Hochschule Karlsruhe
University of Applied Sciences

Fakultät für Informatik
und Wirtschaftsinformatik

Lehrgebiet für Grundlagen der Informatik
Prof. Dr. Heiko Körner

# 2. Übung zur Vorlesung Theoretische Informatik I

## Musterlösungen

**Aufgabe 1:** Es seien $A$ und $B$ zwei Mengen. Die beiden DeMorgan'schen Regeln der Mengenlehre sind $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ und $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Wir zeigen exemplarisch das erste Gesetz:

$$\begin{aligned}
\overline{A \cup B} &= \{x \,|\, x \notin (A \cup B)\} = \{x \,|\, \neg(x \in (A \cup B))\} \\
&= \{x \,|\, \neg((x \in A) \vee (x \in B))\} = \{x \,|\, \neg(x \in A) \,\wedge\, \neg(x \in B)\} \\
&= \{x \,|\, \neg(x \in A)\} \cap \{x \,|\, \neg(x \in B)\} = \{x \,|\, x \notin A\} \cap \{x \,|\, x \notin B\} = \overline{A} \cap \overline{B} \ .
\end{aligned}$$

In der mittleren Zeile haben wir dabei eine der beiden DeMorgan'schen Regeln der Aussagenlogik verwendet. □

**Aufgabe 2:** Mögliche Mengenbeschreibungen sind:

a) $\{1, 10, 100, 1000\}$

b) $\{1, 10, 100, 1000, \ldots\}$

c) $\{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$

d) $\{\ldots, -6, -4, -2, 0, 8, 10, 12, 14, \ldots\}$

e) $\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \text{ ist durch } 117 \text{ teilbar}\}$

f) $\{n^3 \,|\, n \in \mathbb{N}\}$

g) $\{n \in \mathbb{N} \,|\, 100 \leq n \leq 10000\}$

h) $\{a, b, c, \ldots, x, y, z, A, B, C, \ldots, X, Y, Z\}$

**Aufgabe 3:** Hier die Lösungen:

a) Die Menge $A$ enthält alle natürlichen Zahlen, die sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar sind, d.h. alle Vielfachen von 6. Es gilt also $A = \{6, 12, 18, \ldots\}$.

b) Die Menge $B$ enthält formal alle ganzen Zahlen, die jeweils identisch mit der nachfolgenden ganzen Zahl sind. Dies ist unmöglich, d.h. diese Menge ist leer. Formal würde man also $B = \emptyset$ schreiben.

c) Die Menge $C$ enthält alle natürlichen Zahlen, die kleiner als 100 sind und sowohl Quadratzahlen als auch kubische Zahlen darstellen. Es gilt nur zwei Zahlen, die diese Bedingung erfüllen, nämlich 1 und 64. Also gilt $C = \{1, 64\}$.

d) Die Menge $D$ enthält alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$, für die es eine größere Quadratzahl $k$ gibt. Aber es gibt unendlich viele und damit beliebig große Quadratzahlen, deshalb ist diese Bedingung für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Somit gilt $D = \mathbb{N}$.

**Aufgabe 4:** Für $A = \{2, 7, 8\}$ und $B = \{1, 7, 9\}$ gilt $A \cap B = \{7\}$ und $A \cup B = \{1, 2, 7, 8, 9\}$. Die Differenzen lauten $A \setminus B = \{2, 8\}$ und $B \setminus A = \{1, 9\}$. Die Komplemente gegenüber den ersten neun natürlichen Zahlen sind $\overline{A} = \{1,3,4,5,6,9\}$ und $\overline{B} = \{2,3,4,5,6,8\}$. Für die Potenzmengen gilt ferner $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset,\{2\},\{7\},\{8\},\{2,7\},\{2,8\},\{7,8\},\{2,7,8\}\}$ und analog $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset,\{1\},\{7\},\{9\},\{1,7\},\{1,9\},\{7,9\},\{1,7,9\}\}$.

**Aufgabe 5:** Wir lösen den Audruck $A \cap (B \cup (A \cup (\overline{A \cup B} \cap A)))$ von innen nach außen auf. Zunächst gilt nach den Regeln von DeMorgan, dem Assoziativ– sowie dem Kommutativgesetz:

$$\overline{A \cup B} \cap A = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap A = \overline{A} \cap (\overline{B} \cap A) = \overline{A} \cap (A \cap \overline{B}) = (\overline{A} \cap A) \cap \overline{B} \ .$$

Kein Objekt kann aber gleichzeitig in $A$ und seinem Komplement $\overline{A}$ enthalten sein, d.h. der Schnitt $\overline{A} \cap A$ ist leer. Der Schnitt der leeren Menge $\emptyset$ mit einer beliebigen anderen Menge (hier $\overline{B}$) ergibt wieder die leere Menge selbst, d.h. für die innerste Klammer gilt insgesamt

$$\overline{A \cup B} \cap A = \emptyset \ .$$

Die Vereinigung von der leeren Menge $\emptyset$ mit $A$ ergibt natürlich wieder $A$ selbst, da ja keine Elemente zu $A$ hinzukommen. Also gilt für den von den beiden inneren Klammerpaaren gebildeten Ausdruck:

$$A \cup (\overline{A \cup B} \cap A) = A \ .$$

Der ursprüngliche Ausdruck vereinfacht sich somit zu

$$A \cap (B \cup (A \cup (\overline{A \cup B} \cap A))) = A \cap (B \cup A) \ .$$

Nach dem Kommutativ– und Absorptionsgestz gilt weiterhin

$$A \cap (B \cup A) = A \cap (A \cup B) = A \ ,$$

d.h. der gesamte ursprüngliche Ausdruck beschreibt lediglich die Menge $A$, ganz gleich, was $B$ enthält.

**Aufgabe 6:** Alle Aussagen sind richtig — wir geben jeweils Beispiele an:

a) Sei z.B. $A = \{2\}$. Dann gilt $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{2\}\}$ und der Schnitt beider Mengen ist leer.

b) Für z.B. $A = \{2, \{2\}\}$ ist $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{2\}, \{\{2\}\}, \{2, \{2\}\}\}$, so dass $A \cap \mathcal{P}(A) = \{\{2\}\}$ gilt.

c) Auch dies ist möglich. Ist z.B. $A = \mathbb{N} \cup \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \ldots\}$, so enthält $\mathcal{P}(A)$ unter anderem auch alle einelementigen Teilmengen $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, usw., die sich folglich auch im Schnitt von $A$ und $\mathcal{P}(A)$ wiederfinden.

**Aufgabe 7:** Die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ von $A$ enthält genau $2^n$ viele Teilmengen von $A$. Denn wenn man eine Teilmenge von $A$ bilden möchte, so kann man sich für jedes der $n$ Elemente von $A$ überlegen, ob es zu der Teilmenge dazugehören soll oder nicht. Wenn man nur bei einem Element eine andere Entscheidung trifft, kommt eine weitere Teilmenge von $A$ dabei heraus. Also gibt es insgesamt

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n\text{–mal}} = 2^n$$

viele Möglichkeiten zur Bildung einer Teilmenge von $A$.