Lezione 11 del 19|04|2021

Titolo nota 19/04/2021

Quando un metodo iterativo è convergente?

<u>Teorema</u>: La successione dei vettori $\{\underline{x}^{(k)}\}$ generata dall'algoritmo

$$\begin{cases} \underline{x}^{(0)} \text{ assegnato} \\ \underline{x}^{(k+1)} = B\underline{x}^{(k)} + \underline{q} \qquad k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

converge alla soluzione $\underline{x}$ del sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ associato se e solo se $\rho(B) < 1$

$$\rho(B) := \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$$

raggio spettrale, λ_i autovalori

Dim.: $\underline{x} = B\underline{x} + \underline{q}$ $\qquad$ $\underline{x}^{(k+1)} = B\,\underline{x}^{(k)} + \underline{q}$

sottraggo queste due equazioni

$$\underline{x}^{(k+1)} - \underline{x} = \underline{e}^{(k+1)} = B\,\underline{e}^{(k)} = B^2\,\underline{e}^{(k-1)} = B^3\,\underline{e}^{(k-2)} \dots = B^{k+1}\,\underline{e}^{(0)}$$

$$\lim_{k \to +\infty} \underline{e}^{(k)} = \lim_{k \to +\infty} B^k\,\underline{e}^{(0)} = 0 \qquad \forall\,\underline{e}^{(0)}$$

$$\lim_{k \to +\infty} B^k = 0 \iff \rho(B) < 1$$

Oss: Se $\|B\| < 1$ allora $\rho(B) < 1$

$$\|B\underline{x}\| = |\lambda| \|\underline{x}\| \quad e \quad \|B\| \|\underline{x}\| \geq \|B\underline{x}\| \text{ da cui}$$

$$\|B\| \geq |\lambda| \quad \text{per ogni autovalore } \lambda \text{ di } B$$

Oss: Condizione necessaria affinché $\rho(B) < 1$ è che $\det(B) < 1$

Oss: La convergenza è collegata solo alla matrice di iterazione del metodo e non alla matrice A del sistema. Tuttavia le proprietà di A influiscono sulla scelta del metodo iterativo e sulle proprietà di B

Costruzione di metodi iterativi lineari basati sulla tecnica di splitting

$$\underline{A\underline{x} = \underline{b}} \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ non singolare}, \ \underline{x}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$$

$$A = P - N$$

$$(P - N)\underline{x} = \underline{b} \iff P\underline{x} - N\underline{x} = \underline{b} \iff P\underline{x} = N\underline{x} + \underline{b}$$

$$P\underline{x}^{(k+1)} = N\underline{x}^{(k)} + \underline{b}$$

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underbrace{P^{-1}N}_{B}\,\underline{x}^{(k)} + \underbrace{P^{-1}\underline{b}}_{\underline{q}}$$

Sceglieremo P in modo tale che P sia non singolare e invertibile con basso costo computazionale

METODO di JACOBI

$$A = D + C \longrightarrow A\underline{x} = \underline{b} \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \underline{x}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

con $a_{ii} \neq 0$ (se necessario scambieremo righe e/o colonne)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

$$(D + C)\underline{x} = \underline{b} \longrightarrow D\underline{x} + C\underline{x} = \underline{b}$$

$$\rightarrow D\underline{x} = -C\underline{x} + b$$

$$\begin{cases} \underline{x}^{(0)} \text{ assegnato} \\ \underline{x}^{(k+1)} = \underbrace{-D^{-1}C}_{B_J}\,\underline{x}^{(k)} + \underbrace{D^{-1}\underline{b}}_{\underline{q}_J} \qquad k=0,1,\dots \end{cases}$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & & \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \frac{1}{a_{mm}} \end{pmatrix}$$

$$B_J = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1m}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & \frac{a_{2m}}{a_{22}} \\ \vdots & & & & \\ \frac{a_{m1}}{a_{mm}} & \frac{a_{m2}}{a_{mm}} & \frac{a_{m3}}{a_{mm}} & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_m^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_m}{a_{mm}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{m} a_{1j}\, x_j^{(k)}\right)\frac{1}{a_{11}} + \frac{b_1}{a_{11}} \\ -\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 2}}^{m} a_{2j}\, x_j^{(k)}\right)\frac{1}{a_{22}} + \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ -\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq m}}^{m} a_{mj}\, x_j^{(k)}\right)\frac{1}{a_{mm}} + \frac{b_m}{a_{mm}} \end{pmatrix}$$

Scriviamo il metodo per componenti:

$$\boxed{\begin{cases} \underline{x}^0 \text{ assegnato} \\ x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}} \left[- \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} + b_i \right] & i = 1 \dots n \\ & k = 0, 1, \dots \end{cases}}$$

<u>Oss</u>: È un metodo fortemente parallelo (componenti indipendenti)

<u>Teorema</u>: Se la matrice A è diagonale dominante stretta allora il metodo di Jacobi converge

METODO di GAUSS-SEIDEL

$$A = D + E + F$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ a_{21} & 0 & & & \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & a_{n-1\,n} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b} \;\longrightarrow\; (E+D+F)\,\underline{x} = \underline{b} \;\longrightarrow\; (E+D)\,\underline{x} = \underline{b} - F\underline{x}$$

Se $E+D$ è non singolare

$\underline{x}^{(0)}$ assegnato

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underbrace{-(E+D)^{-1}F}_{B_{GS}}\,\underline{x}^{(k)} + \underbrace{(E+D)^{-1}\underline{b}}_{q_{GS}}$$

$k = 0, 1, \ldots$

Scriviamo il metodo per componenti partendo dal metodo di Jacobi

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}} \left[b_1 - a_{12} x_2^{(k)} - a_{13} x_3^{(k)} - a_{14} x_4^{(k)} - \dots - a_{1n} x_n^{(k)} \right] \\[2ex]
x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}} \left[b_2 - a_{21} \underbrace{x_1^{(k)}}_{x_1^{(k+1)}} - a_{23} x_3^{(k)} - a_{24} x_4^{(k)} - \dots - a_{2n} x_n^{(k)} \right] \\[2ex]
x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}} \left[b_3 - a_{31} \underbrace{x_1^{(k)}}_{x_1^{(k+1)}} - a_{32} \underbrace{x_2^{(k)}}_{x_2^{(k+1)}} - a_{34} x_4^{(k)} - \dots - a_{3n} x_n^{(k)} \right] \\
\vdots \\
x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}} \left[b_n - a_{n1} \underbrace{x_1^{(k)}}_{x_1^{(k+1)}} - a_{n2} \underbrace{x_2^{(k)}}_{x_2^{(k+1)}} - a_{n3} \underbrace{x_3^{(k)}}_{x_3^{(k+1)}} - \dots - a_{n\,n-1} \underbrace{x_{n-1}^{(k)}}_{x_{n-1}^{(k+1)}} \right]
\end{cases}
$$

$$\boxed{\begin{cases} \underline{x}^{(0)} \text{ assegnato} \\ x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij} x_j^{(k)} \right] \quad \begin{array}{l} i=1 \dots m \\ k=0,1,\dots \end{array} \end{cases}}$$

$$(E+D)\underline{x}^{(k+1)} = -F\underline{x}^{(k)} + \underline{b}$$

$$E\underline{x}^{(k+1)} + D\underline{x}^{(k+1)} = -F\underline{x}^{(k)} + \underline{b}$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}\left[-E\underline{x}^{(k+1)} - F\underline{x}^{(k)} + \underline{b}\right]$$

La struttura di E non mi dà problemi nel calcolo iterativo

Os: Il metodo di Gauss-Seidel è un metodo di tipo sequenziale

Un vantaggio è che basta memorizzare le componenti in un solo vettore

$$\left(\underbrace{x_1^{(k)}}_{x_1^{(k+1)}}, \underbrace{x_2^{(k)}}_{x_2^{(k+1)}}, \ldots, x_n^{(k)} \right) \quad \ldots$$

Teorema: Se A è una matrice strettamente diagonal dominante allora il metodo di Gauss-Seidel converge