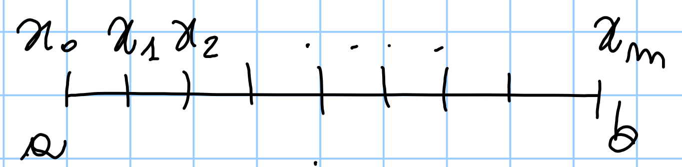
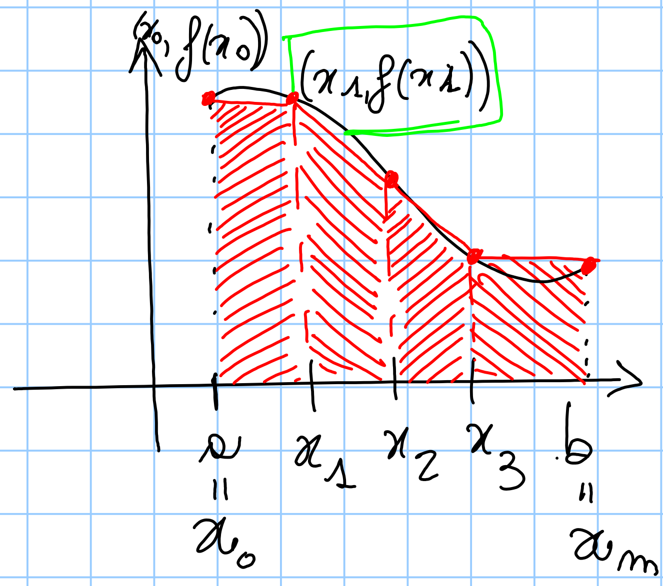
Lezione 20 del 24/05/2021

Titolo nota 24/05/2021

$\boxed{\text{FORMULA del TRAPEZIO COMPOSITA}}$ (o dei TRAPEZI)



m sottointervalli di ampiezza uniforme



$$H := \frac{b-a}{m} \qquad x_i = a + iH \qquad i = 0 \dots m$$

$$I[f] = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx =$$

$H_i = x_i - x_{i-1}$ se la decomposizione non fosse uniforme

$$= \sum_{i=1}^{m} \left\{ \left[f(x_{i-1}) + f(x_i) \right] \frac{H}{2} - f''(\beta_i) \frac{H^3}{12} \right\} =$$

$$= \frac{H}{2} \Big[f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_{m-2}) + f(x_{m-1})$$

$$+ f(x_{m-1}) + f(x_m) \Big] - \sum_{i=1}^{m} f''(\beta_i) \frac{H^3}{12} = \quad \frac{f''(\bar\beta)}{12} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{b-a}{m} \right)^3 =$$

$$= \boxed{\frac{H}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + f(x_m) \right]} - \boxed{\frac{f''(\bar\beta)}{12} \cancel{m} \frac{b-a}{\cancel{m}} H^2} \qquad = \frac{f''(\bar\beta)}{12} \left(\frac{b-a}{m} \right)^3 m$$

Q_1^c

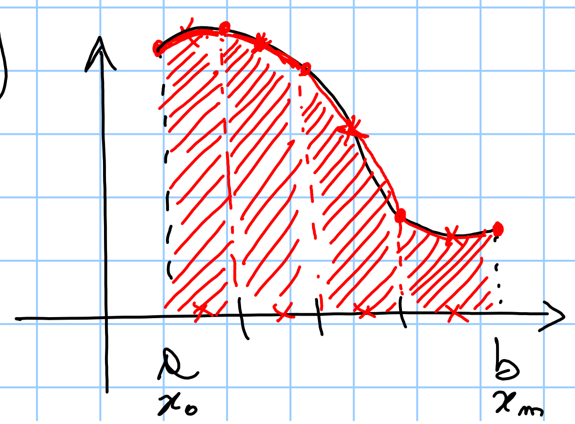
Oss: $|Resto| = \frac{|f''(\bar{\beta})|}{12} \frac{(b-a)^3}{m^2} \leq \varepsilon$

Qual è il numero m di sottointervalli sufficiente ad ottenere la precisione ε richiesta?

$M := \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$

$|Resto| \leq \frac{M}{12} \frac{(b-a)^3}{m^2} \leq \varepsilon \rightsquigarrow$ ricavo m

$\boxed{\text{FORMULA di CAVALIERI-SIMPSON COMPOSITA}}$

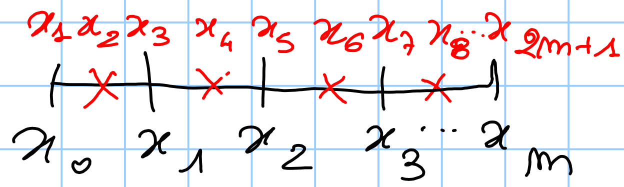


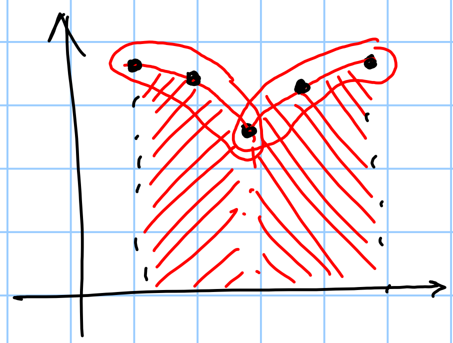
$$I[f] = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left\{ \frac{H}{6} \left[f(x_{i-1}) + 4 f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2} \right) + f(x_i) \right] - \frac{H^5}{2^5 \cdot 90} f^{(IV)}(\beta_i) \right\} =$$

$$= \boxed{\frac{H}{6} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + 4 \sum_{i=1}^{m} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2} \right) + f(x_m) \right]} + \quad Q_2^c$$

$$- \boxed{\frac{b-a}{180} \left(\frac{H}{2} \right)^4 f^{(IV)}(\bar{\beta})}$$





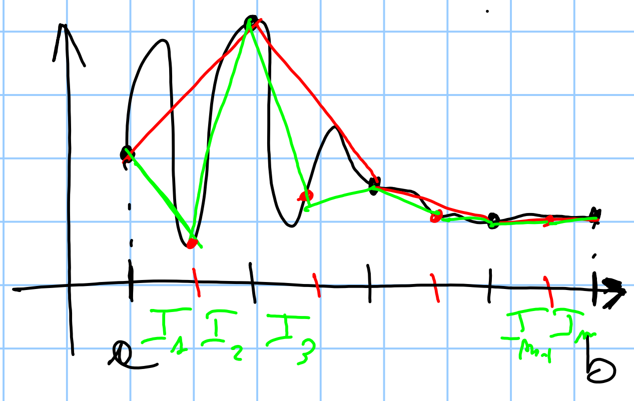
Es.: Calcolare l'integrale

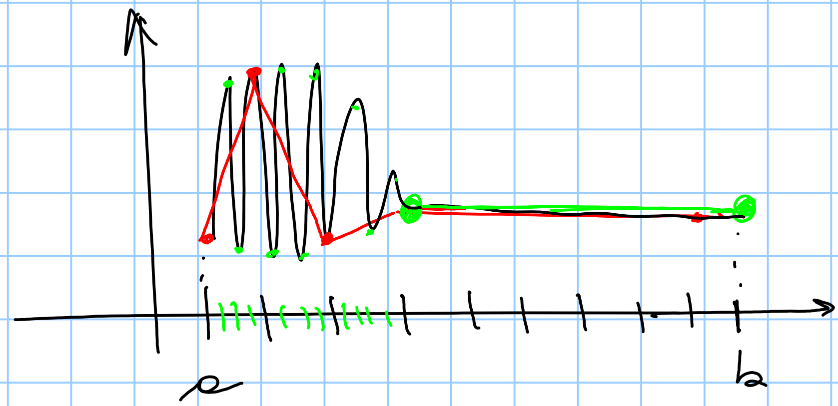
$$\int_0^{2\pi} x e^{-x} \cos(2x)\, dx = \frac{3\left(e^{-2\pi}-1\right) - 10\pi e^{-2\pi}}{25} \simeq -0.122122$$

con le 3 formule composte

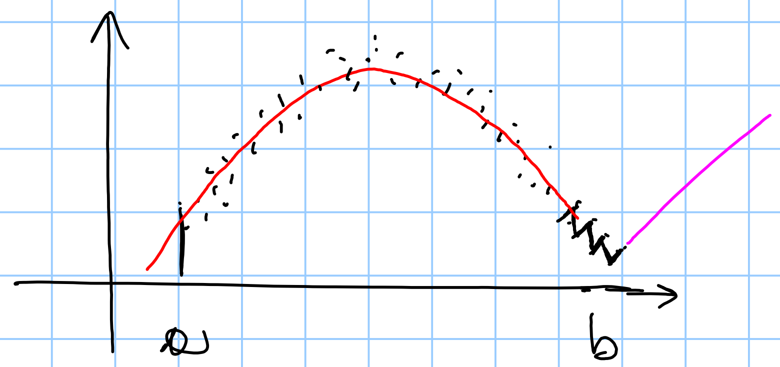
<u>Oss</u>.:

FORMULA di quadratura adattiva





APPROSSIMAZIONE di DATI con il METODO dei MINIMI QUADRATI



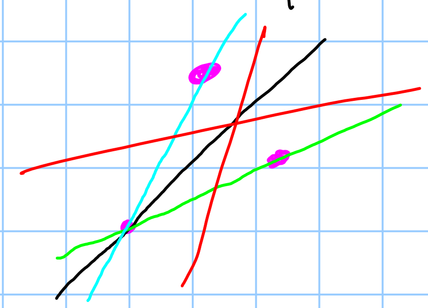
Oss: Al crescere del n° di dati, il polinomio interpolatore di Lagrange ha grado crescente e non ci garantisce maggiore accuratezza nell'approssimazione di una funzione

Oss. L'interpolazione polinomiale composita dei dati male si presta ad essere utilizzata per estrapolare informazioni esternamente all'intervallo dei dati noti, ossia si tiene conto solo delle informazioni contenute nell'ultimo sottointervallo di decomposizione

Supponiamo di aver un set di dati $(x_i; y_i)$ $i = 0 \dots n$

Cerchiamo un polinomio di 1° grado che "approssimi" questi punti

$$y = mx + q$$



Es.:

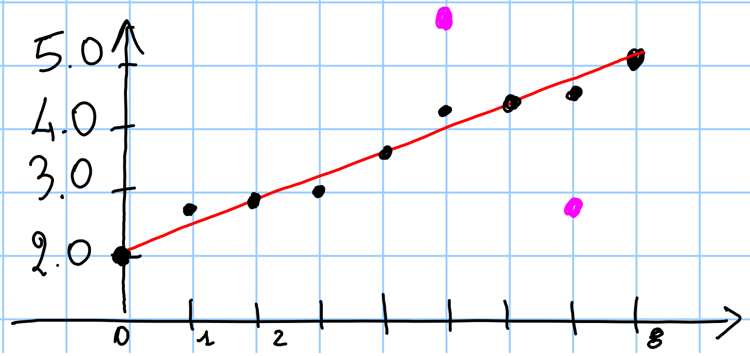
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	2.0	2.4	2.75	3.1	3.5	3.9	4.25	4.6	5.0

Usando (x_0, y_0) e (x_8, y_8) si ricavano i coefficienti

$$m = \frac{3}{8} \qquad q = 2$$

Calcoliamo i residui $r_i = y_i - m x_i - q \qquad i = 0 \dots n$

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
r_i	0	0.025	0	-0.025	0	0.025	0	-0.025	0



__Oss:__ Il residuo ha valore positivo o negativo
Siccome non posso annullare il singolo residuo, posso provare ad annullare la somma dei residui ma

- il fatto che il residuo totale sia nullo o piccolo non mi assicura che i singoli residui siano piccoli perché residui di segno opposto si compensano
- ottengo comunque una sola equazione per determinare i due coefficienti m e q

__Strategia__: minimizzare il quadrato dei residui

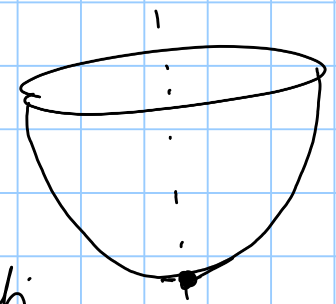
$$\bar{p}(x) = mx + q$$ (RETTA di REGRESSIONE)

Def: $$\sum_{i=0}^{n}\left[y_i-\bar{p}(x_i)\right]^2 \leq \sum_{i=0}^{n}\left[y_i-p(x_i)\right]^2 \quad \forall p(x)\in \mathbb{P}_1$$

(METODO dei MINIMI QUADRATI)

$$\sum_{i=0}^{n}\left[y_i-mx_i-q\right]^2=\sum_{i=0}^{m}\left[y_i^2+m^2x_i^2+q^2+2mqx_i-2mx_iy_i-2y_iq\right]=$$

$$=\phi(m,q)$$



È un paraboloide convesso di cui siamo interessati al punto di minimo

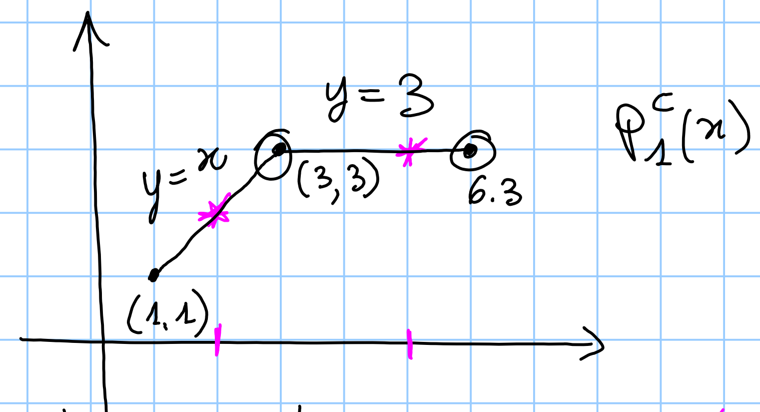
Considero le derivate parziali di ϕ rispetto ad m e a q

$$\frac{\partial \phi}{\partial m} = \sum_{i=0}^{n} \left[0 + 2m x_i^2 + 0 + 2q x_i - 2 x_i y_i + 0 \right] = 0$$

ovvero $$\sum_{i=0}^{n} \left(m x_i^2 + q x_i - x_i y_i \right) = 0$$ *

$$\frac{\partial \phi}{\partial q} =$$

$$P_1^c(x) = \begin{cases} x & 1 \le x \le 3 \\ 3 & 3 \le x \le 6 \end{cases}$$



"interp1"