

**EP2 – 2º Exercício Programa**  
**Escola Politécnica da USP**  
**Instituto de Matemática e Estatística da USP**  
**MAP3121 – Cálculo Numérico**



**Luís Gustavo Gonçalves de Campos - 10791854**  
**Matheus Monteiro Casagrandi - 10853290**

## Introdução

Assim como no relatório do exercício-programa anterior, este tem como objetivo também mostrar os resultados obtidos e dar uma sucinta explicação deles. Dessa vez, o programa tem a função de calcular autovetores e autovalores de matrizes reais simétricas arbitrárias. Nesse exercício-programa foi também reaproveitado o código usado no EP1 para o algoritmo QR tridiagonal com deslocamento. No item 4.1, são feitos cálculos de autovetores e autovalores de matrizes dadas, e no item 4.2, tem-se uma aplicação desse algoritmo elaborado para uma situação de treliças planas. Os códigos utilizados na elaboração desse exercício se encontram na mesma pasta deste relatório, todos implementados na linguagem de programação *Python3.7*.

Nessa mesma pasta também pode ser encontrado o arquivo de nome “*LEIAME.txt*”, que se trata de um arquivo de texto com instruções passo a passo para todo o processo de acesso das tarefas e seus respectivos resultados. Para toda a elaboração do programa foram-se usados códigos eficientes e precisos para o uso no exercício, de forma que o tempo de compilação seja razoavelmente rápido e os resultados sejam claros e bem apresentados.

## Tarefas

Nas tarefas a seguir encontram-se aplicações do Algoritmo de Householder com o Algoritmo QR com deslocamento espectral para os cálculos dos autovetores e autovalores de uma matriz real simétrica. Primeiro, são feitos testes do algoritmo com algumas matrizes solicitadas, para então ocorrer no próximo item uma exemplificação com uma simulação de uma situação mais realística com um sistema de treliças planas.

Para imprimir alguns resultados de forma mais legível para o relatório, foi feita uma função que escreve em um arquivo a matriz desejada. O nome da função é “EscreverArquivo” e tem como parâmetro de entrada uma matriz. O input da função, já no terminal, é: {O nome do arquivo no qual deseja salvar}.txt . Dentro do código foi mantida a chamada da função comentada, caso queira conferir as respostas, basta descomentar a linha, excluir o primeiro “#” da linha.

## Testes

a)

```
1) Testes
2) Aplicações: Treliças Planas

Escolha qual item do exercício programa: 1
1) Teste a
2) Teste b

Escolha qual item dos testes: 1

resultados obtidos foram:

Matriz de entrada (A):
[[2 4 1 1]
 [4 2 1 1]
 [1 1 1 2]
 [1 1 2 1]]
```

Matriz tridiagonal simétrica resultante da transformação de Householder:

```
Gostaria de imprimir a matriz tridiagonal resultante da transformação de Householder(s/n): s
H (matriz tridiagonal resultante da transformação de Householder):
[[ 2. -4.2  0.  0. ]
 [-4.2  3.  1.4  0. ]
 [ 0.  1.4  2.  0. ]
 [ 0.  0.  0. -1. ]]
```

Matriz HT resultante da transformação de Householder:

```
Gostaria de imprimir a matriz HT resultante das multiplicação dos Hwi (s/n): s
HT:
[[ 1.      0.      0.      0.      ]
 [ 0.     -0.942809  0.33333333 -0.    ]
 [ 0.     -0.2357023 -0.66666667 -0.7071068]
 [ 0.     -0.2357023 -0.66666667  0.7071068]]
```

Autovalores e Autovetores:

```
Número de iterações: 5

Autovalores encontrados:
[7.000000000000003, -1.999999999999956, 1.999999999999998, -1.0]

autovetores:
[[ 0.6324555  0.7071068  0.3162278  0.    ]
 [ 0.6324555 -0.7071068  0.3162278 -0.    ]
 [ 0.3162278 -0.    -0.6324555 -0.7071068]
 [ 0.3162278 -0.    -0.6324555  0.7071068]]

T = H A H.T:
[[2. 4. 1. 1.]
 [4. 2. 1. 1.]
 [1. 1. 1. 2.]
 [1. 1. 2. 1.]]
```

É possível observar que os autovalores foram condizentes com os autovalores esperados, escritos no enunciado.

### Verificação $Av = \lambda v$ :

```
Gostaria de imprimir a verificação  $A*v = \lambda*v$  (s/n): s
Verificação  $A*v = \lambda*v$ 
Av:
[4.42718872 4.42718872 2.21359436 2.21359436]
lambdav:
[4.42718872 4.42718872 2.21359436 2.21359436]

Av:
[-1.41421356 1.41421356 0. 0. ]
lambdav:
[-1.41421356 1.41421356 0. 0. ]

Av:
[ 0.63245553 0.63245553 -1.26491106 -1.26491106]
lambdav:
[ 0.63245553 0.63245553 -1.26491106 -1.26491106]

Av:
[ 0. 0. 0.70710678 -0.70710678]
lambdav:
[ 0. 0. 0.70710678 -0.70710678]
```

A multiplicação da matriz inicial por um autovetor foi igual a multiplicação do respectivo autovalor com o mesmo autovetor, fazendo assim com que a verificação fosse válida.

### Verificação ortogonalidade da matriz de autovetores:

```
Gostaria de imprimir a verificação da ortogonalidade dos autovetores (s/n): s

Gostaria de imprimir a verificação na forma de:
1) Produtos internos
2) Matriz

Escolha a forma: 1
Verificação da ortogonalidade dos autovetores
v0.v1: -1.6236434678696455e-16
v0.v2: -5.551115123125783e-17
v0.v3: 4.815839216109117e-17
v1.v2: 1.0268434590206829e-16
v1.v3: 3.1892503055874675e-17
v2.v3: -1.755416734592993e-17
```

Os produtos internos de cada autovetor foram aproximadamente zero, o que verifica a ortogonalidade entre eles.

```
Gostaria de imprimir a verificação da ortogonalidade dos autovetores (s/n): s

Gostaria de imprimir a verificação na forma de:
1) Produtos internos
2) Matriz

Escolha a forma: 2
Verificação da ortogonalidade dos autovetores
[[1. 0. 0. 0.]
 [0. 1. 0. 0.]
 [0. 0. 1. 0.]
 [0. 0. 0. 1.]]
```

O que difere da forma anterior são os '1' na diagonal principal da matriz referentes ao produto interno do autovetor por ele mesmo, comprovando também sua ortogonalidade. A matriz foi gerada da matriz de autovetores e multiplicada, pela direita, pela matriz de autovetores transposta.

b)

```
1) Testes
2) Aplicações: Treliças Planas

Escolha qual item do exercício programa: 1
1) Teste a
2) Teste b

Escolha qual item dos testes: 2

resultados obtidos foram:
```

```
Matriz de entrada (A):
[[20 19 18 17 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1]
 [19 19 18 17 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1]
 [18 18 18 17 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1]
 [17 17 17 17 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1]
 [16 16 16 16 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1]
 [15 15 15 15 15 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1]
 [14 14 14 14 14 14 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1]
 [13 13 13 13 13 13 13 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1]
 [12 12 12 12 12 12 12 12 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1]
 [11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1]
 [10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1]
 [9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 8 7 6 5 4 3 2 1]
 [8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 7 6 5 4 3 2 1]
 [7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 6 5 4 3 2 1]
 [6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 5 4 3 2 1]
 [5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 4 3 2 1]
 [4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 3 2 1]
 [3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 2 1]
 [2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1]
 [1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]]
```

**Matriz tridiagonal simétrica resultante da transformação de Householder:**

H - Bloco de Notas

Arquivo Editar Formatar Exibir Ajuda

```
20.0 -49.7 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
-49.7 152.2 -16.52 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 -16.52 17.02 4.75 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 4.75 6.62 -2.21 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 -2.21 3.57 1.26 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 1.26 2.25 0.8 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.8 1.57 -0.55 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -0.55 1.17 0.39 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.39 0.92 0.29 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.29 0.75 0.22 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.22 0.63 0.16 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.16 0.54 0.13 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.13 0.47 0.1 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.1 0.42 -0.07 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -0.07 0.38 0.05 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.05 0.34 -0.04 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -0.04 0.32 0.03 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.03 0.29 0.02 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.02 0.28 -0.01
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -0.01 0.26
```

## Autovalores:

Autovalores encontrados:

```
[170.4042675054278, 19.00809949100918, 6.896784892743415, 3.560482807695557, 2.188080195110224, 1.4939898290587401, 1.0954523500713806, 0.8461219550213219, 0.6802549888122401, 0.5647697268347245, 0.48155512239002196, 0.4200300188320959, 0.3736873637907063, 0.33835913529466627, 0.3112888120094569, 0.29060954646579806, 0.27503818948695996, 0.263690054997604, 0.2514735819058093, 0.255964433042276]
```

Autovalores analíticos:

```
[170.40426750542662, 19.00809949100919, 6.896784892743414, 3.560482807695554, 2.188080195110224, 1.493989829058739, 1.0954523500713802, 0.846121955021322, 0.6802549888122409, 0.5647697268347253, 0.4815551223900225, 0.42003001883209995, 0.3736873637907486, 0.3383591352949367, 0.31128881200995095, 0.29060954646525355, 0.27503818948670444, 0.26369005499780274, 0.25596443304270206, 0.25147358190518326]
```

## Autovetores:

autovetores - Bloco de Notas

```
Arquivo Editar Formatar Exibir Ajuda
0.3121183 0.3102867 0.3066342 -0.3011822 -0.2939628 0.2850182 -0.2744011 -0.2621737 0.2484078 -0.233184 0.2165919 -0.1987287 0.1796992 -0.1596152 -0.1385946 0.1167613 0.0942422 -0.0711693 0.0239093 -0.0476802
0.3102867 0.2939628 0.2621737 -0.2165919 -0.1596154 0.0942417 -0.02391 0.0476796 -0.1167608 0.1796994 -0.233184 0.2744011 -0.3011819 0.3121177 0.3066335 -0.2858191 -0.2484089 0.1987282 -0.0711676 0.1385965
0.3066342 0.2621737 0.1796994 -0.0711695 0.0476796 -0.1596154 0.2484078 0.3011822 -0.1802867 0.2744011 -0.1987287 0.0942417 0.0239099 -0.1385941 -0.2331827 0.2939629 0.3121196 -0.2858173 0.1167598 -0.2165945
0.3011822 0.2165919 0.0711695 0.0942417 -0.2331841 -0.3066342 0.2939628 0.1987288 -0.0476796 -0.1167608 0.2484077 -0.3102866 0.2858181 -0.1796996 -0.0239114 -0.1385936 -0.2621744 -0.3121172 -0.1596119 0.2744044
0.2939628 0.1596154 -0.0476796 0.2331841 0.3121183 -0.2484078 0.0711695 -0.1385948 0.2858182 -0.3011822 0.1796994 0.0239099 -0.2165916 0.3102861 0.2621741 -0.0942438 0.1167606 -0.2743999 0.1987249 -0.3066377
0.2858182 0.0942417 -0.1596154 0.3066342 0.2484078 -0.02391 -0.2165919 -0.3121183 0.1987288 0.0476796 -0.2621737 0.3011822 -0.138595 -0.1167597 -0.2939615 0.2744027 0.0711704 0.1796981 -0.2331802 0.3102903
0.2744011 0.02391 -0.2484078 0.2939628 0.0711695 0.2165919 -0.3066342 -0.1167608 -0.1796994 0.3121183 -0.1596154 -0.1385947 0.3102865 -0.1987294 0.0942392 0.3011819 -0.2331852 0.0476786 0.2621703 -0.2858216
0.2621737 -0.0476796 -0.3011822 0.1987288 -0.1385948 0.3121183 -0.1167608 -0.2165919 -0.2939628 0.02391 0.2744011 -0.2484078 0.0711691 0.3066336 0.1797013 0.1596111 0.3102873 -0.0942425 -0.2858156 0.233187
0.2484078 -0.1167608 -0.3102867 0.0476796 -0.2858182 0.1987288 0.1796994 0.2939628 0.02391 -0.3066342 0.1385948 0.233184 -0.2621738 -0.0942404 0.2121182 0.0711725 -0.2744008 0.3011806 -0.159618
0.2331841 -0.1796994 -0.2744011 -0.1167608 -0.3011822 -0.0476796 0.3121183 0.02391 0.3066342 -0.0942417 -0.2858182 0.1596155 0.2484075 -0.2165928 0.1987264 0.2621756 0.1385937 -0.2939627 -0.3102862 0.0711717
0.2165919 -0.2331841 -0.1987288 -0.2484078 -0.1796994 -0.2621737 0.1596154 -0.2744011 0.1385948 0.2858182 -0.1167608 -0.2939627 0.0942421 -0.3011818 0.0711724 0.3066336 0.0476808 0.3102862 0.312119 0.0239078
0.1987288 -0.2744011 -0.0942417 -0.3102867 0.02391 -0.3011822 -0.1385948 -0.2484078 -0.2331841 0.1596154 0.2939628 0.0476797 -0.3121184 -0.0711681 -0.2858186 -0.1796967 -0.2165926 -0.2621728 -0.3066359 -0.1167586
0.1796994 -0.3011822 0.02391 -0.2858182 0.2165919 -0.1385948 -0.3102867 0.0711695 -0.2621737 -0.2484078 0.0942417 0.3121183 0.1167605 -0.2331851 0.2744 -0.0476826 0.3066339 0.1596141 0.2939653 0.1987262
0.1596154 -0.3121183 0.1385948 -0.1796994 0.3102867 0.1167608 -0.1987288 0.3066342 0.0942417 -0.2165919 -0.3011822 -0.0711694 0.2331844 0.2939626 -0.047677 0.2484093 -0.2858171 -0.0239084 -0.2744042 0.2621708
0.1385948 -0.3066342 0.2331841 -0.02391 0.2621737 0.2939628 0.0942417 0.1796994 0.3121183 0.1987288 -0.0711695 -0.2858183 0.2744011 -0.0476785 -0.2165941 0.310286 0.159614 -0.1167626 0.2484111 0.3011788
0.1167608 -0.2858182 0.2939628 0.1385948 0.0942417 0.2744011 0.3011822 -0.1596154 0.0711695 0.2621737 0.3066342 0.1796993 0.04768 -0.2484088 0.3102871 0.1987267 0.023911 0.2331858 -0.2165953 -0.3121147
0.0942417 -0.2484078 0.3121183 0.2621737 -0.1167608 0.0711695 -0.3102867 -0.2744011 -0.1385948 0.0476796 0.216592 0.3066344 0.2858184 -0.1596143 0.0239118 -0.1987288 -0.3011838 0.1797024 0.2939591
0.0711695 -0.1987288 0.2858182 0.3121183 -0.2744011 -0.1796994 -0.0476796 -0.0942417 -0.2165919 -0.2939628 -0.3102867 -0.2621737 -0.1596154 -0.0239094 -0.1167624 0.2331846 0.3011813 0.3066355 -0.1385973 -0.2484045
0.0476796 -0.1385948 0.2165919 0.2744011 -0.3066342 -0.3102867 -0.2939628 0.2331841 -0.1596154 0.0711695 -0.02391 -0.1167609 -0.190729 -0.2621746 0.3011823 0.3121176 0.2939615 -0.2484087 0.0942434 0.1796959
0.02391 -0.0711695 0.1167608 -0.1596154 -0.1987288 -0.2331841 -0.2621737 0.2858182 0.3102867 0.3102867 0.3102867 0.3102867 0.293963 0.2744017 -0.2484082 0.2165911 0.1796985 0.1385953 -0.0476805 -0.0942404
```

Para fins de melhor exibição dos autovetores, foi utilizada a função “EscreverArquivo” comentada anteriormente.

## Verificação $Av = \lambda v$ :

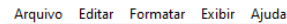
```
Av:
[53.18629323 52.87417491 52.25176991 51.32273074 50.09250939 48.56832527
46.75912291 44.67551942 42.32974222 39.73555726 36.90818825 33.86422731
30.62153762 27.19914858 23.61714411 19.89654486 16.05918476 12.12758299
8.12481173 4.07436085]
lambdav:
[53.18629323 52.87417491 52.25176991 51.32273074 50.09250939 48.56832527
46.75912291 44.67551942 42.32974222 39.73555726 36.90818825 33.86422731
30.62153762 27.19914858 23.61714411 19.89654486 16.05918476 12.12758299
8.12481173 4.07436085]
Av:
[ 5.89796014 5.58767346 4.98342401 4.11700085 3.03398577 1.79135526
0.45448308 -0.90629907 -2.2194016 -3.41574329 -4.43238562 -5.21584391
-5.72490106 -5.93277603 -5.82853267 -5.41765516 -4.7217594 -3.77745588
-2.63442361 -1.35279654]
lambdav:
[ 5.89796014 5.58767346 4.98342401 4.11700085 3.03398577 1.79135526
0.45448308 -0.90629907 -2.2194016 -3.41574329 -4.43238562 -5.21584391
-5.72490106 -5.93277603 -5.82853267 -5.41765516 -4.7217594 -3.77745588
-2.63442361 -1.35279654]
```

duas primeiras verificações





**Matriz HT resultante da transformação de Householder:**



2021

## Aplicação: Treliças Planas

```
1) Testes
2) Aplicações: Treliças Planas

Escolha qual item do exercício programa: 2

resultados obtidos foram:
```

### 5 menores frequências e os respectivos modos

Menores frequências e seus respectivos modos de vibração:

frequência: 24.5925477697234 rad/s

modo de vibração:

```
[-3.49572348e-03  6.12048351e-04 -3.49572348e-03 -6.12048351e-04
-2.26907810e-03  1.81302517e-03 -2.24835486e-03  5.95508231e-04
-2.24835486e-03 -5.95508231e-04 -2.26907810e-03 -1.81302517e-03
-9.98371566e-04  1.81731166e-03 -9.96016713e-04  5.07191628e-04
-9.96016713e-04 -5.07191628e-04 -9.98371566e-04 -1.81731166e-03
-4.18156530e-05  2.96097336e-04 -4.18156530e-05 -2.96097336e-04]
```

frequência: 92.01244464604181 rad/s

modo de vibração:

```
[-6.26185630e-06 -2.18616578e-03  6.26185630e-06 -2.18616578e-03
 4.72934904e-04 -2.98517867e-03  1.76082474e-04 -2.05076926e-03
-1.76082474e-04 -2.05076926e-03 -4.72934904e-04 -2.98517867e-03
-4.16610596e-06 -3.08711052e-03 -4.02854726e-06 -1.74398862e-03
 4.02854725e-06 -1.74398862e-03  4.16610595e-06 -3.08711052e-03
 4.21179623e-05 -1.09724859e-03 -4.21179623e-05 -1.09724859e-03]
```

```

frequência: 94.70336537381687 rad/s
modo de vibração:
[ 7.78899924e-04 -8.08359277e-04 7.78899924e-04 8.08359277e-04
-6.40509002e-04 -2.83799301e-03 -8.74588962e-04 -7.13582056e-04
-8.74588962e-04 7.13582056e-04 -6.40509002e-04 2.83799301e-03
-2.48420718e-03 -2.94085847e-03 -2.39731449e-03 -3.10934553e-04
-2.39731449e-03 3.10934553e-04 -2.48420718e-03 2.94085847e-03
-1.15662540e-03 5.63436172e-05 -1.15662540e-03 -5.63436172e-05]

frequência: 142.8096971064901 rad/s
modo de vibração:
[ 3.86879497e-03 -1.93040087e-03 3.86879497e-03 1.93040087e-03
-1.48813930e-03 2.68095343e-03 -6.90386681e-04 -1.14297720e-03
-6.90386681e-04 1.14297720e-03 -1.48813930e-03 -2.68095343e-03
-5.56543234e-04 2.91262027e-03 -5.12276354e-04 2.02224977e-05
-5.12276354e-04 -2.02224977e-05 -5.56543234e-04 -2.91262027e-03
-2.31132993e-04 4.47487243e-05 -2.31132993e-04 -4.47487243e-05]

frequência: 150.8221265108158 rad/s
modo de vibração:
[ 8.98214620e-05 -1.92254285e-03 -8.98214620e-05 -1.92254285e-03
-1.50512246e-03 3.38769592e-03 -4.34333290e-04 -1.79742293e-03
4.34333290e-04 -1.79742293e-03 1.50512246e-03 3.38769592e-03
6.89273681e-04 3.71749140e-03 6.28125095e-04 -1.12947913e-03
-6.28125095e-04 -1.12947913e-03 -6.89273681e-04 3.71749140e-03
-5.00036979e-05 -6.78743873e-04 5.00036979e-05 -6.78743873e-04]

```

## Autovalores:

```

Número de iterações: 44

Autovalores encontrados:
[459787.0488995585, 432319.6372911364, 442927.02635526314, 389912.9299975021,
351642.75411834585, 340498.6782548853, 313358.4775707843, 302305.8528742323,
272742.1392001216, 286156.72527441307, 178865.9667966616, 213324.18829511947,
214713.95158967917, 150401.65949942148, 146507.07225843563, 123427.17879095666,
53112.35233642688, 82526.57997183553, 84178.08850483313, 604.7934058061273,
20394.609587647446, 22747.313845244524, 8968.727413126655, 8466.289969740908]

```

## Autovetores:

```

0.207 0.399 0.008 -0.04 -0.149 -0.007 0.394 0.098 -0.321 -0.03 0.256 -0.108 -0.024 0.213 -0.063 -0.016 0.086 -0.012 0.003 -0.403 0.446 0.01 0.09 -0.001
0.16 0.293 0.002 -0.063 0.098 0.058 -0.025 0.2 0.296 -0.42 0.375 0.203 -0.2 0.044 0.104 0.197 -0.042 0.181 0.289 0.071 -0.223 -0.222 -0.093 -0.252
-0.207 -0.399 0.008 0.04 0.149 -0.007 -0.394 0.098 0.321 -0.03 0.256 0.108 -0.024 0.213 0.063 0.016 0.086 -0.012 -0.003 -0.403 0.446 -0.01 0.09 0.001
0.16 0.293 -0.002 -0.063 0.098 -0.058 -0.025 -0.2 0.296 0.42 -0.375 0.203 0.2 -0.044 0.104 0.197 0.042 -0.181 0.289 -0.071 0.223 -0.222 0.093 -0.252
-0.204 0.001 0.155 -0.109 0.189 -0.095 0.299 0.446 0.027 0.02 -0.248 0.145 0.239 0.017 0.39 0.045 0.014 0.212 -0.336 -0.262 -0.172 -0.174 -0.074 0.055
-0.346 0.242 0.46 0.195 0.016 0.065 -0.033 -0.041 -0.002 -0.007 -0.013 0.019 0.004 -0.055 0.086 -0.046 -0.078 0.162 -0.03 0.209 0.309 0.391 -0.327 -0.344
0.202 0.141 -0.054 0.157 -0.388 0.008 -0.3 -0.374 0.014 0.049 0.002 0.082 -0.106 -0.188 0.294 -0.103 -0.055 0.37 -0.253 -0.367 -0.113 -0.071 -0.143 0.029
-0.157 -0.282 0.03 0.108 -0.257 -0.125 0.086 -0.008 -0.258 0.457 0.331 -0.032 0.072 0.302 0.095 0.077 0.005 0.106 0.174 0.097 -0.187 -0.293 -0.116 -0.335
-0.202 -0.141 -0.054 -0.157 0.388 0.008 0.3 -0.374 -0.014 0.049 0.002 -0.082 -0.106 -0.188 -0.294 0.103 -0.055 0.37 0.253 -0.367 -0.113 0.071 -0.143 -0.029
-0.157 -0.282 -0.03 0.108 -0.257 0.125 0.086 0.008 -0.258 -0.457 -0.331 -0.032 -0.072 -0.302 0.095 0.077 -0.005 -0.106 0.174 -0.097 0.187 -0.293 0.116 -0.335
0.204 -0.001 0.155 0.109 -0.189 -0.095 -0.299 0.446 -0.027 0.02 -0.248 -0.145 0.239 0.017 -0.39 -0.045 0.014 0.212 0.336 -0.262 -0.172 0.174 -0.074 -0.055
-0.346 0.242 -0.46 0.195 0.016 -0.065 -0.033 0.041 -0.002 0.007 0.013 0.019 -0.004 0.055 0.086 -0.046 0.078 -0.162 -0.03 -0.209 -0.309 0.391 0.327 -0.344
-0.129 0.086 0.068 -0.386 -0.096 -0.547 -0.249 -0.118 -0.2 -0.172 -0.08 -0.003 -0.108 0.134 -0.05 0.442 -0.059 -0.234 -0.119 -0.088 -0.049 0.061 -0.219 -0.0
0.334 -0.27 -0.484 -0.286 -0.033 -0.151 0.114 0.174 0.026 0.045 -0.033 0.085 0.02 -0.102 0.153 -0.068 -0.075 0.183 -0.034 0.161 0.257 0.328 -0.26 -0.273
0.207 -0.12 -0.1 0.408 0.073 0.364 0.112 0.043 0.026 0.041 -0.049 -0.001 -0.036 0.112 -0.043 0.466 -0.095 -0.322 -0.163 -0.179 -0.092 0.113 -0.43 -0.001
0.156 0.05 -0.105 0.003 0.34 0.094 -0.194 -0.233 -0.129 -0.252 -0.155 -0.268 0.291 0.412 -0.089 -0.112 0.207 0.173 -0.268 0.091 0.004 -0.203 -0.056 -0.313
-0.207 0.12 -0.1 -0.408 -0.073 0.364 -0.112 0.043 -0.026 0.041 -0.049 0.001 -0.036 0.112 0.043 -0.466 -0.095 -0.322 0.163 -0.179 -0.092 -0.113 -0.43 0.001
0.156 0.05 0.105 0.003 0.34 -0.094 -0.194 0.233 -0.129 0.252 0.155 -0.268 -0.291 -0.412 -0.089 -0.112 -0.207 -0.173 -0.268 -0.091 -0.004 -0.203 0.056 -0.313
0.129 -0.086 0.068 0.386 0.096 -0.547 0.249 -0.118 0.2 -0.172 -0.08 0.003 -0.108 0.134 0.05 -0.442 -0.059 -0.234 0.119 -0.088 -0.049 -0.061 -0.219 0.0
0.334 -0.27 0.484 -0.286 -0.033 0.151 0.114 -0.174 0.026 -0.045 0.033 0.085 -0.02 0.102 0.153 -0.068 0.075 -0.183 -0.034 -0.161 -0.257 0.328 0.26 -0.273
0.054 -0.008 0.013 0.083 0.166 -0.049 -0.097 0.005 -0.337 0.004 0.141 0.559 0.093 -0.269 -0.136 -0.093 0.593 -0.102 -0.004 -0.007 -0.036 -0.008 -0.182 0.007
-0.08 -0.006 0.007 -0.065 -0.238 0.042 0.147 0.096 0.265 0.118 -0.263 0.162 -0.529 0.2 -0.42 -0.043 0.263 0.124 -0.308 0.047 0.007 -0.107 0.009 -0.172
-0.054 0.008 0.013 -0.083 -0.166 -0.049 0.097 0.005 0.337 0.004 0.141 -0.559 0.093 -0.269 0.136 0.093 0.593 -0.102 0.004 -0.007 -0.036 0.008 -0.182 -0.007
-0.08 -0.006 -0.007 -0.065 -0.238 -0.042 0.147 -0.096 0.265 -0.118 0.263 0.162 0.529 -0.2 -0.42 -0.043 -0.263 -0.124 -0.308 -0.047 -0.007 -0.107 -0.009 -0.172

```

Arquivo Editar Formatar Exibir Ajuda

Arquivo Editar Formatar Exibir Ajuda





Arquivo Editar Formatar Exibir Ajuda

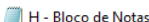
[illegible]

Arquivo Editar Formatar Exibir Ajuda

```

203305.95354 53104.30287 -150201.65067 0.0 0.0 0.0 -0.0 -37550.41267 -37550.41267 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
53104.30287 203305.95354 0.0 0.0 0.0 0.0 -106208.60574 -37550.41267 -37550.41267 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
-150201.65067 0.0 203305.95354 -53104.30287 0.0 0.0 -37550.41267 37550.41267 -0.0 -0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 53104.30287 203305.95354 0.0 0.0 37550.41267 -37550.41267 -0.0 -106208.60574 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
-37550.41267 0.0 203305.95354 -53104.30287 0.0 0.0 -37550.41267 37550.41267 -0.0 -106208.60574 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 53104.30287 203305.95354 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -196247.91403 -34177.62413 -34177.62413 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
-0.0 -0.0 -37550.41267 37550.41267 -106208.60574 0.0 203305.95354 0.0 -75100.82534 0.0 0.0 0.0 0.0 -0.0 -0.0 -24167.22979 -24167.22979 0.0 0.0 0.0 0.0
-106208.60574 37550.41267 -37550.41267 -37550.41267 0.0 0.0 203305.95354 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -68355.24826 -24167.22979 -24167.22979 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
-37550.41267 -37550.41267 0.0 0.0 -75100.82534 0.0 203305.95354 0.0 -0.0 -0.0 -24167.22979 24167.22979 -0.0 -0.0 -24167.22979 24167.22979 -0.0 -0.0 0.0 0.0 0.0
37550.41267 -37550.41267 0.0 -0.0 -106208.60574 0.0 0.0 203305.95354 0.0 0.0 0.0 24167.22979 -24167.22979 -0.0 -68355.24826 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
-106208.60574 0.0 203305.95354 -53104.30287 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -196247.91403 -34177.62413 -34177.62413 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 53104.30287 203305.95354 0.0 0.0 0.0 34177.62413 -34177.62413 -0.0 -196247.91403 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 -0.0 -0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 256410.25641 0.0 -126304.02962 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 -0.0 -196247.91403 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 256410.25641 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 -34177.62413 -34177.62413 -0.0 -0.0 -24167.22979 24167.22979 0.0 0.0 -126304.02962 0.0 190420.689 21996.5247 -62215.5688 0.0 0.0 -25909.71899 -25090.71899
-24167.22979 24167.22979 -0.0 -0.0 -24167.22979 24167.22979 -0.0 -126304.02962 0.0 190420.689 -21996.5247 -62215.5688 0.0 0.0 -25909.71899 -25090.71899
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -24167.22979 -24167.22979 -0.0 -34177.62413 34177.62413 0.0 0.0 -62215.5688 0.0 190420.689 -21996.5247 -126304.02962 0.0 -25909.71899 25090.71899 -0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -24167.22979 -24167.22979 -0.0 -68355.24826 34177.62413 -34177.62413 0.0 0.0 -21996.5247 190420.689 0.0 0.0 25909.71899 -25090.71899 -0.0 -70967.27616
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -0.0 -0.0 0.0 0.0 -126304.02962 0.0 256410.25641 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -196247.91403 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 256410.25641 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -0.0 -0.0 -25909.71899 25909.71899 -0.0 0.0 155137.71894 -36857.27442 -80950.06088 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -27016.25909 25909.71899 -0.0 0.0 -36857.27442 155137.71894 -36857.27442 -80950.06088 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -25909.71899 -25909.71899 -0.0 0.0 0.0 -80950.06088 0.0 155137.71894 36857.27442
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -25909.71899 -25909.71899 -0.0 0.0 0.0 36857.27442 181309.69003

```

[illegible]

HT - Bloco de Notas

[illegible]

Ao analisar os resultados obtidos neste exercício, é possível notar a eficiência das transformações de Householder na questão de otimização de etapas e em questão de estabilidade, quando comparadas às rotações de Givens, utilizadas no primeiro exercício-programa.

Então foi realizada uma aplicação para uma situação real com treliças planas. Nesse experimento pode-se observar que é possível obter as frequências e modos de frequência de treliças tendo seus dados e seu arranjo como sistema. Ao obter os modos com menores frequências, estes correspondem aos modos que requerem menor energia.

1. Richard L. Burden; Douglas J. Faires; Annette M. Burden, *Análise Numérica*.  
Tradução da 10ª edição norte-americana

2. <https://numpy.org/>
3. [Algebra Linear e Aplicações \(unicamp.br\)](https://www.unicamp.br/~fma/Algebra/Algebra%20Linear%20e%20Aplica%C3%A7%C3%B5es.pdf)
4. [h17.pdf \(stanford.edu\)](https://stanford.edu/~h17/)