Algoritmi e Strutture Dati

Programmazione dinamica – Parte 3

Alberto Montresor

Università di Trento

2019/02/25

Sommario

String matching approssimato

Definizione

Un'occorrenza k-approssimata di P in T, dove

- $P = p_1 \ldots p_m$ è una stringa detta pattern
- $T = t_1 \ldots t_n$ è una stringa detta testo, con $m \leq n$,

è una copia di P in T in cui sono ammessi k "errori" (o differenze) tra caratteri di P e caratteri di T, del seguente tipo:

1. i corrispondenti caratteri in P, T sono diversi (sostituzione)
2. un carattere in P non è incluso in T (inserimento)
3. un carattere in T non è incluso in P (cancellazione)

Problema – Approximated string matching

Trovare un'occorrenza k-approssimata di P in T con k minimo ($0 \leq k \leq m$).

Esempio

Esempio

T = `questoèunoscempio`
P = `unesempio`

Domande

- Qual è il minimo valore k per cui si trova un'occorrenza k-approssimata di P in T?
- A partire da dove?
- Con quali errori?

Sottostruttura ottima

Definizione

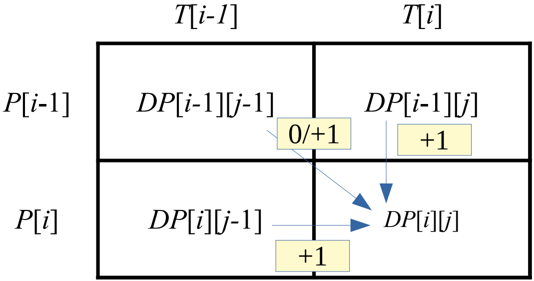
Sia $DP[0 \ldots m][0 \ldots n]$ una tabella di programmazione dinamica tale che $DP[i][j]$ sia il minimo valore k per cui esiste un'occorrenza k-approssimata di $P(i)$ in $T(j)$ che termina nella posizione j

Quattro possibilità

$DP[i-1][j-1]$, se $P[i] = T[j]$	avanza su entrambi i caratteri (uguali)
$DP[i-1][j-1]+1$, se $P[i] \neq T[j]$	avanza su entrambi i caratteri (sost.)
$DP[i-1][j]+1$	avanza sul pattern (inserimento)
$DP[i][j-1]+1$	avanza sul testo (cancellazione)

Sottostruttura ottima

$$DP[i][j] = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ i & j = 0 \\ \min\{DP[i-1][j-1] + \delta, & \delta = \text{iif}(P[i] = T[j], 0, 1) \\ \qquad DP[i-1][j] + 1, & \\ \qquad DP[i][j-1] + 1\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Ricostruzione della soluzione finale

- $DP[m][j] = k$ se e solo se esiste un'occorrenza k-approssimata di P in $T(j)$ che termina nella posizione j.
- La soluzione del problema è data dal più piccolo valore $DP[m][j]$, per $0 \leq j \leq n$

P \ T		A	B	A	B	A
	0	0	0	0	0	0
B	1	1	0	1	0	1
A	2	1	1	0	1	0
B	3	2	1	1	0	1

Algoritmo

```
int stringMatching(ITEM[] P, ITEM[] T, int m, int n)
int[][] DP = new int[0...m][0...n]
for j = 0 to n do DP[0][j] = 0                          % Caso base: i = 0
for i = 1 to m do DP[i][0] = i                          % Caso base: j = 0
for i = 1 to m do                                       % Caso generale
    for j = 1 to n do
        DP[i][j] = min(DP[i − 1][j − 1] + iif(P[i] == T[j], 0, 1),
                       DP[i − 1][j] + 1,
                       DP[i][j − 1] + 1)
int pos = 0                                             % Calcola minimo ultima riga
for j = 1 to n do
    if DP[m][j] < DP[m][pos] then
        pos = j
return pos
```

String matching approssimato

Take-home message – prendi e porta a casa

- Non è detto che la "soluzione finale" si trovi nella casella "in basso a destra";
- È invece possibile che la soluzione debba essere ricercata essa stessa nella tabella DP

Reality check

Approximate String Matching è un esempio di string metric:

> *[...] is a metric that measures distance ("inverse similarity") between two strings [...]*
>
> *String metrics are used heavily in information integration and are currently used in areas including fraud detection, fingerprint analysis, plagiarism detection, ontology merging, DNA analysis, RNA analysis, image analysis, evidence-based machine learning, database data deduplication, data mining, incremental search, data integration, and semantic knowledge integration.*

`https://en.wikipedia.org/wiki/String_metric`

Esempi

Edit distance, detta anche distanza di Levenshtein

Prodotto di catena di matrici

Problema

Data una sequenza di n matrici $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, compatibili due a due al prodotto, vogliamo calcolare il loro prodotto.

- Il prodotto di matrici non è commutativo ....
- ....ma è associativo: $(A_1 \cdot A_2) \cdot A_3 = A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3)$

Cosa vogliamo ottimizzare

- Il prodotto di matrici si basa sulla moltiplicazione scalare come operazione elementare
- Vogliamo calcolare il prodotto delle n matrici impiegando il più basso numero possibile di moltiplicazioni scalari

Esempio 1

A	100×1
B	1×100
C	100×1

	# Moltiplicazioni	Memoria
$(A \cdot B)$ $((A \cdot B) \cdot C)$	$100 \times 1 \times 100 = 10000$ $\underline{100 \times 100 \times 1 = 10000}$ 20000	10000 $\underline{100}$ 10100
$(B \cdot C)$ $(A \cdot (B \cdot C))$	$1 \times 100 \times 1 = 100$ $\underline{100 \times 1 \times 1 = 100}$ 200	1 $\underline{100}$ 101

Esempio 2

A	50×10
B	10×40
C	40×30
D	30×5

$(((A \cdot B) \cdot C) \cdot D)$: 87500 moltiplicazioni
$((A \cdot (B \cdot C)) \cdot D)$: 34500 moltiplicazioni
$((A \cdot B) \cdot (C \cdot D))$: 36000 moltiplicazioni
$(A \cdot ((B \cdot C) \cdot D))$: 16000 moltiplicazioni
$(A \cdot (B \cdot (C \cdot D)))$: 10500 moltiplicazioni

$(((A \cdot B) \cdot C) \cdot D)$: 87500

$(A \cdot B)$	$50 \times 10 \times 40 = 20000$
$((A \cdot B) \cdot C)$	$50 \times 40 \times 30 = 60000$
$((A \cdot B) \cdot C) \cdot D$	$50 \times 30 \times 5 = 7500$
	87500

Parentesizzazione

Parentesizzazione

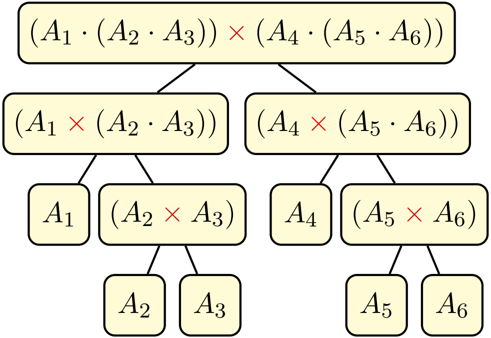
Una parentesizzazione $P_{i,j}$ del prodotto $A_i \cdot A_{i+1} \cdots A_j$ consiste:

- nella matrice A_i, se $i = j$;
- nel prodotto di due parentesizzazioni $(P_{i,k} \cdot P_{k+1,j})$, altrimenti.

Esempio

$(A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3)) \times (A_4 \cdot (A_5 \cdot A_6))$

In questo caso, $k = 3$ e il prodotto evidenziato è detto "ultimo prodotto"



Parentesizzazione ottima

Parentesizzazione ottima

La parentesizzazione che richiede il minor numero di moltiplicazioni scalari per essere completata, fra tutte le parentesizzazioni possibili.

Motivazione

Vale la pena preprocessare i dati per cercare la parentesizzazione migliore, per risparmiare tempo dopo nel calcolo vero e proprio

Domanda

Quante sono le parentesizzazioni possibili?

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(n)$	1	1	2	5	?	?	?	?	?	?

Parentesizzazione ottima

- $P(n)$: numero di parentesizzazioni per n matrici $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$
- L'ultimo prodotto può occorrere in $n-1$ posizioni diverse
- Fissato l'indice k dell'ultimo prodotto, abbiamo:
  - $P(k)$ parentesizzazioni per $A_1 \cdot \ldots \cdot A_k$
  - $P(n-k)$ parentesizzazioni per $A_{k+1} \cdot \ldots \cdot A_n$

$$P(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ \sum_{i=1}^{n-1} P(k)P(n-k) & n > 1 \end{cases}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(n)$	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862

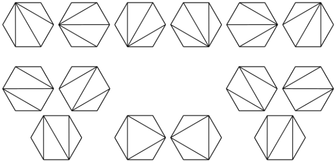
Parentesizzazione ottima

Numero di Catalan

$$P(n+1) = C(n) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \Omega\left(\frac{4^n}{n^{3/2}}\right)$$

In matematica

$C(n)$: numero di modi in cui un poligono convesso con $n+2$ lati può essere suddiviso in triangoli.



Esercizio

Dimostrare che $P(n) = \Omega(2^n)$

Implicazione

Algoritmi di forza bruta non vanno quindi bene

Definizioni matematiche

$A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$	il prodotto di n matrici da ottimizzare
c_{i-1}	il numero di righe della matrice A_i
c_i	il numero di colonne della matrice A_i
$A[i \ldots j]$	il sottoprodotto $A_i \cdot A_{i+1} \cdot \ldots \cdot A_j$
$P[i \ldots j]$	una parentesizzazione per $A[i \ldots j]$ (non necessariamente ottima)

Struttura di una parentesizzazione ottima

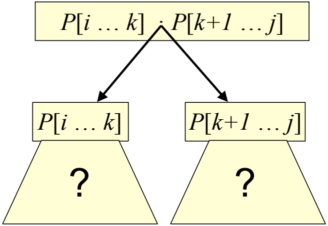
Osservazioni

- Sia $A[i \ldots j]$ una sottosequenza del prodotto di matrici
- Si consideri una parentesizzazione ottima $P[i \ldots j]$ di $A[i \ldots j]$
- Esiste un ultimo prodotto: esiste un indice k tale che

$$P[i \ \ldots j] = P[i \ldots k] \cdot P[k+1 \ldots j]$$

Domanda

Quali sono le caratteristiche dei due sottoprodotti $P[i \ldots k]$ e $P[k+1 \ldots j]$?



Teorema sottostruttura ottima

Teorema

Se $P[i \ldots j] = P[i \ldots k] \cdot P[k+1 \ldots j]$ è una parentesizzazione ottima del prodotto $A[i \ldots j]$, allora:

- $P[i \ldots k]$ è parentesizzazione ottima del prodotto $A[i \ldots k]$
- $P[k+1 \ldots j]$ è parentesizzazione ottima del prodotto $A[k+1 \ldots j]$

Dimostrazione – per assurdo

- Supponiamo esista un parentesizzazione ottima $P'[i \ldots k]$ di $A[i \ldots k]$ con costo inferiore a $P[i \ldots k]$.
- Allora, $P'[i \ldots k] \cdot P[k+1 \ldots j]$ sarebbe una parentesizzazione di $A[i \ldots j]$ con costo inferiore a $P[i \ldots j]$, assurdo.

Valore della soluzione ottima

Sia $DP[i][j]$ il minimo numero di moltiplicazioni scalari necessarie per calcolare il prodotto $A[i \ldots j]$

- Caso base: $i = j$. Allora $DP[i][j] = 0$
- Passo ricorsivo: $i < j$. Esiste una parentesizzazione ottima

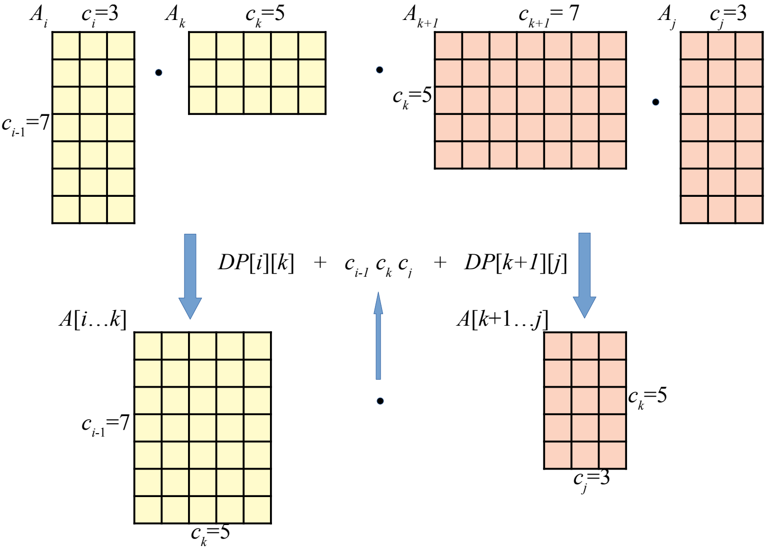
$$P[i \ldots j] = P[i \ldots k] \cdot P[k+1 \ldots j]$$

Sfruttando la ricorsione:

$$DP[i][j] = DP[i][k] + DP[k+1][j] + c_{i-1} \cdot c_k \cdot c_j$$

- $c_{i-1} \cdot c_k \cdot c_j$ è il costo per moltiplicare
  - la matrice $A_i \cdot \ldots A_k$: c_{i-1} righe, c_k colonne
  - la matrice $A_{k+1} \cdot \ldots A_j$: c_k righe, c_j colonne

Valore della soluzione ottima



Valore della soluzione ottima

Ma qual è il valore di k?

- Non lo conosciamo....
- ... ma possiamo provarli tutti!
- k può assumere valori fra i e $j-1$

Formula finale

$$DP[i][j] = \begin{cases} 0 & i = j \\ \min_{i \le k < j} \{DP[i][k] + DP[k+1][j] + c_{i-1} \cdot c_k \cdot c_j\} & i < j \end{cases}$$

Esempio

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	0					
2	-	0				
3	-	-	0			
4	-	-	-	0		
5	-	-	-	-	0	
6	-	-	-	-	-	0

$$\begin{aligned} DP[1][2] &= \min_{1 \le k < 2} \{DP[1][k] + DP[k+1][2] + c_0 c_k c_2\} \\ &= DP[1][1] + DP[2][2] + c_0 c_1 c_2 \\ &= c_0 c_1 c_2 \end{aligned}$$

Esempio

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	0					
2	-	0				
3	-	-	0			
4	-	-	-	0		
5	-	-	-	-	0	
6	-	-	-	-	-	0

$$\begin{aligned} DP[2][4] &= \min_{2 \le k < 4} \{DP[2][k] + DP[k+1][4] + c_1 c_k c_4\} \\ &= \min\{DP[2][2] + DP[3][4] + c_1 c_2 c_4, \\ &\qquad DP[2][3] + DP[4][4] + c_1 c_3 c_4\} \end{aligned}$$

Esempio

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	0					
2	-	0				
3	-	-	0			
4	-	-	-	0		
5	-	-	-	-	0	
6	-	-	-	-	-	0

$$
\begin{aligned}
DP[2][5] \quad &= \min_{2\leq k<5}\{DP[2][k] + DP[k+1][5] + c_1 c_k c_5\} \\
&= \min\{DP[2][2] + DP[3][5] + c_1 c_2 c_5, \\
&\qquad DP[2][3] + DP[4][5] + c_1 c_3 c_5, \\
&\qquad DP[2][4] + DP[5][5] + c_1 c_4 c_5\}
\end{aligned}
$$

Esempio

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	0					
2	-	0				
3	-	-	0			
4	-	-	-	0		
5	-	-	-	-	0	
6	-	-	-	-	-	0

$$
\begin{aligned}
DP[1][5] &= \min_{1 \le k < 5} \{DP[1][k] + DP[k+1][5] + c_0 c_k c_5\} \\
&= \min\{DP[1][1] + DP[2][5] + c_0 c_1 c_5, \\
&\qquad DP[1][2] + DP[3][5] + c_0 c_2 c_5, \\
&\qquad DP[1][3] + DP[4][5] + c_0 c_3 c_5, \\
&\qquad DP[1][4] + DP[5][5] + c_0 c_4 c_5\}
\end{aligned}
$$

Esempio

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	0					
2	-	0				
3	-	-	0			
4	-	-	-	0		
5	-	-	-	-	0	
6	-	-	-	-	-	0

$$
\begin{aligned}
DP[1][6] = \min_{1 \le k < 6} \{ \quad & DP[1][k] + DP[k+1][6] + c_0 c_k c_6 \} \\
= \min\{ \quad & DP[1][1] + DP[2][6] + c_0 c_1 c_6, \\
& DP[1][2] + DP[3][6] + c_0 c_2 c_6, \\
& DP[1][3] + DP[4][6] + c_0 c_3 c_6, \\
& DP[1][4] + DP[5][6] + c_0 c_4 c_6, \\
& DP[1][5] + DP[6][6] + c_0 c_5 c_6 \}
\end{aligned}
$$

Dalla formula al codice

Input

- Un vettore $c[0 \ldots n]$ contenente le dimensioni delle matrici
  - $c[0]$ è il numero di righe della prima matrice
  - $c[i-1]$ è il numero di righe della matrice A_i
  - $c[i]$ è il numero di colonne della matrice A_i
- Due indici i, j che rappresentano l'intervallo di matrici da moltiplicare

Output

Il numero di moltiplicazioni scalari per calcolare il prodotto delle matrici comprese fra gli indici i e j

Approccio ricorsivo

int recPar(**int**[ ] c, **int** i, **int** j)

```
if i == j then
    return 0
else
    min = +∞
    for int k = i to j − 1 do
        int q = recPar(c, i, k) + recPar(c, k + 1, j) + c[i − 1] · c[k] · c[j]
        if q < min then
            min = q
    return min
```

Complessità?

Valutazione

Alcune riflessioni

- La soluzione ricorsiva top-down è $\Omega(2^n)$
- Non è poi migliore dell'approccio basato su forza bruta!
- Il problema è che molti sottoproblemi vengono risolti più volte
- Il numero di sottoproblemi è $\frac{n(n+1)}{2}$

Versione bottom-up

Tabelle programmazione dinamica

Due matrici DP, *last* di dimensione $n \times n$ tali che:

- $DP[i][j]$ contiene il numero di moltiplicazioni scalari necessarie per moltiplicare le matrici $A[i \dots j]$
- $last[i][j]$ contiene il valore k dell'ultimo prodotto che minimizza il costo per il sottoproblema

Versione bottom-up

```
computePar(int[] c, int n)

int[][] DP = new int[1...n][1...n]
int[][] last = new int[1...n][1...n]
for i = 1 to n do                                    % Fill main diagonal
    DP[i][i] = 0
for h = 2 to n do                                    % h: diagonal index
    for i = 1 to n − h + 1 do                        % i: row
        int j = i + h − 1                            % j: column
        DP[i][j] = +∞
        for k = i to j − 1 do                        % k: last product
            int temp = DP[i][k] + DP[k + 1][j] + c[i − 1] · c[k] · c[j]
            if temp < DP[i][j] then
                DP[i][j] = temp
                last[i][j] = k
return DP[1][n]
```

DP	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	224	176	218	276	350
2		0	64	112	174	250
3			0	24	70	138
4				0	30	90
5					0	90
6						0

i	$c[i]$
0	7
1	8
2	4
3	2
4	3
5	5
6	6

$$
\begin{aligned}
DP[1][4] &= \min_{1 \le k < 4} \{\; DP[1][k] + DP[k+1][4] + c_0 \cdot c_k \cdot c_4 \;\} \\
&= \min \{\; DP[1][1] + DP[2][4] + c_0 \cdot c_1 \cdot c_4, \\
&\qquad\;\; \{\; DP[1][2] + DP[3][4] + c_0 \cdot c_2 \cdot c_4, \\
&\qquad\;\; \{\; DP[1][3] + DP[4][4] + c_0 \cdot c_3 \cdot c_4 \;\} \\
&= \min \{\; 0 + 112 + 7 \cdot 8 \cdot 3, \\
&\qquad\;\; \{\; 224 + 24 + 7 \cdot 4 \cdot 3, \\
&\qquad\;\; \{\; 176 + 0 + 7 \cdot 2 \cdot 3 \;\} \\
&= \min \{\; 280 , 332 , 218 \;\}
\end{aligned}
$$

last	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	1	1	3	3	3
2		0	2	3	3	3
3			0	3	3	3
4				0	4	5
5					0	5
6						0

i	$c[i]$
0	7
1	8
2	4
3	2
4	3
5	5
6	6

$$
\begin{aligned}
DP[1][4] &= \min_{1 \leq k < 4} \{ DP[1][k] + DP[k+1][4] + c_0 \cdot c_k \cdot c_4 \} \\
&= \min \{ DP[1][1] + DP[2][4] + c_0 \cdot c_1 \cdot c_4, \\
&\qquad \{ DP[1][2] + DP[3][4] + c_0 \cdot c_2 \cdot c_4, \\
&\qquad \{ DP[1][3] + DP[4][4] + c_0 \cdot c_3 \cdot c_4 \} \\
&= \min \{ 0 + 112 + 7 \cdot 8 \cdot 3, \\
&\qquad \{ 224 + 24 + 7 \cdot 4 \cdot 3, \\
&\qquad \{ 176 + 0 + 7 \cdot 2 \cdot 3 \} \\
&= \min \{ 280 , 332 , 218 \}
\end{aligned}
$$

Parentesizzazione ottima

Considerazioni

- Il costo computazionale è $O(n^3)$, in quanto ogni cella richiede tempo $O(n)$ per essere riempita
- Il costo della funzione si trova nella posizione $DP[1][n]$
- E' anche necessario mostrare la soluzione trovata
- Per questo motivo abbiamo registrato informazioni sulla soluzione nella matrice *last*

Ricostruzione della soluzione – Stampa

```
computePar(int[] c, int n)
-----------------------------------------------------
[...]
printPar(last, 1, n)
```

```
printPar(int[][] last, int i, int j)
-----------------------------------------------------
if i == j then
    print "A["; print i; print "]"
else
    print "("; stampaPar(last, i, last[i][j]); print "·";
     stampaPar(last, last[i][j] + 1, j); print ")"
```

Ricostruzione della soluzione – Calcolo effettivo

int[ ][ ] multiply(**matrix**[ ] A, **int**[ ][ ] S, **int** i, **int** j)

if $i == j$ **then**
  return $A[i]$
else
  int[ ][ ] $X =$ multiply$(last, i, last[i][j])$
  int[ ][ ] $Y =$ multiply$(last, last[i][j] + 1, j)$
  return matrix-multiplication(X, Y)

Esempio

$$A[1 \ldots 6] = A[1 \ldots 3] \cdot A[4 \ldots 6]$$
$$A[1 \ldots 3] = A_1 \cdot A[2 \ldots 3]$$
$$A[4 \ldots 6] = A[4 \ldots 5] \cdot A_6$$
$$A[2 \ldots 3] = A_2 \cdot A_3$$
$$A[4 \ldots 5] = A_4 \cdot A_5$$

last	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	1	1	3	3	3
2		0	2	3	3	3
3			0	3	3	3
4				0	4	5
5					0	5
6						0

Risultato finale

$$A = ((A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3)) \cdot ((A_4 \cdot A_5) \cdot A_6))$$

Prodotto di catena di matrici

Take-home message – prendi e porta a casa

A volte, bisogna fare attenzione a come riempire la tabella - non è detto che riempire una riga dopo l'altra sia possibile.

Insieme indipendente di intervalli pesati – Introduzione

Input

Siano dati n intervalli distinti $[a_1, b_1[, \ldots, [a_n, b_n[$ della retta reale, aperti a destra, dove all'intervallo i è associato un profitto $w_i, 1 \leq i \leq n$.

Intervalli disgiunti

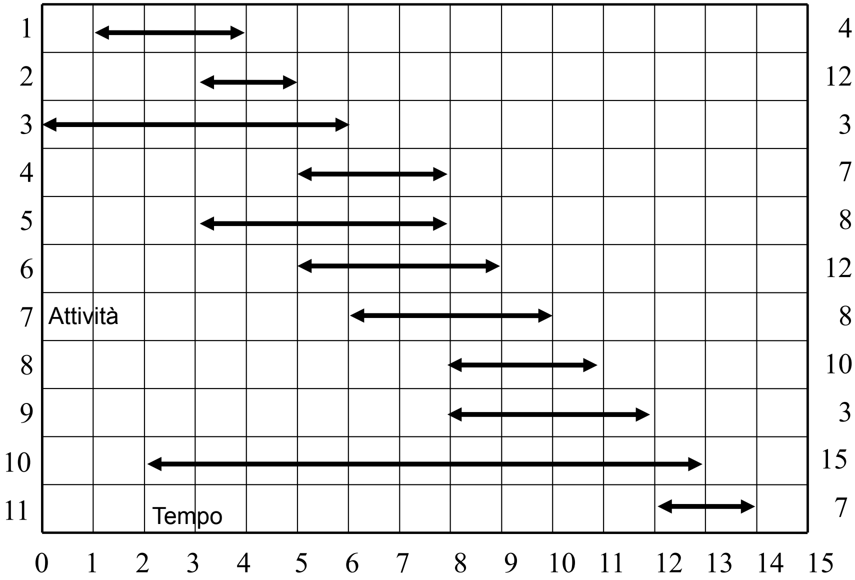
Due intervalli i e j si dicono disgiunti se: $b_j \leq a_i$ oppure $b_i \leq a_j$

Problema

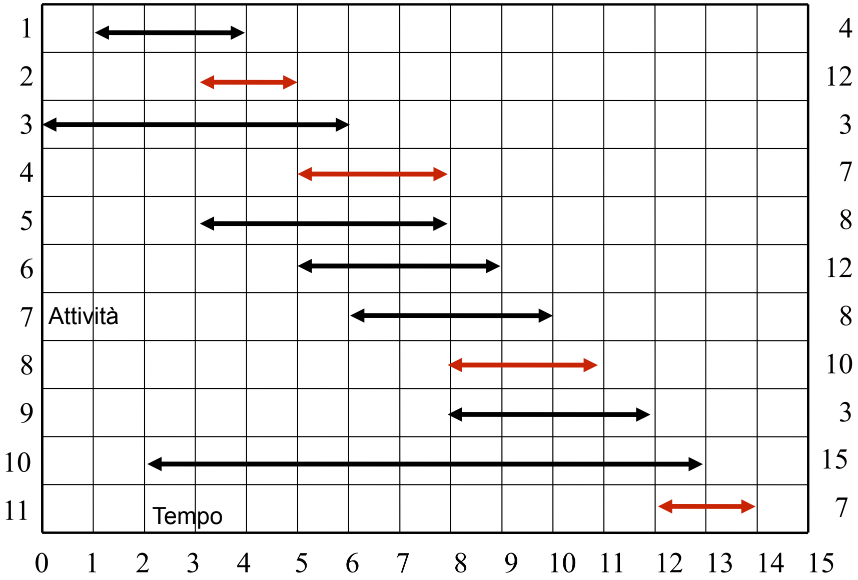
Trovare un insieme indipendente di peso massimo, ovvero un sottoinsieme di intervalli disgiunti tra loro tale che la somma dei loro profitti sia la più grande possibile.

- Esempio: prenotazione di una sala conferenza

Esempio


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
Attività
Tempo
4
12
3
7
8
12
8
10
3
15
7
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Esempio


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
Attività
Tempo
4
12
3
7
8
12
8
10
3
15
7
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Pre-elaborazione

Per usare la programmazione dinamica, è necessario effettuare una pre-elaborazione: ordinare gli intervalli per estremi finali crescenti

$$b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$$

Profitto massimo, prima versione

$DP[i]$ contiene il profitto massimo ottenibile con i primi i intervalli

$$DP[i] = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ \max(DP[i-1], \max\{DP[j] + w_i : j < i \wedge b_j \leq a_i\}) & i > 0 \end{cases}$$

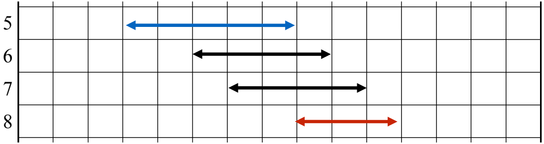
Costo computazionale dell'algoritmo associato a questa formula?

$O(n^2)$

Pre-elaborazione

Una seconda possibile pre-elaborazione consiste nel pre-calcolare il predecessore $pred_i = j$ di i, dove:

- $j < i$ è il massimo indice tale che $b_j \leq a_i$
- se non esiste tale indice, $pred_i = 0$.



Profitto massimo, seconda versione

$$DP[i] = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ \max(DP[i-1], DP[pred_i] + w_i) & i > 0 \end{cases}$$

Pre-elaborazione - calcolo predecessori

int[ ] computePredecessor(**int**[ ] a, **int**[ ] a, **int** n)

```
int[] pred = new int[0 ... n]
pred[0] = 0
for i = 1 to n do
    j = i − 1
    while j > 0 and b[j] > a[i] do
        j = j − 1
    pred[i] = j
return pred
```

Quanto costa pre-calcolare i predecessori? $O(n^2)$

Si può fare meglio di così? Sì! $O(n \log n)$

Versione completa

```
SET maxinterval(int[] a, int[] b, int[]w, int n)
{ ordina gli intervalli per estremi di fine crescenti }
int[] pred = computePredecessor(a, b, n)
int[] DP = new int[0 ... n]
DP[0] = 0
for i = 1 to n do
    DP[i] = max(DP[i − 1], w[i] + DP[pred[i]])
i = n
SET S = Set()
while i > 0 do
    if DP[i − 1] > w[i] + DP[pred[i]] then
        i = i − 1
    else
        S.insert(i)
        i = pred[i]
return S
```

Costo computazionale

Costo computazionale

- Ordinamento intervalli: $O(n \log n)$
- Calcolo predecessori: $O(n \log n)$
- Riempimento tabella DP: $O(n)$
- Ricostruzione soluzione: $O(n)$
- Algoritmo completo: $O(n \log n)$

Esercizio

Scrivere una funzione di calcolo predecessori in tempo $O(n \log n)$

Insieme indipendente di intervalli pesati – Conclusioni

Take-home message – prendi e porta a casa

Talvolta, può essere necessario pre-processare l'input per poter applicare nella maniera più efficiente possibile la programmazione dinamica

Per concludere

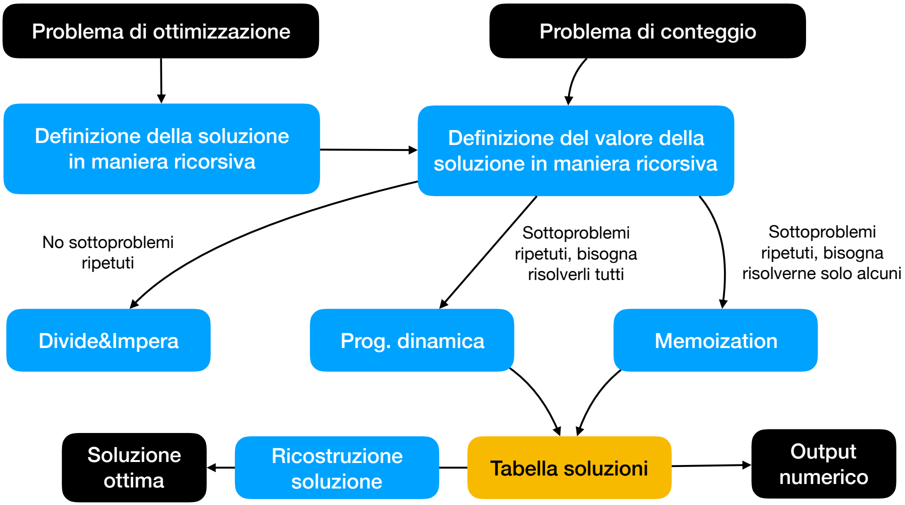
Una lezione ancora più importante

La programmazione dinamica non è la soluzione di tutti i vostri problemi. Esistono altre tecniche che possono fare "meglio di così". Inoltre, è possibile che soluzioni ad-hoc possano essere migliori

Esempi

- Longest increasing subsequence: esiste soluzione $O(n \log n)$
- Longest common subsequence: può essere risolto in tempo $O(mn/\log n)$ (con alfabeto limitato)
- Four Russians algorithm: tecnica generale che può essere applicata a vari problemi su matrice con alfabeto limitato $O(n^2/\log n)$
  - Edit distance
  - Transitive closure, ...

Approccio generale



Riassunto: programmazione dinamica / memoization

Fasi

- Caratterizzare la struttura di una soluzione ottima
- Dimostrare che la soluzione gode di sottostruttura ottima
- Definire ricorsivamente il valore di una soluzione ottima
- Calcolare il valore di una soluzione ottima "bottom-up" (prog. dinamica) / "top-down" (memoization)
- Ricostruzione di una soluzione ottima