תרגיל בית 3 במבוא לרשתות מחשבים

1. מכיוון שבכל שלב יש רק תור אחד פעיל, נייצג מצב על ידי זוג של מס' האנשים בתור (כולל מקבל שירות) והתור הפעיל. כאשר במצב בו אין אנשים כלל נסמן שהתור הפעיל הוא . בנוסף, כיוון שידוע כי ניתן להתעלם ממנו, וכיוון ש- נדע כי לא ייתכן שיהיו בתור יותר מ-N אנשים.

דיאגרמה עבור קלט a:

0,0

1,1

2,1

1,2

2,2

1,3

2,3

דיאגרמה עבור קלט b:

0,0

1,1

2,1

1,2

2,2

3,1

3,2

1. התנאי למע' יציבה הוא קיום הגבול כאשר הוא היא ההסתברות לגודל תור של n לאחר זמן t. במילים - ניתן להגיד שהתנאי למע' יציבה הוא שגודל התור אינו גודל לאינסוף, לכן כל מע' סופית היא יציבה. כיוון שבמע' הנתונה אם יש כבר n אנשים בתור כל מי שיגיע יוותר והתור לא יגדל, המע' שלנו סופית. לכן המע' תמיד יציבה.
2. נסמן את ההסתברות להיות במצב (כדי להבדיל מ- שהיא ההסתברות להשאר אם יש j אנשים בתור)

עבר קלט a:

נמצא משוואות על ההסתברויות לפי דיאגרמת המצבים כפי שראינו בהרצאה (ע"י הקפת מצבים מסויימים בעיגול והשוואת קצב היציאה וקצב הכניסה)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| פיתוח | משוואה | מצבים בתוך העיגול |
|  |  | (1,1) , (2,1) |
|  | (1,2) , (2,2) |
|  | (1,3) , (2,3) |
|  |  | (2,1) |
|  | (2,2) |
|  | (2,3) |

כעת נציב את הערכים שמצאנו במשוואה האחרונה:

לבסוף נחשב את כל ההסתברויות לפי המשוואות לעיל:

עבר קלט b:

נמצא משוואות על ההסתברויות לפי דיאגרמת המצבים כפי שראינו בהרצאה (ע"י הקפת מצבים מסויימים בעיגול והשוואת קצב היציאה וקצב הכניסה)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| פיתוח | משוואה | מצבים בתוך העיגול |
|  |  | (1,1) , (2,1) , (3,1) |
|  | (1,2) , (2,2) , (3,2) |
|  |  | (2,1) , (3,1) |
|  | (2,2) , (3,2) |
|  |  | (3,1) |
|  | (3,2) |

כעת נציב את הערכים שמצאנו במשוואה האחרונה:

לבסוף נחשב את כל ההסתברויות לפי המשוואות לעיל:

1. כיוון שתמיד יש תור אחד פעיל, ולכל התורים הסתברויות זהות לכל המעברים בין מס' הממתינים, ניתן להזניח את איזה תור פעיל ולהתייחס רק לאורך התור. נצמצם את דיאגרמות המצבים והפעם נייצג כל מצב ע"י מס' האנשים בתור (כולל מקבל שירות) בלבד.

עבור קלט a: עבור קלט b:

0

1

2

3

2

1

0

1. קצב ההגעה הממוצע הוא תוחלת על . לשם כך נזדקק להסתברות לכל ערך אפשרי של וכיוון שהוא תלוי באורך התור נאלץ את ההסתברות לכך שהתור יהיה באורך כלשהו לכל אורך אפשרי של התור, נשתמש בהסתברויות שחישבנו בשאלה 3 לטובת זה. נסמן את ההסתברות שאורך התור יהיה i ע"י .

עבור קלט a: לפי הגדרת המצבים בדיאגרמה בסעיף 1 וחוקי הסתברות מתקיים כי

, ,

(ההסתברות שהתור יהיה באורך כלשהו זהה לסכום ההסתברויות שתור מסויים יהיה באורך זה)

מכך נקבל , ולכן קצב ההגעה הממוצע הינו

עבור קלט b: לפי הגדרת המצבים בדיאגרמה בסעיף 1 וחוקי הסתברות מתקיים כי

, , ,

(ההסתברות שהתור יהיה באורך כלשהו זהה לסכום ההסתברויות שתור מסויים יהיה באורך זה)

מכך נקבל מתקיים , , ולכן קצב ההגעה הממוצע הינו

1. נרצה להשתמש במשפט ליטל, לכן עלינו ראשית לחשב את תוחלת אורך התור. נשתמש בהסתברויות לאורך התור מהסעיף הקודם. בנוסף נסמן את אורך התור ב-n ואת זמן השהייה ב-T.

לאחר מכן כיוון ש- אינו קבוע נאלץ להשתמש בניסוח של משפט ליטל המשתמש בתוחלת של שחישבנו סעיף קודם.

עבור קלט a:

לכן לפי משפט ליטל זמן השהייה הממוצע הינו

עבור קלט b:

ולכן לפי משפט ליטל זמן השהייה הממוצע הינו

1. נסמן ב-W את זמן ההמתנה וב-S את זמן השירות, ונשים לב כי . לכן נקבל כי תוחלת זמן ההמתנה הינו . לכן עבור קלט a נקבל ועבור קלט b נקבל
2. ברטוב סימלצנו מע' פשוטה יותר מזו המתוארת אך שקולה לה. בעצם סימלצנו את המע' שתארנו בסעיף ד'. כפי שהסברנו שם כיוון שלכל התורים הסתברות זהה להבחר והסתברויות זהות לכל המעברים בנוסף לכך שרק תור אחד מכיל אנשים בכל פעם, ניתן להתעלם ממספר התורים ולהתייחס אליהם כתור בודד.

בתור זה קצבי המעבר יהיו זהים לכל אחד מהתורים המקוריים, פרט למעבר מ-0 ממתינים לאחד שם קצב המעבר יהיה במקום כיוון שאין בחירה בין התורים האחרים.

נציין כי בחישוב (וכנגרר מכך חישוב ) יש לחלק במס' התורים. הוא הממוצע של הזמן בו היה בתור אנשים (מכאן כל התייחסות ל-i היא עבור i חיובי ממש). כלומר, אם נסמן את סך הזמן שהיו i אנשים בתור לחיסון מסוג j נקבל כי . מכיוון שאנחנו סימלצנו מע' עם תור יחיד, כל פעם שהיו אמורים להיות i אנשים בתור כלשהו נקבל שיש i אנשים בתור היחיד שלנו (כי כל ההסתברויות והקצבים זהים לכן כל ההגעות\עזיבות יקרו באותה צורה). לכן אם נסמן סך הזמן שהיה בתור הבודד i אנשים, נקבל כי ולכן נקבל כי וכך נחשב אותו.

חוץ מ- (וכנגרר ממנו ) אין חשיבות למס' התורים בשאר הפלטים, לכן נחשב אותם כרגיל.

כעת נשים בטבלה את התוצאות שחישבנו תיאורטית לצד התוצאות שקיבלתנו ממס' הרצות והממוצע המתקבל (נריץ לאורך 50000 ולא 1000 על מנת להקטין את הרעש) על מנת להשוות ביניהם.

עבור קלט a:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ממוצע | הרצה 3 | הרצה 2 | הרצה 1 | חישוב תיאורטי | מדד ברטוב | מדד ביבש |
| 0.4432 | 0.4435 | 0.4427 | 0.4434 |  |  |  |
| 0.1108 | 0.1107 | 0.1108 | 0.1108 |  |  |  |
| 0.0748 | 0.0747 | 0.0749 | 0.0747 |  |  |  |
| 0.0101 | 0.0101 | 0.0101 | 0.0101 |  |  |  |
| 0.0351 | 0.0351 | 0.0351 | 0.0350 |  |  |  |
| 22.264 | 22.244 | 22.267 | 22.280 |  |  |  |

ניתן לראות כי בכל הרצה יש סטיה כלשהי מהחישוב התיאורטי כתוצאה מרעש, אך בממוצע אנחנו מקבלים תוצאות במרחק די זניח מהתוצאות המחושבות. ככל שנריץ ליותר זמן ונעשה ממוצע על יותר הרצות נתקרב עוד יותר לתוצאות התיאורטיות

עבור קלט b:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ממוצע | הרצה 3 | הרצה 2 | הרצה 1 | חישוב תיאורטי | מדד ברטוב | מדד ביבש |
| 0.0104 | 0.0105 | 0.0103 | 0.0104 |  |  |  |
| 0.0260 | 0.0259 | 0.0261 | 0.0261 |  |  |  |
| 0.1044 | 0.1042 | 0.1045 | 0.1044 |  |  |  |
| 0.3643 | 0.3646 | 0.3642 | 0.3642 |  |  |  |
| 0.1684 | 0.1686 | 0.1683 | 0.1683 |  |  |  |
| 0.2684 | 0.2687 | 0.2682 | 0.2682 |  |  |  |
| 9.8948 | 9.8843 | 9.8997 | 9.9003 |  |  |  |

ניתן לראות כי בכל הרצה יש סטיה כלשהי מהחישוב התיאורטי כתוצאה מרעש, אך בממוצע אנחנו מקבלים תוצאות במרחק די זניח מהתוצאות המחושבות. ככל שנריץ ליותר זמן ונעשה ממוצע על יותר הרצות נתקרב עוד יותר לתוצאות התיאורטיות