Hochschule Karlsruhe
University of Applied Sciences

Fakultät für Informatik
und Wirtschaftsinformatik

Lehrgebiet für Grundlagen der Informatik
Prof. Dr. Heiko Körner

3. Übung zur Vorlesung Theoretische Informatik I

Musterlösungen

Aufgabe 1: Sei $R := \{(1,2),(3,2)\}$ die genannte Relation über der Menge $\{1,2,3\}$.

a) R ist nicht reflexiv, da z.B. nicht $1R1$ gilt. R ist auch nicht symmetrisch, denn es gilt z.B. $1R2$, aber nicht $2R1$. Die Relation ist allerdings transitiv, denn es ist unmöglich, drei Zahlen $x, y, z \in \{1,2,3\}$ mit xRy und yRz zu wählen. Somit ist die Vorbedingung für die Transitivität immer falsch, d.h. die Implikation xRz ist immer richtig.

b) Wegen der geforderten Symmetrie müssen zunächst $(2,1)$ und $(2,3)$ mit aufgenommen werden. Die beiden Paare $(1,2)$ und $(2,3)$ erzwingen dann wegen der gewünschten Transitivität auch die Aufnahme von $(1,3)$ sowie (wegen der Symmetrie) die Aufnahme von $(3,1)$. Danach sieht R zunächst wie folgt aus:

$$R = \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\} \ .$$

Wegen $1R2$ und $2R1$ sowie der geforderten Transitivität von R muss auch $(1,1)$ in R aufgenommen werden. Gleiches folgt auch für die Paare $(2,2)$ sowie $(3,3)$. Also sieht R am Ende wie folgt aus (und ist dann symmetrisch und transitiv):

$$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\} \ .$$

c) R ist mittlerweile symmetrisch und transitiv. Wegen der Aufnahme der Paare $(1,1)$, $(2,2)$ und $(3,3)$ ist R auch reflexiv. Also ist R nun sogar eine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 2: Wir geben zu allen Aufgaben eine passende Lösung an (es gibt noch weitere):

a) Sei $R := \{(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$. R ist symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv, da $1 R 1$ nicht erfüllt ist.

b) Sei $R := \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3),(1,3)\}$. R ist reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch, da aus $1 R 2$ nicht $2 R 1$ folgt.

c) Sei $R := \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}$. R ist reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv, da aus $1 R 2$ und $2 R 3$ nicht $1 R 3$ folgt.

Aufgabe 3: Anbei die Lösungen für alle Teilaufgaben:

a) R ist nicht reflexiv, denn für jede nicht leere Menge $x \subseteq \mathbb{N}$ gilt $x \cap x = x \neq \emptyset$. R ist jedoch symmetrisch, denn wegen der Kommutativität des Schnittoperators gilt

$$xRy \iff x \cap y = \emptyset \iff y \cap x = \emptyset \iff yRx \ .$$

Transitiv ist R wiederum nicht, denn für die Wahl $x := \{1\}$, $y := \emptyset$ und $z := \{1\}$ gilt zwar $x \cap y = \emptyset$ sowie $y \cap z = \emptyset$ (also xRy und yRz), aber $x \cap z = \{1\} \neq \emptyset$ (und damit nicht xRz).

b) R ist mit der Relation aus der vorherigen Aufgabe identisch, da x genau dann in dem Komplement von y liegt, wenn x und y disjunkt sind, also $x \cap y = \emptyset$ gilt. Folglich ist R wieder symmetrisch, aber weder reflexiv noch transitiv.

c) R ist reflexiv, da das Produkt einer Zahl mit sich selbst (egal ob positiv oder negativ) immer positiv ist. R ist auch symmetrisch, denn die Multiplikation zweier Zahlen ist kommutativ. R ist jedoch nicht transitiv, denn für $x = 1$, $y = 0$ und $z = -1$ gilt zwar $xy = 0$ und $yz = 0$ (also xRy und yRz), aber nicht xRz wegen $1 \cdot (-1) = -1 < 0$.

Aufgabe 4: Anbei die Lösungen zu allen drei Teilaufgaben:

a)
- Irreflexivität: $\forall x \in A\colon \neg(xRx)$
- Antisymmetrie: $\forall x, y \in A\colon xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$
- Asymmetrie: $\forall x, y \in A\colon xRy \Rightarrow \neg(yRx)$

b) Ein Beispiel ist die Relation „kleiner als ($<$)“ auf der Menge $A := \mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen. Diese Relation ist irreflexiv (denn keine Zahl ist kleiner als sich selbst), antisymmetrisch (denn die Vorbedingung $m < n$ und $n < m$ kann für keine Zahlen m und n erfüllt werden), und asymmetrisch (denn aus $m < n$ folgt immer $\neg(n < m)$).

c) Sei z.B. $R := \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$ über der Menge $A := \{1,2\}$. Dann ist R nicht irreflexiv, denn es gilt $1R1$. R ist auch nicht antisymmetrisch, denn aus $1R2$ und $2R1$ folgt nicht $1 = 2$. R ist auch nicht asymmetrisch, denn aus $1R1$ folgt nicht „umgekehrt“ $\neg 1R1$.

d) Eine passende Relation ist z.B. $R := \{(1,1)\}$ über der Menge $A := \{1\}$. Diese Relation ist antisymmetrisch, denn für die Vorbedingung $x, y \in A$ mit xRy und yRx kann man hier mangels Alternativen nur $x = y = 1$ wählen, und dann ist insbesondere natürlich $x = y$ erfüllt. R ist aber nicht irreflexiv, denn es gilt $1R1$. Ebenso ist R nicht asymmetrisch, denn wie bei c) folgt aus $1R1$ nicht „umgekehrt“ $\neg 1R1$.

e) Angenommen, R ist asymmetrisch. Dann würde aus xRx stets $\neg(xRx)$ folgen, ein Widerspruch. Also ist R sicherlich irreflexiv. Ferner folgt aus xRy immer $\neg(yRx)$, d.h. die Vorbedingung für die Antisymmetrie $xRy \wedge yRx$ ist unerfüllbar. Also ist die in der Antisymmetrie geforderte Implikation immer richtig. Also ist R auch antisymmetrisch.

Sei jetzt umgekehrt R irreflexiv und antisymmetrisch. Wir betrachten zwei Elemente $x, y \in A$ mit xRy. Wegen der Irreflexivität von R sind x und y sicherlich verschieden. Folglich kann nicht yRx gelten, denn die Antisymmetrie würde für diesen Fall doch deren Gleichheit implizieren. Also folgt aus xRy stets $\neg(yRx)$, d.h. R ist asymmetrisch.

Aufgabe 5: Eine Funktion $f : A \longrightarrow B$ ordnet jedem Element aus A ein Element aus B zu. Für jedes Element $x \in A$ gibt es dafür genau $|B|$ verschiedene Möglichkeiten, d.h. es gibt

$$\underbrace{|B| \cdot |B| \cdot \ldots \cdot |B|}_{|A|\text{–mal}}$$

verschiedene Kombinationsmöglichkeiten für alle Elemente von A insgesamt. Also gibt es auch genau $|B|^{|A|}$ viele Funktionen, die von A nach B abbilden.

Aufgabe 6: Ein unäres Prädikat über A ist nicht anderes als eine Funktion $f : A \longrightarrow B$ mit $B := \{\mathrm{W}, \mathrm{F}\}$, also $|B| = 2$. Gemäß Aufgabe 5 gibt es also genau 2^n unäre Prädikate.