Lezione 6 del 15/03/2021

Titolo nota 15/03/2021

RISOLUZIONE di SISTEMI LINEARI

METODI DIRETTI
che, in aritmetica esatta, forniscono la soluzione in un numero finito di passi

METODI ITERATIVI
che determinano una successione di approssimanti della soluzione

$$\underline{A}\underline{x} = \underline{b} \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \underline{x}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$$

$$\det(A) \neq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 = b_1 \\ a_{22} x_2 = b_2 \\ \vdots \\ a_{nn} x_n = b_n \end{cases}$$

$a_{ii} \neq 0 \quad i = 1 \dots n$

$$\boxed{x_i = b_i / a_{ii} \qquad i = 1 \dots n}$$

A MATRICE DIAGONALE

costo computazionale = n divisioni

$O(n)$

A TRIANGOLARE SUPERIORE

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & & a_{2n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad a_{ii} \neq 0 \quad i = 1 \dots n$$

$$\begin{cases} a_{nn} x_n = b_n \\ a_{n-1,n-1} x_{n-1} + a_{n-1,n} x_n = b_{n-1} \\ a_{n-2,n-2} x_{n-2} + a_{n-2,n-1} x_{n-1} + a_{n-2,n} x_n = b_{n-2} \\ \vdots \\ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \end{cases}$$

$$\longrightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

1 divisione

$$\longrightarrow x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n} x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

1 somma, 1 prodotto, 1 divisione

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2,n} x_n - a_{n-2,n-1} x_{n-1}}{a_{n-2,n-2}}$$

2 somme, 2 prodotti, 1 divisione

1 divisione, $n-1$ prodotti, $n-1$ somme

$$x_1 = \frac{b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_j}{a_{11}}$$

METODO di SOSTITUZIONE ALL'INDIETRO

$$\boxed{x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \qquad x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}} \qquad i = n-1, n-2, \dots, 1}$$

<u>costo computazionale</u>: divisioni n

somme $= 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \dfrac{(n-1)n}{2}$

$$\text{prodotti} = \frac{(n-1)n}{2} \rightsquigarrow O(n^2)$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & & 1 \\ \hline n+1 & n+1 & \dots & & & n+1 \end{array} \qquad \frac{n(n+1)}{2}$$

A matrice TRIANGOLARE INFERIORE

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & 0 & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$a_{ii} \neq 0$

$i = 1 \dots n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 & \longrightarrow \quad x_1 = b_1/a_{11} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & \longrightarrow \quad x_2 = \dfrac{b_2 - a_{21}x_1}{a_{22}} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & \longrightarrow \quad x_3 = \dfrac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}} \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 & \longrightarrow \quad x_4 = \dots \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n & \longrightarrow \quad x_n = \dfrac{b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j}{a_{nn}} \end{cases}$$

METODO di SOSTITUZIONE in AVANTI

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = b_1/a_{11} \\ x_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}} \qquad i = 2 \dots n \end{cases}}$$

Costo computazionale $= O(n^2)$

A matrice DENSA

Idea: cerco di trasformare il sistema lineare di partenza in un sistema lineare equivalente con matrice triangolare

Trovare una matrice M non singolare tale che

$$\underbrace{MA}_{\text{matrice triangolare superiore}}x = Mb$$

ALGORITMO di ELIMINAZIONE di GAUSS

$$A = A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \underline{b}^{(1)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Ip.} \qquad a_{11}^{(1)} \neq 0}$$

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \dots + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} x_1 + a_{22}^{(1)} x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)} \\ \vdots \\ a_{n1}^{(1)} x_1 + a_{n2}^{(1)} x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)} x_n = b_n^{(1)} \end{cases}$$

Costruisco un'equazione per togliere il coefficiente $a_{21}^{(1)}$ nella seconda eq.ne facendo una combinazione lineare della prima e seconda equazione che poi sostituirò alla seconda eq.ne

- $m_{21} = -\dfrac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$ $\qquad m_{21} \cdot 1^e$ eq.ne $+ 2^e$ eq.ne $\rightsquigarrow 2^e$ eq.ne

$a_{2j}^{(2)} = m_{21} a_{1j}^{(1)} + a_{2j}^{(1)} \qquad j = 1 \dots n$ $\qquad$ // per $j=1$ $a_{2j}^{(2)} = 0$ quindi inutile calcolarlo //

$b_2^{(2)} = m_{21} b_1^{(1)} + b_2^{(1)}$

- $m_{i1} = -\dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$ $\qquad i = 2 \dots n \qquad m_{i1} \cdot 1^e$ eq.ne $+ i^e$ eq.ne $\rightsquigarrow i^e$ equazione

$(n-1)$ divisioni

$$a_{ij}^{(2)} = m_{i1}\, a_{1j}^{(1)} + a_{ij}^{(1)} \qquad j = 2 \dots n \longrightarrow \begin{array}{l} (n-1)^2 \text{ prodotti} \\ (n-1)^2 \text{ somme} \end{array}$$

$$b_i^{(2)} = m_{i1}\, b_1^{(1)} + b_i^{(1)} \longrightarrow \begin{array}{l} n-1 \text{ prodotti} \\ n-1 \text{ somme} \end{array}$$

Otterrò un sistema lineare equivalente della forma

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & & & \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} \qquad \underline{b}^{(2)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Ip.: } a_{22}^{(2)} \neq 0}$$

- $m_{i2} = -\dfrac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$ $\quad i = 3 \dots n$ $\longrightarrow$ $(n-2)$ divisioni

$m_{i2} \cdot 2^a$ eq.ne $+ \, i^a$ eq.ne $\rightsquigarrow i^a$ eq.ne

$a_{ij}^{(3)} = m_{i2}\, a_{2j}^{(2)} + a_{ij}^{(2)}$ $\quad j = 3 \dots n$ $\longrightarrow$ $(n-2)^2$ prodotti, $(n-2)^2$ somme

$b_i^{(3)} = m_{i2} \cdot b_2^{(2)} + b_i^{(2)}$ $\longrightarrow$ $(n-2)$ prodotti, $(n-2)$ somme

Otterrò un sistema equivalente

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix} \qquad \underline{b}^{(3)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_n^{(3)} \end{pmatrix}$$

Dopo $k-1$ passi abbiamo il seguente sistema lineare equivalente

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1,k-1}^{(1)} & a_{1k}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2k-1}^{(2)} & a_{2k}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & \ddots & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & a_{k-1,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{k-1,n}^{(k-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \end{pmatrix} \qquad \underline{b}^{(k)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_{k-1}^{(k-1)} \\ b_k^{(k)} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|ccc}
0 & & & \vdots & a_{k+1\,k}^{(k)} & \cdots & a_{k+1,m}^{(k)} \\
0 & & & \vdots & \vdots & & \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{mk}^{(k)} & \cdots & a_{mm}^{(k)}
\end{array}\right)
\qquad
\left|\; b_m^{(k)} \;\right|
$$

$\boxed{\text{Ip} \quad a_{kk}^{(k)} \neq 0}$

- $m_{ik} = -\dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$ $\qquad i = k+1 \dots m$ $\rightarrow$ $(m-k)$ divisioni

$m_{ik} \cdot k^e$ eq.ne $+$ i^e eq.ne $\rightarrow$ i^e eq.ne

$a_{ij}^{(k+1)} = m_{ik}\, a_{kj}^{(k)} + a_{ij}^{(k)}$ $\qquad j = k+1 \dots m$ $\rightarrow$ $(m-k)^2$ prodotti, $(m-k)^2$ somme

$b_i^{(k+1)} = m_{ik} \cdot b_k^{(k)} + b_i^{(k)}$ $\rightarrow$ $(m-k)$ prodotti, $(m-k)$ somme

Dopo $n-1$ passi otterrò un sistema lineare equivalente

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & 0 & \ddots & \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix} \qquad \underline{b}^{(n)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

<u>costo computazionale totale</u>

divisioni $= (n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 2 + 1 = \dfrac{n(n-1)}{2} \qquad O\left(\dfrac{n^2}{2}\right)$

prodotti $= (n-1) + (n-1)^2 + (n-2) + (n-2)^2 + \dots + 1 + 1^2 = \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i = O\left(\dfrac{n^3}{3}\right)$

somme $= O\left(\dfrac{n^3}{3}\right)$

Costo totale : $O\left(\frac{2n^3}{3}\right)$ + risoluzione di un sistema triangolare $O(n^2)$

$\downarrow$

algoritmo eliminazione di Gauss

Oss: Qualche elemento $a_{kk}^{(k)}$ potrebbe essere nullo o "molto piccolo"

$\downarrow$

pivoting

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

occorrerà scambiare 2ª e 3ª riga moltiplicando per una matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Oss</u>: Se vario il termine noto devo ripetere tutto l'algoritmo

$\downarrow$

<u>algoritmi di FATTORIZZAZIONE</u>

<u>Es.</u>: Risolvere con il metodo di eliminazione di Gauss

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{11}{6} \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = \frac{13}{12} \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = \frac{47}{60} \end{cases}$$

sol.ne $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$