Algoritmi e Strutture Dati

Divide-et-impera

Alberto Montresor

Università di Trento

2018/12/05

Sommario

Risoluzione problemi

Dato un problema

- Non ci sono "ricette generali" per risolverlo in modo efficiente
- Tuttavia, è possibile evidenziare quattro fasi
  - Classificazione del problema
  - Caratterizzazione della soluzione
  - Tecnica di progetto
  - Utilizzo di strutture dati
- Queste fasi non sono necessariamente sequenziali

Classificazione dei problemi

Problemi decisionali

- Il dato di ingresso soddisfa una certa proprietà?
- Soluzione: risposta sì/no
- Esempio: Stabilire se un grafo è connesso

Problemi di ricerca

- Spazio di ricerca: insieme di "soluzioni" possibili
- Soluzione ammissibile: soluzione che rispetta certi vincoli
- Esempio: posizione di una sottostringa in una stringa

Classificazione dei problemi

Problemi di ottimizzazione

- Ogni soluzione è associata ad una funzione di costo
- Vogliamo trovare la soluzione di costo minimo
- Esempio: cammino più breve fra due nodi

Problemi di approssimazione

- A volte, trovare la soluzione ottima è computazionalmente impossibile
- Ci si accontenta di una soluzione approssimata: costo basso, ma non sappiamo se ottimo
- Esempio: problema del commesso viaggiatore

Definizione matematica del problema

E' fondamentale definire bene il problema dal punto di vista matematico

- Spesso la formulazione è banale...
- ... ma può suggerire una prima idea di soluzione
- Esempio: Data una sequenza di n elementi, una permutazione ordinata è data dal minimo seguito da una permutazione ordinata dei restanti $n-1$ elementi (Selection Sort)

La definizione matematica può suggerire una possibile tecnica

- Sottostruttura ottima $\rightarrow$ Programmazione dinamica
- Proprietà greedy $\rightarrow$ Tecnica greedy

Tecniche di soluzione problemi

Divide-et-impera

- Un problema viene suddiviso in sotto-problemi indipendenti, che vengono risolti ricorsivamente (top-down)
- Ambito: problemi di decisione, ricerca

Programmazione dinamica

- La soluzione viene costruita (bottom-up) a partire da un insieme di sotto-problemi potenzialmente ripetuti
- Ambito: problemi di ottimizzazione

Memoization (o annotazione)

- Versione top-down della programmazione dinamica

Tecniche di soluzione problemi

Tecnica greedy

- Approccio "ingordo": si fa sempre la scelta localmente ottima

Backtrack

- Procediamo per "tentativi", tornando ogni tanto sui nostri passi

Ricerca locale

- La soluzione ottima viene trovata "migliorando" via via soluzioni esistenti

Algoritmi probabilistici

- Meglio scegliere con giudizio (ma in maniera costosa) o scegliere a caso ("gratuitamente")

Divide-et-impera

Tre fasi

- Divide: Dividi il problema in sotto-problemi più piccoli e indipendenti
- Impera: Risolvi i sotto-problemi ricorsivamente
- Combina: "unisci" le soluzioni dei sottoproblemi

Non esiste una ricetta "unica" per divide-et-impera

- Merge Sort: "divide" banale, "combina" complesso
- Quicksort: "divide" complesso, niente fase di "combina"
- E' necessario uno sforzo creativo

Minimo divide-et-impera

$\mathsf{minrec}(\mathbf{int}[\,]\ A,\ \mathbf{int}\ i,\ \mathbf{int}\ j)$

if $i = j$ **then**
  return $A[i]$
else
  $m = \lfloor (i + j)/2 \rfloor$
  return $\mathsf{min}(\mathsf{minrec}(A, i, m), \mathsf{minrec}(A, m + 1, j))$

Complessità

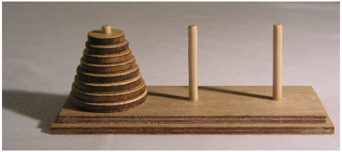
$T(n) = \Theta(n)$ – Non ne vale la pena

$$T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) + 1 & n > 1 \\ 1 & n = 1 \end{cases}$$

Le torri di Hanoi

Gioco matematico

- tre pioli
- n dischi di dimensioni diverse
- Inizialmente, i dischi sono impilati in ordine decrescente nel piolo di sinistra



https://it.wikipedia.org/wiki/File:Tower_of_Hanoi.jpeg

Scopo del gioco

- Impilare in ordine decrescente i dischi sul piolo di destra
- Senza mai impilare un disco più grande su uno più piccolo
- Muovendo al massimo un disco alla volta
- Utilizzando il piolo centrale come appoggio

Le torri di Hanoi

hanoi(**int** n, **int** src, **int** $dest$, **int** $middle$)

if $n = 1$ **then**
    print $src \rightarrow dest$
else
    hanoi($n - 1, src, middle, dest$)
    print $src \rightarrow dest$
    hanoi($n - 1, middle, dest, src$)

Divide-et-impera

- $n - 1$ dischi da src a $middle$
- 1 disco da src a $dest$
- $n - 1$ dischi da $middle$ a $dest$

Le torri di Hanoi

```
hanoi(int n, int src, int dest, int middle)
if n = 1 then
    print src → dest
else
    hanoi(n − 1, src, middle, dest)
    print src → dest
    hanoi(n − 1, middle, dest, src)
```

- Questa soluzione è ottima (si può dimostrare)
- Ricorrenza: $T(n) = 2T(n-1) + 1$
- Costo computazionale? $O(2^n)$

Quicksort

Algoritmo di ordinamento basato su divide-et-impera

- Caso medio: $O(n \log n)$
- Caso pessimo: $O(n^2)$

Caso medio vs caso pessimo

- Il fattore costante di Quicksort è migliore di Merge Sort
- "In-memory": non utilizza memoria addizionale
- Tecniche "euristiche" per evitare il caso pessimo
- Quindi spesso è preferito ad altri algoritmi

R. Sedgewick, "*Implementing Quicksort Programs*". Communications of the ACM, 21(10):847-857, 1978. `http://portal.acm.org/citation.cfm?id=359631`

Quicksort

Input

- Vettore $A[1 \ldots n]$,
- Indici *start*, *end* tali che $1 \leq start \leq end \leq n$

Divide

- Sceglie un valore $p \in A[start \ldots end]$ detto perno (pivot)
- Sposta gli elementi del vettore $A[start \ldots end]$ in modo tale che:
  $\forall i \in [start \ldots j-1] : A[i] \leq p$
  $\forall i \in [j+1 \ldots end] : A[i] \geq p$
- L'indice j viene calcolato in modo tale da rispettare tale condizione
- Il perno viene messo in posizione $A[j]$

Quicksort

Impera

ordina i due sottovettori $A[start \ldots j-1]$ e $A[j+1 \ldots end]$ richiamando ricorsivamente Quicksort

Combina

Non fa nulla:

- il primo sottovettore,
- $A[j]$,
- il secondo sottovettore

formano già un vettore ordinato

Quicksort – pivot()

---

int pivot(Item[] A, **int** $start$, **int** end)

```
Item p = A[start]
int j = start
for i = start + 1 to end do
    if A[i] < p then
        j = j + 1
        A[i] ↔ A[j]
A[start] = A[j]
A[j] = p
return j
```

Quicksort – Procedura principale

QuickSort(Item[] A, **int** $start$, **int** end)

```
if start < end then
    int j = pivot(A, start, end)
    QuickSort(A, start, j − 1)
    QuickSort(A, j + 1, end)
```

Funzionamento perno()

	i									
20	14	28	29	15	27	12	30	21	25	13
j										

$A[i] < p$: $j \leftarrow j+1$, $A[i] \leftrightarrow A[j]$

		i								
20	14	28	29	15	27	12	30	21	25	13
	j									

$A[i] \geq p$

			i							
20	14	28	29	15	27	12	30	21	25	13
	j									

$A[i] \geq p$

				i						
20	14	28	29	15	27	12	30	21	25	13
	j									

$A[i] < p$: $j \leftarrow j+1$, $A[i] \leftrightarrow A[j]$

					i					
20	14	15	29	28	27	12	30	21	25	13
		j								

$A[i] \geq p$

						i				
20	14	15	29	28	27	12	30	21	25	13
		j								

$A[i] < p$: $j \leftarrow j+1$, $A[i] \leftrightarrow A[j]$

Funzionamento perno()

							i			
20	14	15	12	28	27	29	30	21	25	13
			j							

$A[i] \geq p$

								i		
20	14	15	12	28	27	29	30	21	25	13
			j							

$A[i] \geq p$

									i	
20	14	15	12	28	27	29	30	21	25	13
			j							

$A[i] \geq p$

										i
20	14	15	12	28	27	29	30	21	25	13
			j							

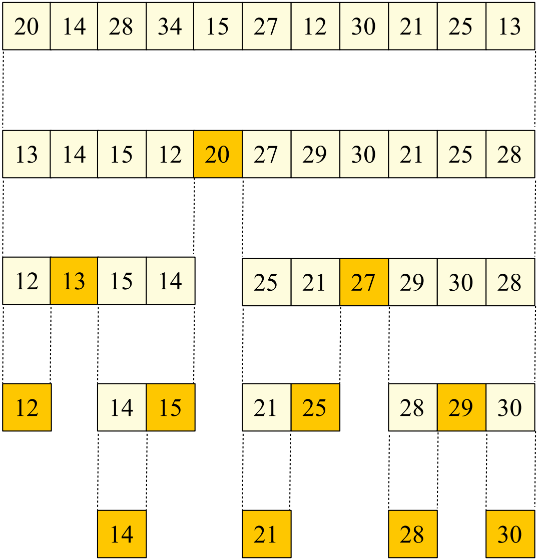
$A[i] < p$: $j \leftarrow j+1$, $A[i] \leftrightarrow A[j]$

											i
20	14	15	12	13	27	29	30	21	25	28	
				j							

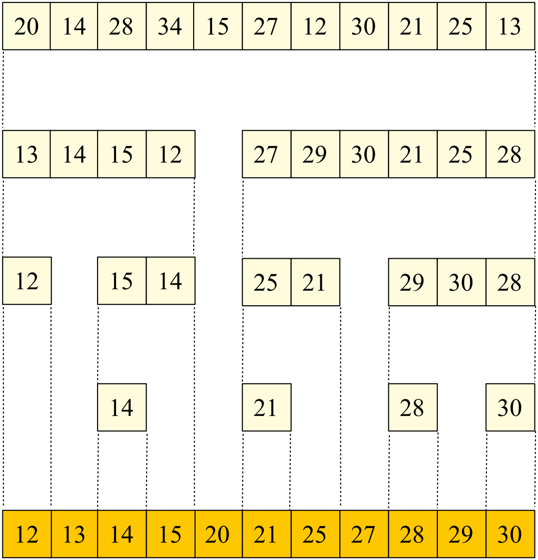
$A[start] \leftarrow A[j]$; $A[j] \leftarrow p$

13	14	15	12	20	27	29	30	21	25	28
				j						

Svolgimento ricorsione



Svolgimento ricorsione



Quicksort: Complessità computazionale

Costo di pivot()

- $\Theta(n)$

Costo Quicksort: dipende dal partizionamento

- Partizionamento peggiore
  - Dato un vettore di dimensione n, viene diviso in due sottoproblemi di dimensione 0 e $n-1$
  - $T(n) = T(n-1) + T(0) + \Theta(n) = T(n-1) + \Theta(n) = \Theta(n^2)$
  - Domanda: Quando si verifica il caso pessimo?
- Partizionamento migliore
  - Dato un vettore di dimensione n, viene sempre diviso in due sottoproblemi di dimensione $n/2$
  - $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$

Quicksort: Complessità computazionale

Partizionamenti parzialmente bilanciati

- Il partizionamento nel caso medio di Quicksort è molto più vicino al caso ottimo che al caso peggiore
- Esempio: Partizionamento 9-a-1:

$$T(n) = T(n/10) + T(9n/10) + cn = \Theta(n \log n)$$

- Esempio: Partizionamento 99-a-1:

$$T(n) = T(n/100) + T(99n/100) + cn = \Theta(n \log n)$$

Note

- In questi esempi, il partizionamento ha proporzionalità limitata
- I fattori moltiplicativi possono essere importanti

Quicksort: Complessità computazionale

Caso medio

- Il costo dipende dall'ordine degli elementi, non dai loro valori
- Dobbiamo considerare tutte le possibili permutazioni
- Difficile dal punto di vista analitico

Caso medio: un'intuizione

- Alcuni partizionamenti saranno parzialmente bilanciati
- Altri saranno pessimi
- In media, questi si alterneranno nella sequenza di partizionamenti
- I partizionamenti parzialmente bilanciati "dominano" quelli pessimi

Moltiplicazione matrici

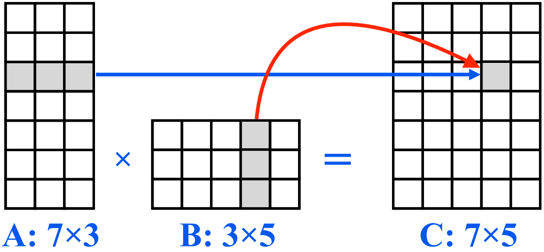
$$C = A \times B$$

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n_k} a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

$$T(n) = \Theta(n_i \cdot n_k \cdot n_j)$$
$$= \Theta(n^3)$$

matrixProduct(**float**[][] A, B, C, **int** n_i, n_k, n_j)

```
for i = 1 to n_i do                                  % Righe
    for j = 1 to n_j do                              % Colonne
        C[i, j] = 0
        for k = 1 to n_k do
            C[i, j] = C[i, j] + A[i, k] · B[k, j]
```



Approccio divide-et-impera

Suddividiamo le matrici $n \times n$ in quattro matrici $n/2 \times n/2$

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix}$$

Calcolo prodotto matrice

$$C = \begin{bmatrix} A_{1,1} \times B_{1,1} + A_{1,2} \times B_{2,1} & A_{1,1} \times B_{1,2} + A_{1,2} \times B_{2,2} \\ A_{2,1} \times B_{1,1} + A_{2,2} \times B_{2,1} & A_{2,1} \times B_{1,2} + A_{2,2} \times B_{2,2} \end{bmatrix}$$

Equazione di ricorrenza

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 8T(n/2) + n^2 & n > 1 \end{cases}$$

Algoritmo di Strassen

Calcolo elementi intermedi

$$
\begin{aligned}
X_1 &= (A_{11} + A_{22}) \times (B_{11} + B_{22}) \\
X_2 &= (A_{21} + A_{22}) \times B_{11} \\
X_3 &= A_{11} \times (B_{12} - B_{22}) \\
X_4 &= A_{22} \times (B_{21} - B_{11}) \\
X_5 &= (A_{11} + A_{12}) \times B_{22} \\
X_6 &= (A_{21} - A_{11}) \times (B_{11} + B_{12}) \\
X_7 &= (A_{12} - A_{22}) \times (B_{21} + B_{22}).
\end{aligned}
$$

Equazione di ricorrenza

$$
T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 7T(n/2) + n^2 & n > 1 \end{cases}
$$

$$
T(n) = \Theta(n^{\log_2 7}) \approx \Theta(n^{2.81})
$$

Calcolo matrice finale

$$
C = \begin{bmatrix} X_1 + X_4 - X_5 + X_7 & X_3 + X_5 \\ X_2 + X_4 & X_1 + X_3 - X_2 + X_6 \end{bmatrix}
$$

Moltiplicazione matrici – Panoramica storica

Algoritmo di Strassen (1969)

- $\Theta(n^{2.81})$
- Il primo ad "scoprire" che era possibile moltiplicare due matrici in meno di n^3 moltiplicazioni scalari

Coppersmith and Winograd (1990)

- $O(n^{2.37})$
- Attuale algoritmo migliore
- Fattori moltiplicativi molto alti

Limite inferiore

- $\Omega(n^2)$

Conclusioni

Quando applicare divide-et-impera

- I passi "divide" e "combina" devono essere semplici
- Ovviamente, i costi devono essere migliori del corrispondente algoritmo iterativo
  - Esempio ok: sorting
  - Esempio non ok: ricerca del minimo

Ulteriori vantaggi

- Facile parallelizzazione
- utilizzo ottimale della cache ("cache oblivious")

Gap

Gap

In un vettore V contenente $n \geq 2$ interi, un gap è un indice i, $1 < i \leq n$, tale che $V[i-1] < V[i]$.

- Dimostrare che se $n \geq 2$ e $V[1] < V[n]$, allora V contiene almeno un gap
- Progettare un algoritmo che, dato un vettore V contenente $n \geq 2$ interi e tale che $V[1] < V[n]$, restituisca la posizione di un gap nel vettore.

Gap

Per assurdo:

- Supponiamo che non ci sia un gap nel vettore
- Allora $V[1] \geq V[2] \geq V[3] \geq \ldots \geq V[n-1]$, che contraddice il fatto che $V[1] < V[n]$.

Gap – Dimostrazione per induzione

Proviamo a riformulare la proprietà tenendo conto di due indici:

- Sia V un vettore di dimensione n
- Siano i, j due indici tali che $1 \leq i < j \leq n$ e $V[i] < V[j]$

In altre parole, ci sono più di due elementi nel sottovettore $V[i \ldots j]$ e il primo elemento $V[i]$ è più piccolo dell'ultimo elemento $V[j]$.

Gap – Dimostrazione per induzione

Vogliamo provare per induzione sulla dimensione n del sottovettore che il sottovettore contiene un gap.

- Caso base: $n = j - i + 1 = 2$, i.e. $j = i + 1$:
  $V[i] < V[j]$ implica che $V[i] < V[i+1]$, che è un gap.
- Ipotesi induttiva: dato un qualunque (sotto)vettore $V[h \ldots k]$ di dimensione $n' < n$, tale che $V[h] < V[k]$, allora $V[h \ldots k]$ contiene un gap
- Passo induttivo: consideriamo un qualunque elementpo m tale che $i < m < j$. Almeno un dei due casi seguenti è vero:
  - Se $V[m] < V[j]$, allora esiste un gap in $V[m \ldots j]$, per ipotesi induttiva
  - Se $V[i] < V[m]$, allora esiste un gap in $V[i \ldots m]$, per ipotesi induttiva

Gap

gap(**int**[ ] V, **int** n)

return gapRec($V, 1, n$)

gapRec(**int**[ ] V, **int** i, **int** j)

if $j == i + 1$ **then**
  return j
$m = \lfloor (i + j)/2 \rfloor$
if $V[m] < V[j]$ **then**
  return gapRec(V, m, j)
else
  return gapRec(V, i, m)

Performance evaluation

n	**Iterativa (ms)**	**Ricorsiva (μs)**
10^3	0.06	2.05
10^4	0.61	2.78
10^5	6.11	3.36
10^6	62.44	4.01
10^7	621.69	4.87
10^8	6205.72	5.47