Algoritmi e Strutture Dati

Analisi di algoritmi
Introduzione

Alberto Montresor

Università di Trento

2019/01/13

Sommario

Introduzione

Obiettivo: stimare la complessità in tempo degli algoritmi

- Definizioni
- Modelli di calcolo
- Esempi di valutazioni
- Notazione

Perché?

- Per stimare il tempo impiegato per un dato input
- Per stimare il più grande input gestibile in tempi ragionevoli
- Per confrontare l'efficienza di algoritmi diversi
- Per ottimizzare le parti più importanti

Complessità

Complessità: "Dimensione dell'input" → "Tempo"

- Come definire la dimensione dell'input?
- Come misurare il tempo?

Dimensione dell'input

Criterio di costo logaritmico

- *La taglia dell'input è il numero di bit necessari per rappresentarlo*
- Esempio: moltiplicazione di numeri binari lunghi n bit

Criterio di costo uniforme

- *La taglia dell'input è il numero di elementi di cui è costituito*
- Esempio: ricerca minimo in un vettore di n elementi

In molti casi...

- Possiamo assumere che gli "elementi" siano rappresentati da un numero costante di bit
- Le due misure coincidono a meno di una costante moltiplicativa

Definizione di tempo

Tempo $\equiv$ n. istruzioni elementari

Un'istruzione si considera elementare se può essere eseguita in tempo "costante" dal processore.

Operazioni elementari

- `a *= 2` ?
- `Math.cos(d)` ?
- `min(A, n)` ?

Modelli di calcolo

Modello di calcolo

Rappresentazione astratta di un calcolatore

- Astrazione: deve permettere di nascondere i dettagli
- Realismo: deve riflettere la situazione reale
- Potenza matematica: deve permettere di trarre conclusioni "formali" sul costo

Modelli di calcolo – Wikipedia

Pages in category "Models of computation"

The following 108 pages are in this category, out of 108 total. This list may not reflect recent changes (learn more).

- Model of computation

A

- Abstract Job Object
- Abstract machine
- Abstract state machines
- Agent-based model
- Algorithm characterizations
- Alternating Turing machine
- Applicative computing systems

B

E cont.

- Event-driven finite-state machine
- Evolution in Variable Environment
- Extended finite-state machine

F

- Finite state machine with datapath
- Finite state transducer
- Finite-state machine
- FRACTRAN
- Funnelsort

H

P cont.

- Probabilistic Turing machine
- Pushdown automaton

Q

- Quantum capacity
- Quantum circuit
- Quantum computer

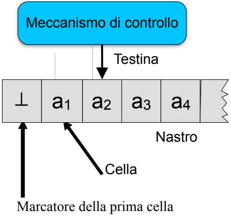
R

- Realization (systems)
- Register machine

Modelli di calcolo

Macchina di Turing

Una macchina ideale che manipola i dati contenuti su un nastro di lunghezza infinita, secondo un insieme prefissato di regole.



Ad ogni passo, la Macchina di Turing:

- legge il simbolo sotto la testina
- modifica il proprio stato interno
- scrive un nuovo simbolo nella cella
- muove la testina a destra o a sinistra

- Fondamentale nello studio della calcolabilità
- Livello troppo basso per i nostri scopi

Modelli di calcolo

Random Access Machine (RAM)

- Memoria:
  - Quantità infinita di celle di dimensione finita
  - Accesso in tempo costante (indipendente dalla posizione)
- Processore (singolo)
  - Set di istruzioni elementari simile a quelli reali:
    - somme, sottrazioni, moltiplicazioni, operazioni logiche, etc.
    - istruzioni di controllo (salti, salti condizionati)
- Costo delle istruzioni elementari
  - Uniforme, ininfluente ai fini della valutazione (come vedremo)

Tempo di calcolo min()

- Ogni istruzione richiede un tempo costante per essere eseguita
- La costante è potenzialmente diversa da istruzione a istruzione
- Ogni istruzione viene eseguita un certo # di volte, dipendente da n

```
ITEM min(ITEM[] A, int n)
                                  Costo   # Volte
ITEM min = A[1]                   c1      1
for i = 2 to n do                 c2      n
    if A[i] < min then            c3      n - 1
        min = A[i]                c4      n - 1
return min                        c5      1
```

$$\begin{aligned} T(n) &= c_1 + c_2 n + c_3(n-1) + c_4(n-1) + c_5 \\ &= (c_2 + c_3 + c_4)n + (c_1 + c_5 - c_3 - c_4) = an + b \end{aligned}$$

Tempo di calcolo binarySearch()

Il vettore viene suddiviso in due parti:

Parte SX: $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$
Parte DX: $\lfloor n/2 \rfloor$

int binarySearch(ITEM[] A, ITEM v, **int** i, **int** j)

	Costo	# $(i > j)$	# $(i \leq j)$
if $i > j$ **then**	c_1	1	1
return 0	c_2	1	0
else			
int $m = \lfloor (i+j)/2 \rfloor$	c_3	0	1
if $A[m] = v$ **then**	c_4	0	1
return m	c_5	0	0
else if $A[m] < v$ **then**	c_6	0	1
return binarySearch$(A, v, m+1, j)$	$c_7 + T(\lfloor (n-1)/2 \rfloor)$	0	0/1
else			
return binarySearch$(A, v, i, m-1)$	$c_7 + T(\lfloor n/2 \rfloor)$	0	1/0

Tempo di calcolo binarySearch()

- Assunzioni (Caso pessimo):
  - Per semplicità, assumiamo n potenza di 2: $n = 2^k$
  - L'elemento cercato non è presente
  - Ad ogni passo, scegliamo sempre la parte DX di dimensione $n/2$
- Due casi:

$$i > j \quad (n = 0) \qquad\qquad T(n) = c_1 + c_2 = c$$

$$\begin{aligned} i \leq j \quad (n > 0) \qquad\qquad T(n) &= T(n/2) + c_1 + c_3 + c_4 + c_6 + c_7 \\ &= T(n/2) + d \end{aligned}$$

- Relazione di ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{se } n = 0 \\ T(n/2) + d & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

Tempo di calcolo binarySearch()

Soluzione della relazione di ricorrenza tramite espansione

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n/2) + d \\
&= T(n/4) + 2d \\
&= T(n/8) + 3d \\
&\ldots \\
&= T(1) + kd \\
&= T(0) + (k+1)d \\
&= kd + (c+d) \\
&= d \log n + e.
\end{aligned}
$$

$$n = 2^k \Rightarrow k = \log n$$

Ordini di complessità

Per ora, abbiamo analizzato precisamente due algoritmi e abbiamo ottenuto due *funzioni di complessità*:

- Ricerca: $T(n) = d \log n + e$ logaritmica $O(\log n)$
- Minimo: $T(n) = an + b$ lineare $O(n)$

Una terza funzione deriva dall'*algoritmo naïf* per il minimo:

- Minimo: $T(n) = fn^2 + gn + h$ quadratica $O(n^2)$

Classi di complessità

$f(n)$	$n = 10^1$	$n = 10^2$	$n = 10^3$	$n = 10^4$	**Tipo**
$\log n$	3	6	9	13	logaritmico
$\sqrt{n}$	3	10	31	100	sublineare
n	10	100	1000	10000	lineare
$n \log n$	30	664	9965	132877	loglineare
n^2	10^2	10^4	10^6	10^8	quadratico
n^3	10^3	10^6	10^9	10^{12}	cubico
2^n	1024	10^{30}	10^{300}	10^{3000}	esponenziale

Come sbagliare completamente l'algoritmo di controllo degli update in Windows XP e renderlo esponenziale:
`http://m.slashdot.org/story/195683`

Algoritmi e Strutture Dati

Analisi di algoritmi
Funzioni di costo, notazione asintotica

Alberto Montresor

Università di Trento

2019/01/13

Notazioni O, Ω, Θ

Definizione – Notazione O

Sia $g(n)$ una funzione di costo; indichiamo con $O(g(n))$ l'insieme delle funzioni $f(n)$ tali per cui:

$$\exists c > 0, \exists m \geq 0 : f(n) \leq cg(n), \forall n \geq m$$

- Come si legge: $f(n)$ è "O grande" (big-O) di $g(n)$
- Come si scrive: $f(n) = O(g(n))$
- $g(n)$ è un limite asintotico superiore per $f(n)$
- $f(n)$ cresce al più come $g(n)$

Notazioni O, Ω, Θ

Definizione – Notazione Ω

Sia $g(n)$ una funzione di costo; indichiamo con $\Omega(g(n))$ l'insieme delle funzioni $f(n)$ tali per cui:

$$\exists c > 0, \exists m \geq 0 : f(n) \geq cg(n), \forall n \geq m$$

- Come si legge: $f(n)$ è "Omega grande" di $g(n)$
- Come si scrive: $f(n) = \Omega(g(n))$
- $g(n)$ è un limite asintotico inferiore per $f(n)$
- $f(n)$ cresce almeno quanto $g(n)$

Notazioni O, Ω, Θ

Definizione – Notazione Θ

Sia $g(n)$ una funzione di costo; indichiamo con $\Theta(g(n))$ l'insieme delle funzioni $f(n)$ tali per cui:

$$\exists c_1 > 0, \exists c_2 > 0, \exists m \geq 0 : c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n), \forall n \geq m$$

- Come si legge: $f(n)$ è "Theta" di $g(n)$
- Come si scrive: $f(n) = \Theta(g(n))$
- $f(n)$ cresce esattamente come $g(n)$
- $f(n) = \Theta(g(n))$ se e solo se $f(n) = O(g(n))$ e $f(n) = \Omega(g(n))$

Algoritmi vs problemi

Complessità in tempo di un algoritmo

La più grande quantità di tempo richiesta per un input di dimensione n

- $O(f(n))$: Per tutti gli input, l'algoritmo costa al più $f(n)$
- $\Omega(f(n))$: Per tutti gli input, l'algoritmo costa almeno $f(n)$
- $\Theta(f(n))$: L'algoritmo richiede $\Theta(f(n))$ per tutti gli input

Complessità in tempo di un problema computazionale

La complessità in tempo relative a tutte le possibili soluzioni

- $O(f(n))$: Complessità del miglior algoritmo che risolve il problema
- $\Omega(f(n))$: Dimostrare che nessun algoritmo può risolvere il problema in tempo inferiore a $\Omega(f(n))$
- $\Theta(f(n))$: Algoritmo ottimo

Algoritmi e strutture dati

Analisi di algoritmi
Complessità algoritmi vs Complessità problemi

Alberto Montresor

Università di Trento

2019/01/13

Introduzione

Obiettivo: *riflettere sulla complessità dei problemi e degli algoritmi*

- In alcuni casi, si può migliorare quanto si ritiene "normale"
- In altri casi, è impossibile fare di meglio
- Qual è il rapporto fra un problema computazionale e l'algoritmo?

Back to basics!

- Somme
- Moltiplicazioni

Moltiplicare numeri complessi

Moltiplicazione numeri complessi

- $(a + bi)(c + di) = [ac - bd] + [ad + bc]i$
- Input: a, b, c, d
- Output: $ac - bd$, $ad + bc$

Domande

Considerate un modello di calcolo dove la moltiplicazione costa 1, le addizioni/sottrazioni costano 0.01.

- Quanto costa l'algoritmo dettato dalla definizione?
- Potete fare meglio di così?
- Qual è il ruolo del modello di calcolo?

Moltiplicare numeri complessi

Questioni aperte

- Si può fare ancora meglio?
- Oppure, è possibile dimostrare che non si può fare meglio di così?

Alcune riflessioni

- In questo modello, effettuare 3 moltiplicazioni invece di 4 risparmia il 25% del costo
- Esistono contesti in cui effettuare 3 moltiplicazioni invece di 4 può produrre un risparmio maggiore

Sommare numeri binari

Algoritmo elementare della somma – sum()

- richiede di esaminare tutti gli n bit
- costo totale cn ($c \equiv$ costo per sommare tre bit e generare riporto)

Domanda

Esiste un metodo più efficiente?

```
  1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
  1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1 +
  1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1
  -----------------------------
1 1 0 1 0 1 0 1 0 0 1 0 0 0 1 0
```

Limite superiore alla complessità di un problema

Notazione $O(f(n))$ – Limite superiore

Un problema ha complessità $O(f(n))$ se esiste almeno un algoritmo che ha complessità $O(f(n))$

Limite superiore della somma di numeri binari

Il problema della somma di numeri binari ha complessità $O(n)$.

Limite inferiore alla complessità di un problema

Notazione $\Omega(f(n))$ – Limite inferiore

Un problema ha complessità $\Omega(f(n))$ se tutti i possibili algoritmi che lo risolvono hanno complessità $\Omega(f(n))$.

Limite inferiore della somma di numeri binari

Il problema della somma di numeri binari ha complessità $\Omega(n)$.

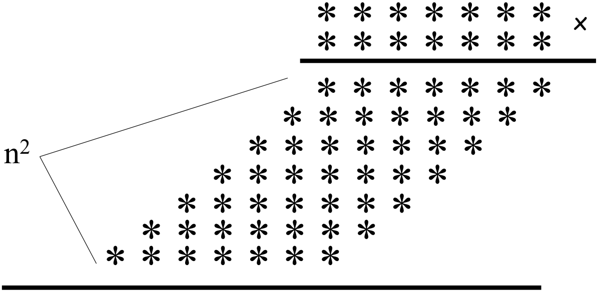
Domanda

Riuscite a dimostrarlo?

Moltiplicare numeri binari

Algoritmo elementare del prodotto – prod()

- moltiplicazione di ogni bit con ogni altro bit
- costo totale cn^2



Algoritmi aritmetici

Confronto della complessità computazionale

- Somma : $T_{sum}(n) = O(n)$
- Prodotto : $T_{prod}(n) = O(n^2)$

Si potrebbe concludere che...

- Il problema della moltiplicazione è inerentemente più costoso del problema dell'addizione
- Conferma la nostra esperienza

Algoritmi aritmetici

Confronto fra problemi

Per provare che il problema del prodotto è più costoso del problema della somma, dobbiamo provare che non esiste una soluzione in tempo lineare per il prodotto

Abbiamo confrontato gli algoritmi, non i problemi!

- Sappiamo solo che l'algoritmo di somma studiato alle elementari è più efficiente dell'algoritmo del prodotto studiato alle elementari
- Nel 1960, Kolmogorov enunciò in una conferenza che la moltiplicazione ha limite inferiore $\Omega(n^2)$
- Una settimana dopo, fu provato il contrario!

Moltiplicare numeri binari

Divide-et-impera

- Divide: dividi il problema in sottoproblemi di dimensioni inferiori
- Impera: risolvi i sottoproblemi in maniera ricorsiva
- Combina: unisci le soluzioni dei sottoproblemi in modo da ottenere la risposta del problema principale

Moltiplicazione divide-et-impera

$$X = a \cdot 2^{n/2} + b$$

$$Y = c \cdot 2^{n/2} + d$$

$$XY = ac \cdot 2^n + (ad + bc) \cdot 2^{n/2} + bd$$

X	a	b
Y	c	d

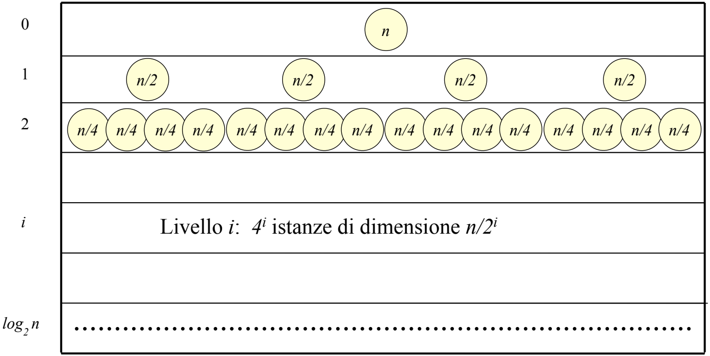
Moltiplicare numeri binari tramite Divide-et-impera

```
boolean [] pdi(boolean[] X, boolean[] Y, int n)
if n == 1 then
    return X[1] · Y[1]
else
    spezza X in a; b e Y in c; d
    return pdi(a, c, n/2) · 2^n + (pdi(a, d, n/2)+
              pdi(b, c, n/2)) · 2^{n/2} + pdi(b, d, n/2)
```

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & n = 1 \\ 4T(n/2) + c_2 \cdot n & n > 1 \end{cases}$$

Nota: Moltiplicare per $2^t \equiv$ shift di t posizioni, in tempo lineare

Analisi della ricorsione



$$c_2 \cdot 1 \cdot n$$

$$c_2 \cdot 4 \cdot n/2$$

$$c_2 \cdot 4^2 \cdot n/2^2$$

$$c_2 \cdot 4^i \cdot n/2^i$$

$$T(1) \cdot 4^{\log n}$$

$$= c_1 \cdot n^{\log 4}$$

$$= c_1 \cdot n^2$$

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & n = 1 \\ 4T(n/2) + c_2 \cdot n & n > 1 \end{cases}$$

Moltiplicare numeri binari

Confronto della complessità computazionale

- Prodotto : $T_{prod}(n) = O(n^2)$
- Prodotto : $T_{pdi}(n) = O(n^2)$

Domanda: Tutto questo lavoro per nulla?

Non solo la complessità è uguale, ma le costanti moltiplicative sono più alte.

Domanda: E' possibile fare meglio di così?

Notate che la versione ricorsiva chiama se stessa 4 volte.

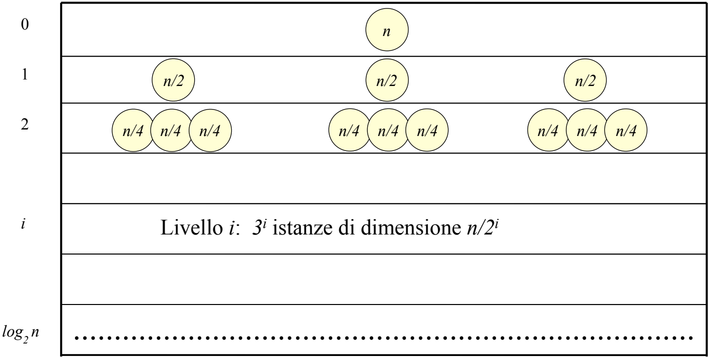
Moltiplicazione di Karatsuba (1962)

$$A_1 = a \times c$$
$$A_3 = b \times d$$
$$m = (a + b) \times (c + d) = ac + ad + bc + bd$$
$$A_2 = m - A_1 - A_3 = ad + bc$$

boolean [] KARATSUBA(**boolean**[] X, **boolean**[] Y, **int** n)

if $n == 1$ **then**
  return $X[1] \cdot Y[1]$
else
  spezza X in $a; b$ e Y in $c; d$
  boolean[] $A1 = \text{KARATSUBA}(a, c, n/2)$
  boolean[] $A3 = \text{KARATSUBA}(b, d, n/2)$
  boolean[] $m = \text{KARATSUBA}(a + b, c + d, n/2)$
  boolean[] $A2 = m - A1 - A3$
  return $A1 \cdot 2^n + A2 \cdot 2^{n/2} + A3$

Analisi della ricorsione



$c_2 \cdot 1 \cdot n$

$c_2 \cdot 3 \cdot n/2$

$c_2 \cdot 3^2 \cdot n/2^2$

$c_2 \cdot 3^i \cdot n/2^i$

$T(1) \cdot 3^{\log n}$

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & n = 1 \\ 3T(n/2) + c_2 \cdot n & n > 1 \end{cases}$$

$= c_1 \cdot n^{\log 3}$

$= c_1 \cdot n^{1.58\ldots}$

Moltiplicare numeri binari

Confronto della complessità computazionale

- Prodotto : $T_{prod}(n) = O(n^2)$ Es. $T_{prod}(10^6) = 10^{12}$
- Prodotto : $T_{kara}(n) = O(n^{1.58\ldots})$ Es. $T_{kara}(10^6) = 3 \cdot 10^9$

Conclusioni

- L'algoritmo "naif" non è sempre il migliore ...
- ... può esistere spazio di miglioramento ...
- ... a meno che non sia possibile dimostrare il contrario!

Non finisce qui ...

- Toom-Cook (1963)
  - Detto anche Toom3, ha complessità $O(n^{\log 5/\log 3}) \approx O(n^{1.465})$
  - Karatsuba $\equiv$ Toom2
  - Moltiplicazione normale $\equiv$ Toom1
- Schönhage–Strassen (1971)
  - Complessità $O(n \cdot \log n \cdot \log\log n)$
  - Basato su Fast Fourier Transforms
- Martin Fürer (2007)
  - Complessità $O(n \cdot \log n \cdot 2^{O(\log^* n)})$
- Limite inferiore: $\Omega(n \log n)$ (congettura)

Crescita funzioni

n	$\log^* n$	$\log\log n$
1	0	
2	1	0
4	2	1
16	3	2
2^{16}	4	4
$2^{2^{16}}$	5	16

GNU Multiple Precision Arithmetic Library

- Utilizzata da Mathematica, Maple, etc.
- Le moltiplicazioni vengono realizzate utilizzando algoritmi diversi, mano a mano che n cresce.
- `https://gmplib.org/manual/Multiplication-Algorithms.html`

15.1 Multiplication

NxN limb multiplications and squares are done using one of seven algorithms, as the size N increases.

Algorithm	Threshold
Basecase	(none)
Karatsuba	`MUL_TOOM22_THRESHOLD`
Toom-3	`MUL_TOOM33_THRESHOLD`
Toom-4	`MUL_TOOM44_THRESHOLD`
Toom-6.5	`MUL_TOOM6H_THRESHOLD`
Toom-8.5	`MUL_TOOM8H_THRESHOLD`
FFT	`MUL_FFT_THRESHOLD`

GNU Multiple Precision Arithmetic Library

- Utilizzata da Mathematica, Maple, etc.
- I limiti (threshold) dipendono dall'architettura

host type	abi	host name	meas thres	conf thres	cfg file
z10-ibm-linux-gnu	64	lgentoo4.s390.gentoo.wh0rd.org-stat	1728	1728	s390_64/z10/gmp-mparam.h
atom-unknown-linux-gnu	64	gege.gmplib.org-stat	2240	2240	x86_64/atom/gmp-mparam.h
z10esa-ibm-linux-gnu	32	lgentoo3.s390.gentoo.wh0rd.org-stat	2240	2240	s390_32/esame/gmp-mparam.h
power7-unknown-linux-gnu	mode32	gcc1-power7.osuosl.org-stat	2688	2688	powerpc64/mode32/p4/gmp-mparam.h
bulldozer-unknown-freebsd8.3	64	oshell.gmplib.org-stat	3520	3712	x86_64/bd1/gmp-mparam.h
piledriver-unknown-netbsd6.1.3	64	pilenbsd64v61.gmplib.org-stat	3712	3712	x86_64/bd2/gmp-mparam.h
powerpc7447-unknown-linux-gnu	32	spigg.gmplib.org-stat	3712	3712	powerpc32/gmp-mparam.h
coreihwl-unknown-netbsd6.1.2	64	hannahnbsd64v61.gmplib.org-stat	4224	4224	x86_64/coreihwl/gmp-mparam.h
coreinhm-unknown-netbsd6.1.3	64	bikonbsd64v61.gmplib.org-stat	4224	4032	x86_64/coreinhm/gmp-mparam.h
power7-ibm-aix7.1.0.0	mode64	power-aix.fsffrance.org-stat	4288	4288	powerpc64/mode64/p7/gmp-mparam.h
atom-unknown-linux-gnu	32	gege.gmplib.org-stat	4544	4544	x86/atom/gmp-mparam.h
core2-unknown-netbsd6.1.4	64	repentiumnbsd64v61.gmplib.org-stat	4736	4736	x86_64/core2/gmp-mparam.h
coreisbr-apple-darwin12.5.0	64	poire.loria.fr-stat	4736	4736	x86_64/coreisbr/gmp-mparam.h
coreiwsm-unknown-linux-gnu	64	gcc20.fsffrance.org-stat	4736	4032	x86_64/coreinhm/gmp-mparam.h
power7-unknown-linux-gnu	mode64	gcc1-power7.osuosl.org-stat	4736	4288	powerpc64/mode64/p7/gmp-mparam.h
powerpc970-apple-darwin8.11.0	mode32	g5.gmplib.org-stat	4736	2688	powerpc64/mode32/p4/gmp-mparam.h
power7-ibm-aix7.1.0.0	32	power-aix.fsffrance.org-stat	5312	5312	powerpc32/p7/gmp-mparam.h
bobcat-unknown-netbsd6.1.3	64	bobcat.gmplib.org-stat	5504	5504	x86_64/bobcat/gmp-mparam.h
alphaev6-unknown-linux-gnu	standard	agnesi.math.su.se-stat	5760	5760	alpha/ev6/gmp-mparam.h
armcortexa15neon-unknown-linux-	standard	parma.gmplib.org-stat	5760	5760	arm/v7a/cora15/gmp-mparam.h
power7-unknown-linux-gnu	32	gcc1-power7.osuosl.org-stat	5760	5312	powerpc32/p7/gmp-mparam.h
core2-unknown-netbsdelf6.1.4	32	repentiumnbsd32v61.gmplib.org-stat	6784	6784	x86/core2/gmp-mparam.h

Algoritmi e strutture dati

Analisi di algoritmi
Algoritmi di ordinamento

Alberto Montresor

Università di Trento

2019/01/13

Introduzione

Obiettivo: valutare gli algoritmi in base alla tipologia dell'input

- In alcuni casi, gli algoritmi si comportano diversamente a seconda delle caratteristiche dell'input
- Conoscere in anticipo tali caratteristiche permette di scegliere il miglior algoritmo in quella situazione
- Il problema dell'ordinamento è una buona palestra dove mostrare questi concetti

Algoritmi d'ordinamento

- Selection Sort
- Insertion Sort
- Merge Sort

Tipologia di analisi

Analisi del caso pessimo

- La più importante
- Il tempo di esecuzione nel caso peggiore è un limite superiore al tempo di esecuzione per qualsiasi input
- Per alcuni algoritmi, il caso peggiore si verifica molto spesso
  Es.: ricerca di dati non presenti in un database

Analisi del caso medio

- Difficile in alcuni casi: cosa si intende per "medio"?
- Distribuzione uniforme

Analisi del caso ottimo

- Può avere senso se si conoscono informazioni particolari sull'input

Ordinamento

Problema dell'ordinamento

- **Input**: Una sequenza $A = a_1, a_2, \ldots, a_n$ di n valori
- **Output**: Una sequenza $B = b_1, b_2, \ldots, b_n$ che sia una permutazione di A e tale per cui $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$

Approccio "demente":

- Genero tutte le possibili permutazioni fino a quando non ne trovo una già ordinata

Approccio "naif":

- Cerco il minimo e lo metto in posizione corretta, riducendo il problema agli $n - 1$ restanti valori.

Selection Sort

```
SelectionSort(ITEM[] A, int n)
for i = 1 to n − 1 do
    int min = min(A, i, n)
    A[i] ↔ A[min]
```

```
int min(ITEM[] A, int i, int n)
% Posizione del minimo parziale
int min = i
for j = i + 1 to n do
    if A[j] < A[min] then
        % Nuovo minimo parziale
        min = j
return min
```

Selection Sort

SelectionSort(ITEM[ ] A, **int** n)

for $i = 1$ **to** $n - 1$ **do**
  int $min = \mathsf{min}(A, i, n)$
  $A[i] \leftrightarrow A[min]$

int min(ITEM[ ] A, **int** i, **int** n)

% Posizione del minimo parziale
int $min = i$
for $j = i + 1$ **to** n **do**
  if $A[j] < A[min]$ **then**
    % Nuovo minimo parziale
    $min = j$
return min

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$
$i=1$	7	4	2	1	8	3	5
$i=2$	1	4	2	7	8	3	5
$i=3$	1	2	4	7	8	3	5
$i=4$	1	2	3	7	8	4	5
$i=5$	1	2	3	4	8	7	5
$i=6$	1	2	3	4	5	7	8
$i=7$	1	2	3	4	5	7	8

Selection Sort

```
SelectionSort(ITEM[] A, int n)
for i = 1 to n − 1 do
    int min = min(A, i, n)
    A[i] ↔ A[min]
```

```
int min(ITEM[] A, int i, int n)
% Posizione del minimo parziale
int min = i
for j = i + 1 to n do
    if A[j] < A[min] then
        % Nuovo minimo parziale
        min = j
return min
```

Complessità nel caso medio, pessimo, ottimo?

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} = n^2 - n/2 = O(n^2)$$

Insertion Sort

- Algoritmo efficiente per ordinare piccoli insiemi di elementi
- Si basa sul principio di ordinamento di una "mano" di carte da gioco (e.g. scala quaranta)

```
insertionSort(ITEM[] A, int n)

for i = 2 to n do
    ITEM temp = A[i]
    int j = i
    while j > 1 and A[j − 1] > temp do
        A[j] = A[j − 1]
        j = j − 1
    A[j] = temp
```

Insertion Sort

	1	2	3	4	5	6	7	*temp*
	7	4	2	1	8	3	5	
$i = 2, j = 2$	7	**7**	2	1	8	3	5	4
$i = 2, j = 1$	**4**	7	2	1	8	3	5	4
$i = 3, j = 3$	4	7	**7**	1	8	3	5	2
$i = 3, j = 2$	4	**4**	7	1	8	3	5	2
$i = 3, j = 1$	**2**	4	7	1	8	3	5	2

Insertion Sort

	1	2	3	4	5	6	7	temp
$i = 4, j = 4$	2	4	7	**7**	8	3	5	1
$i = 4, j = 3$	2	4	**4**	7	8	3	5	1
$i = 4, j = 2$	2	**2**	4	7	8	3	5	1
$i = 4, j = 1$	**1**	2	4	7	8	3	5	1
$i = 5, j = 5$	1	2	4	7	**8**	3	5	8
$i = 6, j = 6$	1	2	4	7	8	**8**	5	3

Insertion Sort

	1	2	3	4	5	6	7	*temp*
$i = 6, j = 5$	1	2	4	7	**7**	8	5	3
$i = 6, j = 4$	1	2	4	**4**	7	8	5	3
$i = 6, j = 3$	1	2	**3**	4	7	8	5	3
$i = 7, j = 7$	1	2	3	4	7	8	**8**	5
$i = 7, j = 6$	1	2	3	4	7	**7**	8	5
$i = 7, j = 5$	1	2	3	4	**5**	7	8	5

Correttezza e complessità

In questo algoritmo

- Il costo di esecuzione non dipende solo dalla dimensione...
- ma anche dalla distribuzione dei dati in ingresso

Domande

- Dimostrare che l'algoritmo è corretto
- Qual è il costo nel caso il vettore sia già ordinato?
- Qual è il costo nel caso il vettore sia ordinato in ordine inverso?
- Cosa succede "in media"? (informalmente)

Merge Sort

Divide et impera

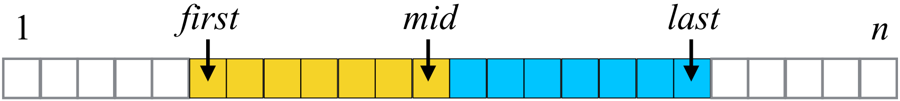
Merge Sort è basato sulla tecnica divide-et-impera vista in precedenza

- Divide: Spezza virtualmente il vettore di n elementi in due sottovettori di $n/2$ elementi
- Impera: Chiama Merge Sort ricorsivamente sui due sottovettori
- Combina: Unisci (merge) le due sequenze ordinate

Idea

Si sfrutta il fatto che i due sottovettori sono già ordinati per ordinare più velocemente

Merge



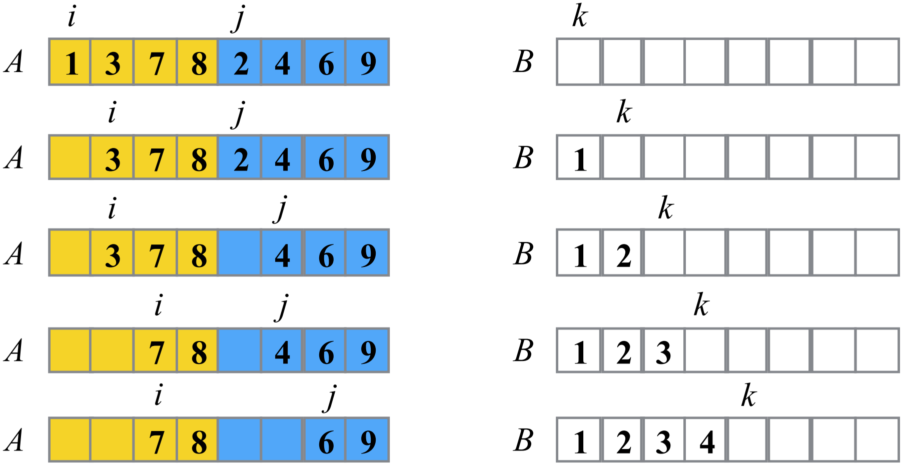
Input:

- A è un vettore di n interi
- *first*, *last*, *mid* sono tali che $1 \leq \mathit{first} \leq \mathit{mid} < \mathit{last} \leq n$
- I sottovettori $A[\mathit{first} \ldots \mathit{mid}]$ e $A[\mathit{mid} + 1 \ldots \mathit{last}]$ sono già ordinati

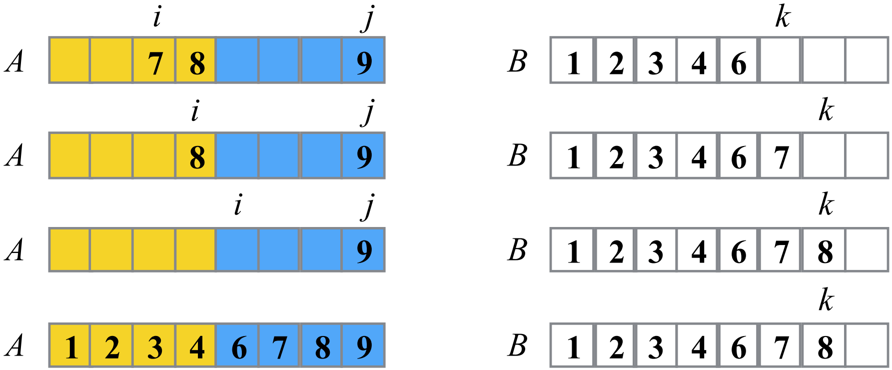
Output:

- I due sottovettori sono fusi in un unico sottovettore ordinato A[*first* ... *last*] tramite un vettore di appoggio B

Funzionamento Merge()



Funzionamento Merge()



Merge()

Merge(ITEM $A[\,]$, **int** *first*, **int** *last*, **int** *mid*)

```
int i, j, k, h
i = first
j = mid + 1
k = first
while i ≤ mid and j ≤ last do
    if A[i] ≤ A[j] then
        B[k] = A[i]
        i = i + 1
    else
        B[k] = A[j]
        j = j + 1
    k = k + 1
j = last
for h = mid downto i do
    A[j] = A[h]
    j = j − 1
for j = first to k − 1 do
    A[j] = B[j]
```

Costo computazionale

Domanda

Qual è il costo computazionale di Merge()? $\Rightarrow O(n)$

Merge Sort

Programma completo:

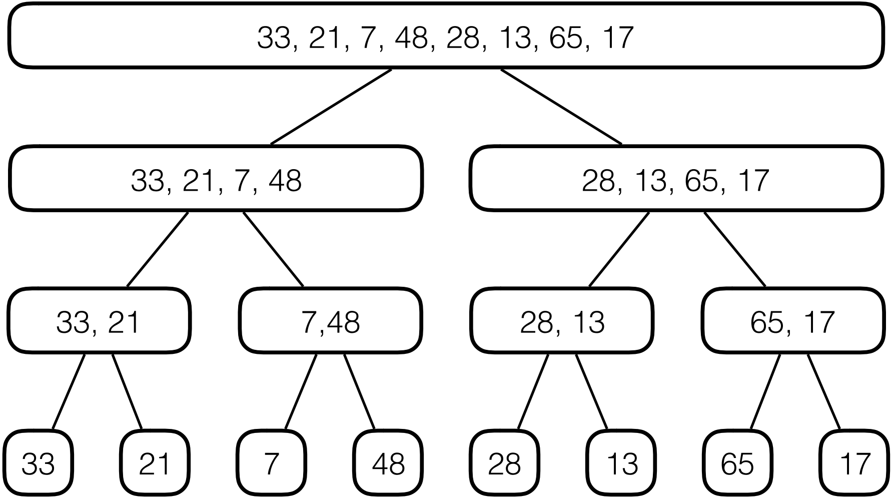
- Chiama ricorsivamente se stesso e usa Merge() per unire i risultati
- Caso base: sequenze di lunghezza ≤ 1 sono già ordinate

MergeSort(ITEM $A[\,]$, **int** *first*, **int** *last*)

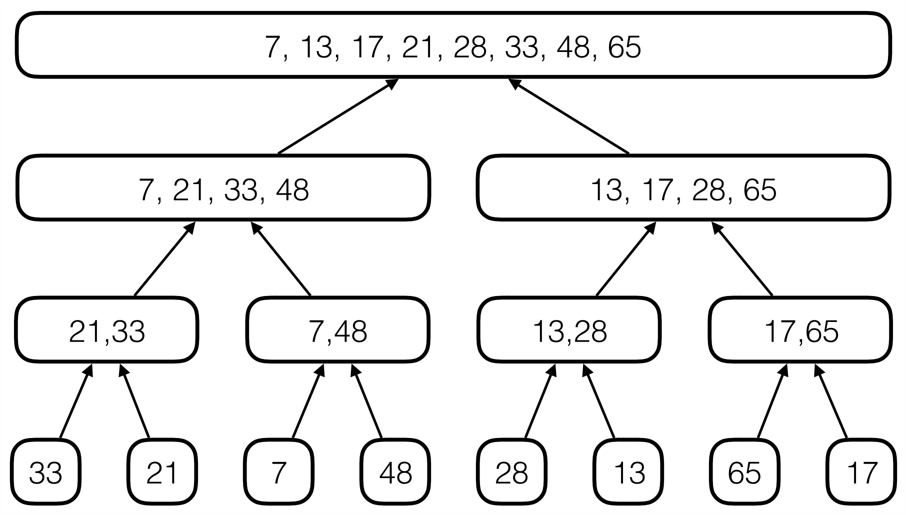
---

if $\mathit{first} < \mathit{last}$ **then**
    int $\mathit{mid} = \lfloor(\mathit{first} + \mathit{last})/2\rfloor$
    MergeSort($A, \mathit{first}, \mathit{mid}$)
    MergeSort($A, \mathit{mid} + 1, \mathit{last}$)
    Merge($A, \mathit{first}, \mathit{last}, \mathit{mid}$)

MergeSort(): Esecuzione



MergeSort(): Esecuzione



Analisi di MergeSort()

Un'assunzione semplificativa:

- $n = 2^k$, ovvero l'altezza dell'albero di suddivisioni è esattamente $k = \log n$;
- Tutti i sottovettori hanno dimensioni che sono potenze esatte di 2

Costo computazionale: $O(n \log n)$

$$T(n) = \begin{cases} c & n = 1 \\ 2T(n/2) + dn & n > 1 \end{cases}$$

Costo computazionale di Merge Sort

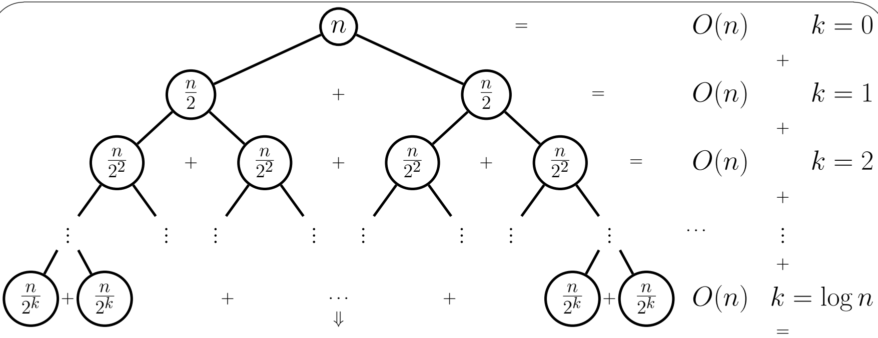
Domanda

Qual è il costo computazionale di MergeSort()?

Costo computazionale di Merge Sort

Domanda

Qual è il costo computazionale di MergeSort()?



$$O\left(\sum_{i=0}^{k} 2^i \cdot \frac{n}{2^i}\right) = O\left(\sum_{i=0}^{k} n\right) = O(k \cdot n) \Leftrightarrow O(n \cdot \lg n)$$

Un po' di storia

- Il censimento americano del 1880 aveva richiesto otto anni per essere completato
- Quello del 1890 richiese sei settimane, grazie alla Hollerith Machine
- Fra il 1896 e il 1924, la Hollerith & Co ha cambiato diversi nomi. L'ultimo? International Business Machines
- Le Collating Machines (1936) prendevano due stack di schede perforate ordinate e le ordinavano in un unico stack
- Nel 1945-48, John von Neumann descrisse per la prima volta il MergeSort partendo dall'idea delle Collating Machines.

Hollerith Machine