Lezione 9 del 25/03/2021

Fattorizzazioni

Casi particolari: A matrice tridiagonale

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & e_1 & & & 0 \\ b_2 & a_2 & e_2 & & \\ & b_3 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & e_{n-1} \\ 0 & & & b_n & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ b_2 \frac{d_0}{d_1} & 1 & & & \\ & b_3 \frac{d_1}{d_2} & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & b_n \frac{d_{n-2}}{d_{n-1}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d_1}{d_2} & e_1 & & & 0 \\ & \frac{d_2}{d_1} & e_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & e_{n-1} \\ 0 & & & & \frac{d_n}{d_{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad L \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad U$$

$$\boxed{\begin{aligned} d_0 &= 1 \\ d_1 &= a_1 \end{aligned}} \longrightarrow \begin{matrix} 0 \text{ somme} & 0 \text{ prodotti} \\ 0 \quad " & 0 \quad " \end{matrix}$$

$$d_2 = \det\begin{pmatrix} a_1 & e_1 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = a_1 a_2 - e_1 b_2 = a_2 d_1 - b_2 e_1 d_0 \longrightarrow 1 \text{ somme} \quad 3 \quad "$$

$$d_3 = \det\begin{pmatrix} a_1 & e_1 & 0 \\ b_2 & a_2 & e_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \end{pmatrix} = a_3 \cdot d_2 - b_3 e_2 d_1 \longrightarrow 1 \text{ somme} \quad 3 \quad "$$

$$\vdots$$

$$\boxed{d_k = a_k d_{k-1} - b_k e_{k-1} d_{k-2} \qquad k = 2 \ldots n}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché la fattorizzazione LU sia unica è che

$$d_i \neq 0 \qquad \forall i = 1 \ldots n-1$$

Oss: Affinché la matrice A sia invertibile deve valere $d_n \neq 0$

Costo computazionale:

somme	$n-1$	
prodotti	$3(n-1) + n-1$	$= 4(n-1)$
	determinanti sottodiagonale L	
divisioni	$2(n-1)+1$	

$O(n)$

Oss: verificare che $LU = A$