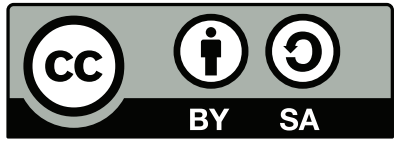
Algoritmi e Strutture Dati

Backtracking

Alberto Montresor

Università di Trento

2018/11/07



q

Sommario

1. Introduzione
2. Enumerazione
   - Sottoinsiemi
   - Permutazioni
   - Giochi
3. Backtracking iterativo
   - Inviluppo convesso

Introduzione

Classi di problemi (decisionali, di ricerca, di ottimizzazione)

- Definizioni basate sul concetto di soluzione ammissibile: una soluzione che soddisfa un certo insieme di criteri

Problemi tipici

- Costruire almeno una o tutte le soluzioni ammissibili
- Contare le soluzioni ammissibili
- Trovare le soluzioni ammissibili "più grandi", "più piccole" o in generale "ottimali"

Problemi tipici

Enumerazione

- Elencare algoritmicamente tutte le soluzioni ammissibili (spazio di ricerca)
- Esempio: elencare tutte le permutazioni di un insieme

Costruire almeno una soluzione

- Si utilizza l'algoritmo per l'enumerazione, fermandosi alla prima soluzione disponibile
- Esempio: identificare una sequenza di mosse nel gioco del 15

Problemi tipici

Contare le soluzioni

- In alcuni casi, è possibile contare in modo analitico
- Esempio: contare il numero di sottoinsiemi di k elementi presi da un insieme di n elementi

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

- In altri casi, si costruiscono le soluzioni e si contano
- Esempio: numero di sottoinsiemi di un insieme di interi S la cui somma è un numero primo.

Problemi tipici

Trovare le soluzioni ottimali

- Si enumerano tutte le soluzioni, che vengono valutate tramite una funzione di costo
- Si possono utilizzare altre tecniche:
  - Programmazione dinamica, greedy
  - Tecniche risolutive per problemi intrattabili
- Esempio: Circuito hamiltoniano (commesso viaggiatore)

Costruire tutte le soluzioni

Per costruire tutte le soluzioni, si utilizza un approccio "brute-force"

- Si esamina interamente lo spazio delle possibili soluzioni
- A volte è l'unica strada possibile
- La potenza dei computer moderni rende "affrontabili" problemi di dimensioni medio-piccole
  - $10! = 3.63 \cdot 10^6$ (permutazione di 10 elementi)
  - $2^{20} = 1.05 \cdot 10^6$ (sottoinsieme di 20 elementi)
- Inoltre, a volte lo spazio delle soluzioni non deve essere analizzato interamente

Backtracking

Filosofia

- "*Prova a fare qualcosa, e se non va bene, disfalo e prova qualcos'altro*"
- "*Ritenta, e sarai più fortunato*"

Come funziona?

- Un metodo sistematico per iterare su tutte le possibili istanze di uno spazio di ricerca
- E' una tecnica algoritmica che, come altre, deve essere personalizzata per ogni applicazione individuale

Organizzazione generale

Organizzazione generale

- Una soluzione viene rappresentata come un vettore $S[1 \ldots n]$
- Il contenuto degli elementi $S[i]$ è preso da un insieme di scelte C dipendente dal problema

Esempi

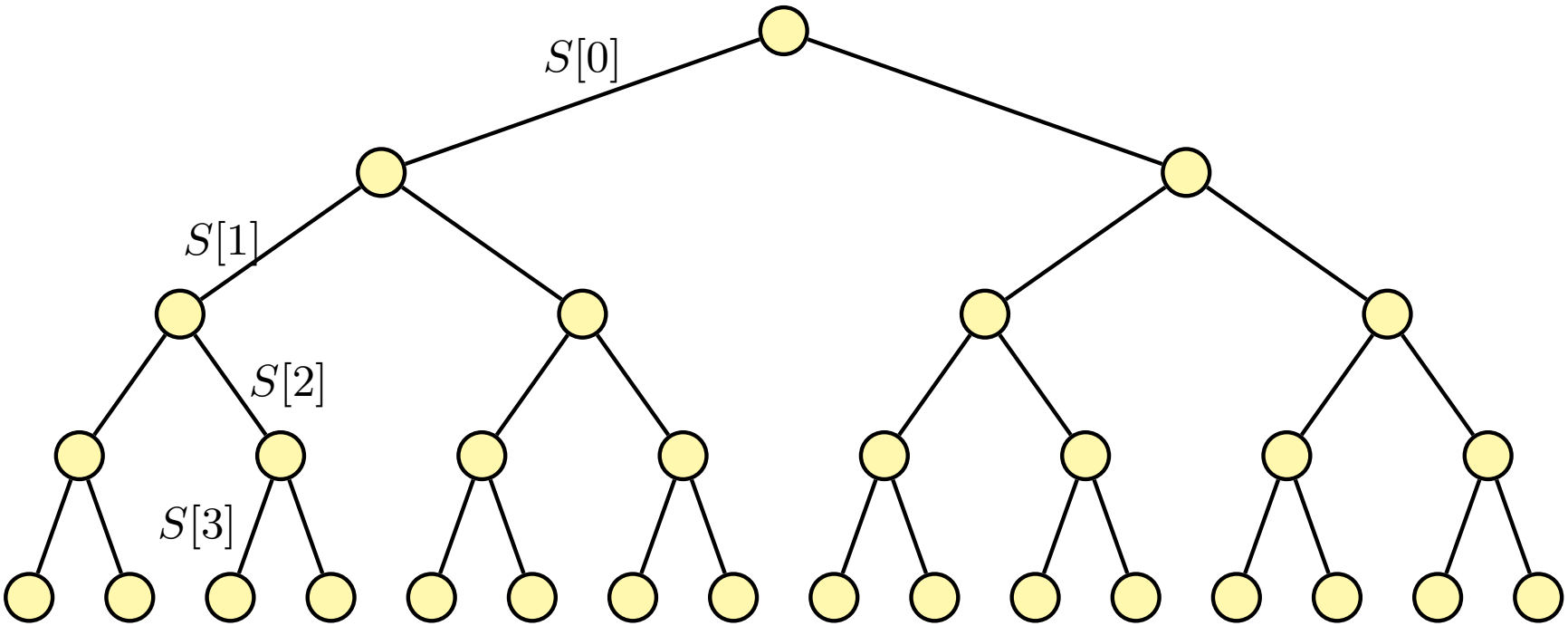
- C insieme generico, possibili soluzioni permutazioni di C
- C insieme generico, possibili soluzioni sottoinsiemi di C
- C mosse di gioco, possibili soluzioni sequenze di mosse
- C archi di un grafo, possibili soluzioni percorsi sul grafo

Soluzioni parziali

- Ad ogni passo, partiamo da una soluzione parziale $S[1 \dots k]$ in cui $k \geq 0$ scelte sono state prese
- Se $S[1 \dots k]$ è una soluzione ammissibile, la "processiamo"
  - Viene stampata, contata, evaluata
  - Si può decidere di terminare o continuare elencando tutte le soluzioni
- Se $S[1 \dots k]$ non è una soluzione completa
  - Se è possibile, estendiamo $S[1 \dots k]$ con una delle possibili scelte in una soluzione $S[1 \dots k+1]$
  - Altrimenti, "cancelliamo" l'elemento $S[k]$ (backtrack) e ripartiamo dalla soluzione $S[1 \dots k-1]$

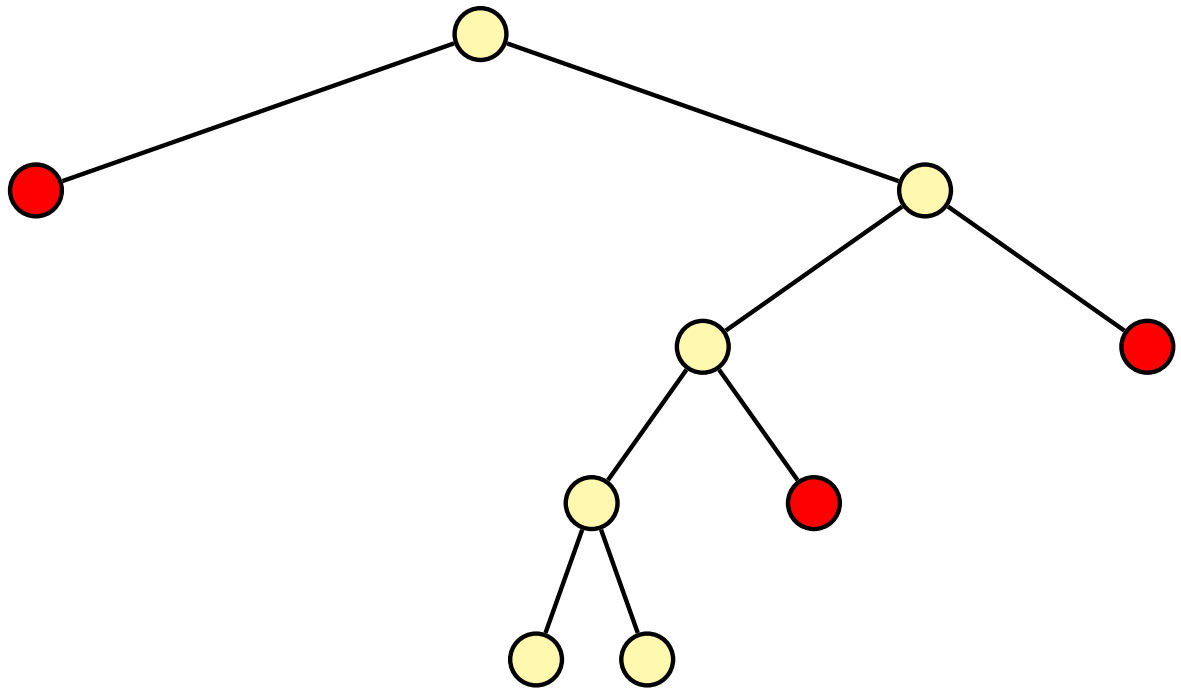
Albero delle decisioni

- Albero di decisione ≡ Spazio di ricerca
- Radice ≡ Soluzione parziale vuota
- Nodi interni dell'albero di decisione ≡ Soluzioni parziali
- Foglie in un albero di decisione ≡ Soluzioni ammissibili



Pruning

- "Rami" dell'albero che sicuramente non portano a soluzioni ammissibili possono essere "potati" (pruned)
- La valutazione viene fatta nelle soluzioni parziali radici del sottoalbero da potare



Backtracking - Due possibili approcci

Ricorsivo

- Lavora tramite una visita in profondità nell'albero delle scelte, basata su un approccio ricorsivo

Iterativo

- Utilizza un approccio greedy, eventualmente tornando sui propri passi
- Esempio: Inviluppo convesso
- Esempio: String matching

Enumerazione

boolean enumeration(ITEM[ ] S, **int** n, **int** i, ...)

```
SET C = choices(S, n, i, ...)          % Determina C in funzione di S[1...i-1]
foreach c ∈ C do
    S[i] = c
    if isAdmissible(S, n, i) then
        if processSolution(S, n, i, ...) then
            return true
    if enumeration(S, n, i+1, ...) then
        return true
return false
```

Enumerazione

- S: vettore contenente le soluzioni parziali $S[1 \ldots i]$
- i: indice corrente
- $\ldots$: informazioni addizionali
- C è l'insieme dei possibili candidati per estendere la soluzione
- isAdmissible(): restituisce **true** se $S[1 \ldots i]$ è una soluzione ammissibile
- processSolution(): restituisce
  - **true** per bloccare l'esecuzione alla prima soluzione ammissibile,
  - **false** per esplorare tutto l'albero

Esempio 1

Elencare tutti i sottoinsiemi dell'insieme $\{1, \ldots, n\}$

---

subsets(**int**[ ] S, **int** n, **int** i)

```
SET C = iif(i ≤ n, {0, 1}, ∅)
foreach c ∈ C do
    S[i] = c
    if i = n then
        processSolution(S, n)
    subsets(S, n, i + 1)
```

Esempio 1 (Versione più "pulita")

Elencare tutti i sottoinsiemi dell'insieme $\{1, \ldots, n\}$

---

subsets(**int**[ ] S, **int** n, **int** i)

---

foreach $c \in \{0, 1\}$ **do**
    $S[i] = c$
    if $i = n$ **then**
        processSolution(S, n)
    else
        subsets$(S, n, i + 1)$

Esempio 1

- Non c'è pruning. Tutto lo spazio possibile viene esplorato. Ma questo avviene per definizione
- Complessità $O(n2^n)$
- In che ordine vengono stampati gli insiemi?
- E' possibile pensare ad una soluzione iterativa, ad-hoc? (non-backtracking)

Esempio 1

```
subsets(int n)
for j = 0 to 2^n − 1 do
    print '{'
    for i = 0 to n − 1 do
        if (j and 2^i) ≠ 0 then
            print i
    print '}'
```

Esempio 2

Elencare tutti i sottoinsiemi di dimensione k di un insieme $\{1, \ldots, n\}$

- Versione iterativa
  - Qual è il costo?
- Soluzione basata su backtracking
  - Possiamo potare?

Esempio 2 - Tentativo 1

subsets(**int**[ ] S, **int** n, **int** k, **int** i)

```
SET C = iif(i ≤ n, {0, 1}, ∅)
foreach c ∈ C do
    S[i] = c
    if i = n then
        int count = 0
        for j = 1 to n do
            count = count + S[j]
        if count = k then
            processSolution(S, n)
    subsets(S, n, k, i + 1)
```

Esempio 2 - Tentativo 2

---

subsets(**int**[ ] S, **int** n, **int** k, **int** i, **int** $count$)

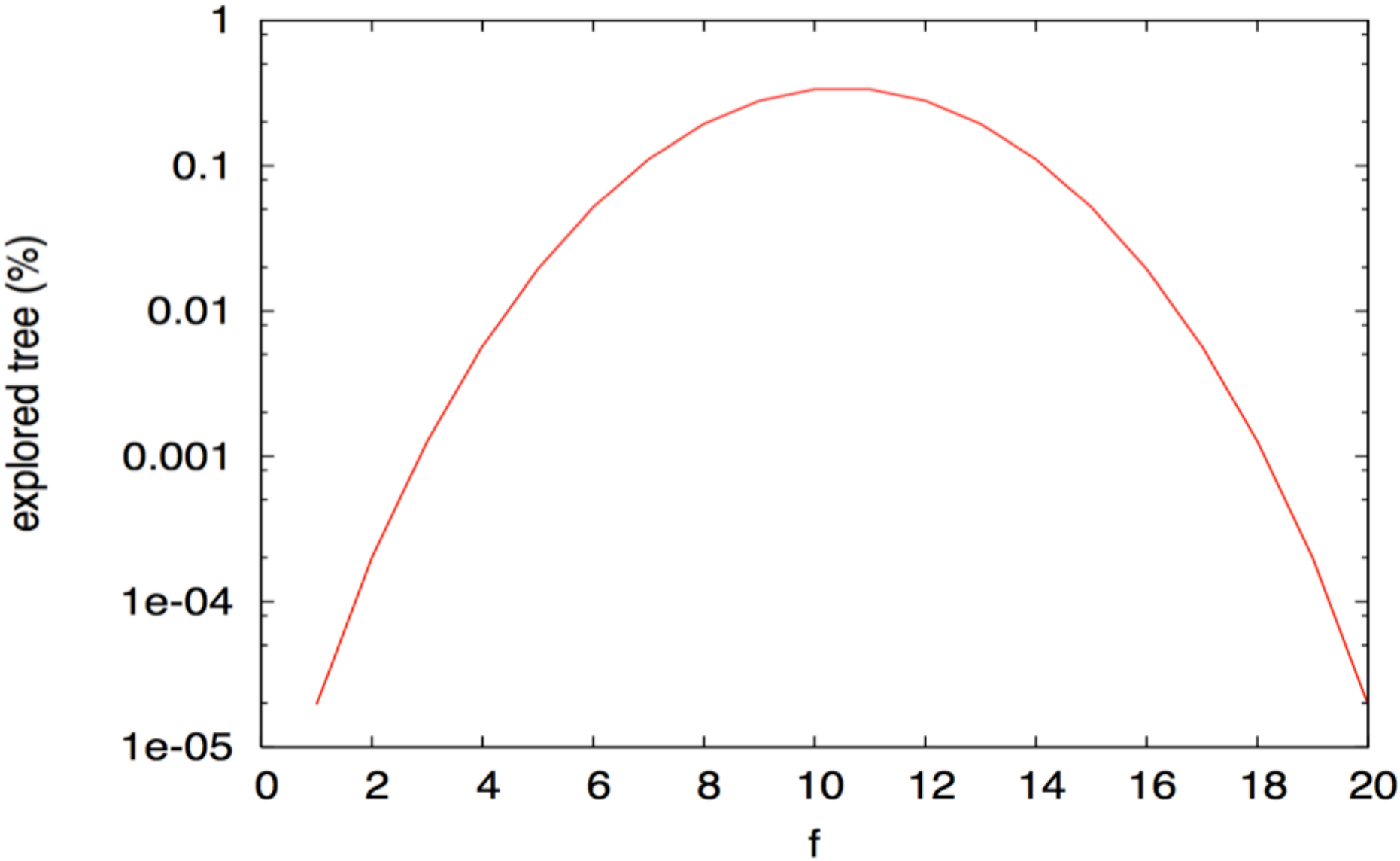
```
SET C = iif(i ≤ n, {0, 1}, ∅)
foreach c ∈ C do
    S[i] = c
    count = count + S[i]
    if i = n and count = k then
        processSolution(S, n)
    subsets(S, n, k, i + 1, count)
    count = count − S[i]
```

Esempio 2 - Tentativo 3 (Corretto)

subsets(**int**[ ] S, **int** n, **int** k, **int** i, **int** $count$)

```
SET C = iif(count < k and count + (n − i + 1) ≥ k, {0, 1}, ∅)
foreach c ∈ C do
    S[i] = c
    count = count + S[i]
    if count = k then
        processSolution(S, i)
    else
        subsets(S, n, k, i + 1, count)
    count = count − S[i]
```

Esempio 2: vantaggi



Esempio 2 - Sommario

Cosa abbiamo imparato?

- "Specializzando" l'algoritmo generico, possiamo ottenere una versione più efficiente
- Versione efficiente per
  - valori di k "piccoli" (vicini a 1)
  - valori di k "grandi" (vicini a n)
- Miglioramento solo parziale verso $n/2$
- E' difficile ottenere la stessa efficienza con un algoritmo iterativo

Esempio 3

Stampa di tutte le permutazioni di un insieme A

- L'insieme dei candidati dipende dalla soluzione parziale corrente

---

permutations(SET A, **int** n, ITEM[ ] S, **int** i)

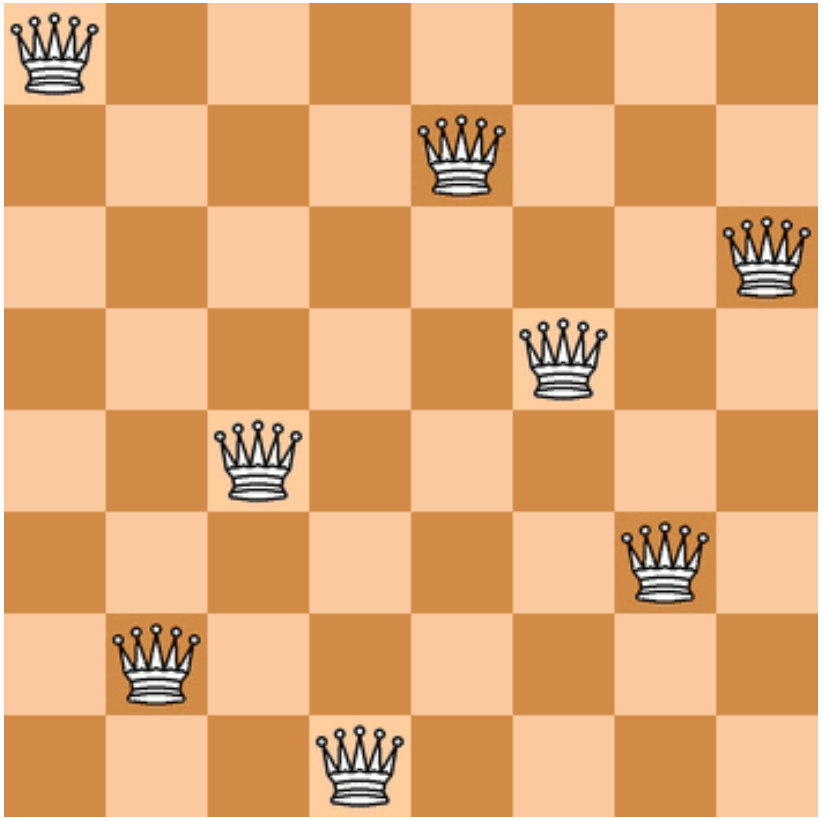
```
foreach c ∈ A do
    S[i] = c
    A.remove(c)
    if A.isEmpty() then
        processSolution(S, n)
    else
        permutations(A, n, S, i + 1)
    A.insert(c)
```

Problema delle otto regine

Problema

Posizionare n regine in una scacchiera $n \times n$, in modo tale che nessuna regina ne "minacci" un'altra.

- Un po' di storia:
  - Introdotto da Max Bezzel (1848)
  - Gauss trovò 72 delle 92 soluzioni
- Partiamo dall'approccio più stupido, e mano a mano raffiniamo la soluzione.



Problema delle otto regine

Idea: Ci sono n^2 caselle dove piazzare una regina

$S[1..n^2]$ array binario	$S[i] = \textbf{true} \Rightarrow$ "regina in $S[i]$"
controllo soluzione	se $i = n^2$
$\mathsf{choices}(S, n, i)$	$\{\textbf{true}, \textbf{false}\}$
pruning	se la nuova regina minaccia una delle regine esistenti, restituisce $\emptyset$
# soluzioni per $n = 8$	$2^{64} \approx 1.84 \cdot 10^{19}$

Commenti

- Forse abbiamo un problema di rappresentazione?
- Matrice binaria molto sparsa

Problema delle otto regine

Idea: Dobbiamo piazzare n regine, ci sono n^2 caselle

$S[1 \dots n]$ coordinate in $\{1 \dots n^2\}$	$S[i]$ coordinata della regina i
controllo soluzione	se $i = n$
$\mathsf{choices}(S, n, i)$	$\{1 \dots n^2\}$
pruning	restituisce il sottoinsieme di mosse legali
# soluzioni per $n = 8$	$(n^2)^n = 64^8 = 2^{48} \approx 2.81 \cdot 10^{14}$

Commenti

- C'è un miglioramento, ma lo spazio è ancora grande ...
- Problema: come si distingue una soluzione "1-7-..." da "7-1-..." ?

Problema delle otto regine

Idea: non mettere regine in caselle precedenti a quelle già scelte

$S[1 \ldots n]$ coordinate in $\{1 \ldots n^2\}$	$S[i]$ coordinata della regina i
controllo soluzione	se $i = n$
$\mathsf{choices}(S, n, i)$	$\{1 \ldots n^2\}$
pruning	restituisce mosse legali, $S[i] > S[i-1]$
# soluzioni per $n = 8$	$(n^2)^n/n! = 2^{48}/40320 \approx 6.98 \cdot 10^9$

Commenti

- Ottimo, abbiamo ridotto molto, ma si può ancora fare qualcosa

Problema delle otto regine

Idea: ogni riga della scacchiera deve contenere esattamente una regina

$S[1 \dots n]$ coordinate in $\{1 \dots n\}$	$S[i]$ colonna della regina i, dove riga $= i$
controllo soluzione	se $i = n$
$\mathsf{choices}(S, n, i)$	$\{1 \dots n\}$
pruning	restituisce le colonne legali
# soluzioni per $n = 8$	$n^n = 8^8 \approx 1.67 \cdot 10^7$

Commenti

- Quasi alla fine

Problema delle otto regine

Idea: anche ogni colonna deve contenere esattamente una regina

$S[1 \dots n]$ coordinate in $\{1 \dots n\}$	permutazione di $\{1 \dots n\}$
controllo soluzione	se $i = n$
$\mathsf{choices}(S, n, i)$	$\{1 \dots n\}$
pruning	elimina le diagonali
# soluzioni per $n = 8$	$n! = 8! = 40320$

Commenti

- Soluzioni effettivamente visitate = 15720

Problema delle otto regine

Minimum-conflicts heuristic

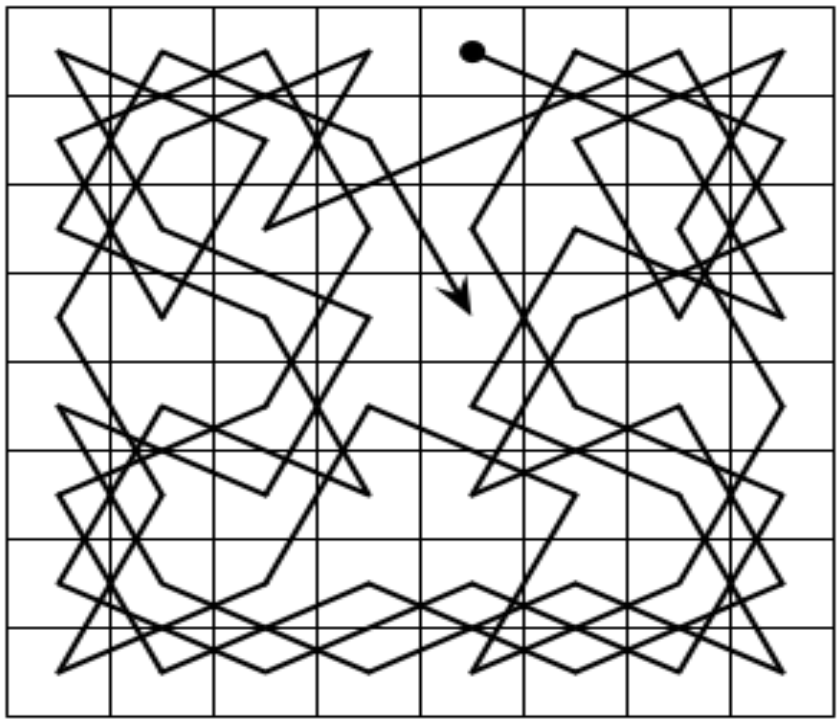
Si parte da una soluzione iniziale "ragionevolmente buona", e si muove il pezzo con il più grande numero di conflitti nella casella della stessa colonna che genera il numero minimo di conflitti. Si ripete fino a quando non ci sono più pezzi da muovere.

- Algoritmo in tempo lineare
- Ad esempio, con $n = 1,000,000$, richiede 50 passi in media
- Questo algoritmo non garantisce che la terminazione sia sempre corretta

Giro di cavallo

Problema

Si consideri ancora una scacchiera $n \times n$; lo scopo è trovare un "giro di cavallo", ovvero un percorso di mosse valide del cavallo in modo che ogni casella venga visitata al più una volta



Giro di cavallo

Soluzione

- Matrice $n \times n$ le cui celle contengono:
  - 0 se la cella non è mai stata visitata
  - i se la cella è stata visitata al passo i-esimo
- # soluzioni: $64! \approx 10^{89}$
- Ma: ad ogni passo ho al massimo 8 caselle possibili, quindi ne visito al più $8^{64} \approx 10^{57}$
- In realtà, grazie al pruning ne visito molto meno

Giro di cavallo

boolean cavallo(**int**[ ][ ] S, **int** i, **int** x, **int** y)

```
SET C = mosse(S, x, y)
foreach c ∈ C do
    S[x, y] = i
    if i = 64 then
        processSolution(S)
        return true
    else if cavallo(S, i + 1, x + m_x[c], y + m_y[c]) then
        return true;
    S[x, y] = 0
return false
```

Giro di cavallo

SET mosse(**int**[][] S, **int** x, **int** y)

```
SET C = Set()
for int i = 1 to 8 do
    n_x = x + m_x[i]
    n_y = y + m_y[i]
    if 1 ≤ n_x ≤ 8 and 1 ≤ n_y ≤ 8 and S[n_x, n_y] = 0 then
        C.insert(i)
return C
```

$$m_x = \{-1, +1, +2, +2, +1, -1, -2, -2\}$$
$$m_y = \{-2, -2, -1, +1, +2, +2, +1, -1\}$$

Sudoku - "Suuji wa dokushin ni kagiru"

2	5			9			7	6
			2		4			
		1	5		3	9		
	8	9	4		5	2	6	
1				2				4
	2	5	6			7	3	
		8	3		2	1		
			9		7			
3	7			8			9	2

2	5	3	8	9	1	4	7	6
8	9	7	2	6	4	3	1	5
6	4	1	5	7	3	9	2	8
7	8	9	4	3	5	2	6	1
1	3	6	7	2	9	8	5	4
4	2	5	6	1	8	7	3	9
9	6	8	3	5	2	1	4	7
5	1	2	9	4	7	6	8	3
3	7	4	1	8	6	5	9	2

Sudoku

boolean sudoku(**int**[ ][ ] S, **int** i)

```
int x = i mod 9
int y = ⌊i/9⌋
Set C = Set()
if i ≤ 80 then
    if S[x, y] ≠ 0 then
        C.insert(S[x, y])
    else
        for c = 1 to 9 do
            if check(S, x, y, c) then
                C.insert(c)
int old = S[x, y]
foreach c ∈ C do
    S[x, y] = c
    if i = 80 then
        processSolution(S, n)
        return true
    if sudoku(S, i + 1) then
        return true
S[x, y] = old
return false
```

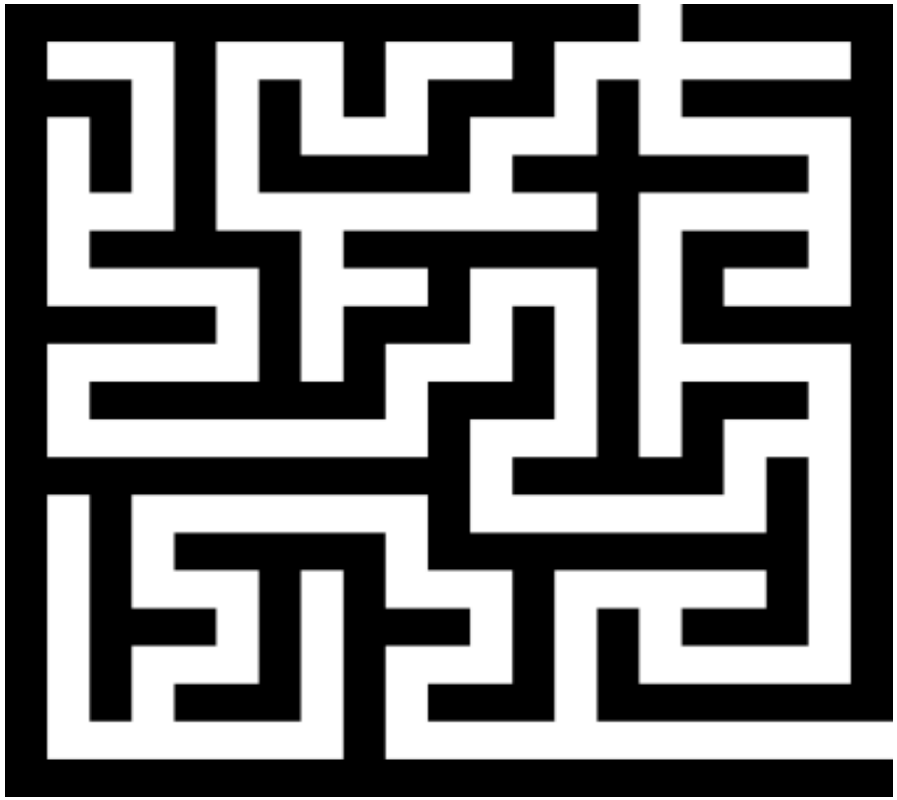
Sudoku

```
boolean check(int[][] S, int x, int y, int c)
for j = 0 to 8 do
    if S[x, j] = c then
        return false                          % Controllo sulla colonna
    if S[j, y] = c then
        return false                          % Controllo sulla riga
int b_x = ⌊x/3⌋
int b_y = ⌊y/3⌋
for i_x = 0 to 2 do
    for int i_y = 0 to 2 do                   % Controllo sulla sottotabella
        if S[b_x · 3 + i_x, b_y · 3 + i_y] = c then
            return false
return true
```

Generazione labirinti

Problemi

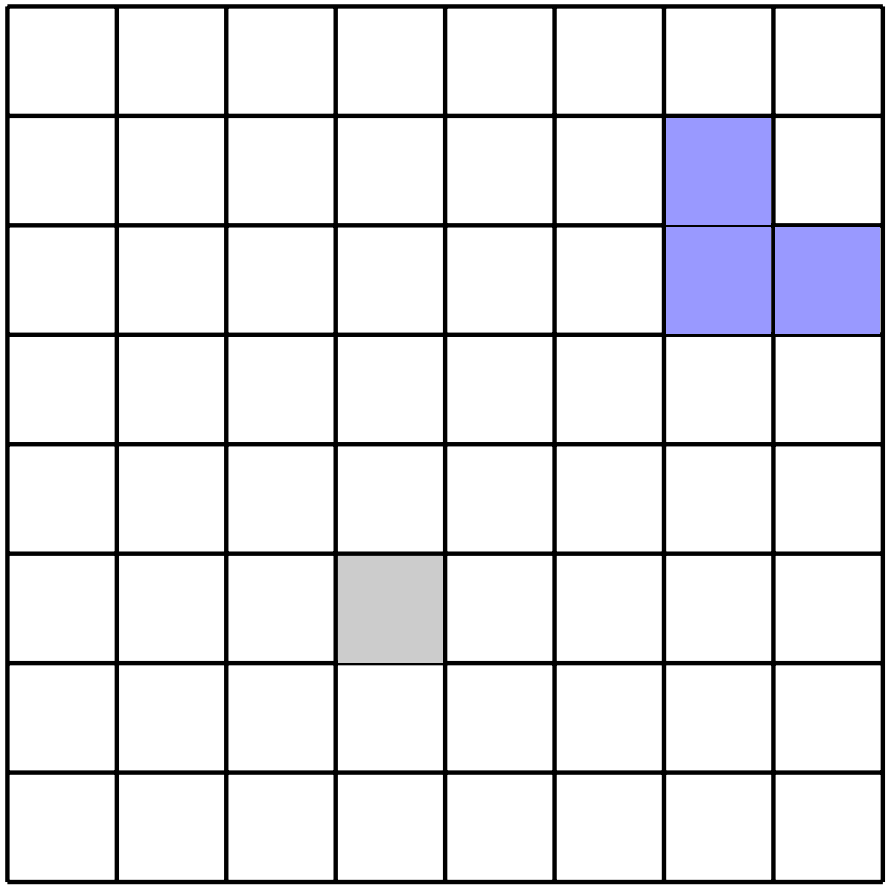
- Come generare un labirinto in una griglia $n \times n$?
- Come uscire da un labirinto?



Un ultimo puzzle

Problema

- Si consideri una scacchiera $n \times n$, con $n = 2^k$
- Qualsiasi scacchiera di questo tipo con una cella rimossa può essere ricoperta da triomini a forma di L
- Trovare un algoritmo che trovi una possibile ricopertura della scacchiera



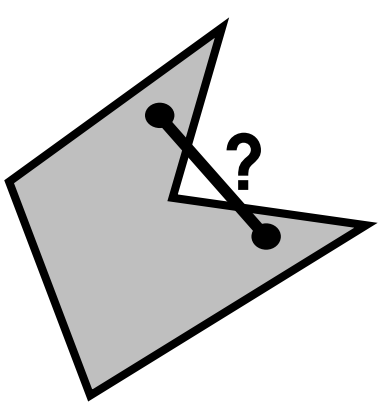
Inviluppo convesso

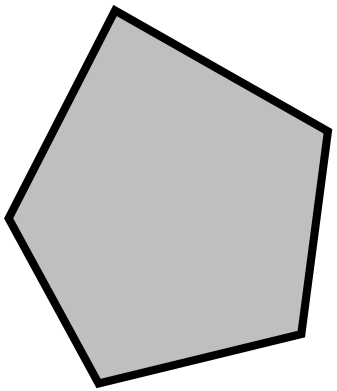
Poligono convesso

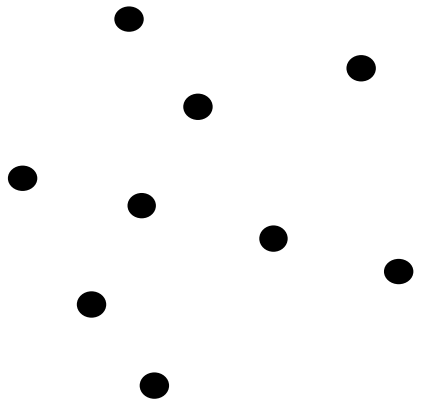
Un poligono nel piano è convesso se ogni segmento di retta che congiunge due punti del poligono sta interamente nel poligono stesso, incluso il bordo.

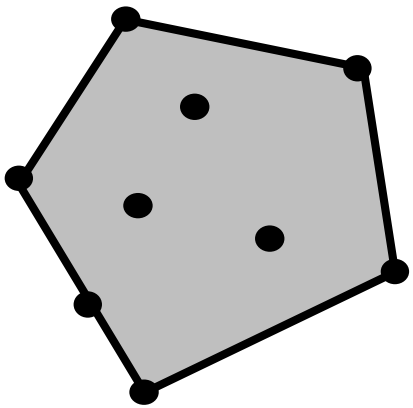
Inviluppo convesso

Dati n punti $p_1, \ldots, p_n$ nel piano, con $n \geq 3$, l'inviluppo convesso (convex hull) è il più piccolo poligono convesso che li contiene tutti



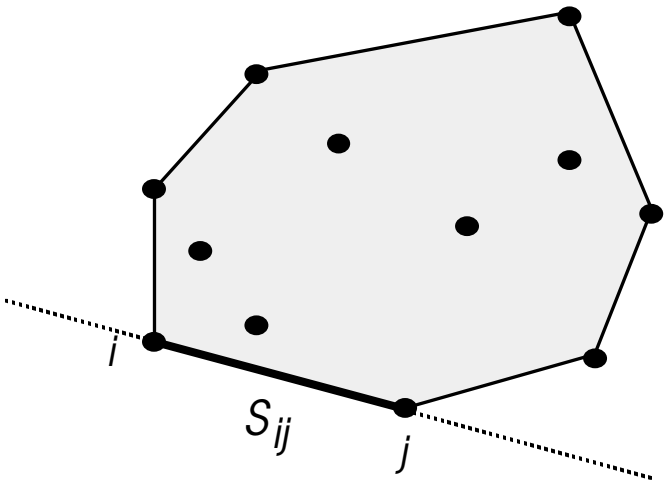


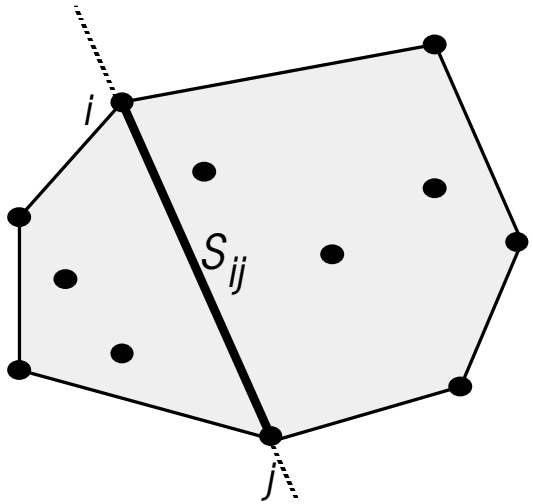




Algoritmo inefficiente – $O(n^3)$

- Un poligono può essere rappresentato per mezzo dei suoi spigoli
- Si consideri la retta che passa per una coppia di punti p_i, p_j, che divide il piano in due semipiani chiusi
- Se tutti i rimanenti $n-2$ punti stanno "dalla stessa parte", allora lo spigolo S_{ij} fa parte dell'inviluppo convesso





Stessa parte

Data una retta definita dai punti p_1 e p_2, determinare se due punti p e q stanno nello stesso semipiano definito dalla retta.

---

boolean stessaparte(POINT p_1, POINT p_2, POINT p, POINT q)

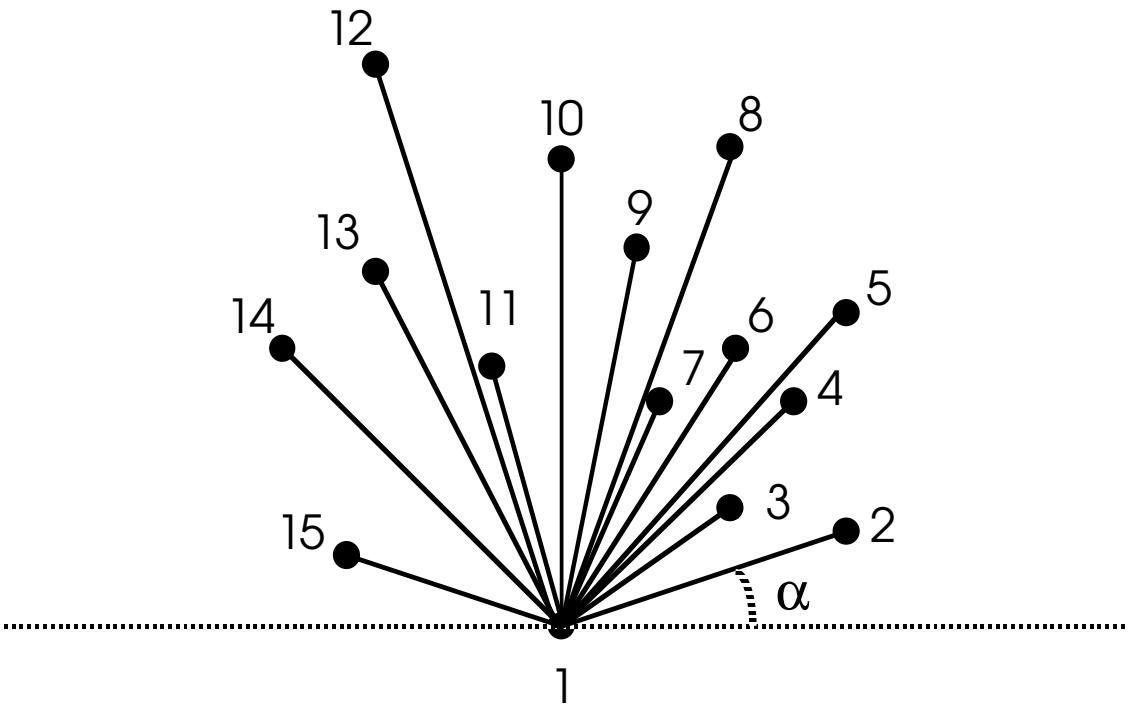
---

float $dx = p_2.x - p_1.x$
float $dy = p_2.y - p_1.y$
float $dx_1 = p.x - p_1.x$
float $dy_1 = p.y - p_1.y$
float $dx_2 = q.x - p_2.x$
float $dy_2 = q.y - p_2.y$
return $((dx \cdot dy_1 - dy \cdot dx_1) \cdot (dx \cdot dy_2 - dy \cdot dx_2) \geq 0)$

Algoritmo di Graham

Fase 1

- Il punto con ordinata minima fa parte dell'inviluppo convesso
- Si ordinano i punti in base all'angolo formato dalla retta passante per il punto con ordinata minima e la retta orizzontale



Algoritmo di Graham

STACK graham(POINT[ ] p, **int** n)

---

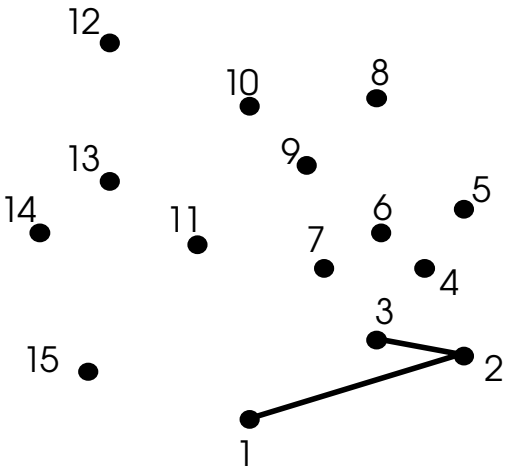
int $min = 1$
for $i = 2$ **to** n **do**
  if $p[i].y < p[min].y$ **then**
    $min = i$
$p[1] \leftrightarrow p[min]$
{ riordina $p[2, \ldots n]$ in base all'angolo formato rispetto all'asse orizzontale quando sono connessi con $p[1]$ }
{ elimina eventuali punti "allineati" tranne i più lontani da p_1, aggiornando n }

Algoritmo di Graham

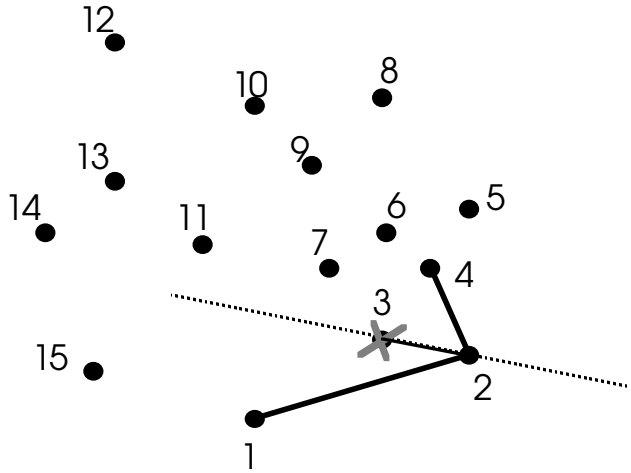
Fase 2

- Inserisci p_1, p_2 nell'inviluppo corrente
- Per tutti i punti $p_i = 3, \ldots, n$:
  - siano p_h e p_j, con $h < j = i - 1$, gli ultimi due vertici dell'inviluppo corrente
  - scandisci "a ritroso" i punti nell'inviluppo "corrente" ed elimina p_j se $\mathsf{stessaparte}(p_j, p_h, p_1, p_i) = \textbf{false}$;
  - termina tale scansione se p_j non deve essere eliminato;
  - aggiungi p_i all'inviluppo "corrente"

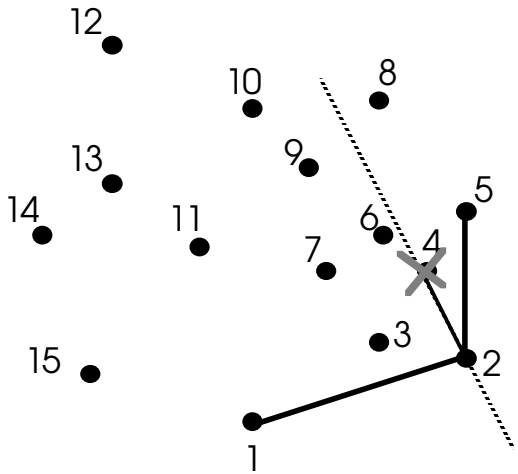
Algoritmo di Graham



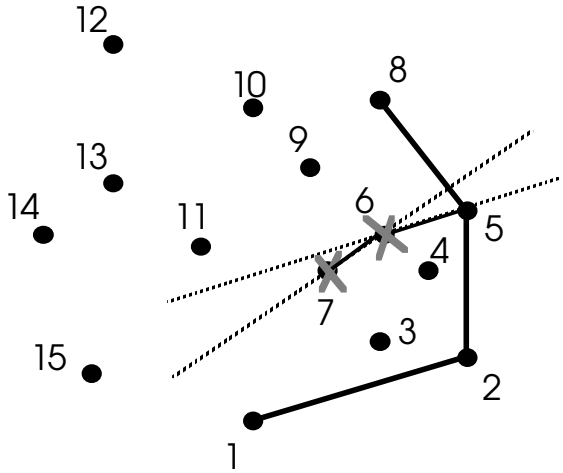
$i = 3$



$i = 4$



$i = 5$



$i = 8$

Algoritmo di Graham

STACK graham(POINT[ ] p, **int** n) (continua)

```
STACK S = Stack()
S.push(p_1); S.push(p_2)
for i = 3 to n do
    while not stessaparte(S.top(), S.top2(), p_1, p_i) do
        S.pop()
    S.push(p_i)
return S
```

Algoritmo di Graham

Complessità

- $O(n \log n)$, dominato dall'ordinamento