-16}{4-m} = \dfrac{\cancel{(m-4)}(m+4)}{-\cancel{(m-4)}} = \dfrac{m+4}{-1} = -(m+4)$

ب) $\dfrac{6m+18}{7m+21} = \dfrac{6\cancel{(m+3)}}{7\cancel{(m+3)}} = \dfrac{6}{7}$

ج) $\dfrac{a^2-5a-14}{a^2+a-2} = \dfrac{(a-7)\cancel{(a+2)}}{\cancel{(a+2)}(a-1)} = \dfrac{a-7}{a-1}$

د) $\dfrac{x^4-y^4}{y-x}$

۲ـ عبارت $\dfrac{a+ax}{a}$ به دو شکل ساده شده ؛ کدام درست و کدام نادرست است؟

در عبارت بالا چون بین عبارت علامت جمع است نمی توانیم a صورت و مخرج را ساده کنیم .

به عبارت دیگر همانند کسرها فقط وقتی می توانیم صورت را با مخرج ساده کنیم که در صورت و مخرج حاصل ضرب وجود داشته باشد و برای همین لازم است عبارت ها را در صورت و مخرج تجزیه کنیم تا به صورت حاصل ضرب تبدیل شوند .

برای یادآوری حتما مبحث تجزیه از فصل ۵ را یک بار دیگر مطالعه کنید .

محاسبات عبارت های گویا

۱- ضرب و تقسیم عبارت های گویا :

عبارت‌های گویا را همانند عددهای گویا می‌توان در هم ضرب یا بر هم تقسیم کرد. در مورد ای گویا قوانین زیر را داریم :

صورت × صورت

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\quad (b,d\neq 0)$$

مخرج × مخرج

و

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}\quad (b,c,d\neq 0)$$

عبارت اول ضربدر معکوس عبارت دوم

در ضمن در مورد عبارات گویا هم هرجا که امکان داشته باشد، می‌توان عبارت را ساده کرد.

مثال :

$$\frac{3x^2y^5}{4ab}\times\frac{4a^2}{3xy}=\frac{xay^4}{b}$$

مثال :

$$\frac{x^2-9}{x+1}\times\frac{x+1}{2x+6}=\frac{(x-3)(x+3)}{x+1}\times\frac{x+1}{2(x+3)}=\frac{x-3}{2}$$

به مثال های کتاب توجه کنید.

الف) $\frac{5xy^3}{8x^2z^2}\times\frac{16z^3}{15y^2}=\frac{2yz}{3x}$

ب) $\frac{x+3}{x}\times\frac{x^2}{x^2-2x-15}=\frac{x+3}{x}\times\frac{x^2}{(x+3)(x-5)}=\frac{x}{x-5}$

ج) $\frac{x-6}{x^2-12x+36}\times\frac{x^2-3x-18}{x^2+7x+12}=\frac{x-6}{(x-6)(x-6)}\times\frac{(x+3)(x-6)}{(x+3)(x+4)}=\frac{1}{x+4}$

د) $\frac{4x^2}{3xy}\div\frac{8x}{y^3}=\frac{4x^2}{3xy}\times\frac{y^3}{8x}=\frac{y^2}{6}$

هـ) $\frac{a^2-4a-5}{a^2-4a}\div\frac{a^2+3a+2}{a-4}=\frac{a^2-4a-5}{a^2-4a}\times\frac{a-4}{a^2+3a+2}$

$$=\frac{(a+1)(a-5)}{a(a-4)}\times\frac{a-4}{(a+2)(a+1)}=\frac{a-5}{a(a+2)}$$

حاصل را به ساده ترین حالت بنویسید .

الف) $\dfrac{\cancel{a^2-a-6}}{\cancel{a+3}} \times \dfrac{\cancel{a+3}}{\cancel{a^2-4}} = \dfrac{(a-3)\cancel{(a+2)}}{1} \times \dfrac{1}{(a-2)\cancel{(a+2)}} = \dfrac{a-3}{a-2}$

ج) $\dfrac{x^2+3x+2}{x+2} \div \dfrac{x+1}{x+5} = \dfrac{\cancel{(x+1)}\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} \times \dfrac{x+5}{\cancel{x+1}} = x+5$

جمع و تفریق عبارت‌های گویا

جمع و تفریق عبارت‌های گویا مشابه جمع و تفریق عددهای گویاست؛ در مورد عددهای گویا داریم :

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}$ ← مخرج مشترک
$(b\,,d\neq 0)$

و

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{b}=\dfrac{a+c}{b}$ ← مخرج ها مونه
$(b\neq 0)$

به طریق مشابه می‌توان دو عبارت گویا را جمع یا تفریق کرد.

به مثال های حل شده از کتاب به دقت توجه کنید . تمرینات را به شکلی که توضیح داده شده حل کنید.

ب) $\dfrac{3x+7}{x+2}-\dfrac{2x-3}{x+2}=\dfrac{3x+7-(2x-3)}{x+2}=\dfrac{3x+7-2x+3}{x+2}=\dfrac{x+10}{x+2}$

ج) $\dfrac{a^2-20}{a^2-4}+\dfrac{a-2}{a+2}=\dfrac{a^2-20+(a-2)^2}{a^2-4}$

$(a-2)(a+2) \qquad (a-2)(a+2)$

$=\dfrac{a^2-20+a^2-4a+4}{(a+2)(a-2)}=\dfrac{2a^2-4a-16}{(a+2)(a-2)}=\dfrac{2(a^2-2a-8)}{(a+2)(a-2)}$

$=\dfrac{2(a-4)\cancel{(a+2)}}{\cancel{(a+2)}(a-2)}=\dfrac{2(a-4)}{a-2}$

د) $\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{x-1}{x+4}=\dfrac{2(x+4)-(x-1)(x+2)}{(x+2)(x+4)}=\dfrac{2x+8-(x^2+x-2)}{(x+2)(x+4)}$

$=\dfrac{2x+8-x^2-x+2}{(x+2)(x+4)}=\dfrac{-x^2+x+10}{(x+2)(x+4)}$

تقسیم چند جمله ای ها

۱- تقسیم یک جمله بر یک جمله :　مثال : $\frac{14a^2b^4}{21b^{15}c^2a^2}=\frac{2}{3b^{11}c^2}$

۲- تقسیم چند جمله ای بر یک جمله ای : مثال :

$$\frac{4a^3+2b^4-c^5}{12a^2b^3c^5}=\frac{4a^3}{12a^2b^3c^5}+\frac{2b^4}{12a^2b^3c^5}-\frac{c^5}{12a^2b^3c^5}=\frac{a}{3b^3c^5}+\frac{b}{6a^2c^5}-\frac{1}{12a^2b^3}$$

۳- تقسیم چند جمله بر چند جمله :　مثال :

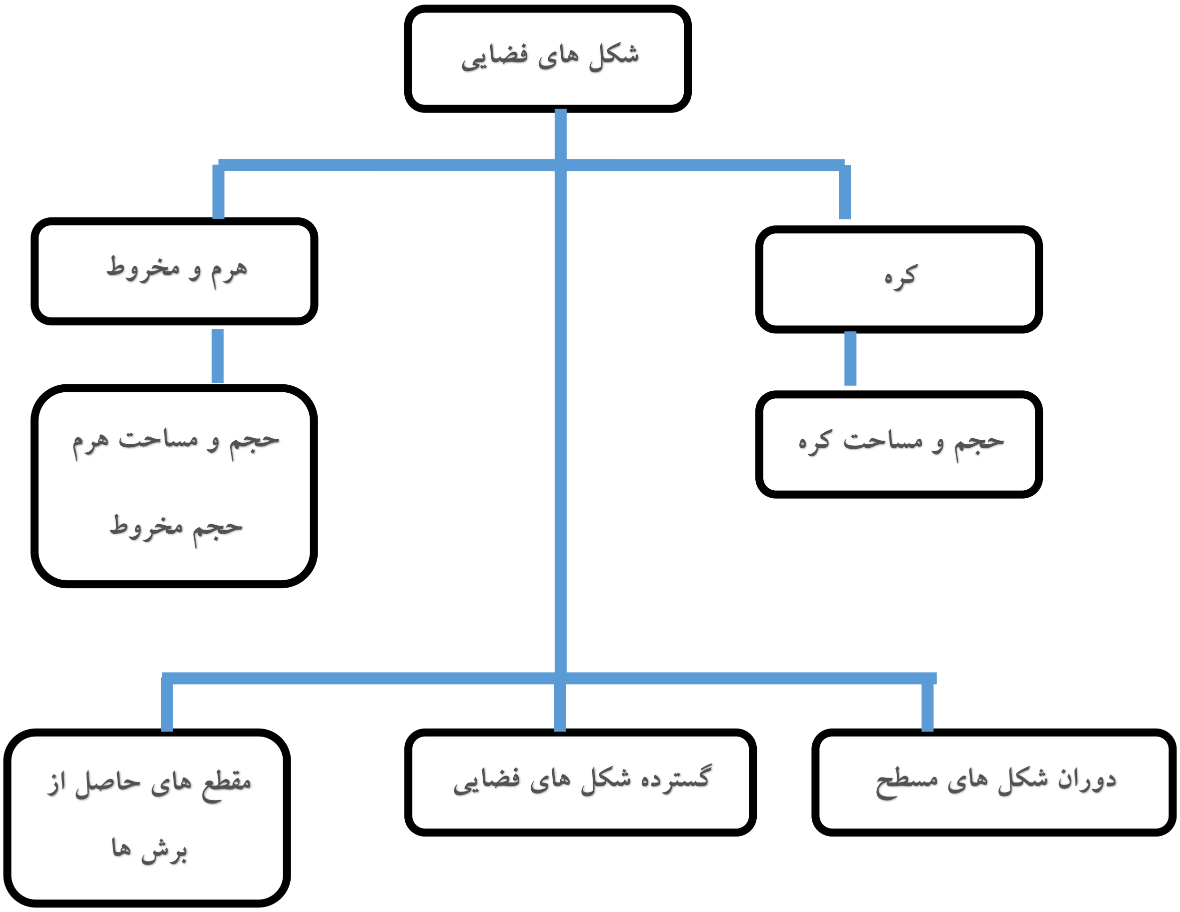
خارج قسمت و باقیماندهٔ تقسیم زیر را مشخص کنید و درستی عمل تقسیم را با نوشتن روابط تقسیم نشان دهید.

$$-3x^4+4x^6+x^2+5 \;\Big|\; 1-x^3$$

$$\begin{array}{l|l}
4x^6-3x^4+x^2+5 & -x^3+1 \\
\cline{2-2}
\underline{-4x^6+4x^3} & -4x^3+3x-4 \\
\quad -3x^4+4x^3+x^2+5 & \\
\quad \underline{+3x^4-3x} & \\
\qquad 4x^3+x^2-3x+5 & \\
\qquad \underline{-4x^3+4} & \\
\qquad\quad x^2-3x+9 &
\end{array}$$

$$4x^6-3x^4+x^2+5=(1-x^3)(-4x^3+3x-4)+x^2-3x+9$$

فصل ۸



فرمول حجم کره : $V = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$

فرمول مساحت کره : $S = ۴\pi r^{۲}$

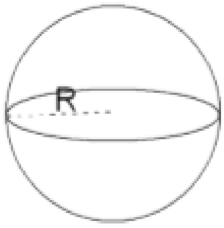
فرمول مساحت نیم کره : $S = ۲\pi r^{۲}$

فرمول هر حجم هرم با مساحت قاعده ی S و ارتفاع h : $V = \frac{۱}{۳}Sh$

فرمول مساحت هرم : مساحت وجه های جانبی + مساحت قاعده ی هرم

فرمول حجم مخروط : $V = \frac{۱}{۳}Sh = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h$

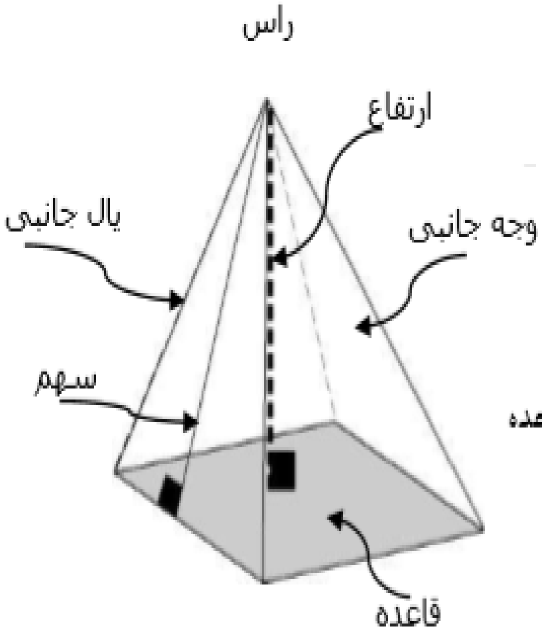
کره : مجموعه ای از نقاط در فضا است که از یک نقطه ی ثابت به یک فاصله باشند . نقطه ی ثابت را مرکز و فاصله ی ثابت را شعاع کره می نامیم .



نکته : از دوران یک دایره یا نیم دایره حول قطرش کره حاصل می شود .

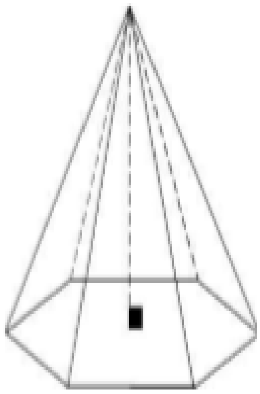
مساحت کره ای به شعاع R = $۴\pi R^۲$ حجم کره ای به شعاع R = $\frac{۴}{۳}\pi R^۳$

نکته : اگر شعاع کره n برابر شود مساحت $n^۲$ و حجم کره $n^۳$ برابر می شود .



هرم منتظم :

اگر قاعده ی یک هرم چند ضلعی منتظم باشد و ارتفاع بر مرکز قاعده عمود باشد هرم منتظم نام دارد .



در هرم منتظم :

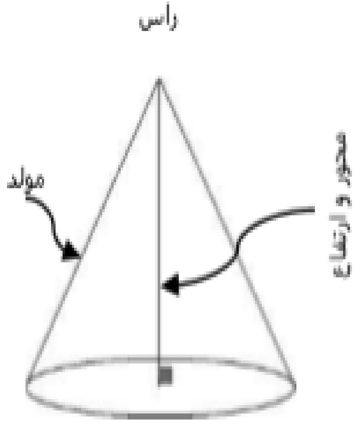
الف- یال های جانبی با هم برابرند .

ب- سهم ها با هم برابرند .

ج- وجه های جانبی ، مثلث های متساوی الساقین و هم نهشت هستند.

مخروط ،

شکلی شبیه هرم است که قاعده ی آن به جای چند ضلعی دایره است .



- پاره خطی که راس مخروط را به مرکز قاعده ی آن وصل می کند محور مخروط نام دارد .
- اگر محور بر قاعده عمود باشد مخروط را قائم و در غیر اینصورت مخروط را مایل می گوییم .

نکته:

- در مخروط اگر ارتفاع n برابر شود اما شعاع قاعده ثابت بماند حجم مخروط n برابر می شود .
- در مخروط اگر شعاع قاعده n برابر و ارتفاع ثابت باشد حجم n^2 برابر می شود .
- در مخروط اگر هم شعاع و هم ارتفاع n برابر شوند حجم مخروط n^3 برابر می شود .

موفق باشید – محمود رضا میرزایی