Lezione 21 del 27/05/2021

Titolo nota 27/05/2021

Obiettivo: determinare m, q t.c., dati (x_i, y_i) $i = 0 \dots m$,

$$\sum_{i=0}^{m} \left[y_i - (m x_i + q) \right]^2 \leq \sum_{i=0}^{m} \left[y_i - p(x_i) \right]^2 \qquad p(x) \in \mathbb{P}_1$$

$$\Phi(m,q) = \sum_{i=0}^{m} \left(y_i^2 + m x_i^2 + q^2 + 2mq x_i - 2m x_i y_i - 2 y_i q \right)$$

Cerco il punto di minimo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial m} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \left(m x_i^2 + q x_i - x_i y_i \right) = 0 & * \\[2ex] \dfrac{\partial \phi}{\partial q} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \left(2q + 2m x_i - 2y_i \right) = 0 & ** \end{cases}$$

$$\begin{cases} * : \quad m \displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_i^2 + q \sum_{i=0}^{n} x_i - \sum_{i=0}^{n} x_i y_i = 0 \\[2ex] ** : \quad (n+1) q + m \displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_i - \sum_{i=0}^{n} y_i = 0 \end{cases}$$

Da ** ricavo $m = \dfrac{\sum y_i - (n+1) q}{\sum x_i}$ e sostituisco *

$$* = \frac{\sum y_i x_i^2 - (n+1) q \sum x_i^2 + q \left(\sum x_i\right)^2 - \sum x_i \left(\sum x_i y_i\right)}{\sum x_i} = 0$$

Ricavo

$$q = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \left(\sum x_i y_i\right)}{(n+1) \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

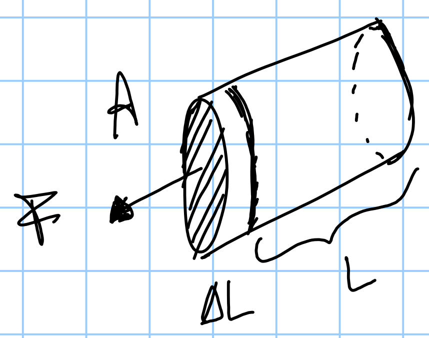
da cui

$$m = \frac{(n+1) \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{(n+1) \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

__Oss__: Il metodo si può generalizzare ad un polinomio di grado $m \le n$ arbitrario. Se $m = n$, $\bar{p}$ polinomio ai minimi quadrati coincide con il polinomio interpolatore di Lagrange

__Oss__: L'approssimazione nel senso dei minimi quadrati si può applicare anche a funzioni di tipo non polinomiale

Es.: Ecco i dati di un esperimento di biomeccanica svolto per individuare il legame tra lo sforzo σ e la relativa deformazione ε di un disco intervertebrale



$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

Sforzi σ :	0.0	0.06	0.14	0.25	0.31	0.47	0.60	0.70
Deformazioni ε :	0.0	0.08	0.14	0.20	0.23	0.25	0.28	0.29

Stimare la deformazione associata allo sforzo $\sigma = 0.9$ $\left(100 \frac{N}{cm^2}\right)$

______________ o ______________

Es.

$$I = \int_{-1}^{1} x^2 \, dx = \frac{2}{3} \qquad f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2x$$

$$f''(x) = 2$$

Supponiamo di volere approssimare I con il metodo dei trapezi Q_1^c e di voler stimare il numero m di sottointervalli per ottenere un'accuratezza pari a $\varepsilon = 10^{-8}$.

$$Err = \left| I - Q_1^c \right| \leq \underbrace{\frac{f''(\bar{\beta})}{12}(b-a)\left(\frac{b-a}{m}\right)^2}_{* \leq 10^{-8}} \qquad \bar{\beta} \in [a,b] = [-1,1]$$

$$Err \leq \varepsilon = 10^{-8}$$

$$* \le \frac{\cancel{2}}{\cancel{12}_{3}} \cancel{2} \left(\frac{2}{m}\right)^2 \le 10^{-8}$$

$$f^{4}(\sqrt{3}) = 2 = \max_{x\in[-1,1]} f^{4}(x)$$

$$\frac{4}{3m^2} \le 10^{-8} \qquad m^2 \ge \frac{4}{3\cdot 10^{-8}} \qquad m \ge \sqrt{\frac{4}{3\cdot 10^{-8}}}$$