Lezione 16 del 10|05|2021

Titolo nota 10/05/2021

Es.: $p_5 = \frac{x}{8}(63x^4 - 70x^2 + 15)$

$[a,b] = [0.6, 1]$ ha una radice $\alpha \cong 0.9062$

implementare metodo di bisezione per ottenere un'approssimazione con tolleranza $toll = 10^{-10}$

Stimare a priori il numero di iterazioni del metodo di bisezione per raggiungere questa tolleranza)

Es.: Confrontare il comportamento dei metodi introdotti nel calcolo della radice $\alpha \cong 0.5149$ della funzione $f(x) = \cos^2(2x) - x^2$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 1.5$ con tolleranza sul residuo pari a 10^{-10}.

Es.: Calcolare la radice α della funzione $f(x) = e^{-x} - \eta$

$$e^{-\alpha} - \eta = 0 \iff e^{-\alpha} = \eta \iff -\alpha = \log \eta$$

$$\boxed{\alpha = -\log \eta}$$

Per $\eta = 10^{-9}$ $\qquad \alpha \cong 20.723$

approssimare la radice α con il metodo di Newton e due tolleranze

$\varepsilon = 10^{-3}$ $\qquad \varepsilon = 10^{-10}$

con il criterio del residuo e con il criterio dell'incremento

Confrontare il numero di iterazioni.

Es.: Piano di investimento

Si vuole calcolare il tasso medio di interesse r di un fondo di investimento su più anni:

- all'inizio di ogni anno si investono nel fondo v euro

- alla fine dell'n-esimo anno si è accumulato un montante (capitale + interessi) pari ad M euro

$$M = v \sum_{k=1}^{n} (1+r)^k = v \frac{1+r}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right]$$

r è la radice dell'equazione non lineare $f(r) = 0$ con

$$f(r) = M - v \frac{1+r}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right]$$

Dati: $v = 1000$ $\quad n = 5$ anni $\quad M = 6000$

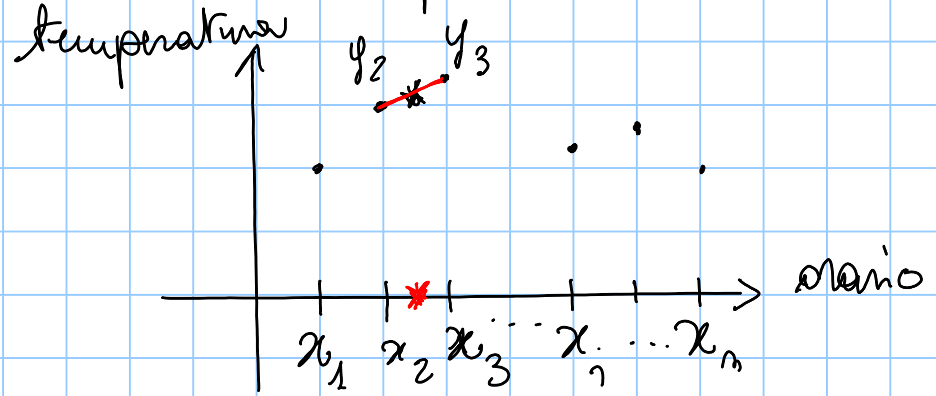
Risolvere con metodo di bisezione.

APPROSSIMAZIONE di DATI e FUNZIONI

Supponiamo di avere a disposizione un insieme di punti di coordinate

$$(x_i, y_i) \qquad i = 1 \dots n \quad \text{t.c.} \quad x_i \neq x_j \text{ se } i \neq j$$

<u>Oss</u>: y_i potrebbero essere misurazioni di temperatura in diverse ore del giorno;

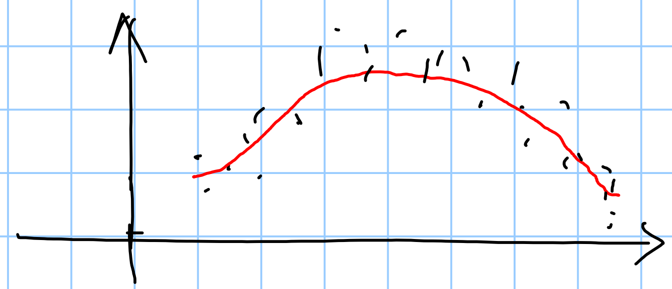


potrei essere interessato a stimare la temperatura in un istante che non era di misurazione.

L'approccio più semplice consiste nel determinare l'equazione della retta che collega i due punti adiacenti e valutarne il valore nell'istante desiderato.

Quando i dati mostrano una notevole curvatura l'errore che si commette potrebbe essere significativo.

<u>Oss</u>:

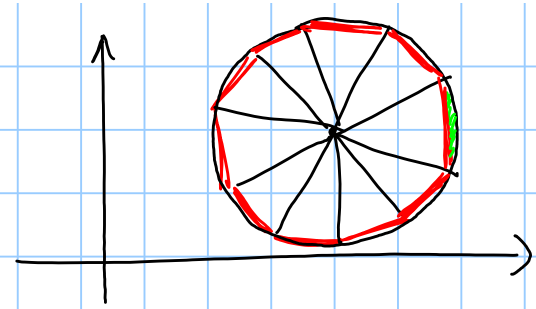


Se i dati sono numerosi, potrebbe essere significativo conoscere un andamento qualitativo del fenomeno

<u>Oss</u>:

$$(x_i, y_i)$$
$$\downarrow$$
$$f(x_i)$$

Se le ordinate y_i sono date da un'espressione di una funzione f calcolata nei nodi x_i ed f è molto complessa; potrebbe essere utile sostituire f con una funzione più semplice (ad esempio un polinomio) per calcolare poi integrale o derivata



metodo di esaustione

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

Consideriamo $m+1$ punti (x_i, y_i) $i = 0 \dots m$

$\boxed{x_i \neq x_j}$ se $i \neq j$

Il problema dell'interpolazione polinomiale consiste nel trovare un polinomio p di grado opportuno tale che

$$y_i = p(x_i) = a_m x_i^m + a_{m-1} x_i^{m-1} + \dots + a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0$$

condizione di INTERPOLAZIONE $\qquad i = 0 \dots n$

I punti x_i si dicono NODI di INTERPOLAZIONE

$$\begin{cases} p(x_0) = a_m x_0^m + a_{m-1} x_0^{m-1} + \dots + a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ p(x_1) = a_m x_1^m + a_{m-1} x_1^{m-1} + \dots + a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ p(x_2) = a_m x_2^m + a_{m-1} x_2^{m-1} + \dots + a_2 x_2^2 + a_1 x_2 + a_0 = y_2 \\ \vdots \\ p(x_n) = a_m x_n^m + a_{m-1} x_n^{m-1} + \dots + a_2 x_n^2 + a_1 x_n + a_0 = y_n \end{cases}$$

$n+1$ equazioni

$m+1$ coefficienti incogniti

MATRICE di VANDERMONDE V

$$\begin{pmatrix} x_0^m & x_0^{m-1} & x_0^{m-2} & \dots & x_0^2 & x_0^1 & 1 \\ x_1^m & x_1^{m-1} & x_1^{m-2} & \dots & x_1^2 & x_1^1 & 1 \\ x_2^m & x_2^{m-1} & x_2^{m-2} & \dots & x_2^2 & x_2^1 & 1 \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ x_n^m & x_n^{m-1} & x_n^{m-2} & \dots & x_n^2 & x_n^1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_m \\ a_{m-1} \\ a_{m-2} \\ \vdots \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Se $n > m$ il sistema si dice sovradeterminato

Se $n < m$ il sistema si dice sottodeterminato

Quindi occorre $\boxed{m = n}$

Con la condizione $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$, si può dimostrare che $\det(V) \neq 0$

$\Rightarrow$ V è una matrice non singolare

<u>Teorema</u>: Dati $n+1$ nodi distinti $x_0 \dots x_n$ e $n+1$ corrispondenti valori $y_0 \dots y_n$, esiste un unico polinomio di grado n interpolatore ossia tale che $\quad p(x_i) = y_i \quad i = 0 \dots n$

Es.:

x_i	300	400	500
y_i	0.616	0.525	0.457

$$p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$\begin{pmatrix} 90\,000 & 300 & 1 \\ 160\,000 & 400 & 1 \\ 250\,000 & 500 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.616 \\ 0.525 \\ 0.457 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{cond}(V) \cong 5.893 \cdot 10^6$$

Metodo alternativo per trovare il polinomio p passante per $(x_i, y_i)_{i=0 \dots n}$

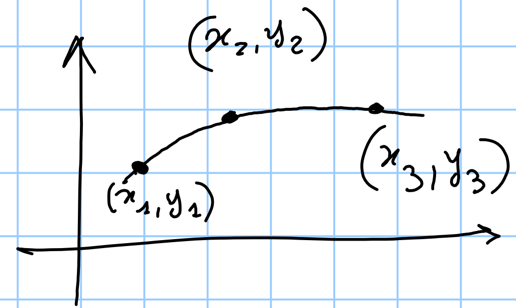
$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, L_i(x)$$

L_i polinomi fondamentali di Lagrange

$p(x)$: polinomio di grado n

$L_i(x)$: polinomi di grado n

$$y_j = p(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i \mathcal{L}_i(x_j) =$$



$$= y_0 \underbrace{\mathcal{L}_0(x_j)}_{0} + y_1 \underbrace{\mathcal{L}_1(x_j)}_{0} + y_2 \underbrace{\mathcal{L}_2(x_j)}_{0} + \dots + y_j \underbrace{\mathcal{L}_j(x_j)}_{1} + \dots + y_n \underbrace{\mathcal{L}_n(x_j)}_{0}$$

$\mathcal{L}_i(x)$ POLINOMIO FONDAMENTALE di LAGRANGE è un polinomio di grado n tale che

$$\boxed{\mathcal{L}_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}}$$

$$L_i(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \underbrace{\frac{x - x_0}{x_i - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_i - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_i - x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{x - x_n}{x_i - x_n}}_{n \text{ fattori di grado } 1}$$

Es.:

$x_0 = 3 \qquad x_1 = 7 \qquad x_2 = 11 \qquad p_2(x) = ?$

$y_0 = 9 \qquad y_1 = 49 \qquad y_2 = 121$