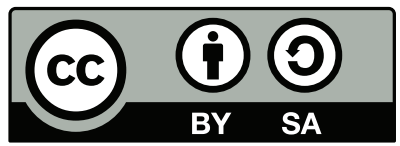
Algoritmi e Strutture Dati

Algoritmi probabilistici

Alberto Montresor

Università di Trento

2019/01/15



Sommario

Introduzione

"Audentes furtuna iuvat" - Virgilio

- Se non sapete quale strada prendere, fate una scelta casuale

Casualità negli algoritmi visti finora

- Analisi del caso medio
  - Si calcola la media su tutti i possibili dati di ingresso in base ad una distribuzione di probabilità
  - Esempio: caso medio Quicksort, si assume che tutte le permutazioni siano equiprobabili
- Hashing
  - Le funzion hash equivalgono a "randomizzare" le chiavi
  - Distribuzione uniforme

Introduzione

Algoritmi probabilistici

Il calcolo delle probabilità è applicato non ai dati di input, ma ai dati di output

- Algoritmi corretti, il cui tempo di funzionamento è probabilistico (Las Vegas)
- Algoritmi la cui correttezza è probabilistica (Montecarlo)

Test di primalità

Piccolo teorema di Fermat

Per ogni numero primo n e ogni $b \in [2, \ldots, n-1]$: $b^{n-1} \bmod n = 1$

Test di primalità di Fermat

isPrime1(**int** n)

$b = \mathsf{random}(2, n-1)$
if $b^{n-1} \bmod n \neq 1$ **then**
  return false
return true

Questo algoritmo è corretto?

Esistono numeri composti tali che:

$\exists b \in [2, \ldots, n-1] : b^{n-1} \bmod n = 1$

Output	n
false	sicuramente composto
true	possibilmente primo

Test di primalità

Piccolo teorema di Fermat

Per ogni numero primo n e ogni $b \in [2, \ldots, n-1]$: $b^{n-1} \bmod n = 1$

Test di primalità di Fermat

Questo algoritmo è corretto?

isPrime2(**int** n)

for $i = 1$ **to** k **do**
    $b = \mathsf{random}(2, n-1)$
    if $b^{n-1} \bmod n \neq 1$ **then**
        return false
return true

Output	n
false	sicuramente composto
true	probabilmente primo

Esistono dei numeri composti (numeri di Carmichael), tali che:

$\forall b \in [2, \ldots, n-1] : b^{n-1} \bmod n = 1$

Test di Miller-Rabin

- Esprimiamo $n-1$ come: $n-1 = m2^v$ con m dispari
  - la rappresentazione binaria di $n-1$ è uguale alla rappresentazione binaria del numero dispari m seguito da v zeri
- Sia b un numero in $[1, \ldots, n-1]$

Se un numero n è primo, allora valgono entrambe le seguenti condizioni

1. $\mathsf{mcd}(n, b) = 1$
2. $b^m \bmod n = 1$ oppure $\exists i, 0 \leq i \leq v-1 : b^{2^i m} \bmod n = -1$

Test di Miller-Rabin

- Esprimiamo $n-1$ come: $n-1 = m2^v$ con m dispari
  - la rappresentazione binaria di $n-1$ è uguale alla rappresentazione binaria del numero dispari m seguito da v zeri
- Sia b un numero in $[1, \ldots, n-1]$

Se un numero n è composto, allora almeno una delle seguenti condizioni è falsa

1. $\mathsf{mcd}(n, b) = 1$
2. $b^m \bmod n = 1$ oppure $\exists i, 0 \leq i \leq v-1 : b^{2^i m} \bmod n = -1$

Test di Miller-Rabin

- Rabin ha dimostrato che se n è composto, allora ci sono almeno $3/4(n-1)$ valori in $[1, \ldots, n-1]$ per i quali una delle condizioni sopra è falsa
- Il test di compostezza ha una probabilità inferiore a $1/4$ di rispondere erroneamente

---

isPrime(**int** n)

```
for i = 1 to k do
    b = random(2, n − 1)
    if isComposite(n, b) then
        return false
return true
```

Test di Miller-Rabin

Riassunto

- Complessità: $O(k \log^2 n \log \log n \log \log \log n)$
- Probabilità di errore: $(1/4)^k$
- Algoritmo di tipo Montecarlo

Algoritmi probabilistici vs algoritmi deterministici

- Dal 2002, esiste l'algoritmo deterministico AKS di complessità $O(\log^{6+\epsilon})$
- I fattori moltiplicativi coinvolti sono molto alti
- Si preferisce quindi l'algoritmo di Miller-Rabin

Esempio – Espressione polinomiale nulla

Problema

Data un'espressione algebrica polinomiale $p(x_1, \ldots, x_n)$ in n variabili, determinare se p è identicamente nulla oppure no.

Discussione

- Assumiamo che non sia in forma di monomi - altrimenti è banale
- Gli algoritmi basati su semplificazioni sono molto complessi

Esempio – Espressione polinomiale nulla

Algoritmo

- Si genera una n-pla di valori $v_1, \ldots, v_n$
- Si calcola $x = p(v_1, \ldots, v_n)$
  - Se $x \neq 0$, p non è identicamente nulla
  - Se $x = 0$, p potrebbe essere identicamente nulla
- Se ogni v_i è un valore intero compreso casuale fra 1 e $2d$, dove d è il grado del polinomio, allora la probabilità di errore non supera $1/2$.
- Si ripete k volte, riducendo la probabilità di errore a $(1/2)^k$

Statistica

Algoritmi statistici su vettori

Estraggono alcune caratteristiche statisticamente rilevanti da un vettore numerico

Esempi

- Media: $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A[i]$
- Varianza: $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(A[i] - \mu)^2$
- Moda: il valore (o i valori) più frequenti

Statistiche d'ordine

Selezione

Dato un array A contenente n valori e un valore $1 \leq k \leq n$, trovare l'elemento che si occuperebbe la posizione k se il vettore fosse ordinato

Mediana

Il problema del calcolo della mediana è un sottoproblema del problema della selezione con $k = \lceil n/2 \rceil$.

Selezione per piccoli valori di k

Intuizione

- L'albero del torneo può essere "simulato" da uno heap
- L'algoritmo può essere generalizzato a valori generici di $k > 2$

int heapSelect(ITEM [] A, **int** n, **int** k)

```
buildHeap(A)
for i = 1 to k-1 do
    deleteMin(A, n)
return deleteMin(A, n)
```

Complessità

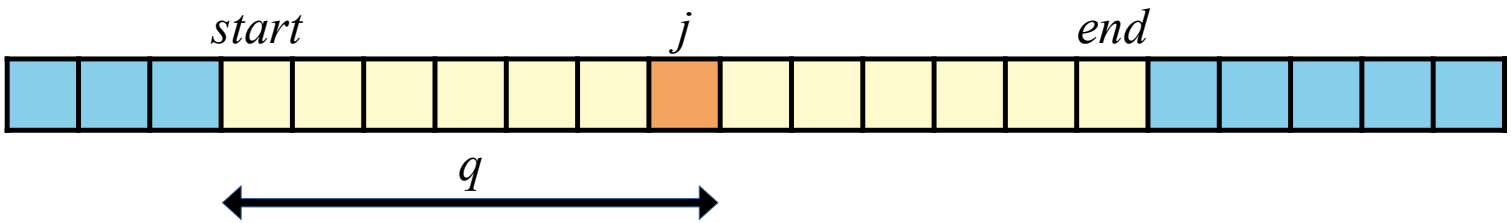
- $O(n + k \log n)$
- Se $k = O(n/\log n)$, il costo è $O(n)$
- Se $k = n/2$, non va bene

Idea

- Approccio divide-et-impera simile al Quicksort
- Essendo un problema di ricerca, non è necessario cercare in entrambe le partizioni, basta cercare in una sola di esse
- Bisogna fare attenzione agli indici

Algoritmo di selezione

```
ITEM selection(ITEM[] A, int start, int end, int k)
if start == end then
    return A[start]
else
    int j = pivot(A, start, end)
    int q = j − start + 1
    if k == q then
        return A[j]
    else if k < q then
        return selection(A, start, j − 1, k)
    else
        return selection(A, j + 1, end, k − q)
```



Complessità

Caso pessimo

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n \leq 1 \\ T(n-1) + n & n > 1 \end{cases}$$

$$T(n) = O(n^2)$$

Caso ottimo

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n \leq 1 \\ T(n/2) + n & n > 1 \end{cases}$$

$$T(n) = O(n)$$

Caso medio

Assumiamo che pivot() restituisca con la stessa probabilità una qualsiasi posizione j del vettore A

$$T(n) = n - 1 + \frac{1}{n} \sum_{q=1}^{n} T\left(\max\{q-1, n-q\}\right)$$

$$\leq n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{q=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} T(q), \qquad \text{per } n > 1$$

Complessità

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leq n - 1 + \frac{2c}{n} \sum_{q=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} q \\
&\leq n + \frac{2c}{n} \left(\sum_{q=1}^{n-1} q - \sum_{q=1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} q \right) \\
&= n + \frac{2c}{n} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{\lfloor n/2 \rfloor (\lfloor n/2 \rfloor - 1)}{2} \right) \\
&\leq n + \frac{c}{n} \big(n(n-1) - (n/2+1)(n/2) \big) \\
&= n + c(n-1) - (c/2)(n/2+1) = n + cn - c - cn/4 - c/2 \\
&= cn \left(\frac{1}{c} + \frac{3}{4} - \frac{3}{2n} \right) \leq cn \left(\frac{1}{c} + \frac{3}{4} \right) \leq cn
\end{aligned}
$$

Complessità

- Siamo partiti dall'assunzione
  - j assume equiprobabilisticamente tutti i valori compresi fra 1 e n
- E se non fosse vero?
- Lo forziamo noi!
  - $A[\mathsf{random}(start, end)] \leftrightarrow A[start]$
- Questo accorgimento vale anche per QuickSort
- La complessità nel caso medio:
  - $O(n)$ nel caso della Selezione
  - $O(n \log n)$ nel caso dell'Ordinamento

Selezione deterministica

Algoritmo black-box

Supponiamo di avere un algoritmo "black box" che mi ritorni il mediano di n valori in tempo $O(n)$

Domande

- Potrei utilizzarlo per ottimizzare il problema della selezione?
- Che complessità otterrei?

Selezione deterministica

Se conoscessi tale algoritmo

- il problema della selezione sarebbe quindi risolto...
- ... ma dove lo trovo un simile algoritmo?

Rilassiamo le nostre pretese

- Supponiamo di avere un algoritmo "black box" che mi ritorni un valore che dista al più $\frac{3}{10}n$ dal mediano (nell'ordinamento)
- Potrei utilizzarlo per ottimizzare il problema della selezione?
- Che complessità otterrei?

Selezione deterministica

Idea

- Suddividi i valori in gruppi di 5. Chiameremo l'i-esimo gruppo S_i, con $i \in [1, \lceil n/5 \rceil]$
- Trova il mediano M_i di ogni gruppo S_i
- Tramite una chiamata ricorsiva, trova il mediano m dei mediani $[M_1, M_2, \ldots, M_{\lceil n/5 \rceil}]$
- Usa M come pivot e richiama l'algoritmo ricorsivamente sull'array opportuno, come nella selection() randomizzata
- Quando la dimensione scende sotto una certa dimensione, possiamo utilizzare un algoritmo di ordinamento per trovare il mediano

Selezione deterministica

ITEM select(ITEM[] A, **int** $start$, **int** end, **int** k)

% Se la dimensione è inferiore ad una soglia (10), ordina il vettore e
% restituisci il k-esimo elemento di $A[start \dots end]$
if $end - start + 1 \leq 10$ **then**
    InsertionSort($A, start, end$) % Versione con indici inizio/fine
    return $A[start + k - 1]$

% Divide A in $\lceil n/5 \rceil$ sottovettori di dim. 5 e ne calcola la mediana
$M =$ **new int**$[1 \dots \lceil n/5 \rceil]$
for $i = 1$ **to** $\lceil n/5 \rceil$ **do**
    $M[i] =$ median5$(A, start + (i-1) \cdot 5, end)$

% Individua la mediana delle mediane e usala come perno
ITEM $m =$ select$(M, 1, \lceil n/5 \rceil, \lceil \lceil n/5 \rceil / 2 \rceil)$
int $j =$ pivot$(A, start, end, m)$ % Versione con m in input
[...]

Selezione deterministica

ITEM select(ITEM[] A, **int** $start$, **int** end, **int** k)

[...]

% Calcola l'indice q di m in $[start \dots end]$
% Confronta q con l'indice cercato e ritorna il valore conseguente
int $q = j - start + 1$
if $q == k$ **then**
  return m
else if $q < k$ **then**
  return select$(A, start, q-1, k)$
else
  return select$(A, q+1, end, k-q)$

Selezione deterministica

- Il calcolo dei mediani $M[]$ richiede al più $6\lceil n/5 \rceil$ confronti.
- La prima chiamata ricorsiva dell'algoritmo select() viene effettuata su $\lceil n/5 \rceil$ elementi
- La seconda chiamata ricorsiva dell'algoritmo select() viene effettuata al massimo su $7n/10$ elementi
  (esattamente $n - 3\lceil \lceil n/5 \rceil /2 \rceil$)
- L'algoritmo select() esegue nel caso pessimo $O(n)$ confronti

$$T(n) = T(n/5) + T(7n/10) + 11/5n$$

1	4	**7**	10	13	2	5	**8**	11	14	3	6	**9**	12	15

Conclusioni

Quale preferire?

- Algoritmo probabilistico Las Vegas in tempo atteso $O(n)$
- Algoritmo deterministico in tempo $O(n)$, con fattori moltiplicativi più alti

Note storiche

- Nel 1883 Lewis Carroll (!) notò che il secondo premio nei tornei di tennis non veniva assegnato in maniera equa.
- Nel 1932, Schreier dimostrò che $n + \log n - 2$ incontri sono sempre sufficienti per trovare il secondo posto
- Nel 1973, a opera di Blum, Floyd, Pratt, Rivest e Tarjan, appare il primo algoritmo deterministico