Algoritmi e Strutture Dati

Strutture dati speciali

Alberto Montresor

Università di Trento

2019/03/12

Sommario

Introduzione

Strutture dati viste finora

- Sequenze, insiemi e dizionari

Strutture "speciali"

- Se non tutte le operazioni sono necessarie, è possibile realizzare strutture dati più efficienti, "specializzate" per particolare compiti
- Le operazioni base (inserimento, cancellazione, lettura, etc.) possono non essere sufficienti: a volte servono operazioni speciali

Esempi

- Code con priorità
- Insiemi disgiunti
- Interval/segment tree
- K-D tree
- Trie
- Fenvick Tree
- Merkle tree
- Secondo Wikipedia, 338 pagine nella categoria strutture dati...

Code con priorità

Definizione (Priority Queue)

Una coda con priorità è una struttura dati astratta, simile ad una coda, in cui ogni elemento inserito possiede una sua "priorità"

- Min-priority queue: estrazione per valori crescenti di priorità
- Max-priority queue: estrazione per valori decrescenti di priorità

Operazioni permesse

- Inserimento in coda
- Estrazione dell'elemento con priorità di valore min/max
- Modifica priorità (decremento/incremento) di un elemento inserito

Specifica

MINPRIORITYQUEUE

% Crea una coda con priorità, vuota
MinPriorityQueue()

% Restituisce **true** se la coda con priorità è vuota
boolean isEmpty()

% Restituisce l'elemento minimo di una coda con priorità non vuota
ITEM min()

% Rimuove e restituisce il minimo da una coda con priorità non vuota
ITEM deleteMin()

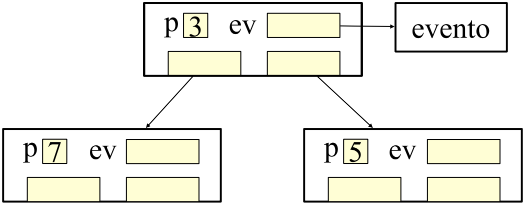
% Inserisce l'elemento x con priorità p nella coda con priorità. Restituisce
% un oggetto PRIORITYITEM che identifica x all'interno della coda
PRIORITYITEM insert(ITEM x, **int** p)

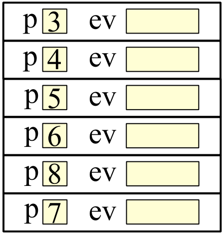
% Diminuisce la priorità dell'oggetto identificato da y portandola a p
decrease(PRIORITYITEM y, **int** p)

Applicazioni

Esempio di utilizzo: Simulatore event-driven

- Ad ogni evento è associato un timestamp di esecuzione
- Ogni evento può generare nuovi eventi, con timestamp arbitrari
- Una coda con min-priorità può essere utilizzata per eseguire gli eventi in ordine di timestamp





Applicazioni nelle prossime lezioni

- Algoritmo di Dijkstra
- Codifica di Huffmann
- Algoritmo di Prim per gli alberi di copertura di peso minimo

Implementazioni

Metodo	Lista/vettore non ordinato	Lista Ordinata	Vettore Ordinato	Albero RB
min()	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(\log n)$
deleteMin()	$O(n)$	$O(1)$	$O(n)$	$O(\log n)$
insert()	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(\log n)$
decrease()	$O(n)$	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$

Heap

Una struttura dati speciale che associa

- i vantaggi di un albero (esecuzione in tempo $O(\log n)$), e
- i vantaggi di un vettore (memorizzazione efficiente)

Heap

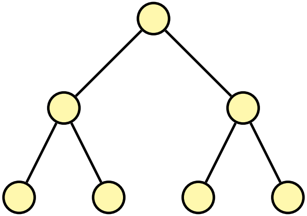
Storia

- Struttura dati inventata da J. Williams nel 1964
- Utilizzata per implementare un nuovo algoritmo di ordinamento: HeapSort
- Williams intuì subito che poteva essere usata per altri scopi
- Seguiamo l'approccio storico nel presentare gli heap
  - Prima HeapSort
  - Poi Code con priorità

Alberi binari

Albero binario perfetto

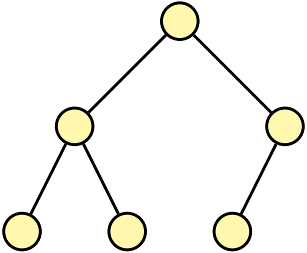
- Tutte le foglie hanno la stessa profondità h
- Nodi interni hanno tutti grado 2
- Dato il numero di nodi n, ha altezza $h = \lfloor \log n \rfloor$
- Dato l'altezza h, ha numeri di nodi $n = 2^{h+1} - 1$



Alberi binari

Albero binario completo

- Tutte le foglie hanno profondità h o $h-1$
- Tutti i nodi a livello h sono “accatastati” a sinistra
- Tutti i nodi interni hanno grado 2, eccetto al più uno
- Dato il numero di nodi n, ha altezza $h = \lfloor \log n \rfloor$



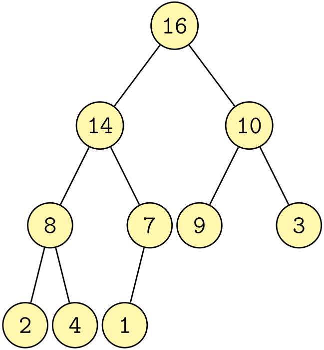
Alberi binari heap

Proprietà heap

Un albero max-heap (min-heap) è un albero binario completo tale che il valore memorizzato in ogni nodo è maggiore (minore) dei valori memorizzati nei suoi figli.

Note

Le definizioni e gli algoritmi per alberi max-heap sono simmetrici rispetto agli algoritmi per alberi min-heap



Alberi binari heap

- Un albero heap non impone una relazione di ordinamento totale fra i figli di un nodo
- Un albero heap è un ordinamento parziale
  - *Riflessivo*: Ogni nodo è $\geq$ di se stesso
  - *Antisimmetrico*: se $n \geq m$ e $m \geq n$, allora $m = n$
  - *Transitivo*: se $n \geq m$ e $m \geq r$, allora $n \geq r$
- Ordinamenti parziali
  - Nozione più debole di un ordinamento totale...
  - ... ma più semplice da costruire

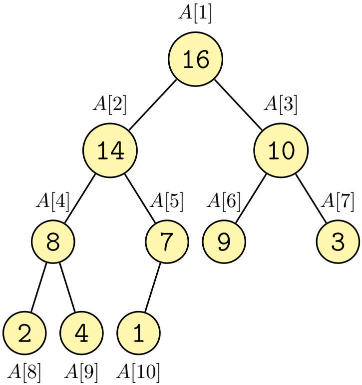
Alberi binari heap

Vettore heap

Un albero heap può essere rappresentato tramite un vettore heap

Memorizzazione ($A[1 \ldots n]$)

Radice	$root() = 1$
Padre nodo i	$p(i) = \lfloor i/2 \rfloor$
Figlio sx nodo i	$l(i) = 2i$
Figlio dx nodo i	$r(i) = 2i + 1$



$A[1]$	$A[2]$	$A[3]$	$A[4]$	$A[5]$	$A[6]$	$A[7]$	$A[8]$	$A[9]$	$A[10]$
16	14	10	8	7	9	3	2	4	1

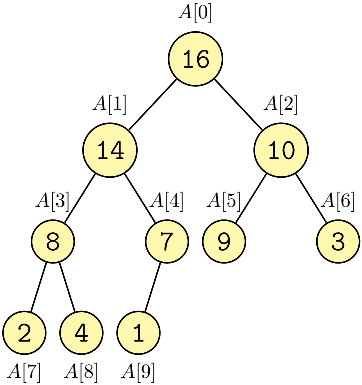
Alberi binari heap

Vettore heap

Un albero heap può essere rappresentato tramite un vettore heap

Memorizzazione ($A[0 \ldots n-1]$)

Radice	$root() = 0$
Padre nodo i	$p(i) = \lfloor (i-1)/2 \rfloor$
Figlio sx nodo i	$l(i) = 2i + 1$
Figlio dx nodo i	$r(i) = 2i + 2$



$A[0]$	$A[1]$	$A[2]$	$A[3]$	$A[4]$	$A[5]$	$A[6]$	$A[7]$	$A[8]$	$A[9]$
16	14	10	8	7	9	3	2	4	1

Alberi binari heap

Proprietà max-heap su vettore

$$A[i] \geq A[l(i)], A[i] \geq A[r(i)]$$

Proprietà min-heap su vettore

$$A[i] \leq A[l(i)], A[i] \leq A[r(i)]$$

HeapSort

Organizzazione heapsort()

Ordina un max-heap "in-place", prima costruendo un max-heap nel vettore e poi spostando l'elemento max in ultima posizione, ripristinando la proprietà max-heap

- heapBuild()
  Costruisce un max-heap a partire da un vettore non ordinato
- maxHeapRestore()
  Ripristina la proprietà max-heap

maxHeapRestore()

Input

Un vettore A e un indice i, tale per cui gli alberi binari con radici $l(i)$ e $r(i)$ sono max-heap

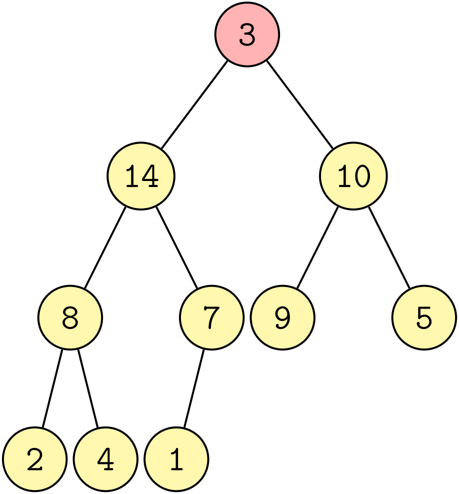
Osservazione

- E' possibile che $A[i]$ sia minore di $A[l(i)]$ o $A[r(i)]$
- In altre parole, non è detto che il sottoalbero con radice i sia un max-heap

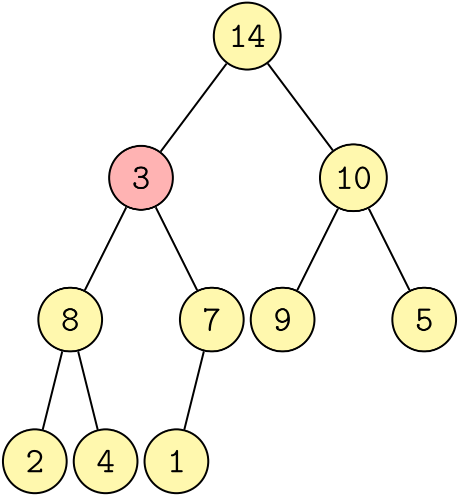
Goal

Modificare in-place il vettore A in modo tale che l'albero binario con radice i sia un max-heap

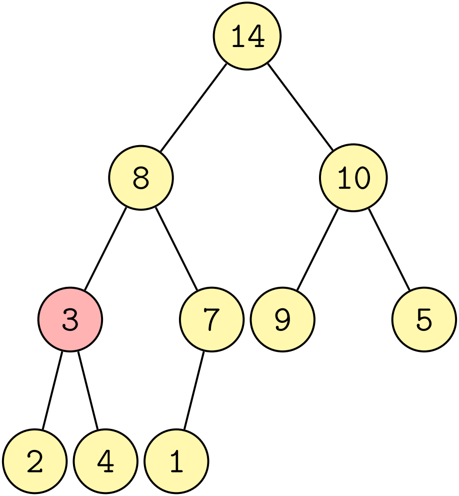
Esempio



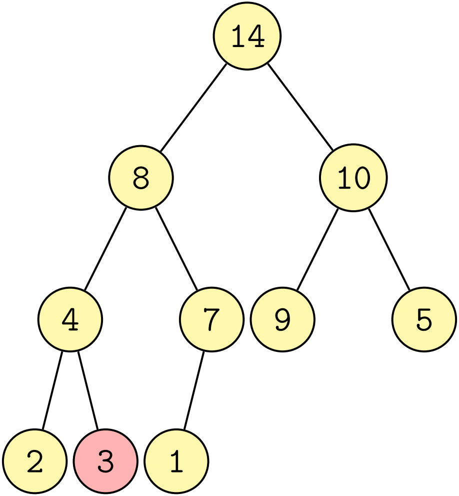
Esempio



Esempio



Esempio



Ripristinare la proprietà max-heap

maxHeapRestore(Item[] A, **int** i, **int** dim)

---

int $max = i$
if $l(i) \leq dim$ **and** $A[l(i)] > A[max]$ **then**
  $max = l(i)$
if $r(i) \leq dim$ **and** $A[r(i)] > A[max]$ **then**
  $max = r(i)$
if $i \neq max$ **then**
  $A[i] \leftrightarrow A[max]$
  maxHeapRestore(A, max, dim)

Complessità computazionale

Qual è la complessità computazionale di maxHeapRestore()?

- Ad ogni chiamata, vengono eseguiti $O(1)$ confronti
- Se il nodo i non è massimo, si richiama ricorsivamente maxHeapRestore() su uno dei figli
- L'esecuzione termina quando si raggiunge una foglia
- L'altezza dell'albero è pari a $\lfloor \log n \rfloor$

Complessità

$$T(n) = O(\log n)$$

Dimostrazione correttezza (per induzione sull'altezza)

Teorema

Al termine dell'esecuzione, l'albero radicato in $A[i]$ rispetta la proprietà max-heap

Caso base: altezza $h = 0$

Se $h = 0$, l'albero è dato da un solo nodo che rispetta la proprietà heap

Ipotesi induttiva

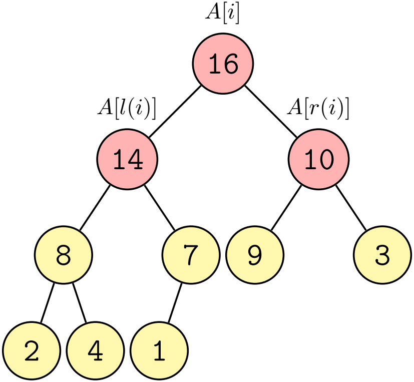
L'algoritmo funziona correttamente su tutti gli alberi di altezza minore di h

Dimostrazione correttezza (per induzione sull'altezza)

Induzione - Altezza h - Caso 1

$A[i] \geq A[l(i)], A[i] \geq A[r(i)]$:

- L'albero radicato in $A[i]$ rispetta la proprietà max-heap
- L'algoritmo termina (CVD)

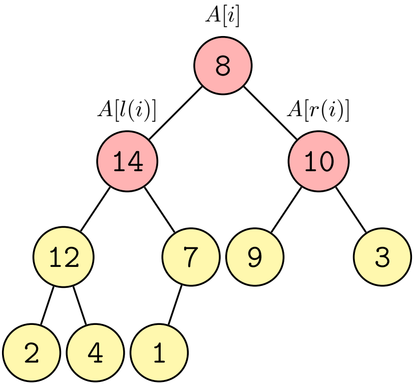


Dimostrazione correttezza (per induzione sull'altezza)

Induzione - Altezza h - Caso 2

$A[l(i)] > A[i], A[l(i)] > A[r(i)]$:

- Viene fatto uno scambio $A[i] \leftrightarrow A[l(i)]$
- Dopo lo scambio, $A[i] \geq A[l(i)], A[i] \geq A[r(i)]$
- Il sottoalbero $A[r(i)]$ è inalterato e rispetta la proprietà heap
- Il sottoalbero $A[l(i)]$ può aver perso la proprietà heap
- Si applica maxHeapRestore() ricorsivamente su di $A[l(i)]$, che ha altezza minore di h



Passo induttivo - Caso 3

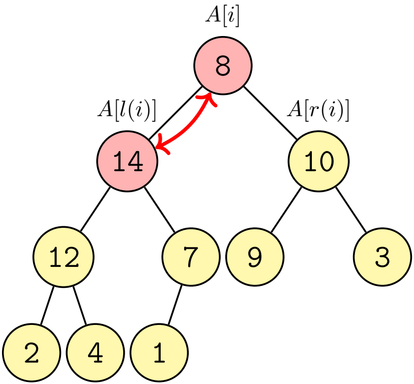
Simmetrico rispetto al Caso 2

Dimostrazione correttezza (per induzione sull'altezza)

Induzione - Altezza h - Caso 2

$A[l(i)] > A[i], A[l(i)] > A[r(i)]$:

- Viene fatto uno scambio $A[i] \leftrightarrow A[l(i)]$
- Dopo lo scambio, $A[i] \geq A[l(i)], A[i] \geq A[r(i)]$
- Il sottoalbero $A[r(i)]$ è inalterato e rispetta la proprietà heap
- Il sottoalbero $A[l(i)]$ può aver perso la proprietà heap
- Si applica maxHeapRestore() ricorsivamente su di $A[l(i)]$, che ha altezza minore di h



Passo induttivo - Caso 3

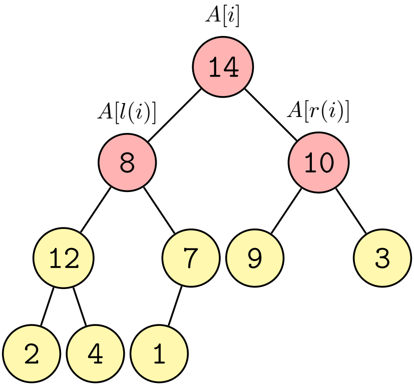
Simmetrico rispetto al Caso 2

Dimostrazione correttezza (per induzione sull'altezza)

Induzione - Altezza h - Caso 2

$A[l(i)] > A[i], A[l(i)] > A[r(i)]$:

- Viene fatto uno scambio $A[i] \leftrightarrow A[l(i)]$
- Dopo lo scambio, $A[i] \geq A[l(i)], A[i] \geq A[r(i)]$
- Il sottoalbero $A[r(i)]$ è inalterato e rispetta la proprietà heap
- Il sottoalbero $A[l(i)]$ può aver perso la proprietà heap
- Si applica maxHeapRestore() ricorsivamente su di $A[l(i)]$, che ha altezza minore di h



Passo induttivo - Caso 3

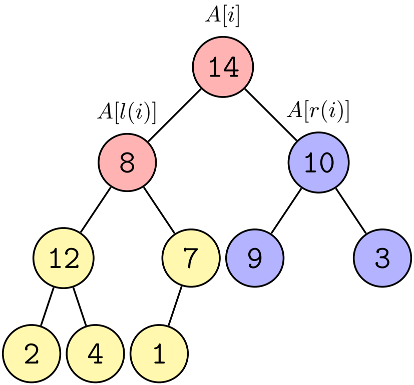
Simmetrico rispetto al Caso 2

Dimostrazione correttezza (per induzione sull'altezza)

Induzione - Altezza h - Caso 2

$A[l(i)] > A[i], A[l(i)] > A[r(i)]$:

- Viene fatto uno scambio $A[i] \leftrightarrow A[l(i)]$
- Dopo lo scambio, $A[i] \geq A[l(i)], A[i] \geq A[r(i)]$
- Il sottoalbero $A[r(i)]$ è inalterato e rispetta la proprietà heap
- Il sottoalbero $A[l(i)]$ può aver perso la proprietà heap
- Si applica maxHeapRestore() ricorsivamente su di $A[l(i)]$, che ha altezza minore di h



Passo induttivo - Caso 3

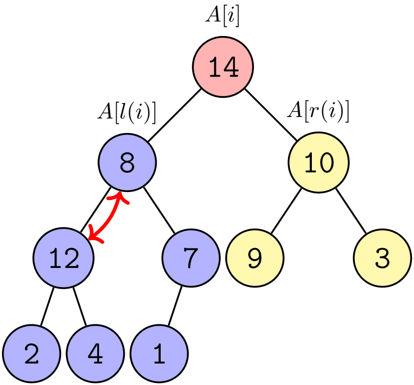
Simmetrico rispetto al Caso 2

Dimostrazione correttezza (per induzione sull'altezza)

Induzione - Altezza h - Caso 2

$A[l(i)] > A[i], A[l(i)] > A[r(i)]$:

- Viene fatto uno scambio $A[i] \leftrightarrow A[l(i)]$
- Dopo lo scambio, $A[i] \geq A[l(i)], A[i] \geq A[r(i)]$
- Il sottoalbero $A[r(i)]$ è inalterato e rispetta la proprietà heap
- Il sottoalbero $A[l(i)]$ può aver perso la proprietà heap
- Si applica maxHeapRestore() ricorsivamente su di $A[l(i)]$, che ha altezza minore di h



Passo induttivo - Caso 3

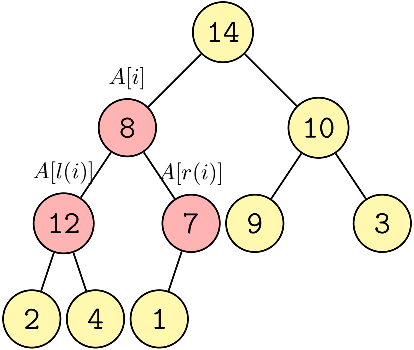
Simmetrico rispetto al Caso 2

Dimostrazione correttezza (per induzione sull'altezza)

Induzione - Altezza h - Caso 2

$A[l(i)] > A[i], A[l(i)] > A[r(i)]$:

- Viene fatto uno scambio $A[i] \leftrightarrow A[l(i)]$
- Dopo lo scambio, $A[i] \geq A[l(i)], A[i] \geq A[r(i)]$
- Il sottoalbero $A[r(i)]$ è inalterato e rispetta la proprietà heap
- Il sottoalbero $A[l(i)]$ può aver perso la proprietà heap
- Si applica maxHeapRestore() ricorsivamente su di $A[l(i)]$, che ha altezza minore di h



Passo induttivo - Caso 3

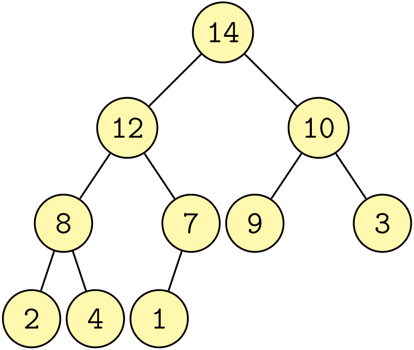
Simmetrico rispetto al Caso 2

Dimostrazione correttezza (per induzione sull'altezza)

Induzione - Altezza h - Caso 2

$A[l(i)] > A[i], A[l(i)] > A[r(i)]$:

- Viene fatto uno scambio $A[i] \leftrightarrow A[l(i)]$
- Dopo lo scambio, $A[i] \geq A[l(i)], A[i] \geq A[r(i)]$
- Il sottoalbero $A[r(i)]$ è inalterato e rispetta la proprietà heap
- Il sottoalbero $A[l(i)]$ può aver perso la proprietà heap
- Si applica maxHeapRestore() ricorsivamente su di $A[l(i)]$, che ha altezza minore di h



Passo induttivo - Caso 3

Simmetrico rispetto al Caso 2

heapBuild()

Principio di funzionamento

- Sia $A[1 \ldots n]$ un vettore da ordinare
- Tutti i nodi $A[\lfloor n/2 \rfloor + 1 \ldots n]$ sono foglie dell'albero e quindi heap contenenti *un* elemento
- La procedura heapBuild()
  - attraversa i restanti nodi dell'albero, a partire da $\lfloor n/2 \rfloor$ fino ad 1
  - esegue maxHeapRestore() su ognuno di essi

---

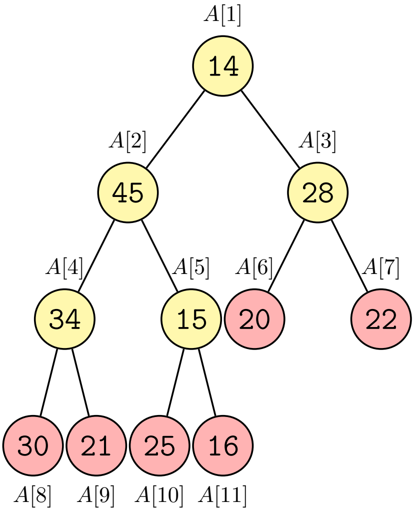
heapBuild(Item[ ] A, **int** n)

---

for $i = \lfloor n/2 \rfloor$ **downto** 1 **do**
  maxHeapRestore(A, i, n)

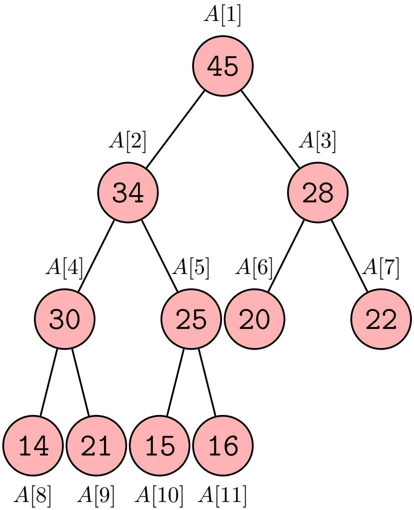
Esempio

- I nodi $A[\lfloor n/2 \rfloor + 1 \ldots n]$ sono foglie dell'albero e quindi heap di un elemento
- Per ogni posizione da $\lfloor n/2 \rfloor$ fino ad 1, si esegue maxHeapRestore()



Esempio

- I nodi $A[\lfloor n/2 \rfloor + 1 \ldots n]$ sono foglie dell'albero e quindi heap di un elemento
- Per ogni posizione da $\lfloor n/2 \rfloor$ fino ad 1, si esegue maxHeapRestore()



Correttezza

Invariante di ciclo

All'inizio di ogni iterazione del ciclo **for**, i nodi $[i+1, \ldots, n]$ sono radice di uno heap.

Dimostrazione – Inizializzazione

- All'inizio, $i = \lfloor n/2 \rfloor$.
- Supponiamo che $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ non sia una foglia
- Quindi ha almeno il figlio sinistro: $2\lfloor n/2 \rfloor + 2$
- Questo ha indice $n+1$ oppure $n+2$, assurdo perché n è la dimensione massima
- La dimostrazione vale per tutti gli indici successivi

Correttezza

Invariante di ciclo

All'inizio di ogni iterazione del ciclo **for**, i nodi $[i+1,\ldots,n]$ sono radice di uno heap.

Dimostrazione – Conservazione

- E' possibile applicare maxHeapRestore al nodo i, perché $2i < 2i+1 \leq n$ sono entrambi radici di heap
- Al termine dell'iterazione, tutti i nodi $[i\ldots n]$ sono radici di heap

Dimostrazione – Conclusione

- Al termine, $i = 0$. Quindi il nodo 1 è radice di uno heap.

Complessità

```
heapBuild(Item[] A, int n)
for i = ⌊n/2⌋ downto 1 do
    maxHeapRestore(A, i, n)
```

Quant'è la complessità di heapBuild()?

- Limite superiore: $T(n) = O(n \log n)$
- Limite inferiore: $T(n) = \Omega(n \log n)$?

Complessità

Le operazioni maxHeapRestore() vengono eseguite un numero decrescente di volte su heap di altezza crescente

Altezza	**# Volte**
0	$\lfloor n/2 \rfloor$
1	$\lfloor n/4 \rfloor$
2	$\lfloor n/8 \rfloor$
...	...
h	$\lfloor n/2^{h+1} \rfloor$

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leq \sum_{h=1}^{\lfloor n \rfloor} \frac{n}{2^{h+1}} h \\
&= n \sum_{h=1}^{\lfloor n \rfloor} \left(\frac{1}{2}\right)^{h+1} h \\
&= n/2 \sum_{h=1}^{\lfloor n \rfloor} \left(\frac{1}{2}\right)^{h} h \\
&\leq n/2 \sum_{h=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{h} h \quad = n = O(n)
\end{aligned}
$$

Formula: $\displaystyle\sum_{h=1}^{+\infty} hx^h = \frac{x}{(1-x)^2}$, per $x < 1$

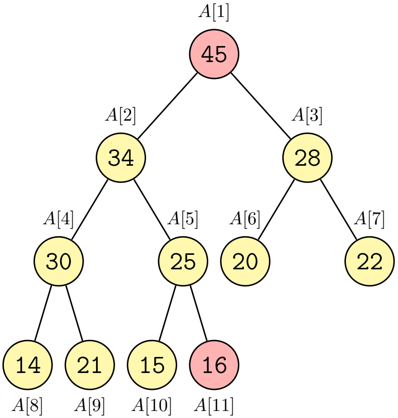
heapSort()

Principio di funzionamento

- L'elemento in prima posizione contiene il massimo
- Viene collocato in fondo
- L'elemento in fondo viene spostato in testa
- Si chiama maxHeapRestore() per ripristinare la situazione
- La dimensione dello heap viene progressivamente ridotta (indice i)

```
heapSort(Item[] A, int n)
heapBuild(A, n)
for i = n downto 2 do
    A[1] ↔ A[i]
    maxHeapRestore(A, 1, i − 1)
```

Esempio

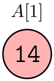


A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]	A[9]	A[10]	A[11]
45	34	28	30	25	20	22	14	21	15	16

heapSort(Item[] A, **int** n)

heapBuild(A, n)
for $i = n$ **downto** 2 **do**
  $A[1] \leftrightarrow A[i]$
  maxHeapRestore$(A, 1, i-1)$

Esempio



heapSort(Item[] A, **int** n)

---

heapBuild(A, n)
for $i = n$ **downto** 2 **do**
    $A[1] \leftrightarrow A[i]$
    maxHeapRestore$(A, 1, i - 1)$

$A[1]$	$A[2]$	$A[3]$	$A[4]$	$A[5]$	$A[6]$	$A[7]$	$A[8]$	$A[9]$	$A[10]$	$A[11]$
14	15	16	20	21	22	25	28	30	34	45

Complessità

Complessità

- La chiamata heapBuild() costa $\Theta(n)$
- La chiamata maxHeapRestore() costa $\Theta(\log i)$ in un heap con i elementi
- Viene eseguita con i che varia da 2 a n

$$T(n) = \sum_{i=2}^{n} \log i + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

Correttezza

Invariante di ciclo

Al passo i

- il sottovettore $A[i+1 \dots n]$ è ordinato;
- $A[1 \dots i] \leq A[i+1 \dots n]$
- $A[1]$ è la radice di un vettore heap di dimensione i.

Dimostrazione

Per esercizio

Implementazione code con priorità

Quale versione

Implementiamo una min-priority queue, in quanto negli esempi che vedremo in seguito daremo la precedenza a elementi con priorità minore

Dettagli implementativi

- Vedremo come strutturare un vettore che memorizza coppie $\langle$ *valore*, *priorità* $\rangle$
- Vedremo come implementare minHeapRestore()
- Vedremo come implementare i singoli metodi

Memorizzazione

PriorityItem	
int *priority*	% Priorità
Item *value*	% Elemento
int *pos*	% Posizione nel vettore heap

swap(PriorityItem[ ] H, **int** i, **int** j)

$H[i] \leftrightarrow H[j]$
$H[i].pos = i$
$H[j].pos = j$

Inizializzazione

PRIORITYQUEUE

int *capacity* % Numero massimo di elementi nella coda
int *dim* % Numero attuale di elementi nella coda
PRIORITYITEM[] H % Vettore *heap*

```
PRIORITYQUEUE PriorityQueue(int n)
    PRIORITYQUEUE t = new PRIORITYQUEUE
    t.capacity = n
    t.dim = 0
    t.H = new PRIORITYITEM[1 ... n]
    return t
```

Inserimento

$\textsc{PriorityItem}$ $\mathsf{insert}(\textsc{Item}\ x, \textbf{int}\ p)$

precondition: $dim < capacity$

$dim = dim + 1$
$H[dim] = \textbf{new}\ \textsc{PriorityItem}()$
$H[dim].value = x$
$H[dim].priority = p$
$H[dim].pos = dim$
$\textbf{int}\ i = dim$
$\textbf{while}\ i > 1\ \textbf{and}\ H[i].priority < H[p(i)].priority\ \textbf{do}$
  $\mathsf{swap}(H, i, p(i))$
  $i = p(i)$
$\textbf{return}\ H[i]$

minHeapRestore()

minHeapRestore(PRIORITYITEM[] A, **int** i, **int** dim)

int $min = i$
if $l(i) \leq dim$ **and** $A[l(i)].priority < A[min].priority$ **then**
  $min = l(i)$
if $r(i) \leq dim$ **and** $A[r(i)].priority < A[min].priority$ **then**
  $min = r(i)$
if $i \neq min$ **then**
  swap(A, i, min)
  minHeapRestore(A, min, dim)

Cancellazione / lettura minimo

Item deleteMin()

precondition: $dim > 0$

swap($H, 1, dim$)
$dim = dim - 1$
minHeapRestore($H, 1, dim$)
return $H[dim + 1].value$

Item min()

precondition: $dim > 0$

return $H[1].value$

Decremento priorità

decrease(PriorityItem x, **int** p)

precondition: $p < x.priority$

$x.priority = p$
int $i = x.pos$
while $i > 1$ **and** $H[i].priority < H[p(i)].priority$ **do**
  swap$(H, i, p(i))$
  $i = p(i)$

Complessità

- Tutte le operazioni che modificano gli heap sistemano la proprietà heap
  - lungo un cammino radice-foglia (deleteMin())
  - oppure lungo un cammino nodo-radice (insert(), decrease())
- Poichè l'altezza è $\lfloor \log n \rfloor$, il costo di tali operazioni è $O(\log n)$

Operazione	**Costo**
insert()	$O(\log n)$
deleteMin()	$O(\log n)$
min()	$\Theta(1)$
decrease()	$O(\log n)$

Insiemi disgiunti – Merge-Find Set

Motivazioni

- In alcune applicazioni siamo interessati a gestire una collezione $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ di insiemi dinamici disgiunti
  - $\forall i, j : i \neq j \Rightarrow S_i \cap S_j = \emptyset$
  - $\cup_{i=1}^{k} S_i = \mathcal{S}$, dove $n = |\mathcal{S}|$
- Esempio: componenti di un grafo

Operazioni fondamentali

- Creare n insiemi disgiunti, ognuno composto da un unico elemento
- merge(): Unire più insiemi
- find(): Identificare l'insieme a cui appartiene un elemento

Insiemi disgiunti

Rappresentante

- Ogni insieme è identificato da un rappresentante univoco
- Il rappresentante dell'insieme S_i è un qualunque membro di S_i
- Operazioni di ricerca del rappresentante su uno stesso insieme devono restituire sempre lo stesso oggetto
- Solo in caso di unione con altro insieme il rappresentante può cambiare

Memorizzazione

Invece di memorizzare oggetti, utilizziamo gli interi $1 \ldots n$ e assumiamo che l'associazione intero-oggetto sia memorizzata esternamente

Specifica

MFSET

% Crea n componenti $\{1\}, \ldots, \{n\}$
MFSET Mfset(**int** n)

% Restituisce il rappresentante della componente contenente x
int find(**int** x)

% Unisce le componenti che contengono x e y
merge(**int** x, **int** y)

Esempio

mfset(6)	1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6
merge(1,2)	1, 2 · 3 · 4 · 5 · 6
merge(3,4)	1, 2 · 3,4 · 5 · 6
merge(5,6)	1, 2 · 3,4 · 5,6
merge(1,3)	1, 2, 3, 4 · 5,6
merge(1,5)	1, 2, 3, 4, 5, 6

Applicazione: Componenti connesse dinamiche

Problema

Trovare le componenti connesse di un grafo non orientato dinamico

Algoritmo

- Si inizia con componenti connesse costituite da un unico vertice
- Per ogni $(u, v) \in E$, si esegue merge(u, v)
- Ogni insieme disgiunto rappresenta una componente connessa

```
MFSET cc(GRAPH G)
MFSET M = Mfset(G.n)
foreach u ∈ G.V() do
    foreach v ∈ G.adj(u) do
        M.merge(u, v)
return M
```

Applicazione: Componenti connesse dinamiche

Complessità

$O(n) + m$ operazioni merge()

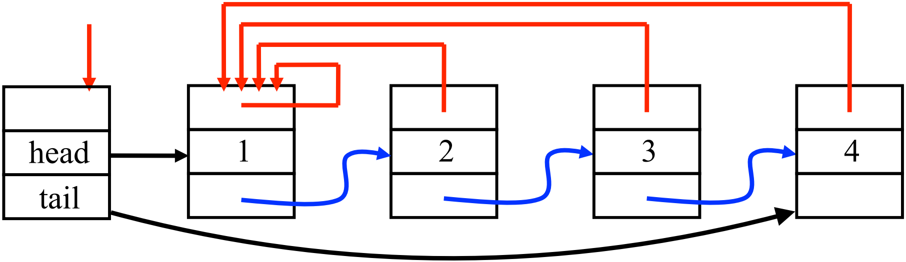
Motivazione

Questo algoritmo è interessante per la capacità di gestire grafi dinamici (in cui gli archi vengono aggiunti)

Realizzazione basata su insiemi di liste

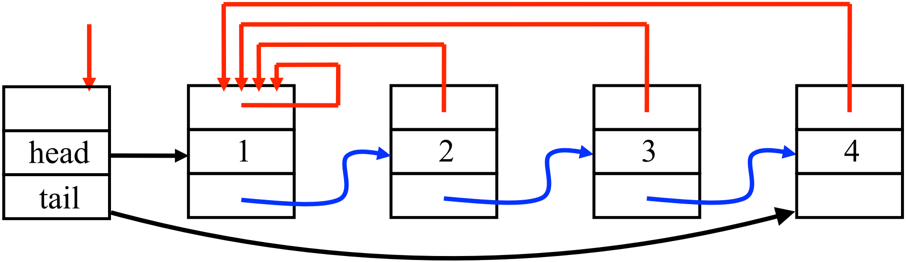
Ogni insieme viene rappresentato da una lista concatenata

- Il primo oggetto di una lista è il rappresentante dell'insieme
- Ogni elemento nella lista contiene:
  - un oggetto
  - un puntatore all'elemento successivo
  - un puntatore al rappresentante



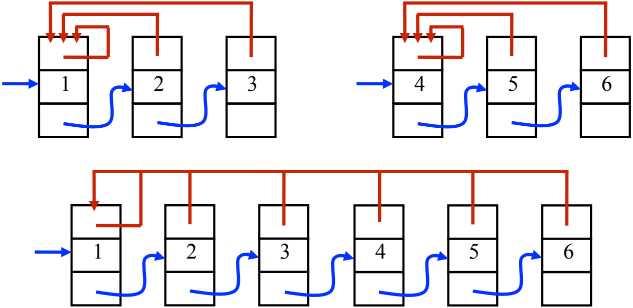
Operazione find(x)

- Si restituisce il rappresentante di x
- L'operazione find(x) richiede tempo $O(1)$



Operazione merge(x, y)

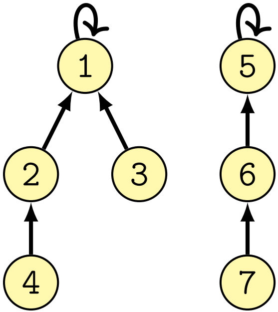
- Si "appende" la lista che contiene y alla lista che contiene x, modificando i puntatori ai rappresentanti nella lista "appesa"
- Costo nel caso pessimo per n operazioni: $O(n^2)$
- Costo ammortizzato: $O(n)$



Realizzazione basata su insieme di alberi (foresta)

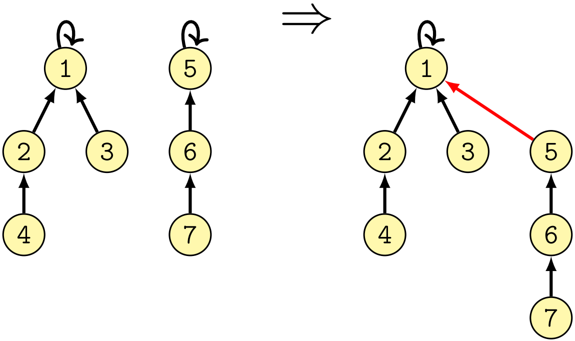
Ogni insieme viene rappresentato da un albero

- Ogni nodo dell'albero contiene:
  - un oggetto
  - un puntatore al padre
- La radice è il rappresentante dell'insieme
- La radice ha un puntatore a se stessa



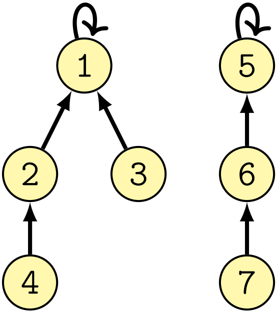
Operazione merge(x, y)

- Si aggancia l'albero radicato in y ad x
- Modificando il puntatore al padre di y
- Costo: $O(1)$



Operazione find(x)

- Risale la lista dei padri di x fino a trovare la radice e restituisce la radice come rappresentante
- Costo: $O(n)$ nel caso pessimo (perché?)



Tecniche euristiche

Algoritmo euristico

È un particolare tipo di algoritmo progettato per

- risolvere un problema più velocemente, qualora i metodi classici siano troppo lenti
- trovare una soluzione approssimata, qualora i metodi classici falliscano nel trovare una soluzione esatta

Euristiche applicate agli insiemi disgiunti

- Euristica del peso (Liste)
- Euristica del rango (Alberi)
- Euristica della commpressione dei cammini (Alberi)

Liste: Euristica sul peso

Strategia per diminuire il costo dell'operazione merge()

- Memorizzare nelle liste l'informazione sulla loro lunghezza
- Agganciare la lista più corta a quella più lunga
- La lunghezza della lista può essere mantenuta in tempo $O(1)$

Complessità

- Tramite analisi ammortizzata, è possibile vedere che il costo di $n-1$ operazioni merge è $O(n \log n)$
- Quindi il costo ammortizzato delle singole operazioni è $O(\log n)$

Alberi: Euristica sul rango

Strategia per diminuire il costo dell'operazione find()

- Ogni nodo mantiene informazioni sul proprio rango
- Il rango $rank[x]$ di un nodo x è il numero di archi del cammino più lungo fra x e una foglia sua discendente
- Rango $\equiv$ altezza del sottoalbero associato al nodo
- Obiettivo: mantenere bassa l'altezza degli alberi

Alberi: Euristica sul rango

Alberi di altezza uguale

- Si aggancia un albero alla radice dell'altro (indifferente)
- L'altezza cresce di 1

$\Rightarrow$

Alberi di altezza diversa

- Si aggancia un albero alla radice dell'altro (indifferente)
- L'altezza resta inalterata

$\Rightarrow$

Complessità

Teorema

Un albero MFSET con radice r ottenuto tramite euristica sul rango ha almeno $2^{rank[r]}$ nodi.

Corollario

Un albero MFSET con radice r ed n nodi ha altezza inferiore a $\log n$.

$$n \geq 2^{rank[r]} \Leftrightarrow rank[r] \leq \log n$$

Complessità

L'operazione $\mathsf{find}(x)$ ha costo $O(\log n)$

Algoritmo

```
MFSET
int[] parent
int[] rank

MFSET Mfset(int n)
    MFSET t = new MFSET
    t.parent = int[1 ... n]
    t.rank = int[1 ... n]
    for i = 1 to n do
        t.parent[i] = i
        t.rank[i] = 0
    return t
```

```
merge(int x, int y)
r_x = find(x)
r_y = find(y)
if r_x ≠ r_y then
    if rank[r_x] > rank[r_y] then
        parent[r_y] = r_x
    else if rank[r_y] > rank[r_x] then
        parent[r_x] = r_y
    else
        parent[r_x] = r_y
        rank[r_y] = rank[r_y] + 1
```

Alberi: Euristica di compressione dei cammini

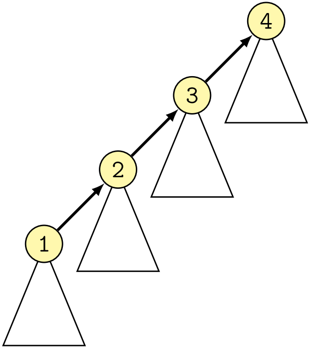
Operazione find(x)

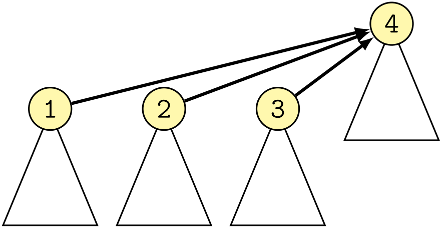
L'albero viene "appiattito" in modo che ricerche successive di x siano svolte in $O(1)$

int find(**int** x)

if $parent[x] \neq x$ **then**
 $parent[x] = \mathsf{find}(parent[x])$

return $parent[x]$





Alberi: Euristica sul rango + compressione cammini

Applicando entrambe le euristiche

- Il rango non è più l'altezza del nodo, ma il limite superiore all'altezza del nodo
- Non viene calcalato il rango corretto
  - Troppo difficile mantenere le informazioni di rango corretto
  - In ogni caso, non è necessario

Complessità

- Costo ammortizzato di m operazioni merge-find in un insieme di n elementi è $O(m \cdot \alpha(n))$
- La funzione inversa di Ackermann $\alpha(n)$ crescente lentamente
- Esempi: per $n \leq 2^{65536}$, $\alpha(n) \leq 5$

Complessità – Riassunto

Algoritmo	find()	merge()
Liste	$O(1)$	$O(n)$
Alberi	$O(n)$	$O(1)$
Liste + Euristica sul peso	$O(1)$	$O(\log n)^*$
Alberi + Euristica sul rango	$O(\log n)$	$O(1)$
Alberi + Euristica sul rango + Compressione cammini	$O(1)^*$	$O(1)$

* Complessità ammortizzata