Lezione 19 del 20/05/2021

Titolo nota 20/05/2021

INTEGRAZIONE NUMERICA

Ci occuperemo di integrali monodimensionali definiti su intervalli limitati

$$I[f] = \int_a^b f(x)\,dx$$

Un'approssimazione naturale si ottiene sostituendo f con il suo polinomio interpolatore di Lagrange su un insieme di $n+1$ nodi distinti

$x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$ $\longrightarrow$ polinomio interpolatore di Lagrange di grado n

$f(x_0)\, f(x_1) \dots f(x_n)$ $\qquad p_n(x)$

$p_m(x)$ t.c. $\quad p_m(x_i) = f(x_i) \quad i = 0 \dots n$

$$p_m(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, \mathcal{L}_i(x) \qquad \mathcal{L}_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$I[f] := \int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b p_m(x)\,dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{m} f(x_i)\, \mathcal{L}_i(x)\,dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} f(x_i) \underbrace{\int_a^b \mathcal{L}_i(x)\,dx}_{A_i} = \sum_{i=0}^{m} A_i\, f(x_i) = Q_m[f]$$

NODI della FORMULA di QUADRATURA

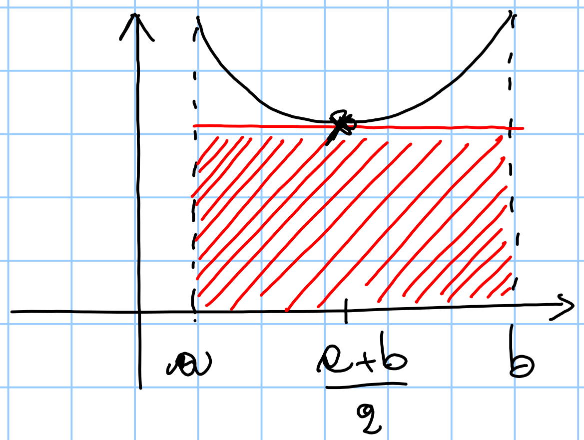
PESI della FORMULA QUADRATURA

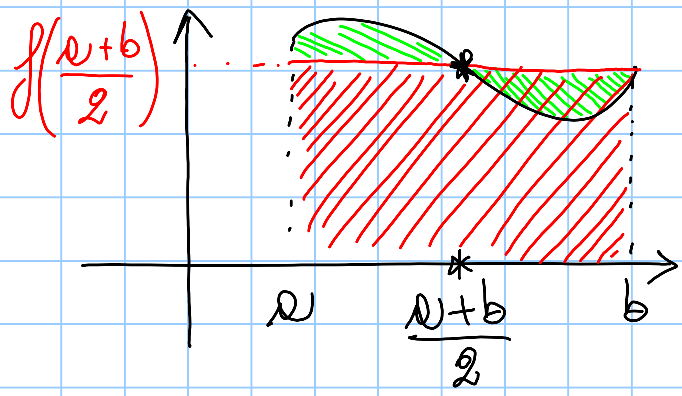
FORMULA di QUADRATURA di tipo INTERPOLATORIO

Def: Definiamo il grado di esattezza (o di precisione) di una formula di quadratura il massimo intero $r \geq 0$ per cui

$$Q_n(p) = I[p] \qquad \forall p \in \mathbb{P}_r$$

FORMULA DEL PUNTO MEDIO o DEL RETTANGOLO





Sostituisco f con la funzione costante pari al valore nel punto medio

$$I[f] = \int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b 1\,dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right) x\Big|_{x=a}^{x=b} =$$

$$= \boxed{f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot(b-a) = Q_0[f]}$$

Calcoliamo l'errore: Se $f \in C^2([a,b])$, facciamo lo sviluppo di Taylor nell'intorno di $\frac{a+b}{2}$

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \underbrace{f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{2} + \dots}_{f''(\eta_x)\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{2}}$$

$\eta_x \in \left[x, \frac{a+b}{2}\right]$

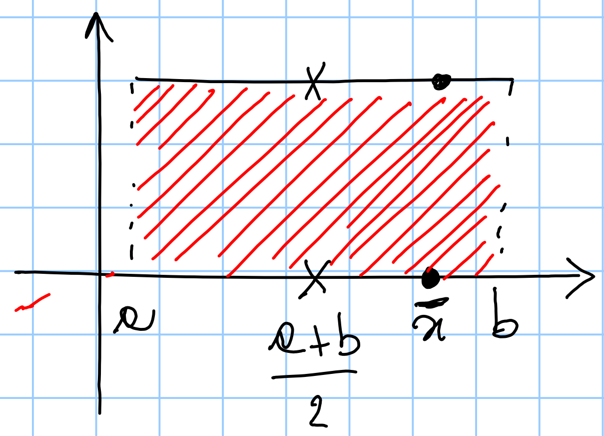
$$I[f] = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx + \int_a^b f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)dx + \underbrace{\int_a^b f''(\eta_x)\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{2}dx}_{\text{T. VALOR MEDIO INTEGRALE}}$$

$$= \underbrace{f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)}_{Q_0[f]} + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{2}\Bigg|_{x=a}^{x=b} + \frac{f''(\bar\eta)}{2}\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3}{3}\Bigg|_{x=a}^{x=b} =$$

$\bar\eta \in (a,b)$

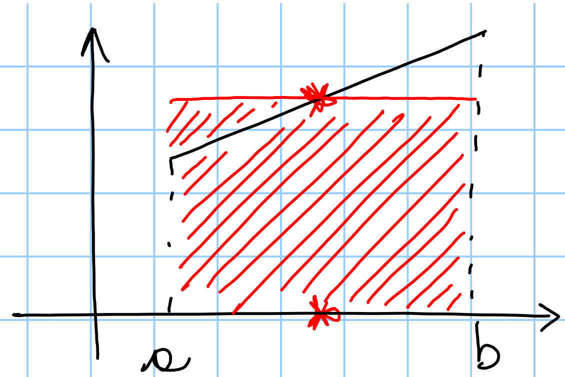
$$= Q_0[f] + \frac{f'\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2}\left\{\underbrace{\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2}_{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \,=\, 0}\right\} + \frac{f''(\bar\eta)}{2}\frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^3}{3} =$$

$$= Q_0[f] + \frac{f''(\eta)}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2} \cdot (b-a)^3}{2^3 \cdot 3} = Q_0[f] + \underbrace{\boxed{f''(\eta)\frac{(b-a)^3}{24}}}_{\text{errore della formula di quadratura } Q_0}$$



$f \equiv P_0(x)$

Oss: la formula di quadratura $Q_0(f)$ integra esattamente un polinomio di grado 0



$f = P_1(x)$

Oss: La formula di quadratura del punto medio integra esattamente un polinomio di grado 1

Oss: La formula di quadratura del punto medio ha grado di esattezza 1

$$I[f] = \int_{-1}^{1} \underbrace{x^2}_{f(x)}\,dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{x=-1}^{x=1} = \frac{1}{3} - \frac{(-1)}{3} = \frac{2}{3}$$

esiste un polinomio di grado 2 che non viene integrato esattamente

$Q_0[f] \neq I[f]$

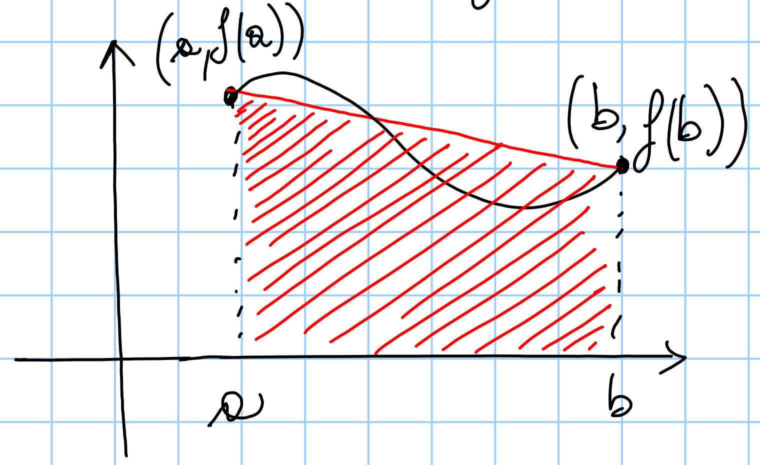
$$Q_0[f] = f(0)\cdot(1-(-1)) = \cancel{f(0)}^{\,0}\cdot 2 = 0$$

$\neq$

FORMULA del TRAPEZIO

Sostituisco ad f il polinomio interpolatore di grado 1 che interpola la funzione integranda agli estremi del dominio di integrazione

$$\boxed{Q_1[f] = \left[f(b) + f(a)\right]\frac{(b-a)}{2}}$$



Calcoliamo l'errore: supponiamo $f \in C^2(a,b)$

$$f(a) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\,\omega_{n+1}(x) \qquad \xi_x \in [x_0, x_n]$$

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$ → errore di interpolazione

$$I[f] - Q_1[f] = \int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2}(x-a)(x-b)\,dx = \frac{f''(\bar{\xi})}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx =$$

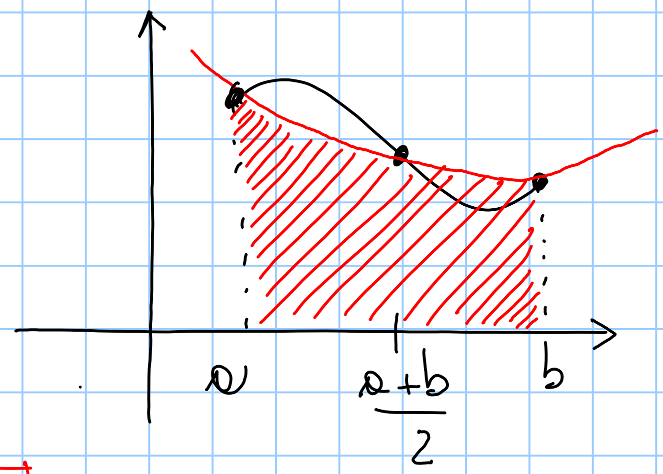
$$= \boxed{-\frac{f''(\bar{\xi})(b-a)^3}{12}}$$

Oss: La formula del trapezio ha grado di esattezza 1 come la formula del punto medio.

FORMULA di CAVALIERI–SIMPSON

Sostituisco ad f il polinomio interpolatore di grado 2 relativo ai nodi

$$x_0 = a \qquad x_1 = \frac{a+b}{2} \qquad x_2 = b$$



$$\boxed{Q_2[f] = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]}$$

$$\boxed{\mathcal{I}[f] - Q_2[f] = -\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \frac{f^{(IV)}(\xi)}{90}}$$

assumendo che $f \in C^{(IV)}(a,b)$

__Oss__: La formula di Cavalieri–Simpson ha grado di esattezza 3.

__Oss__: Conviene procedere aumentando il grado del polinomio interpolatore?
(Funzione di Runge)

Le formule di NEWTON–COTES $Q_n[f]$, ossia le formule che sostituiscono la funzione integranda con un polinomio di grado n interpolante in n+1 nodi equispaziati, hanno grado di esattezza

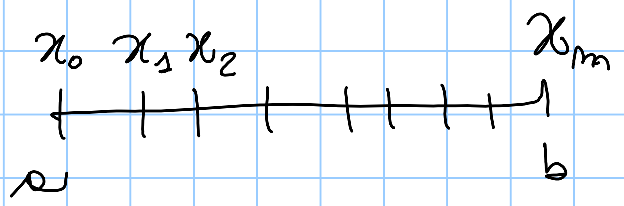
$$Q_n \begin{cases} n & \text{se } n \text{ è dispari} \\ n+1 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

Idea: Siccome le formule dell'errore dipendono dall'ampiezza dell'intervallo $[a,b]$, se questa è minore di 1 allora l'errore è piccolo

$\downarrow$

FORMULE di integrazione COMPOSITE

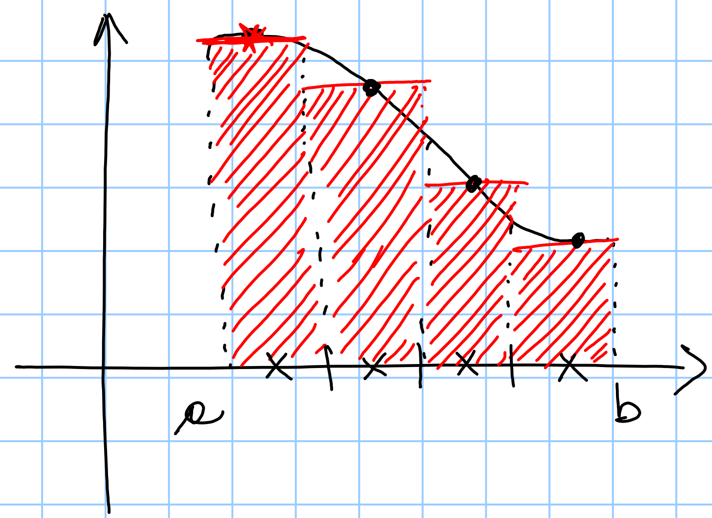
FORMULA del PUNTO MEDIO COMPOSITA



Divido in m sottointervalli della stessa ampiezza

$$H = \frac{b-a}{m} \qquad m \geq 1$$

$$x_i = x_0 + iH \qquad i = 0 \dots m$$



$$I[f] = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx}_{\text{formula p.to medio semplice}} = \sum_{i=1}^{m} \left[f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) H + f''(\eta_i) \frac{H^3}{24} \right] =$$

$$= H \sum_{i=1}^{m} f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) + \frac{f''(\bar{\eta})}{24}\, m \cdot \left(\frac{b-a}{m}\right)^3 =$$

T. media integrale discreto

$$= \underbrace{\boxed{H \sum_{i=1}^{m} f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)}}_{Q_0^c[f]} + \boxed{\frac{f''(\bar{\eta})}{24} (b-a) H^2}$$

aumentando il numero di sottointervalli, $H \to 0$ e l'errore tenderà a 0.