Lezione 10 del 15/04/2021

A tridiagonale

$$\begin{pmatrix} a_1 & e_1 & & 0 \\ b_2 & a_2 & e_2 & \\ & \ddots & \ddots & e_{n-1} \\ 0 & & b_n & a_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ b_2 \frac{d_0}{d_1} & 1 & & \\ & b_3 \frac{d_1}{d_2} & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{d_1}{d_0} & e_1 & & 0 \\ & \frac{d_2}{d_1} & e_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \frac{d_n}{d_{n-1}} \end{pmatrix}}_{U}$$

d_i = determinanti dei minori di nord-ovest

Dobbiamo risolvere il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{t}$

$$\underbrace{LUx}_{y} = t \qquad \begin{cases} Ly = t \\ Ux = y \end{cases}$$

Risoluzione del sistema $Ly = t$ con sostituzione in avanti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & \\ b_2\frac{d_0}{d_1} & 1 & 0 & & \\ 0 & b_3\frac{d_1}{d_2} & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & b_m\frac{d_{m-2}}{d_{m-1}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} y_1 = t_1 \\ b_2\frac{d_0}{d_1} y_1 + y_2 = t_2 \quad \rightarrow y_2 = t_2 - b_2\frac{d_0}{d_1} y_1 \\ \vdots \\ y_k = t_k - b_k \frac{d_{k-2}}{d_{k-1}} y_{k-1} \end{cases}$$

$k = 2 \dots m$

$$0 \cdot y_1 + b_3\frac{d_1}{d_2} y_2 + 1 \cdot y_3 = t_3 \rightarrow y_3 = t_3 - b_3\frac{d_1}{d_2} y_2$$

Risolviamo il sistema $U\underline{x} = \underline{y}$ con sostituzione all'indietro

$$\begin{pmatrix} \frac{d_1}{d_0} & e_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d_2}{d_1} & e_2 & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & e_{m-1} \\ & 0 & & \frac{d_m}{d_{m-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \frac{d_m}{d_{m-1}} x_m = y_m \rightarrow x_m = y_m \frac{d_{m-1}}{d_m} \\ \frac{d_{m-1}}{d_{m-2}} x_{m-1} + e_{m-1} x_m = y_{m-1} \\ \rightarrow x_{m-1} = \left(y_{m-1} - e_{m-1} x_m\right) \frac{d_{m-2}}{d_{m-1}} \\ \vdots \\ x_k = \left(y_k - e_k x_{k+1}\right) \frac{d_{k-1}}{d_k} \end{cases}$$

$k = m-1, \dots, 1$

costo computazionale:	1° sistema	2° sistema	
	$m-1$	$m-1$	somme
	$2(m-1)$	$2(m-1)+1$	prodotti
	$m-1$	m	divisioni

Oss: La risoluzione di un sistema lineare tridiagonale ha un costo lineare $O(n)$

- A simmetrica definita positiva

Def: Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è DEFINITA POSITIVA se

$$\underline{x}' A \underline{x} > 0 \qquad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \ \underline{x} \neq \underline{0}$$

Proprietà: Sia A simmetrica. A è definita positiva se e solo se vale una delle seguenti proprietà:

1. A ha autovalori tutti positivi
2. esiste una matrice non singolare H tale che $A = H \cdot H'$

Def: Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si dice a DOMINANZA DIAGONALE STRETTA <u>per righe</u> se

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1 \dots n$$

<u>per colonne</u> se

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ji}| \qquad i = 1 \dots n$$

Proprietà: Una matrice a dominanza diagonale stretta, simmetrica con elementi diagonali positivi, è anche definita positiva

Teorema: Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrice simmetrica definita positiva, allora esiste una matrice B triangolare inferiore t.e.

$$A = B \cdot B'$$

Inoltre se gli elementi diagonali di B sono scelti positivi, tale fattorizzazione è unica (FATTORIZZAZIONE di CHOLESKY)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & & \vdots \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$A = B \cdot B'$ $\quad i,j = 1 \dots n$ $\quad a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \bar{b}_{kj} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} b_{ik} \bar{b}_{kj} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} b_{ik} b_{jk}$ $\quad \bar{B} = B'$

perché sono triangolari

poiché A è simmetrica $a_{ij} = a_{ji}$ e allora posso calcolare

a_{ij} con $1 \le i \le j \le n$ $\longrightarrow$ $\boxed{a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} b_{ik} b_{jk}}$

- $i = 1$

$j = 1 \quad a_{11} = b_{11}^2 \Rightarrow b_{11} = \sqrt{a_{11}}$

$j = 2 \quad a_{12} = b_{11} b_{21} \Rightarrow b_{21} = a_{12}/b_{11}$

$\vdots$

$j = n \quad a_{1n} = b_{11} b_{n1} \Rightarrow b_{n1} = a_{1n}/b_{11}$

- $i=2$

$j=2$ $\quad a_{22} = b_{21} b_{21} + b_{22} b_{22} \Rightarrow b_{22} = \sqrt{a_{22} - b_{21}^2}$

$\vdots$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$

$j=m$ $\quad a_{2m} = b_{21} b_{m1} + b_{22} b_{m2} \Rightarrow b_{m2} = \dfrac{a_{2m} - b_{21} b_{m1}}{b_{22}}$

- i

$j=i$ $\quad a_{ii} = \sum_{k=1}^{i} b_{ik} b_{ik} = \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}^2 + b_{ii}^2 \Rightarrow b_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}^2}$

$j=i+1$ $\quad a_{i\,i+1} = \sum_{k=1}^{i} b_{ik} b_{i+1,k} = \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} b_{i+1,k} + b_{ii} b_{i+1,i}$

$\vdots$ $\qquad \Rightarrow b_{i+1,i} = \dfrac{a_{i,i+1} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} b_{i+1,k}}{b_{ii}}$

$i = 1 \dots n$

$j = i \qquad b_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}^2}$

$j = i+1 \dots n \qquad b_{ji} = \dfrac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} b_{jk}}{b_{ii}}$

FATT. CHOLESKY

METODI ITERATIVI

I metodi iterativi si contrappongono ai metodi diretti perché la soluzione del sistema lineare

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

viene ottenuta formalmente dopo un numero infinito di passi.

Nel caso di matrici piene il costo computazionale richiesto da questi metodi ad ogni passo è dell'ordine di n^2 operazioni.

Se un metodo iterativo è rapidamente convergente, ossia raggiunge la soluzione approssimata alla tolleranza richiesta in un numero di passi minore di n allora il suo costo computazionale globale sarà minore di $O(n^3)$ che è il costo computazionale di un metodo diretto.

I metodi iterativi costruiscono una successione di vettori

$$\{\underline{x}^{(k)}\} \qquad \underline{x}^{(k)} \in \mathbb{R}^n \quad \text{tale che} \quad \underline{x}^{(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \underline{x}$$

con $\underline{x}$ soluzione esatta del sistema $A\underline{x} = \underline{b}$

__Def__: Sia $\underline{x}^{(k)}$ una successione di vettori di $\mathbb{R}^n$, essa converge al vettore $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ se esiste una norma vettoriale per cui

$$\lim_{k \to +\infty} \| \underbrace{\underline{x}}_{\text{esatta}} - \underbrace{\underline{x}^{(k)}}_{\text{approssimata}} \| = 0$$

__Oss__: La convergenza si ha componente per componente

$$| x_i - x_i^{(k)} | \le \| \underline{x} - \underline{x}^{(k)} \|_\infty \underset{k \to +\infty}{\leadsto} 0 \qquad i = 1 \dots n$$

METODI ITERATIVI LINEARI

$$\begin{cases} \underline{x}^{(0)} \text{ vettore assegnato} \\ \underline{x}^{(k+1)} = B\,\underline{x}^{(k)} + \underline{q} \end{cases} \qquad k = 0, 1, \dots$$

Def: Un metodo iterativo si dice CONSISTENTE se

$$\underline{x}^{(\bar{k})} = \underline{x} \quad \text{implica} \quad \underline{x}^{(k+i)} = \underline{x}^{(k)} = \underline{x} \qquad i = 1, 2, \dots$$

Oss: Un metodo iterativo lineare sarà consistente se e solo se

$$\underline{q} = (I - B)A^{-1}\underline{b}$$

Dim: $\underline{x} = B\underline{x} + \underline{q}$ e $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$

da cui $$A^{-1}\underline{b} = B A^{-1}\underline{b} + \underline{q} \iff \underline{q} = (I - B)A^{-1}\underline{b}$$

Oss: Il costo del prodotto matrice-vettore è $O(n^2)$ in generale quindi il metodo sarà concorrenziale con un metodo diretto se si fanno meno di n iterazioni per raggiungere l'accuratezza desiderata ε

$$\|\underline{x}^{(m)} - \underline{x}\| < \varepsilon$$

Oss: Il costo del prodotto si abbassa se B è fortemente sparsa.