Lezione 3 del 04|03|2021

Titolo nota 04/03/2021

Es.:

- $S(1)=0$

  for $i=1:10000$

  $S(i+1)=S(i)+0.0001$

  end

  $S(10001)=$

- $S=[0:0.0001:1]$

Es.: errore di CANCELLAZIONE NUMERICA

$x = 77\ 777\ 777$ $\quad y=\sqrt{x^2+1}-x$ su matlab

$$z = y\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

1

matlab

__Oss__: Operazione macchina

$$x \boxed{\odot} y = fl\left(fl(x) \odot fl(y)\right) \qquad \odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

In generale, non sempre valgono le proprietà delle operazioni valide in aritmetica esatta

__Es.__:

$$(a \boxed{+} b) \boxed{+} c \overset{?}{=} a \boxed{+} (b \boxed{+} c)$$

$a = 0.1234567$ $\quad b = 6\,666.325$ $\quad c = -6\,666.325$

<u>Def</u>: Un modello $f(x)$ si dice BEN CONDIZIONATO se vale una relazione del tipo

$$\frac{\| f(x+\delta x) - f(x) \|}{\| f(x) \|} \leq k \frac{\| \delta x \|}{\| x \|} \qquad f(x) \neq 0 \quad x \neq 0$$

con K "piccolo". K è definito numero di condizionamento.

Es.: Studiamo il condizionamento dell'operazione di somma

$x, y \in \mathbb{R}$

$$\bar{x} = fl(x) = x(1+\varepsilon_1)$$

$$\bar{y} = fl(y) = y(1+\varepsilon_2)$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ dell'ordine di eps

$$\frac{|(\bar{x}+\bar{y})-(x+y)|}{|x+y|} = \frac{|x(\cancel{1}+\varepsilon_1)+y(\cancel{1}+\varepsilon_2)-\cancel{x}-\cancel{y}|}{|x+y|} = \frac{|x\varepsilon_1+y\varepsilon_2|}{|x+y|} \le$$

$$\frac{|x\varepsilon_1|+|y\varepsilon_2|}{|x+y|} = \underbrace{\frac{|x|}{|x+y|}}_{K_1}|\varepsilon_1| + \underbrace{\frac{|y|}{|x+y|}}_{K_2}|\varepsilon_2| = K_1|\varepsilon_1|+K_2|\varepsilon_2|$$

Se $x \to -y$ allora $K_1, K_2 \longrightarrow +\infty$ e quindi ha un cattivo condizionamento

Fenomeno che evidenzia nel caso di "cancellazione numerica"

Es. Studiamo il condizionamento del prodotto

$$\frac{|\bar{x}\,\bar{y} - xy|}{|xy|} = \frac{|x(1+\varepsilon_1)\,y(1+\varepsilon_2) - xy|}{|xy|} = |\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2| \leq$$

$$\leq |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + |\varepsilon_1\varepsilon_2| \leq |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \frac{1}{2}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1^2) \leq |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \frac{1}{2}|\varepsilon_1| + \frac{1}{2}|\varepsilon_2|$$

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2) \qquad\qquad |\varepsilon|^2 \leq |\varepsilon| \text{ se } |\varepsilon| \leq 1$$

$$= \frac{3}{2}|\varepsilon_1| + \frac{3}{2}|\varepsilon_2|$$

K è uguale a $\frac{3}{2}$ e quindi il prodotto è ben condizionato

Es: valutare le espressioni, analiticamente equivalenti,

$$y_1 = (1-x)^6 \qquad y_2 = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$$

in 100 punti equidistanti nell'intervallo $[1-\delta, 1+\delta]$

$\delta = 0.1 \qquad \delta = 0.01 \qquad \delta = 0.005 \qquad \delta = 0,0025$