Lezione 14 del 29/04/2021

Titolo nota 29/04/2021

RICERCA di RADICI di EQUAZIONI NON LINEARI

Consideriamo il problema:

Data $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si cerca $\alpha \in (a,b)$ t.c.

$$f(\alpha) = 0$$

Es.: calcolo $\sqrt{2} = \alpha$ $\qquad \alpha^2 = 2$ $\qquad f(\alpha) = 0$

$$f(x) := x^2 - 2$$

METODO di BISEZIONE → Lezione 2

Il metodo di bisezione è un metodo efficace perchè è globalmente convergente tuttavia presenta un lento abbattimento dell'errore

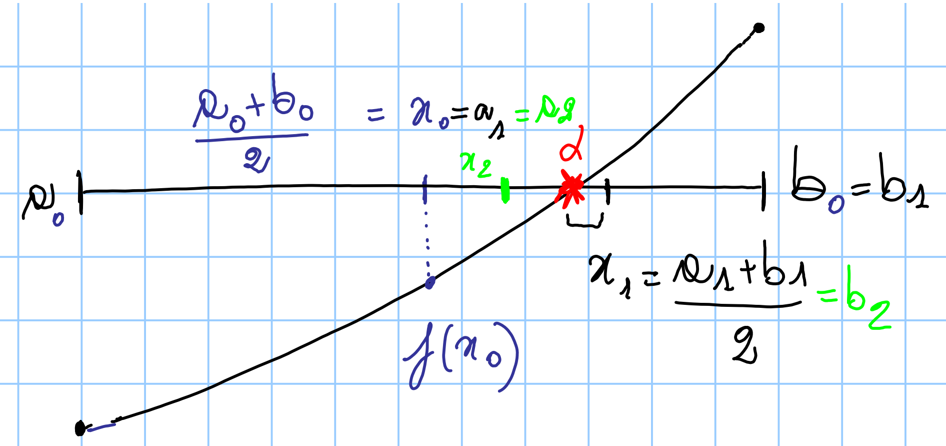
↓

metodi alternativi con ordine di convergenza maggiore

ma

"localmente convergenti"

Es.



$$|x_2 - \alpha| > |x_1 - \alpha|$$

Idea: Applicare il metodo di bisezione come tecnica di avvicinamento alla radice per ottenere con qualche passo una stima.
A partire da questa stima utilizzare un metodo di ordine più elevato e convergere alla radice entro i limiti di accuratezza prestabiliti.

L'approssimazione numerica di una radice α di f si basa sull'uso di metodi iterativi, ossia si genera una successione di valori $x^{(k)}$ tali che

$$\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = \alpha$$

<u>Def</u>: Si dice che la successione $\{x^{(k)}\}_{k=1,2\dots}$ generata da un metodo iterativo converge ad α con ordine p se

$$\exists\, c > 0 : \quad \frac{|x^{(k+1)} - \alpha|}{|x^{(k)} - \alpha|^{p}} \le c \qquad \forall k \ge k_0 \quad k_0 \in \mathbb{N}$$

$$0 < \left| x^{(k+1)} - \alpha \right| \leq C \left| x^{(k)} - \alpha \right|^{p}$$

<u>Oss</u>: Il metodo di bisezione è globalmente convergente ma non è neanche di ordine 1

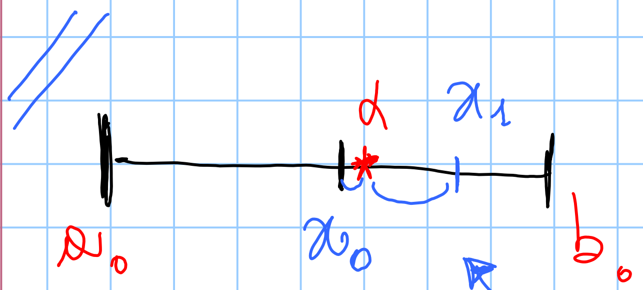
<u>Oss</u>: Se $p=1$ per avere convergenza, necessariamente C dovrà essere minore di 1

$$\underbrace{\left| x^{(k+1)} - \alpha \right|}_{e^{(k+1)}} \leq \underbrace{\left| x^{(k)} - \alpha \right|}_{e^{(k)}} \cdot C$$

$$e^{(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0 \qquad e^{k+1} \leq e^{(k)} \cdot C \leq e^{(k-1)} \cdot C^2 \leq e^{(k-2)} \cdot C^3 \leq \dots$$

$$\le e^{(0)} \underbrace{C^{k+1}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0 \qquad \Rightarrow 0 < C < 1$$

$$e^{(0)} = |x^{(0)} - \alpha|$$



Consideriamo "bisezione"

$$|x^{k+1} - \alpha| \cancel{<} |x^{(k)} - \alpha|$$

ALGORITMI "localmente" convergenti

Se α è radice di f e f è differenziabile

$$\exists c \quad 0 = f(\alpha) = f(x_0) + f'(c)(\alpha - x_0) \qquad c \text{ compreso tra } \alpha \text{ e } x_0$$

//

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 +$$

Sviluppo in serie di Taylor

$$+ \frac{f^{(IV)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \dots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

//

Se approssimo $f'(c)$

$$0 = f(\alpha) = f'(c)(\alpha - x_0) + f(x_0) \qquad f'(c) \approx q_0$$

$$0 = f(\alpha) \neq q_0 (\alpha - x_0) + f(x_0)$$

$$f(x_0) + q_0 (x_1 - x_0) = 0 \implies x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{q_0}$$

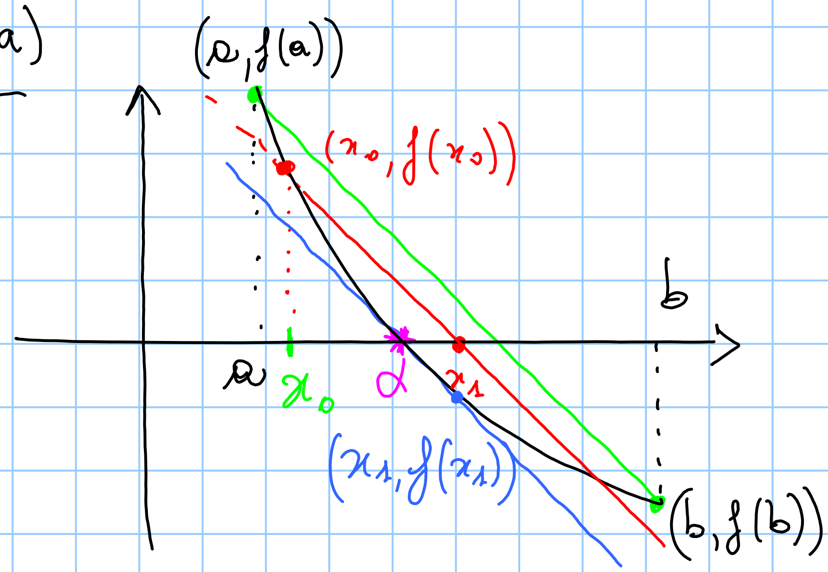
reiterando il procedimento

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{q_k}}$$

I metodi che analizzeremo si basano sulle diverse definizioni di q_k

METODO delle CORDE

$q_k = \text{costante} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



$$\begin{cases} x_0 \text{ dato} \\ x_{k+1} = x_k - f(x_k)\dfrac{b-a}{f(b)-f(a)} \end{cases}$$

// retta passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

$$r: \; y = \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}(x-a) + f(a)$$

al passo k cerchiamo la retta passante per $(x_k, f(x_k))$ e parallela ad r

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - x_k) + f(x_k)$$

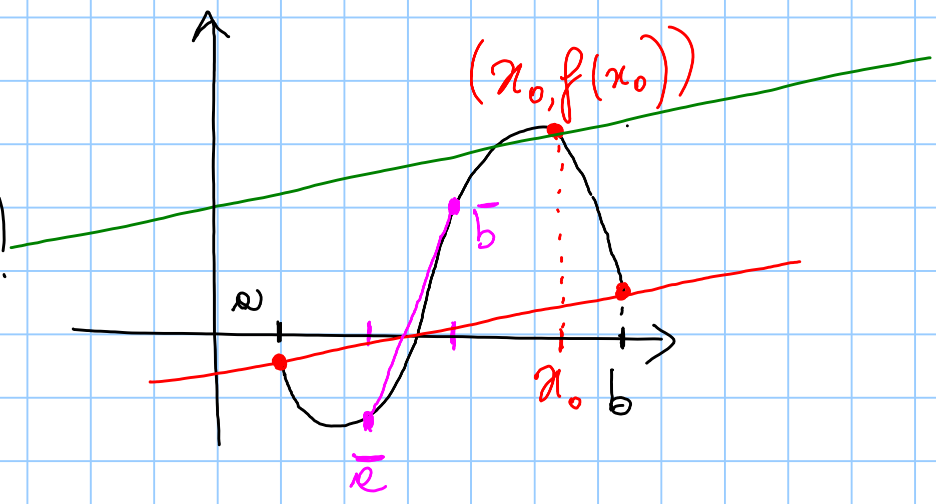
calcolo l'intersezione con l'asse delle ascisse $y = 0$

$$0 = y = \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)}(x_{k+1} - x_k) + f(x_k) \longrightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(x_k)$$

//

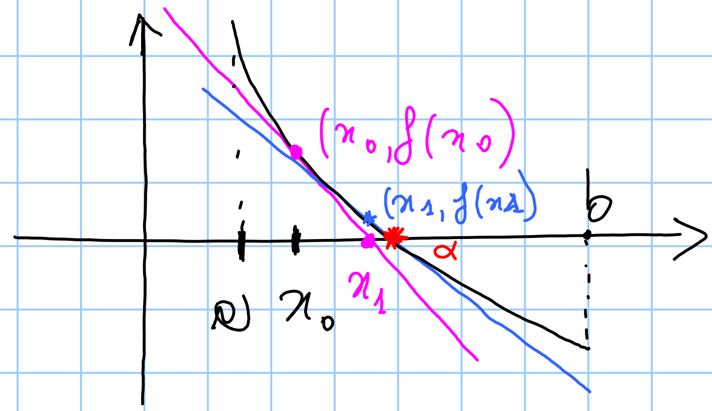
Oss: Sotto opportune ipotesi, il metodo delle corde è convergente e ha ordine di convergenza pari a 1.

Oss: Attenzione! Il metodo è solo localmente convergente!



METODO di NEWTON o METODO delle TANGENTI $\quad q_k = f'(x_k)$

$$\begin{cases} x_0 \text{ dato} \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \end{cases} \qquad k = 0, 1, \dots$$



Oss.: Se
α è radice semplice: $f'(\alpha) \neq 0$ e sotto altre opportune ipotesi
il metodo delle tangenti risulta localmente convergente e di ordine $p=2$

CRITERI di ARRESTO

Noi cerchiamo $\lim_{i \to +\infty} x_i = \alpha$ ma in Analisi Numerica come verifichiamo questa condizione?

Introduciamo una tolleranza $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$

- controllo dell'incremento

Il processo iterativo si arresta al minimo K per cui

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$$

Es.:

$$x_{k+1} - x_k = x_{k+1} \pm \alpha - x_k = e_{k+1} - e_k$$

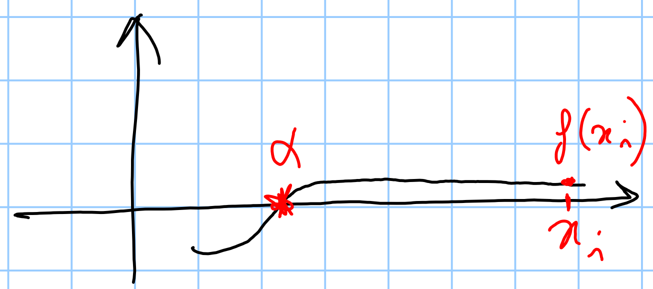
Se l'avanzamento verso la radice è lento, non è un buon test

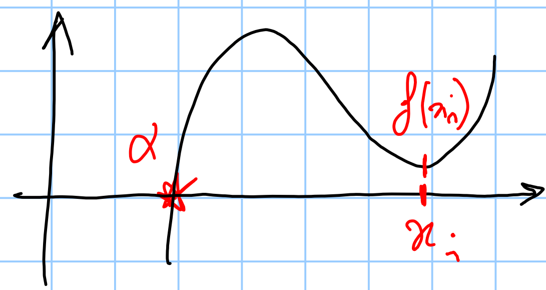
- <u>controllo del residuo</u>

Il processo iterativo si arresta al minimo k per cui

$$|f(x_k)| < \varepsilon$$

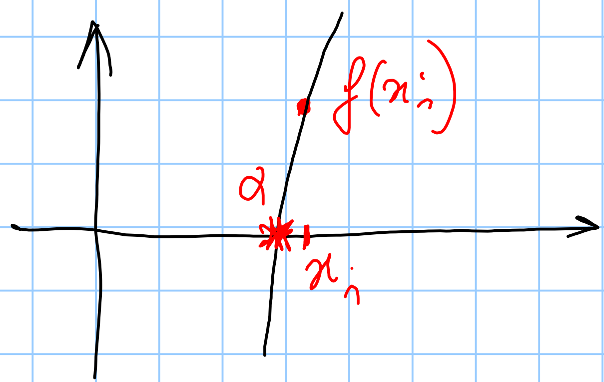
<u>Oss</u>: Attenzione!





Dire che $|f(x_i)| < \varepsilon$ non significa che $|x_i - \alpha| < \varepsilon$

l'errore può comunque essere grande



In questo caso proseguo pur essendo vicino ad α perché

$$|f(x_i)| > \varepsilon$$