Lezione 15 del 03/05/2021

Titolo nota 03/05/2021

Es. $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)\underbrace{(x-2)(x-3)}_{q(x)}$ "deconv" Matlab

$= (x-1)\,q(x) = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$

$$q(x) = \frac{p(x)}{x-1}$$

Es.: $\tilde{p}(x) = x^4 - 7x^3 + 15x^2 - 13x + 4 = (x-1)^3(x-4)$

$\tilde{p}'(x) = 3(x-1)^2(x-4) + (x-1)^3$ $\boxed{p'(x) = 0 \iff x = 1}$

$\tilde{p}''(x) = 3 \cdot 2(x-1)(x-4) + 3(x-1)^2 + 3(x-1)^2$ $\boxed{p''(x) \iff x = 1}$

$\tilde{p}'''(x) = 6(x-1) + 6(x-4) + 12(x-1)$ $p'''(1) \neq 0$ $p''(4) \neq 0$

Studiamo il condizionamento del problema del calcolo di radici

Cerchiamo x t.e. $f(x) = 0$

$$f(x) = \varphi(x) - d = 0 \qquad d \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \varphi'(x) \quad \dots \quad f^{(m)}(x) = \varphi^{(m)}(x) \quad //$$

Supponiamo di perturbare i dati $\qquad \sqrt{2} \qquad x: \; \underset{\varphi(x)}{x^2} - \underset{d}{2} = 0 \quad //$

$$\cancel{d} + \delta d = \varphi(x + \delta x) =$$

$$= \underbrace{\cancel{\varphi(x)}}_{d} + \varphi'(x)\,\delta x + \frac{\varphi''(x)}{2}(\delta x)^2 + \sum_{k=3}^{m} \frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!}(\delta x)^k + o\left((\delta x)^m\right)$$

$$\frac{o\left(\delta(x)\right)^{m}}{(\delta x)^m} \xrightarrow[\delta x \to 0]{} 0$$

Supponiamo che x sia radice di ordine m allora

$$\varphi^{(k)}(x) = 0 \qquad k = 1 \dots m-1$$

e

$$\delta d = \frac{\varphi^{(m)}(x)}{m!}(\delta x)^m + o\left((\delta m)^m\right) \simeq \frac{f^{(m)}(x)}{m!}(\delta x)^m$$

da cui il condizionamento è

$$\boxed{\text{cond} := \sup \frac{\|\delta x\|}{\|\delta d\|} = \sup \left\{ \left| \frac{(\delta d)\, m!}{f^{(m)}(x)} \right|^{1/m} \frac{1}{|\delta d|} \right\}}$$

<u>Oss</u>: Se $m=1$ il problema è mal condizionato se $f'(x) \approx 0$

Se x è una radice di ordine $m>1$, anche se δd fosse sufficientemente piccolo da rendere

$$\left| \frac{(\delta d)\, m!}{f^{(m)}(x)} \right| < 1,$$ il condizionamento potrebbe essere grande

Es.: Osserviamo la "sensibilità" nel calcolo delle radici di un polinomio p_n al variare dei suoi coefficienti

$$\tilde{p}_n = p_n + q_n$$ q_n è un polinomio di perturbazione

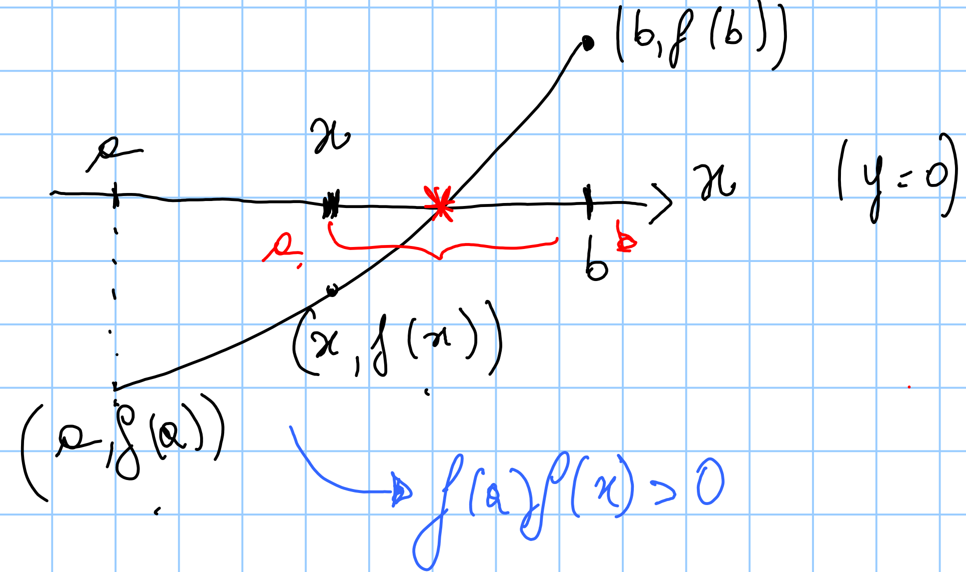
$$p_{10}(x) = \prod_{k=1}^{10} (x+k) = (x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)(x+4)\cdots(x+10) =$$
$$= x^{10} + a_1 x^9 + \ldots + a_{10}$$ (polinomio di Wilkinson)

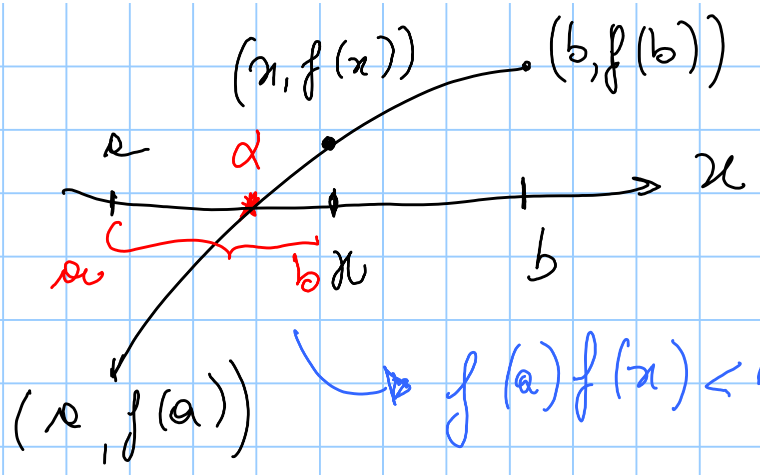
ha 10 radici $\alpha_k = -k$ $k = 1 \dots 10$

Sia $\tilde{p}_{10} = p_{10} + \varepsilon x^9$ $\varepsilon = 10^{-7}$

Es. Calcolare le radici di $p(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

Es.: metodo bisezione





$f(a)f(x) < 0$