Hochschule Karlsruhe
University of Applied Sciences

Fakultät für Informatik
und Wirtschaftsinformatik

HKA

Lehrgebiet für Grundlagen der Informatik
Prof. Dr. Heiko Körner

3. Übung zur Vorlesung Theoretische Informatik I

Aufgabe 1 (• •): Sei $R := \{(1,2),(3,2)\}$ eine Relation über der Menge $\{1,2,3\}$.

a) Prüfen Sie, ob R reflexiv, symmetrisch und / oder transitiv ist.

b) Schließen Sie R symmetrisch und transitiv ab, d.h. erweitern Sie R durch eine minimale Menge von weiteren Paaren (x,y), so dass R danach symmetrisch und transitiv ist.

c) Ist R danach sogar eine Äquivalenzrelation?

Aufgabe 2 (• •): Sei $A := \{1,2,3\}$. Geben Sie eine Relation R über A mit $|R| \geq 3$ an, die

a) symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv ist,

b) reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch ist,

c) reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv ist.

Aufgabe 3 (•): Prüfen Sie, welche der nachfolgenden Relationen R über den angegebenen Mengen A reflexiv, symmetrisch, und / oder transitiv sind.

a) $A := \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $R := \{(x,y) \,|\, x \cap y = \emptyset\}$.

b) $A := \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $R := \{(x,y) \,|\, x \subseteq \mathbb{N} \setminus y\}$.

c) $A := \mathbb{Z}$, $R := \{(x,y) \,|\, xy \geq 0\}$.

Aufgabe 4 (• • •): Eine Relation R über einer Menge A heißt *irreflexiv*, wenn für alle $x \in A$ stets $\neg(xRx)$ gilt. R ist *antisymmetrisch*, wenn für alle $x,y \in A$ aus xRy und yRx stets $x = y$ folgt. R ist *asymmetrisch*, wenn für alle $x,y \in A$ die Bedingung xRy stets $\neg(yRx)$ impliziert.

a) Drücken Sie die drei Begriffe Irreflexivität, Antisymmetrie und Asymmetrie formal (und mit Hilfe von Quantoren) aus.

b) Geben Sie ein Beispiel für R und A an, so dass R alle drei Bedingungen erfüllt.

c) Geben Sie ein Beispiel für R und A an, so dass R keine der drei Bedingungen erfüllt.

d) Geben Sie ein Beispiel für R und A an, so dass R zwar antisymmetrisch, aber weder asymmetrisch noch irreflexiv ist.

e) Zeigen Sie, dass für jede Relation R gilt:

$$R \text{ ist asymmetrisch} \iff R \text{ ist irreflexiv und antisymmetrisch}\ .$$

Aufgabe 5 (• • •): Für zwei nichtleere endliche Mengen A und B bezeichne B^A die Menge aller Funktionen, die von A nach B abbilden. Zeigen Sie, dass $|B^A| = |B|^{|A|}$ gilt.

Aufgabe 6 (• •): Sei A eine beliebige Menge mit $n := |A| \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es genau 2^n unäre Prädikate über A gibt. (*Tipp:* Bearbeiten Sie zuerst Aufgabe 5.)