Lezione 8 del 22/03/2021

Titolo nota 22/03/2021

FATTORIZZAZIONI

Il metodo di eliminazione di Gauss può essere reinterpretato come una fattorizzazione

$$A\underline{x} = \underline{b} \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \det(A) \neq 0$$

$$\underline{x}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$$

$$\downarrow$$

$$LU\underline{x} = \underline{b}$$

Vantaggi: la fattorizzazione dipende dalla sola matrice A e non dal termine noto $\underline{b}$

quindi la stessa fattorizzazione può essere utilizzata per risolvere diversi sistemi lineari sempre di matrice A ma con diversi termini noti $\underline{b}$

__Idea:__ U = matrice triangolare superiore

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

L = matrice triangolare inferiore con elementi della diagonale uguali ad 1

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b} \longrightarrow \overset{O(n^3)}{\underbrace{LU}_{\underline{y}}}\,\underline{x} = \underline{b} \longrightarrow \begin{cases} L\underline{y} = \underline{b} & O(n^2) \text{ sostituzione in avanti} \\ U\underline{x} = \underline{y} & O(n^2) \text{ sostituzione all'indietro} \end{cases}$$

Oss: Variando il termine noto $\underline{b}$, ho il costo computazionale di risoluzione dei due sistemi $O(n^2)$

Esempio: Calcolare l'inversa di una matrice

$$A \cdot \underbrace{A^{-1}}_{?} = I$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\tilde{a}}_1 \quad \underline{\tilde{a}}_2 \cdots \underline{\tilde{a}}_n \qquad\qquad \underline{e}_1 \quad \underline{e}_2 \cdots \underline{e}_n$$

$$A\underline{\tilde{a}}_1 = \underline{e}_1 \longrightarrow \underline{\tilde{a}}_1$$

$$A\underline{\tilde{a}}_2 = \underline{e}_2 \longrightarrow \underline{\tilde{a}}_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$A\underline{\tilde{a}}_n = \underline{e}_n \longrightarrow \underline{\tilde{a}}_n$$

$$A \rightarrow LU \qquad O(n^3)$$

$$LU\underline{\tilde{a}}_i = \underline{\tilde{e}}_i \qquad O(n^2) \qquad i = 1 \ldots n$$

Dall'algoritmo di eliminazione di Gauss alla fattorizzazione

$$A = A^{(1)} \qquad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{31} & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ m_{n1} & 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_1 A^{(1)} = A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & m_{32} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & m_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_2 A^{(2)} = A^{(3)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & & \\ a_{n3}^{(3)} & \dots & a_{nn}^{(3)} \end{matrix}} & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ \vdots & & m_{k+1,k} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & m_{n,k} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad M_k A^{(k)} = A^{(k+1)} \qquad k = 1 \dots n-1$$

$\uparrow$ k^a colonna

$$M_{n-1} A^{(n-1)} = A^{(n)} = U$$

Riassumendo

$$M_{n-1} M_{n-2} \cdots M_3 M_2 M_1 A = U$$

$$M_{n-1}^{-1} \left[M_{n-1} M_{n-2} \cdots M_3 M_2 M_1 A \right] = M_{n-1}^{-1} U$$

$$M_{n-2} \cdots M_3 M_2 M_1 A = M_{n-1}^{-1} U$$

$$A = \underbrace{M_1^{-1} M_2^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1}}_{L} U$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -m_{21} & 1 & & 0 & \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -m_{n1} & -m_{n2} & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Oss</u>: La fattorizzazione LU indotta dal metodo di eliminazione di Gauss esiste ed è unica se A è non singolare

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & U & a_{1n} \\ & \ddots & & \\ & L & \ddots & \\ a_{n1} & \cdot & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Troviamo algoritmi alternativi per il calcolo della fattorizzazione LU

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & & u_{2n} \\ & & u_{33} & & u_{3n} \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = \sum_{r=1}^{\min(i,j)} l_{ir}\, u_{rj} \qquad n^2 \text{ coeff. incogniti}$$

$i,j = 1 \dots n$

METODO di DOOLITTLE (algoritmo riga-colonna)

- conosco tutta la 1ª riga di L, la moltiplico per la matrice U

$$1 \cdot u_{1j} = a_{1j} \qquad j = 1 \dots n$$

la prima riga di U coincide con la prima riga di A

- ora conosco tutta la 1ª colonna di U, la moltiplico per le righe di L

$l_{i1} \cdot u_{11} = a_{i1} \qquad i = 2 \dots n \qquad$ da cui $\qquad l_{i1} = a_{i1}/u_{11}$

• ora conosco tutta la 2^a riga di L, la moltiplico per le colonne di U

$$l_{21} \cdot u_{1j} + 1 \cdot u_{2j} = a_{2j} \qquad j = 2 \ldots n \quad \text{da cui} \quad u_{2j} = a_{2j} - l_{21} u_{1j}$$

• ora conosco tutta la 2^a colonna di U, la moltiplico per le righe di L

$$l_{i1} \cdot u_{12} + l_{i2} u_{22} = a_{i2} \qquad i = 3 \ldots n \quad \text{da cui} \quad l_{i2} = \frac{(a_{i2} - l_{i1} u_{12})}{u_{22} \neq 0}$$

$$\underset{0}{\det}(A) = \det(L)\,\underset{0}{\det}(U)$$

• ora conosco la 3^a riga di L, la moltiplico per U

$$l_{31} u_{1j} + l_{32} u_{2j} + 1 \cdot u_{3j} = a_{3j} \qquad j = 3 \ldots n$$

da cui

$$u_{3j} = a_{3j} - \sum_{p=1}^{2} l_{3p} u_{pj}$$

- ora conosco la 3ª colonna di U

$l_{i1}u_{13} + l_{i2}u_{23} + l_{i3}u_{33} = a_{i3}$ $\quad i = 4 \dots n$ $\quad$ da cui $l_{i3} = \dfrac{a_{i3} - \sum_{p=1}^{2} l_{ip}u_{p3}}{u_{33}}$

Algoritmo:

$k = 1 \dots n$

$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{kp}u_{pj} \qquad j = k \dots n$$

$$l_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{ip}u_{pk}}{u_{kk}} \qquad i = k+1 \dots n$$