Lezione 17 del 13/05/2021

Titolo nota 13/05/2021

Es.: $x_0 = 3$ $x_1 = 7$ $x_2 = 11$ $n = 2$

$y_0 = 9$ $y_1 = 49$ $y_2 = 121$ $P_2(x) \overset{?}{=} x^2$

$$L_0(x) = \prod_{\substack{j=1}}^{2} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x-7}{3-7} \cdot \frac{x-11}{3-11} = \frac{x-7}{-4} \cdot \frac{x-11}{-8} =$$

$$= \frac{x^2 - 11x - 7x + 77}{32} = \frac{x^2 - 18x + 77}{32}$$

$$\mathcal{L}_1(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 1}}^{2} \frac{x-x_j}{x_1-x_j} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\,\frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{x-3}{7-3}\cdot\frac{x-11}{7-11} = \frac{(x-3)(x-11)}{-16} =$$

$$= \frac{x^2-3x-11x+33}{-16} = \frac{x^2-14x+33}{-16},$$

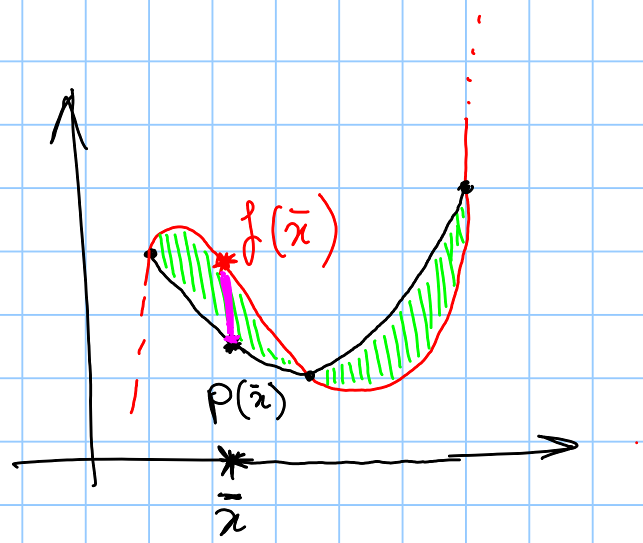
$$\mathcal{L}_2(x) = \prod_{j=0}^{1} \frac{x-x_j}{x_2-x_j} = \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{x-3}{11-3}\cdot\frac{x-7}{11-7} = \frac{x^2-3x-7x+21}{32} =$$

$$= \frac{x^2-10x+21}{32}$$

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i \mathcal{L}_i(x) = 9\cdot\frac{x^2-18x+77}{32} - 49\cdot\frac{x^2-14x+33}{16} + 121\cdot\frac{x^2-10x+21}{32}$$

$$= \frac{x^2\left(\underbrace{9-49\cdot 2+121}_{32}\right)+x\left(\underbrace{-9\cdot 18+49\cdot 2\cdot 14-121\cdot 10}_{0}\right)+\left(\underbrace{9\cdot 77-49\cdot 2\cdot 33+121\cdot 21}_{0}\right)}{32}$$

$$= x^2 \qquad \text{ok!}$$



Teorema: Sia $f(x) \in C^{n+1}(I_x)$ dove I_x è il minimo intervallo contenente i nodi $x_0, \dots, x_n$ e il punto x

Allora esiste un punto $c_x \in \mathcal{I}_x$ t.c.

$$f(x) - p_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(c_x)}{(m+1)!}\,\omega_{m+1}(x)$$

con $\omega_{m+1}(x) = \prod_{i=0}^{m}(x - x_i) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_m)$

$\hookrightarrow < |\mathcal{I}_x|$

<u>Oss</u>: $E_m(x) = \left| f(x) - p_m(x) \right| = \frac{\left|f^{(m+1)}(c_x)\right|}{(m+1)!} \left|\omega_{m+1}(x)\right| \leq$

$\hookrightarrow M := \max_{x \in \mathcal{I}_x} \left| f^{(m+1)}(x) \right|$

$$\leq \frac{M}{(m+1)!} \left|\omega_{m+1}(x)\right| \leq \frac{M}{(m+1)!} \left|\mathcal{I}_x\right|^{m+1}$$

Stabilità del polinomio interpolatore di Lagrange

Suppongo di introdurre un errore nei dati

$$(x_i, y_i) \quad i = 0 \dots n \quad \longrightarrow \quad (x_i, \tilde{y}_i) \quad i = 0 \dots n$$

$$\varepsilon_i := y_i - \tilde{y}_i \qquad i = 0 \dots n$$

Il polinomio interpolatore risente di questa variazione?

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, L_i(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

$$\tilde{p}(x) = \sum_{i=0}^{m} \tilde{y}_i \, \mathcal{L}_i(x)$$

$$p(x) - \tilde{p}(x) = \sum_{i=0}^{m} (y_i - \tilde{y}_i) \, \mathcal{L}_i(x)$$

$$|p(x) - \tilde{p}(x)| \leq \sum_{i=0}^{m} \underbrace{|y_i - \tilde{y}_i|}_{|\varepsilon_i|} \, |\mathcal{L}_i(x)| \leq \underbrace{\|\underline{y} - \underline{\tilde{y}}\|_\infty}_{= \underline{\varepsilon}} \sum_{i=0}^{m} |\mathcal{L}_i(x)|$$

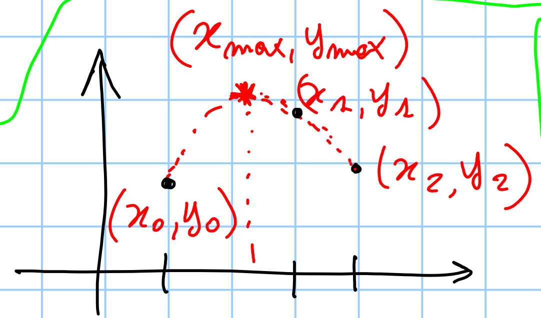
$\forall x \in I_x$

$$\|p(x) - \tilde{p}(x)\|_\infty \leq \|\underline{\varepsilon}\|_\infty \underbrace{\left\| \sum_{i=0}^{m} |\mathcal{L}_i(x)| \right\|_\infty}_{\text{COSTANTE di LEBESGUE } \Lambda_m}$$

$$\|p(x)\|_\infty := \max_{x \in I_x} |p(x)| \geq \max_{0 \leq i \leq m} |p(x_i)| = \max_{0 \leq i \leq m} |y_i| = \|\underline{y}\|_\infty$$

$$\frac{\|p(x) - \tilde{p}(x)\|_\infty}{\|p(x)\|_\infty} \leq \Lambda_m \frac{\|\underline{y} - \underline{\tilde{y}}\|_\infty}{\|\underline{y}\|_\infty}$$

errore relativo



$$y_1 = \max_{0 \leq i \leq 2} |P_2(x_i)|$$

$$y_{max} = \max_{[x_0, x_2]} |P_2(x)|$$

$$\boxed{y_{max} > y_1}$$

Oss: Λ_m assume il significato di numero di condizionamento del problema di interpolazione

Oss: A piccole perturbazioni sui dati corrisponderanno piccole variazioni sul polinomio interpolatore se la costante di Lebesgue è piccola.

La costante di Lebesgue dipende dalla distribuzione dei nodi

Oss: Nel caso di nodi equispaziati si trova che

$$\Lambda_n \simeq \frac{2^{n+1}}{e\, n \log n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

Oss: NODI di CHEBYSHEV sull'intervallo $[-1, 1]$

$$x_i^{(n)} = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right) \qquad i = 0 \dots n$$

I nodi di Chebyshev hanno costante di Lebesgue $\sim \frac{2}{\pi} \log(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$

Es.: Interpolare la funzione $f(x) = \sin(x)$

con 22 nodi equispaziati sull'intervallo $[-1, 1]$

Generiamo un insieme perturbato di valori

$$\tilde{f}(x_i) = f(x_i)\left(1 + (-1)^i 10^{-4}\right)$$

$$\| P_{21}[f] - P_{21}[\tilde{f}] \|_\infty \overset{?}{=}$$