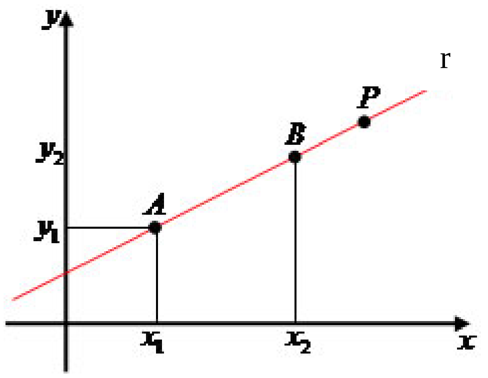
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE FORMAÇÃO GERAL
DISCIPLINA: MATEMÁTICA
PROFESSOR: ROBSON RAULINO RAUTENBERG

A RETA

EQUAÇÃO GERAL DA RETA

Seja a reta r que passa pelos pontos distintos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$.
Seja $P(x, y)$ um ponto genérico dessa reta r.
Evidentemente, P está alinhado com A e com B; vale, pois, a condição de alinhamento:



$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Resolvendo o determinante temos:

$$x_1y_2 + xy_1 + x_2y - xy_2 - x_2y_1 - x_1y = 0$$

$$x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$$

Fazendo: $y_1 - y_2 = a$

$$x_2 - x_1 = b$$

$$x_1y_2 - x_2y_1 = c$$

obtemos a equação geral da reta $\boxed{r: ax + by + c = 0}$

EXEMPLO:

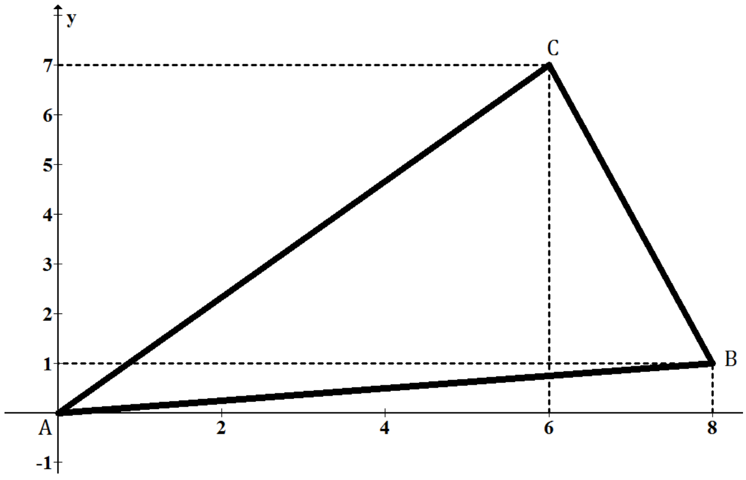
1. Obter a equação geral da reta s que passa pelos pontos $A(2, -1)\ e\ B(0, 3)$.

Resolução no Caderno

3. Determine as equações das retas suportes dos lados do triângulo cujos vértices são $A(0, 0), B(1, 3)\ e\ C(4, 0)$.

Resolução no Caderno

2.Ache a equação da reta que une os pontos médios dos lados AC e BC do triângulo mostrado na figura.



EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA

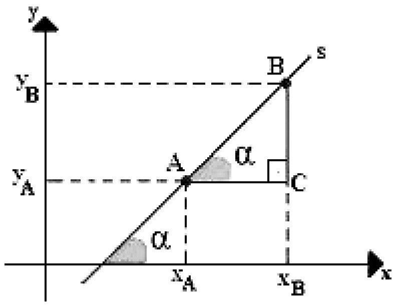
A partir da inclinação da reta s em relação ao eixo x, a equação

$$y = mx + n$$

é dita equação da reta na forma reduzida, sendo:

$m = tg\ \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ o coeficiente angular da reta s,

e n o coeficiente linear de s.



A mesma equação pode ser encontrada a partir da equação geral, isolando y, veja;

Da equação geral: $ax + by + c = 0$, isolando y temos;

$$\boxed{y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}}$$

Fazendo $m = -\frac{a}{b}$ e $n = -\frac{c}{b}$ obtemos;

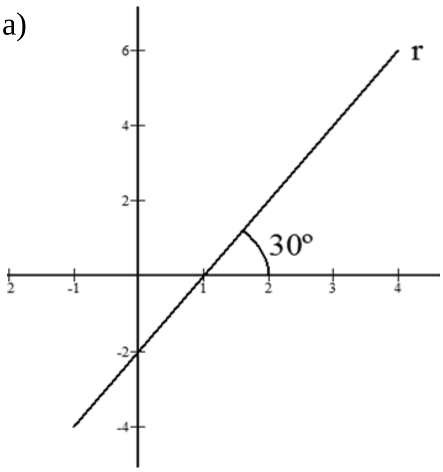
$$y = mx + n$$

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\text{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$

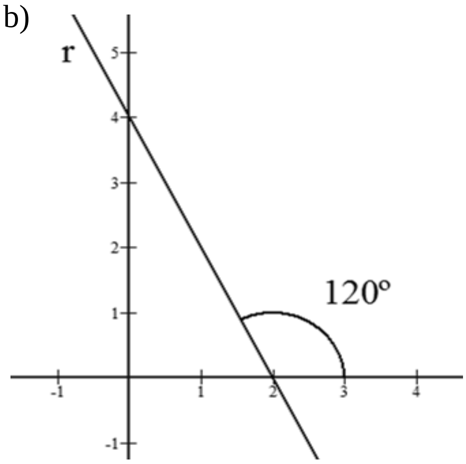
EXEMPLO:

1. Determine os coeficientes angulares das retas desenhadas nas figuras seguintes:

a)



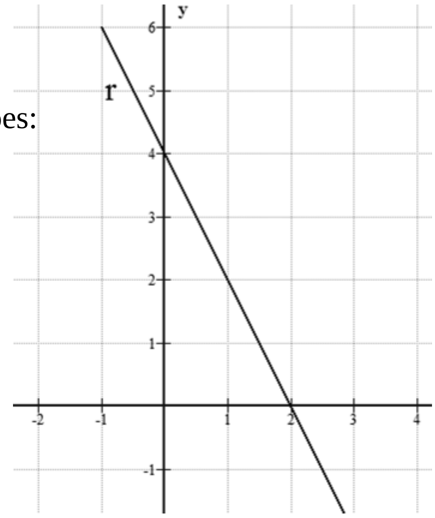
b)



2. Calcule os coeficientes angulares das retas r e s nas seguintes situações:

a) A reta s passa pelos pontos $A(3, 2)$ e $B(-3, -1)$.

b) A reta r está representada no plano cartesiano ao lado.



EQUAÇÃO DA RETA QUE PASSA POR UM PONTO

$P(x_0, y_0)$ E TEM COEFICIENTE ANGULAR m.

Consideremos uma reta r que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular m. Marcando o ponto $Q(x, y)$ sobre a reta r temos;

Utilizando a fórmula do coeficiente angular:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

EXEMPLO:

1. Determine a equação da reta que passa por $A(2, 3)$ e com coeficiente angular $m = -1$.

Resolução no Caderno

2. Determine a equação da reta que passa pelo ponto $P(2,5)$ e tem uma inclinação de $60°$.

Resolução no Caderno

INTERSECÇÃO ENTRE DUAS RETAS

Para determinar o ponto de intersecção de duas retas, basta resolver o sistema formado pelas equações das retas.

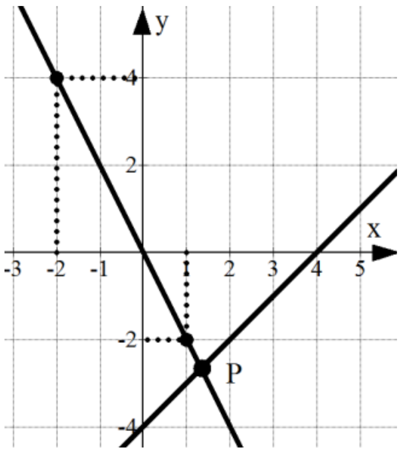
EXEMPLO:

1. Obtenha o ponto de interseção das retas

$r: 2x + 5y - 3 = 0$ e $s: x - y + 2 = 0$.

Resolução no Caderno

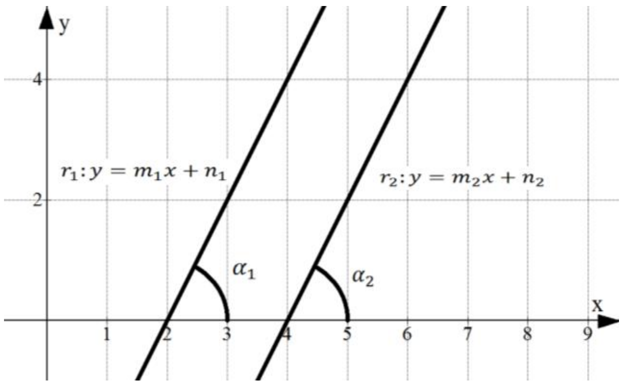
2. Encontre as coordenadas do ponto P indicado no gráfico ao lado.



Resolução no Caderno

PARALELISMO

Sejam as retas $r_1 : y = m_1 x + n_1 \;\; e \;\; r_2 : y = m_2 x + n_2$.



Se $r_1 \parallel r_2$ então $\alpha_1 = \alpha_2 \Longrightarrow \operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2$;

então: $\boxed{m_1 = m_2}$

Se $n_1 \neq n_2$, então as retas são distintas,

se $n_1 = n_2$, as retas são ditas coincidentes.

EXEMPLO:

1. Determine a posição relativa entre as retas de equações $r: y = 2x - 1 \; e \; s: 6x - 3y - 8 = 0$

Resolução no Caderno

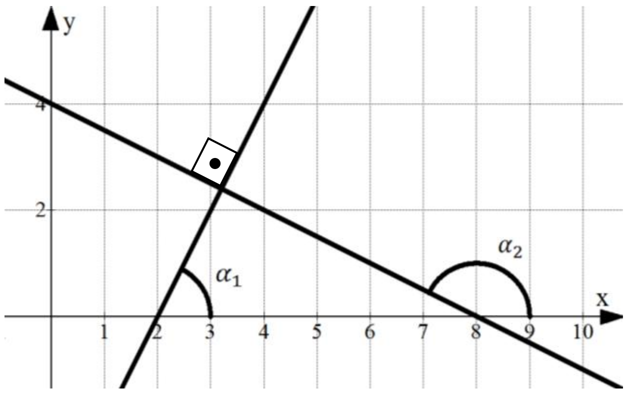
2. Determine a o valor de k para que as retas de equações $r: kx - y + 5 = 0 \; e \; s: 4x - 2y + 10 = 0$ sejam paralelas.

Resolução no Caderno

PERPENDICULARISMO

Seja $r_1 \perp r_2$ tal que r_1 forme um ângulo α_1 com o eixo x e r_2 forme um ângulo $\theta\alpha_2$ também com o eixo x no sentido positivo.

Se $r_1 \perp r_2$temos $\alpha_2 = \alpha_1 + 90°$



$\operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}(\alpha_1 + 90°) = -\cot\alpha_1$,

portanto

$\boxed{\operatorname{tg}\alpha_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_1}}$; como sabemos que $m_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$

e $m_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$ temos que:

$$\boxed{m_2 = -\frac{1}{m_1}}$$

ou ainda

$$\boxed{m_2 \cdot m_1 = -1}$$

Se as retas não verticais $r_1 e \; r_2$ são perpendiculares, o produto de seus coeficientes angulares é -1.

EXEMPLO:

1. Verifique quais pares de retas são perpendiculares:

a) $\begin{cases} r: 3x + 2y + 6 = 0 \\ s: 6x - 9y + 2 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} r: 2x + y - 3 = 0 \\ s: x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$

Resolução no Caderno

2. Determinar o valor de k de modo que sejam perpendiculares as retas $r: 2x - 4y + 1 = 0$ e $s: 5x - (k+1)y - 3 = 0$.

Resolução no Caderno

3. Conduza por $P(2, 5)$ a reta "s" perpendicular a $r: 4x + 7y - 1 = 0$, achando a sua equação geral.

Resolução no Caderno

4. Determine a equação da reta suporte da altura relativa ao vértice A do triângulo ABC, sendo dados $A(6, 3), B(1, 10)\ e\ C(10, -3)$.

Resolução no Caderno

POSIÇÃO RELATIVAS ENTRE RETAS

Dadas as retas r e s de equações;

$r: y = m_1 x + n_1$

$s: y = m_2 x + n_2$

Então se:

$m_1 = m_2\ \ e\ n_1 = n_2$ $r\ e\ s$ são coincidentes	$m_1 = m_2\ \ e\ n_1 \neq n_2$ $r\ e\ s$ são paralelas
$m_1 \neq m_2$ $r\ e\ s$ são concorrentes	$m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$ $r\ e\ s$ são perpendiculares

EXEMPLO:
1. Dê a posição relativa entre as retas $r: 2x - 3y + 5 = 0\ e\ s: 4x - 6y - 1 = 0$.

Resolução no Caderno
2. Determine a equação da reta que passa pelo ponto $A(3, -5)$ e é paralela a reta de equação

$r: 8x - 2y + 1 = 0$.

Resolução no Caderno

3. Dados os pontos $A(1,3)$ e $B(-3,-5)$, determine a equação da mediatriz de $\overrightarrow{AB}$

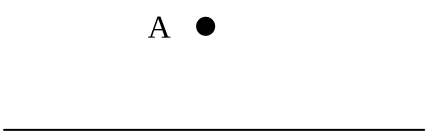
Resolução no Caderno

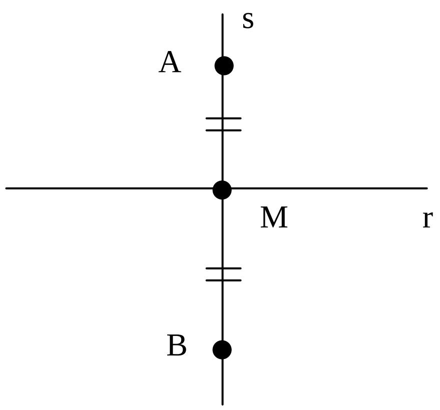
PONTOS E RETAS SIMÉTRICOS EM RELAÇÃO A UMA RETA DADA

Consideremos um ponto A e uma reta r, tais que $A \notin r$.

Para obter o ponto B simétrico do ponto A em relação à reta r, fazemos assim;

- Traçamos por A a reta s perpendicular à reta r;
- Determinamos o ponto M, intersecção de $r\ e\ s$;
- Marcamos B de modo que M seja o ponto médio do seguimento $\overleftrightarrow{AB}$





Assim dizemos que o ponto B é simétrico do ponto A em relação à reta r.

EXEMPLO:

1. Determine as coordenadas do ponto B, simétrico de $A(-4,-3)$ em relação à reta r de equação $x - y - 1 = 0$.

Resolução no Caderno

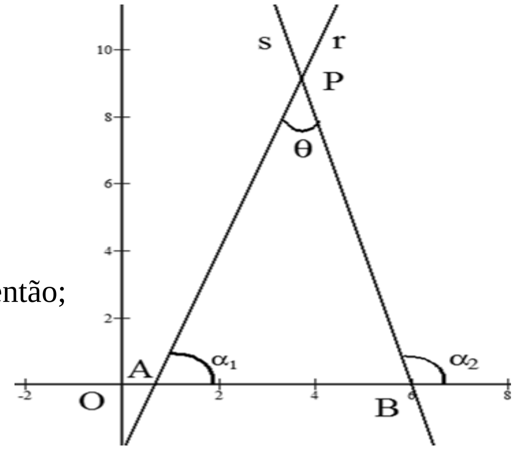
2. Determine a equação da reta r simétrica da reta s, de equação, $s: x - y + 1 = 0$, em relação à reta t, de equação $2x + y + 8 = 0$.

Resolução no Caderno

ÂNGULO ENTRE DUAS RETAS

A partir dos coeficientes angulares de duas retas é possível obter o ângulo entre as mesmas.

No triângulo ΔPAB, temos:



$\alpha_2 = \theta + \alpha_1$

$\theta = \alpha_2 - \alpha_1$

$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1)$

Como $\theta < 90°$ (ângulo agudo), a tangente de θ é positiva. então;

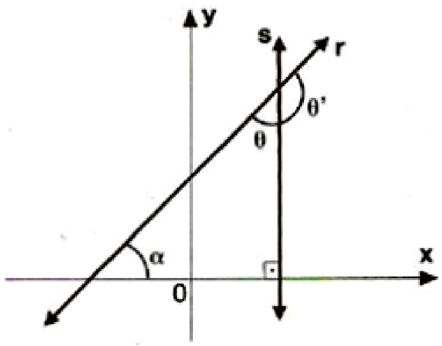
$$\tan\theta = \left|\frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_2 \cdot \tan\alpha_1}\right|$$

como $\tan\alpha_2 = m_2$ e $\tan\alpha_1 = m_1$, temos a fórmula:

$$\boxed{\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}\right|}$$

CASO PARTICULAR:

Uma das retas é vertical.



No Δ retângulo PBA, temos:

$\theta + \alpha = 90° \Longrightarrow \theta = 90° - \alpha$

$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(90° - \alpha)$

$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{cotg}\alpha \Longrightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{\tan\alpha}$

Como $\theta < 90°$ (ângulo agudo), a tangente de θ é positiva. Então;

$$\boxed{\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{1}{m_1}\right|}$$

EXEMPLO:

1. Obter a tangente do ângulo formado pelas retas r e s, de equações $r: \frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$ e $s: 3x - 2y = 4$.

Resolução no Caderno

2.Determinar o ângulo agudo formado pelas retas:

a) r: $2x - y + 1 = 0$ e $3x + y - 2 = 0$.

Resolução no Caderno

c) s: $2x - y + 5 = 0$ e $x + 2y - 9 = 0$.

Resolução no Caderno

b) $r: \sqrt{3}x - y + 2 = 0$ e $x - 5 = 0$.

Resolução no Caderno

3. Obter a equação da reta que passa pela origem $(0, 0)$ e forma com a reta $10x - 5y - 8 = 0$ um ângulo de medida θ, tal que $\tan\theta = 3$.

Resolução no Caderno

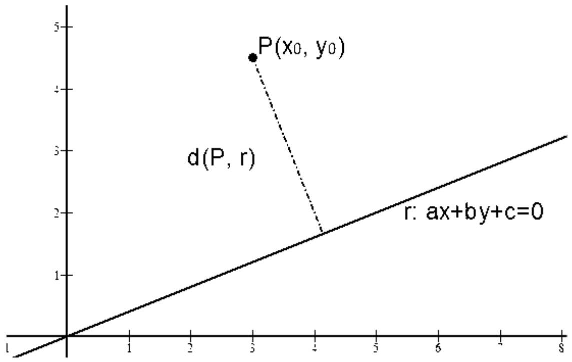
DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA

Dada uma reta r cuja equação geral é

$r: ax + by + c = 0$, a distância de um ponto $P(x_0, y_0)$

à reta r é dada por:

$$d(P, r) = \left|\frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$



EXEMPLO:

1. Determine a distância do ponto $P(2, 3)$ e $r: 3x - 4y + 1 = 0$.

Resolução no Caderno

2. Encontre a distância entre as retas $r: 2x - 3y + 3 = 0$ e $s: 2x - 3y - 1 = 0$.

Resolução no Caderno

3. Determine o valor de a para que a distância do ponto $P(-1, a)$ à reta r, de equação $3x + 4y - 5 = 0$, seja igual a 2 unidades.

Resolução no Caderno

4. Dados os vértices de um ΔABC: $A(1, 1), B(3, 3) e\ C(0,4)$. Determine o comprimento da altura h_C, relativa ao lado $\overline{AB}$.

Resolução no Caderno

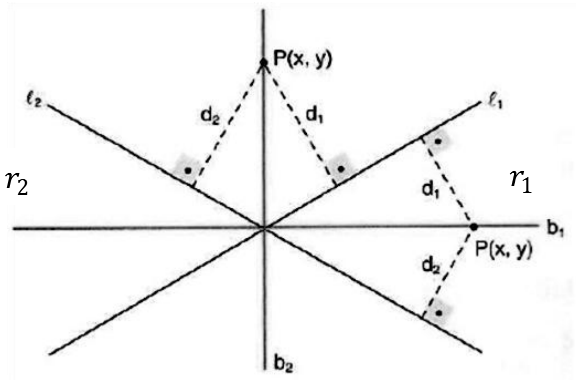
BISSETRIZES DOS ÂNGULOS DE DUAS RETAS

Considere duas retas, $r_1 e\ r_2$, definidas por:

$r_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $r_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$

O lugar geométrico dos pontos que equidistam de ambas

é formado pelas bissetrizes b_1 e b_2. Logo:



$$d_1 = d_2 \Rightarrow \left|\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}\right| = \left|\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = 0$$

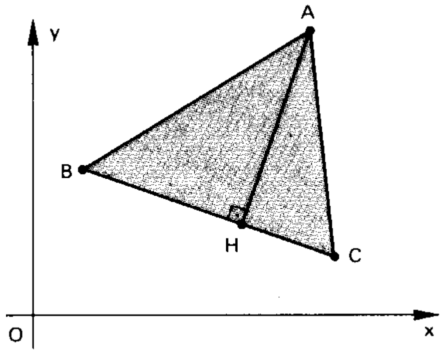
Essa igualdade representa as bissetrizes dos ângulos formados entre r_1 e r_2.

EXEMPLO:

1.Dadas as retas $r: 12x - 5y - 10 = 0$ e $s: 4x - 3y = 0$, determine as equações das bissetrizes dos ângulos formados por elas.

Resolução no Caderno

CÁLCULO DA ÁREA DE UM TRIÂNGULO



Sejam $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2) e\ C(x_3, y_3)$ três pontos

não alinhados. Para calcular a área do ΔABC, devemos fazer:

$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot base \cdot altura$

$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH$

Aplicando a fórmula da distância entre dois pontos:

(I) $BC = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}$

(II) A equação geral da reta BC é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \underbrace{(y_2 - y_3)}_{a}x + \underbrace{(x_3 - x_2)}_{b}y + \underbrace{(x_2y_3 - x_3y_2)}_{c}$$

(IV) A distância do ponto A à reta BC

$$\left.\begin{matrix} A(x_1, y_1) \\ (BC): ax + by + c = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow d = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$

então:

$$AH = d = \left|\frac{(y_2 - y_3)x_1 + (x_3 - x_2)y_1 + (x_2y_3 - x_3y_2)}{\sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2}}\right|$$

Assim, temos;

$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH =$

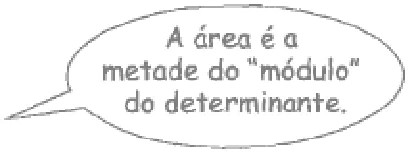
$= \frac{1}{2}\cancel{\sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2}} \cdot \frac{|(y_2 - y_3)x_1 + (x_3 - x_2)y_1 + (x_2y_3 - x_3y_2)|}{\cancel{\sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2}}}$

portanto;

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |(y_2 - y_3)x_1 + (x_3 - x_2)y_1 + (x_2y_3 - x_3y_2)|$$

Observe a semelhança da parte que está dentro do módulo com o item (II), desta forma chegamos que a área do triângulo é dada por:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix} \right\|$$



Observação:

Uma maneira simplificada de obter-se a área de um triângulo, a partir de suas coordenadas, é:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{matrix} \right\|$$

EXEMPLO

1. Encontre a área do triângulo de vértices $A(0,1), B(2,-3) e\ C(-3,-2)$.

Resolução no Caderno

Área de um Polígono

A área de um polígono convexo qualquer pode ser obtida dividindo-o em triângulos distintos e, a seguir, calculando-se a soma das áreas desses triângulos, Como esse processo é extremamente trabalhoso, vamos utilizar um processo prático, Sejam $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C), \ldots, M(x_M, y_M)$ **vértices consecutivos** de um polígono convexo qualquer. A área S desse polígono é dada por:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} x_A & x_B & x_C & \cdots & x_M & x_A \\ y_A & y_B & y_C & \cdots & y_M & y_A \end{matrix} \right\|$$

onde,

OBS: Os vértices devem ser consecutivos, isto é, tomamos um vértice qualquer como ponto inicial e percorremos o polígono num sentido.

EXEMPLO:

1. Calcule a área do polígono cujas coordenadas dos vértices são $(-2,-2), (3,3), (4,1), (0,5)\ e\ (-3,4)$.

Resolução no Caderno

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE FORMAÇÃO GERAL
DISCIPLINA: MATEMÁTICA
PROFESSOR: ROBSON RAULINO RAUTENBERG

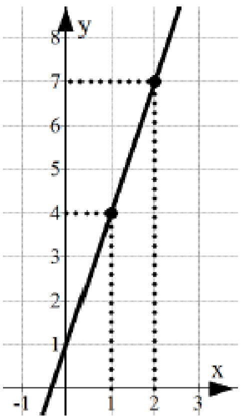
LISTA DE EXERCÍCIOS: RETA

1. Verifique se o ponto $A(2,2)$ pertence a reta de equação $2x+3y-10=0$. **R. SIM**
2. (FGV-RJ) Os pontos $A(-1,m)$ e $B(n,2)$ pertencem à reta $2x-3y=4$. Calcule a distância entre A e B. **R.** $\mathbf{2\sqrt{13}}$
3. Determine a equação geral da reta que passa pelos pontos dados, em cada caso:

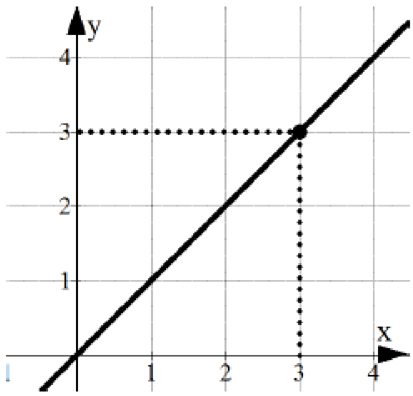
a) $(1,3)$ e $(2,-3)$
b) $(0,0)$ e $(-5,-4)$ **R.** $\mathbf{4x-5y=0}$
c) $(-4,3)$ e $(1,-2)$
d) $(1,1)$ e $(-2,-4)$ **R.** $\mathbf{5x-3y-2=0}$

4. Determine a equação geral da reta r em cada caso

a)



b)



R. $\mathbf{x-y=0}$

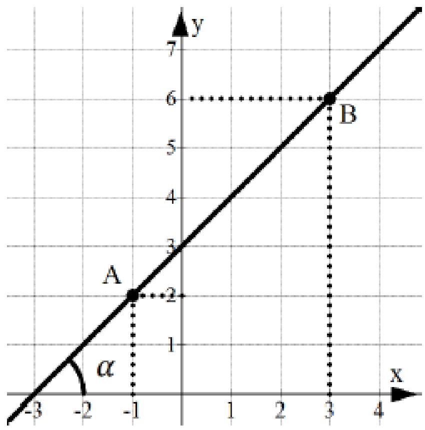
5. Encontre a equação geral da reta r que passa por $A(2,3)$ e pelo ponto médio do segmento $\overline{BC}$, sendo $B(-5,-5)$ e $C(1,-1)$. A reta r passa pela origem? **R.** $\mathbf{r: 3x-2y=0; \mathit{sim}}$

6. Obtenha, em cada caso, o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$:

a) $A(-2,1)$ e $B(3,4)$ **R.** $\mathbf{m=\frac{3}{5}}$
b) $A(1,3)$ e $B(4,1)$ **R.** $\mathbf{m=-\frac{2}{3}}$
c) $A(-1,-1)$ e $B(3,-2)$ **R.** $\mathbf{m=-\frac{1}{4}}$
d) $A(3,2)$ e $B(-1,2)$ **R.** $\mathbf{m=0}$

7. Observe a figura ao lado e obtenha:

a) o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$ ao lado. **R.** $\mathbf{m=1}$
b) Qual a medida α, em graus, do ângulo indicado? **R.** $\boldsymbol{\alpha=45°}$



8. Dada a reta de equação $3x - 2y + 1 = 0$, encontre a sua equação reduzida e determine o seu coeficiente angular. **R.** $\boldsymbol{y = \frac{3x}{2} + \frac{1}{2}, m = \frac{3}{2}}$

9. Obtenha a equação geral da reta que passa por $A(-4, 3)$ e tem declividade igual a -3.

R. $\boldsymbol{3x + y + 9 = 0}$

10. Determine o valor de k para que a reta r de equação $x - 2y + k = 0$ intercepte a segunda bissetriz no ponto de abscissa igual ao coeficiente angular de r.**R.** $\boldsymbol{k = -\frac{3}{2}}$

11. Obtenha o ponto de intersecção das retas $3x - y + 5 = 0$ e $2x + 3y - 2 = 0$. **R.** $\boldsymbol{\left(-\frac{13}{11}, \frac{16}{11}\right)}$

12. As retas de equações $3x - y - 4 = 0$ e $y = 2x + k$ interceptam-se no ponto $(k + 4, 11)$. Determine K. **R.** $\boldsymbol{k = 1}$

13. Ache os vértices A, B e C do triângulo cujos lados estão sobre as retas de equações $y = 2x + 1, y = x + 4$ e $y = -x + 3$.

14. Dentre as retas abaixo, destaque as paralelas entre si.

$r: y = 3x$ $\quad u: 2x - y = 5$ $\quad w: 6x - 8y + 5 = 0$

$s: 4x + y = 7$ $\quad t: 6x - 2y + 5 = 0$ $\quad v: 2y = -8x$ $\quad z: 2x - 6y - 36 = 0$

R. $\boldsymbol{r//t}$ **e** $\boldsymbol{s//v}$

15. Qual é a posição relativa entre as retas de equações $3x + y - 5 = 0$ e $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$?

R. Concorrentes.

16. Ache a equação da reta que é paralela a $r: 2x - 3y + 6 = 0$ e que passa por $P(1, 2)$.

R. $\boldsymbol{2x - 3y + 4 = 0}$

17. Sabendo-se que as retas de equações $3x - 2y + k = 0$ e $(k - 1)x - 4y + 14 = 0$, são paralelas. Determine o valor de k. **R.** $\boldsymbol{k = 7}$

18. Resolva o sistema $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 6x - 4y = 8 \end{cases}$

O que aconteceria se as equações do sistema fossem consideradas equações de duas retas do plano cartesiano? **R.** $\boldsymbol{S = \emptyset;}$ ***as restas seriam paralelas e distintas.***

19. Para que valores de k as retas $2x + 5y - 3 = 0$ e $kx - 3y + 1 = 0$ $são$:

a) Paralelas e distintas? **R.** $\boldsymbol{k = -\frac{6}{5}}$

b) coincidentes?**R. não existe** $\boldsymbol{k}$

c) concorrentes? **R.** $\boldsymbol{k \neq -\frac{6}{5}}$

20. Encontre a equação da reta que passa por $P(1,3)$ e não encontra a bissetriz dos quadrantes ímpares. **R.** $\boldsymbol{x - y + 2 = 0}$

21. Dados $A(-5,-5), B(1,5), C(19,0)$ e $r: 5x - 3y = 0$, verifique se r passa pelo baricentro do triângulo ABC. **R. Não**

22. (EPUSP-63) Dado o ponto $A(1,2)$, determine as coordenadas de dois pontos P e Q, situados respectivamente sobre as retas $y = x$ e $y = 4x$ de tal modo que A seja ponto médio do segmento PQ.

R. $\boldsymbol{P\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)\ e\ Q\left(\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right)}$

23. Mostre que as retas $r: \frac{x}{7} + \frac{y}{9} = 1$ e $s: \frac{x}{9} = \frac{y}{7}$ são perpendiculares.

24. Determine p de modo que as retas $r: p^2x + py + 2 = 0$ e $s: 3x + (p+1)y - 7 = 0$ sejam perpendiculares. **R.** $\boldsymbol{p = -\frac{1}{4}}$

25. Dentre os seguintes pares de retas, qual não é formado por retas paralelas ou perpendiculares?

1°) $3x - 5y + 4 = 0$ e $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} + 1$ 2°) $x + 2y - 7 = 0$ e $4x - 2y + 7 = 0$

3°) $3x + 4 = 0$ e $5y - 3 = 0$ 4°) $x = \sqrt{3}$ e $x = \sqrt{2}$

5°) $(a+1)x + (a-1)y = 0$ e $(a-1)x = (a+1)y$

R. Nenhum

26. Determine a equação da reta s que contém $P(3,4)$ e é perpendicular á reta $r: 2x + 3y = 0$.

R. $\boldsymbol{s: 3x - 2y - 1 = 0}$

27. Determinar a projeção ortogonal do ponto $P(2,6)$ sobre a reta $r: x + y - 2 = 0$.

28. Determinar o ponto Q, simétrico de $P(-3,2)$ em relação à reta $r: x + y - 1 = 0$. **R.** $\boldsymbol{Q(-1,4)}$

29. Determinar a equação da reta s simétrica da reta $r: x + 2y - 3 = 0$ em relação à bissetriz do 2° quadrante. **R.** $\boldsymbol{s: 2x + y + 3 = 0}$

30. Determine a equação da reta s simétrica da reta $r: 2x - y - 4 = 0$ em relação à reta $t: 4x - 2y + 3 = 0$. **R.** $\boldsymbol{s: 2x - y + 7 = 0}$

31. Determine o ângulo formado pelas seguintes retas:

1° caso $r: x - \sqrt{3}y + 1 = 0$ e $s: 3x + 2 = 0$ **R.** $\boldsymbol{\theta = 60°}$

2° caso $r: 6x - 2y + 5 = 0$ e $s: 4x + 2y - 1 = 0$

3° caso $r: x - 2 = 0$ e $s: y - 3 = 0$ **R.** $\boldsymbol{\theta = 90°}$

4° caso $r: 2x - 3y + 1 = 0$ e $s: 6x = 9y$ **R.** $\boldsymbol{\theta = 0°}$

32. Dados os pontos $A(2,3)$, $B(9,4)$ e $M(5,K)$. Determine o valor de k para o qual o ângulo $B\hat{A}M = 45°$. **R.** $\boldsymbol{k = 7\ \ ou\ \ k = \frac{3}{4}}$

33. Dados os pontos $A(3,0), B(1,0)$ e $C(4+\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$ calcule os ângulos internos do triângulo ABC. **R.** $\boldsymbol{\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12}}$

34. Calcule a distância do ponto P à reta r nos seguintes casos:

1°) caso $P(-3,-1)$ e $r: 3x-4y+8=0$

2°) caso $P(3,2)$ e $r: 5x-5y+2=0$ **R.** $\boldsymbol{d_{P,r} = \frac{7\sqrt{2}}{10}}$

3°) caso $P(1,-2)$ e $r: \frac{x}{12}+\frac{y}{5}=1$

4°) caso $P(2,6)$ e $r: 2x+1=0$ **R.** $\boldsymbol{d_{P,r} = \frac{5}{2}}$

35. Calcular o comprimento da altura relativa ao lado BC, do triângulo de vértices $A(-3,0), B(0,0)$ e $C(6,8)$.

36. A altura entre o ponto $P(0,k)$ e a reta r, de equação $4x+3y-2=0$, é igual a 2 unidades. Determinar o valor de k. **R.** $\boldsymbol{k = -\frac{8}{3}}$ $\boldsymbol{ou}$ $\boldsymbol{k = 4}$**.**

37. Calcule a distância entre as seguintes retas paralelas:

a) $r: 12x-9y+27=0$ e $s: 12x-9y-18=0$ **R.** $\boldsymbol{d_{r,s} = 3}$

b) $r: y=\frac{4x}{3}-\frac{2}{3}$ e $y=\frac{4x}{3}+\frac{8}{3}$ **R.** $\boldsymbol{d_{r,s} = 2}$

38. Ache a equação das bissetrizes das retas:

a) $r: 3x-4y-7=0$ e $s: 5x+12y+7=0$ **R.** $\boldsymbol{x-8y-9=0}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{8x+y-7=0}$

b) $r: 2x+y+3=0$ e $s: x+2y-1=0$ **R.** $\boldsymbol{x-y+4=0}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{3x+3y+2=0}$

39. Explique porque não é possível que tenhamos como bissetrizes dos ângulos formados entre duas retas o par $3x+4y-5=0$ e $x-3y+5=0$.

40. Calcule a área do triângulo cujos vértices são

a) $A(-3,3), B(-1,1)$ e $C(4,0)$.

b) $A(a, a+3),$ $B(a-1, a)$ e $C(a+1, a+1)$ **R.** $\boldsymbol{Área = \frac{5}{2}}$

41. Calcular a área do quadrilátero cujos vértices são $A(-1,1),$ $B(5,0),$ $C(7,3)$ e $D(3,-11)$.

R. 44

42. Calcular a área do pentágono $ABCDE$, dados: $A(0,0),$ $B(0,-1),$ $C(-2,-5),$ $D(-4,0)$ e $E(-2,3)$

43. Dados os pontos $A(1,4),$ $B(3,-2)$ e $C(2,y)$, encontre o valor de y para que a área do triângulo ABC seja 10

44. Calcule a área do quadrilátero formado pelas retas $y=2x+1,$ $y=-2x+7, x=0$ e $y=0$. **R.** $\boldsymbol{\frac{31}{4}\ u.a.}$