Lezione 4 del 08/03/2021

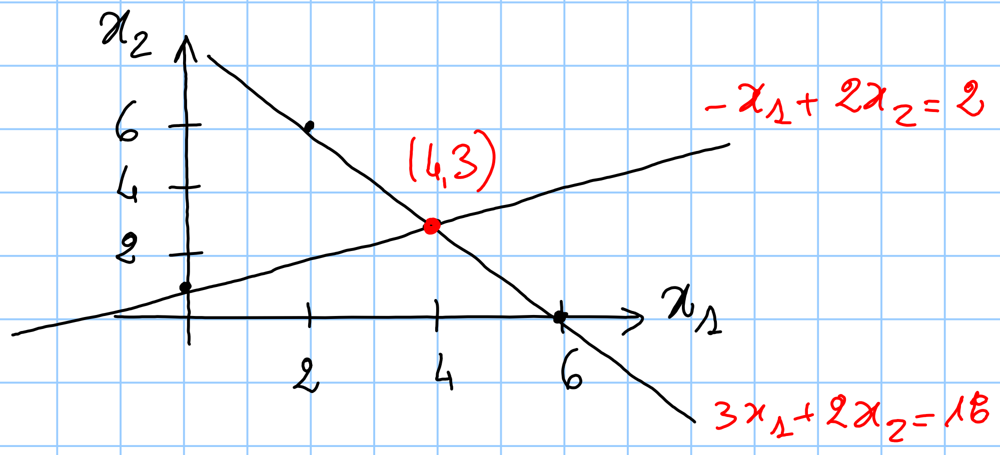
Titolo nota 08/03/2021

RISOLUZIONE di SISTEMI LINEARI

Es.

1

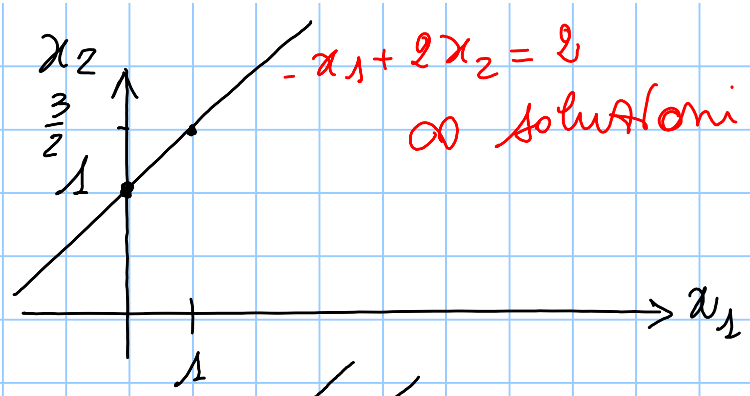
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$



1! soluzione

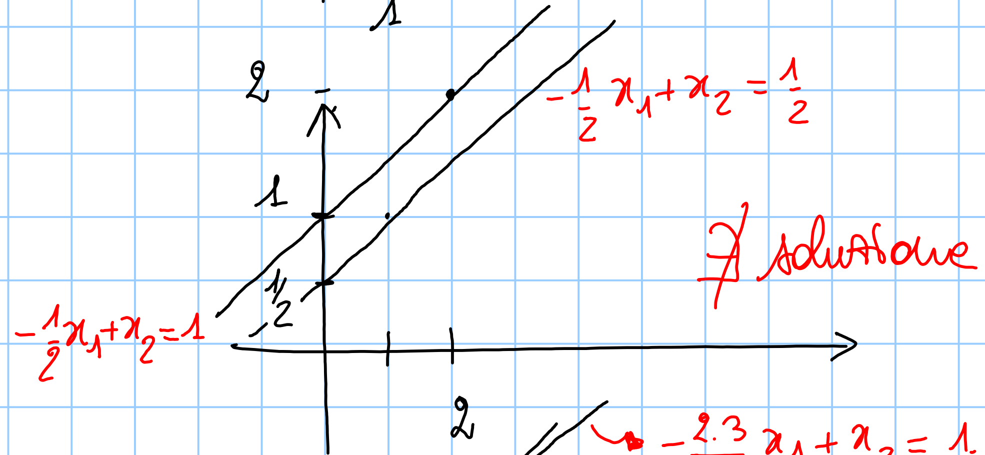
Es.: 2

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$



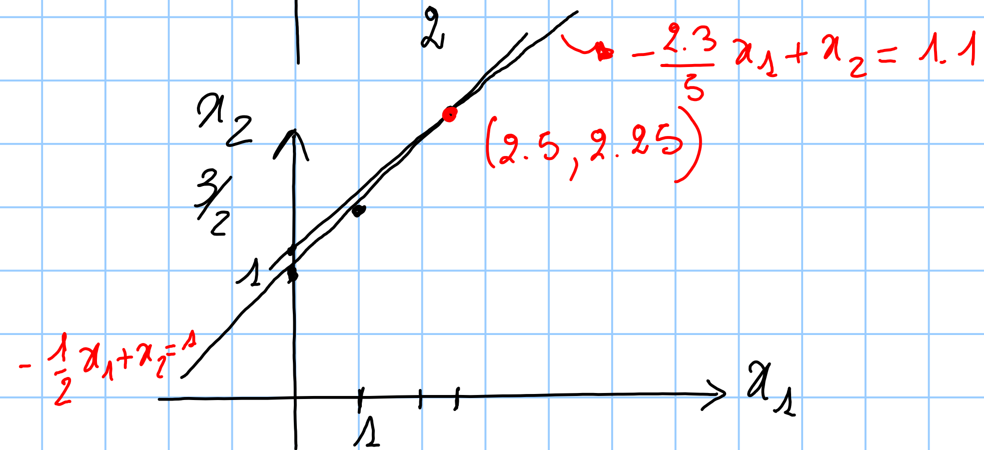
Es.: 3

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 + x_2 = 1 \\ -\frac{1}{2}x_1 + x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$



Es.: 4

$$\begin{cases} -\frac{2.3}{5}x_1 + x_2 = 1.1 \\ -\frac{1}{2}x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$



$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i = 1 \dots n}$$

SISTEMA QUADRATO di ordine n

in forma matriciale

$$A\underline{x} = \underline{b} \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \qquad \underline{x}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$$

<u>Teorema</u>: La soluzione del sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ esiste ed è unica se

A è invertibile (equivalentemente A ha rango n oppure $\det(A) \neq 0$)

Es.: 1

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\det(A) = 8 \neq 0$

Es.: 2

$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\det(A) = 0$ ∞ sol.ni

Es.: 3

$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ $\det(A) = 0$ $\nexists$ sol.ni

Es.: 4

$A = \begin{pmatrix} -\frac{2.3}{5} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ $\det(A) = -0.04 \neq 0$ però prossimo a 0

Es.:

H = hilb(15)

b = H* ones(15,1)

x = H\b

$$H \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{b}$$

cond(H) = ?

A causa degli errori di arrotondamento, implementando un metodo di risoluzione, non si otterrà la soluzione esatta del sistema lineare di partenza ma una sua approssimazione

Def.: vettore RESIDUO $\quad \underline{r} := \underline{b} - A(\underline{x} + \delta\underline{x})$

Oss:

$$\frac{\|\delta \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\underline{r}\|}{\|\underline{b}\|}$$ con $\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$

NUMERO di CONDIZIONAMENTO

Oss:

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \geq \|A \cdot A^{-1}\| = \|I\| = 1$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Prop: Se $\|\delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ allora

$$\boxed{\frac{\|\delta \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta \underline{b}\|}{\|\underline{b}\|} \right)}$$

Es.:

$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \qquad \|A\|_1 = \max_{j=1,2} \left(\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\varepsilon}$$

$0 < \varepsilon \ll 1$

$$\|A\|_1 := \max_j \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \qquad \|A^{-1}\|_1 = \frac{1}{\varepsilon} \qquad \text{cond}(A) = \frac{1}{\varepsilon^2} \gg 1$$

Se $\varepsilon \to 0$ il sistema diventa mal condizionato

Si può migliorare il condizionamento di un sistema lineare moltiplicando il sistema per la matrice

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$ che costituisce un PRECONDIZIONATORE

$C A \underline{x} = C \underline{b}$ $\qquad$ $\tilde{A} \underline{x} = \underline{\tilde{b}}$

$\tilde{A} = CA = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\underline{\tilde{b}} = C \underline{b}$

$\text{cond}(\tilde{A}) = \|\tilde{A}\|_1 \|\tilde{A}^{-1}\|_1 = 1$

quindi questo sistema lineare equivalente è ben condizionato