Proposta esercizi 4
Interpolazione e quadratura

Calcolo Numerico (LT Informatica), a.a. 2019-2020
Dipartimento di Scienze Matematiche Fisiche e Informatiche
Università degli Studi di Parma

Docente:
Prof.ssa Chiara Guardasoni

Tutor:
Dott. Ariel S. Boiardi *

Spoiler alert! Per necessità espositiva le risposte a vari quesiti sono implicitamente contenute nei quesiti successivi, vi consiglio quindi di procedere una consegna per volta, meditando su tutti i punti proposti prima di andare avanti. Se viceversa ad un certo punto siete bloccati, provate a sbirciare l'esercizio dopo, probabilmente troverete indicazioni utili per procedere.

1 Interpolazione polinomiale

Poniamo di voler approssimare un set di $n+1$ punti nel piano cartesiano

$$(x_i, y_i) \quad i = 0, \dots, n, \quad x_i \neq x_j \ \forall i \neq j \tag{1}$$

mediante interpolazione polinomiale. Di che grado deve essere il polinomio che soddisfa il problema interpolatorio?

È stato mostrato a lezione che costruendo il polinomio interpolatore rispetto alla base canonica dello spazio dei polinomi di grado opportuno ci si riconduce a risolvere un sistema lineare determinato dalla matrice di Vandermonde

$$V(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_0^n & \cdots & x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^n & \cdots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^n & \cdots & x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 1 \\ x_2^n & \cdots & x_2^2 & x_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

costruita a partire dai nodi di interpolazione in (1).

Esercizio 1: Scrivere in MATLAB una function `myvander` che dato in input un vettore `x` restituisca la matrice di Vandermonde $V(\mathtt{x})$.

*Per dubbi e segnalazioni: `arielsurya.boiardi@studenti.unipr.it`

Hint. Potete controllare le vostre implementazioni siano corrette confrontando i risultati con quelli della function `vander` della libreria di MATLAB .

Esercizio 2: Consideriamo la funzione di Heaviside definita da

$$H(x) \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} .$$

Provate ad approssimarla mediante interpolazione polinomiale con un numero di punti a piacere. Cosa si osserva?

La funzione di Heaviside risulta spesso problematica (come abbiamo osservato), per ovviare a questo problema alle volte è possibile sostituirla con una *sigmoide*, cioè una funzione che presenta simili proprietà (il *cutoff* in corrispondenza di un valore fissato), ma più regolare. Un esempio è

$$f_\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-\sigma x}}$$

che al crescere di $\sigma > 0$ presenta un gradino sempre più netto in 0. Ripetere l'esercizio precedente con questa funzione variando il parametro σ e il numero di nodi. Confrontare i risultati.

Esercizio 3: L'estremità di un braccio meccanico su muove in un piano durante un ciclo di lavoro. Fissato un sistema di riferimento con origine nel punto in cui il braccio si trova all'inizio del ciclo ($t = 0$), il movimento nel braccio viene campionato ad intervalli di 1s in successione nelle posizioni $(2, 2), (4, 5), (3, 2)$. Il ciclo di lavorazione dura complessivamente 5s e termina con in braccio nella posizione iniziale.

Approssimate la traiettoria della punta del braccio robotico nel piano mediante interpolazione polinomiale e rappresentare in un grafico la traiettoria e i punti di passaggio.

Hint.
- Dovremo impostare due problemi di interpolazione polinomiale sui nodi temporali $0, 1, 2, 3, 5$...
- Il comando `polyval` potrebbe essere utile

Esercizio 4:

La traiettoria costruita nel precedente esercizio non è molto realistica in quanto il braccio inizia e finisce la sua traiettoria con velocità non nulle

Parte 1 Fate un grafico delle derivate rispetto al tempo per convincervene.

Hint. Il comando `polyder` potrebbe interessarvi

Consideriamo inoltre che al termine della traiettoria il ciclo dovrebbe ricominciare in tempi brevi, e a causa dell'angolosità della traiettoria e della grande quantità di moto accumulata, il braccio risulterebbe soggetto a forti sollecitazioni.

Per risolvere questo problema dovremmo riprogrammiamo il robot in modo che la traiettoria polinomiale inizi e finisca con velocità nulla.

Parte 2 Il problema posto è un problema di *interpolazione generalizzata*, in cui vengono dati vincoli non solo sui punti di passaggio dell'interpolante ma anche sulle derivate. Consideriamo ad esempio che la traiettoria $x(t)$ del nostro braccio debba passare per i punti indicati avere derivata nulla all'inizio e alla fine: oltre ai soliti vincoli dovremo anche imporre due vincoli a $t = 0$ e $t = 5$ per l'annullamento della derivata. Avendo aggiunto due vincoli rispetto al precedente problema interpolatorio, di che grado sarà il polinomio interpolatore?

Ricordiamo che la costruzione della matrice di Vandermonde deriva dalla costruzione del polinomio interpolatore scritto rispetto alla base canonica dei polinomi.

Nel nostro caso la componente $x(t)$ della traiettoria sarà un polinomio di grado 6, i vincoli per i passaggi nei punti fissati sono

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ x(1) = 2 \\ x(2) = 4 \\ x(3) = 3 \\ x(5) = 0 \end{cases}$$

inoltre avremo due vincoli per la derivate

$$\begin{cases} x'(0) = 0 \\ x'(5) = 0 \end{cases}$$

Scrivendo un generico polinomio di grado 6 e imponendo le relazioni sopra dovreste essere in grado di determinare un sistema lineare per determinare i coefficienti dei polinomi che interpolano le componenti x e y della traiettoria.

Parte 3 Spiegare il significato dei seguenti comandi

```
tk = [0, 1, 2, 3, 5]
V = [tk'.^[6:-1:0];
 [6:-1:0].*[tk(1).^[5:-1:0], 0];
 [6:-1:0].*[tk(5).^[5:-1:0], 0]]
```

nel contesto dell'esercizio proposto.

Parte 4 A questo punto risolvendo il sistema lineare descritto sopra determiniamo una nuova traiettoria. Tracciatela in un grafico controllando che passi per i punti assegnati. In un'altra figura tracciare invece il grafico delle derivate.

Esercizio 5: Immaginiamo ora che il braccio meccanico debba avvitare una vite in ognuno dei punti fissati. Determinare la traiettoria polinomiale seguita la braccio.

2 Interpolazione e migliore approssimazione

Nelle scienze sperimentali è frequente aver a che fare con gradi quantitativi di dati da interpretare e approssimare. In questo caso il paradigma interpolatorio risulta gravemente inadatto per diversi motivi:

- Se i punti di interpolazione sono tanti il polinomio interpolatore deve avere grado alto, presenta quindi forti oscillazioni.
- Il fatto che l'approssimazione passi per tutti i punti non significa che esprima la tendenza dei dati o le relazioni in essi contenute.
- Spesso per supposizione, semplificazione o leggi fisiche, cerchiamo nei dati un certo andamento, ad esempio lineare; usiamo quindi i dati a disposizione per raffinare il modello. Con interpolazione invece il numero di dati determina il modello.

Esercizio 6: In laboratorio misuriamo la pressione di un sostanza ad alcune temperature e otteniamo i dati in tabella 1. Allo zero assoluto la pressione si annulla, è inoltre noto che, sotto opportune semplificazioni, la relazione fra temperatura e pressione è lineare.

- Rappresentate i dati come punti su un piano, la relazione lineare sembra ragionevole?
- Costruire la retta di regressione ai minimi quadrati per i punti in tabella ed estrapolare il valore della zero assoluto.
- Cosa sarebbe successo con approssimazione interpolatoria? Provate a ad eseguire le stesse analisi dei punti precedenti approssimando i dati mediante interpolazione polinomiale.

Esercizio 7: Generate due vettori di 100 numeri casuali con distribuzione normale fra 0 e 1 e costruite la retta ai mini quadrati per questi punti. Come vi sembra l'approssimazione? Ha senso che sussista una relazione lineare fra i dati? Provate a riscalare l'asse y a $[-5, 5]$. Come si potrebbe quantificare la qualità dell'approssimazione?

Temperatura [°C]	Pressione [cmHg]
0.3200000E+02	0.7330000E+02
0.3500000E+02	0.7450000E+02
0.3800000E+02	0.7510000E+02
0.4100000E+02	0.7600000E+02
0.4400000E+02	0.7680000E+02
0.4700000E+02	0.7760000E+02
0.5000000E+02	0.7820000E+02
0.5300000E+02	0.7900000E+02
0.5600000E+02	0.7960000E+02
0.5900000E+02	0.8020000E+02
0.6200000E+02	0.8100000E+02
0.6500000E+02	0.8150000E+02
0.6800000E+02	0.8210000E+02
0.7100000E+02	0.8270000E+02

Tabella 1: Misurazioni temperatura e pressione

3 Integrazione numerica

Esercizio 8: Implementare in tre functions MATLAB le formule composite del punto medio, dei trapezi e di Cavalieri-Simpson, che dati in input un vettore di nodi e un vettore contenente le corrispondenti valutazioni della funzione integranda, restituiscano il valore approssimato dell'integrale.

Esercizio 9: Implementate in tre functions MATLAB la formule composite di punto medio, trapezi e Cavalieri-Simpson. In questo caso però vogliamo dare in input una function rappresentate la funzione integranda, gli estremi di integrazione e il numero di sottointervalli.

Esercizio 10: Si calcoli analiticamente il valore di

$$\int_0^{\pi} \cos(x)dx.$$

Usando le espressioni per l'errore ricavate a lezione, quanti nodi di quadratura vi aspettate siano necessari per determinare il valore dell'integrale con una tolleranza ϵ. Per tutte e tre le formule di integrazione numerica:

- Determinate il minimo numero di sottointervalli n per ottenere il valore dell'integrale in semplice precisione.

- Per ogni intero positivo $k \leq n$ si calcoli il valore approssimato dell'integrale e il corrispondente errore.
- Si tracci un grafico dell'errore rispetto al numero di sottointervalli.

Cosa osserviamo dai risultati precedenti? Perché? (Pensate al significato geometrico di integrale e delle formule di quadratura numerica...).

Esercizio 11: Ripetere l'esercizio precedente con il calcolo di

$$\int_0^4 \sin(x)e^x dx.$$

Confrontate in un solo grafico l'andamento dell'errore per le tre formule.

Hint. Probabilmente si vede meglio in scala logaritmica...

Esercizio 12: Consideriamo ora l'integrale

$$\int_{-1}^{1} H(x)dx$$

dove $H(x)$ è la già citata funzione a gradino di Heaviside. Calcolato il valore esatto dell'integrale confrontatelo con i valori ottenuti con le formule composite; in particolare prestate attenzione alla differenza fra i valori ottenuti con numeri pari e dispari di sottointervalli. Commentare il risultato.

Confrontare poi i risultati con quelli ottenuti integrando numericamente una sigmoide sufficientemente ripida (ad esempio $\sigma = 100$) usando pochi sottointervalli.

3.1 Calcolo di aree e volumi

Sappiamo che il valore dell'integrale

$$\int_a^b f(x)dx$$

misura, con segno, l'area sotto al grafico della funzione f fra a e b.

Esercizio 13: Come possiamo calcolare numericamente l'area di una cerchio di raggio unitario? Confrontare i risultati ottenuti numericamente con il valore esatto di π.

Hint. Sfruttiamo la simmetria.

Sappiamo inoltre che il volume del solido ottenuto dalla rotazione della regione piana delimitata dalla curva $yf(x)$ fra a e b attorno all'asse x è pari a

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

Esercizio 14: Il sotto-grafico di quale funzione, ruotato attorno all'asse x, forma una sfera? Usando le routine di quadratura numerica implementate calcolate il volume di una sfera di raggio unitario e confrontate il risultato con quello esatto di $\frac{4}{3}\pi$.