Vers une hiérarchie uniforme des hyperopérations

Matthieu Marchand

1. Motivation

La hiérarchie classique des **hyperopérations** définit une suite d'opérateurs binaires $H_n(a,b)$ par récurrence sur n :

$$ H_0(a,b) = b + 1, \qquad H_{n+1}(a,0) = \begin{cases} a & \text{si } n = 0,\\ 0 & \text{si } n = 1,\\ 1 & \text{si } n \ge 2, \end{cases}$$

et pour $b > 0$:

$$H_{n+1}(a,b) = H_n(a, H_{n+1}(a,b-1))$$

Cette définition, courante dans la littérature ([Rubtsov & Romerio, 1999]), engendre :

- $H_1(a,b) = a + b$ (addition)
- $H_2(a,b) = a \times b$ (multiplication)
- $H_3(a,b) = a^b$ (exponentiation)

Cependant, la valeur initiale $H_0(a,b)=b+1$ ne découle pas de la récurrence : elle est **ajoutée à la main**.
Le niveau 0 ne s'intègre donc pas naturellement dans le schéma d'itération.

---

2. Principe de cohérence structurelle

Le principe général de **cohérence récursive** exige que la règle de récurrence soit **valable pour tous les indices**.
Ce principe découle de la **théorie de la récurrence primitive** (Gödel, 1931 ; Kleene, 1952), où la base doit être du même type que la règle d'induction.

Par analogie avec la **théorie de l'itération** (Aczél, 1966 ; Mac Lane, 1971), pour toute fonction f :

$$ f^0 = \mathrm{id}, \qquad f^{n+1} = f \circ f^n. $$

L'itération 0 d'une fonction est donc toujours l'**identité** sur son domaine.
Il est alors naturel que le niveau 0 des hyperopérations corresponde à une opération **identité** : la projection.

---

3. Définition uniforme proposée

On définit pour tout $n \ge 0$:

$$ \boxed{ \begin{aligned} H(0,a,b) &= b,\\ H(n+1,a,0) &= a,\\ H(n+1,a,b+1) &= H(n,a,H(n+1,a,b)). \end{aligned} } $$

Cette définition est **structurellement uniforme** : elle rend la récurrence valide pour tout $n \ge 0$, sans cas particulier.

---

4. Vérification des premiers niveaux

Niveau	Définition	Résultat	Référence
0	(H(0,a,b)=b)	projection	identité d'itération ([Aczél 1966])
1	(H(1,a,b)=a+b)	addition	([Rubtsov & Romerio 1999])
2	(H(2,a,b)=a\times b)	multiplication	
3	(H(3,a,b)=a^b)	exponentiation	

Le paramètre (b) conserve son rôle d'**indice d'itération** pour tous les niveaux, ce qui rejoint la lecture de Goodstein (1947) et Conway (1981).

---

5. Interprétation conceptuelle

Cette hiérarchie respecte deux principes fondamentaux :

1. **Uniformité des niveaux** — chaque (H_{n+1}) est une *itération interne* de (H_n) selon la même récurrence ([Trnková 1974]).
2. **Naturalité de l'identité initiale** — le niveau 0 correspond à l'objet terminal de l'itération ([Mac Lane 1971]).

La hiérarchie devient ainsi entièrement cohérente et continue :
aucun cas particulier n'interrompt la structure.

---

6. Discussion

Le déplacement d'un cran de la hiérarchie donne :

Niveau (standard)	Niveau (uniforme)	Opération
0	—	Successeur
1	0	Projection
2	1	Addition
3	2	Multiplication
4	3	Exponentiation
…	…	…

Cette version :

- rend la récurrence **totalement régulière** ;
- clarifie le rôle du second argument (b) comme **taille du problème** ;
- aligne la construction sur les principes d'**itération fonctionnelle** classiques.

---

7. Sur la non-nécessité du successeur

Dans la définition classique des hyperopérations, le **successeur** ($b \mapsto b + 1$) constitue le point de départ arbitraire :

$$H_0(a,b) = b + 1.$$

Ce choix a pour unique but d'amorcer la récurrence, mais il **n'est pas dérivé du schéma lui-même** : il est ajouté de manière externe.
Autrement dit, la hiérarchie standard repose sur un **cas de base non structurel**.

Dans la version uniforme proposée ici :

$$H(0,a,b) = b, \qquad H(n+1,a,0) = a, \qquad H(n+1,a,b+1) = H(n,a,H(n+1,a,b)),$$

le **successeur émerge naturellement** comme un cas particulier du niveau suivant :

$$H(1,1,b) = 1 + b = b + 1.$$

Ainsi, le successeur n'est **plus une opération primitive**, mais simplement une instance de l'addition.

Conséquence conceptuelle

Le niveau 0 (projection) suffit à fonder la hiérarchie entière :

- le successeur devient un **cas dérivé**,
- la récurrence devient **parfaitement homogène**,
- la hiérarchie repose sur un **principe unique d'itération**.

Cette approche rend donc le successeur **non nécessaire** en tant que base indépendante :
il apparaît naturellement comme la **première émergence non triviale** de la structure d'itération.
En termes catégoriques, la projection ($b \mapsto b$) joue le rôle de **morphisme identitaire initial**, (TODO rajouter citations pour cette section) dont toutes les opérations supérieures se déduisent par clôture itérative.

8. Références

- **Aczél, J.** (1966). *Lectures on Functional Equations and Their Applications*. Academic Press.
- **Conway, J. H.** (1981). *On Numbers and Games*. Academic Press.
- **Drake, F. R.** (1974). *Set Theory: An Introduction to Large Cardinals*. North-Holland.
- **Goodstein, R. L.** (1947). “Transfinite Ordinals in Recursive Number Theory.” *Journal of Symbolic Logic*, 12, 123–129.
- **Kleene, S. C.** (1952). *Introduction to Metamathematics*. North-Holland.
- **Mac Lane, S.** (1971). *Categories for the Working Mathematician*. Springer.
- **Rubtsov, V. A., & Romerio, S.** (1999). “The Hyperoperation Sequence.” *arXiv:math/9904172*.
- **Trnková, K.** (1974). “Iterative Algebras.” *Algebra Universalis*, 4(2), 159–167.
