Hochschule Karlsruhe
University of Applied Sciences

Fakultät für **Informatik**
und Wirtschaftsinformatik

Lehrgebiet für Grundlagen der Informatik
Prof. Dr. Heiko Körner

8. Übung zur Vorlesung Theoretische Informatik I

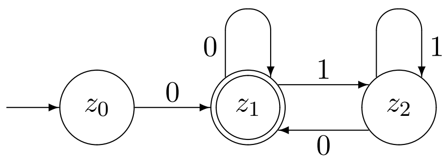
Musterlösungen

Aufgabe 1: Ein NEA $M' = (Z', \Sigma, \delta', \mathcal{S}, E')$ entsteht aus einem DEA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$, indem die Komponenten wie folgt gesetzt werden:

- $Z' := Z$
- $\mathcal{S} := \{z_0\}$
- $E' := E$
- Für jeden Übergang $\delta(z, a) = z'$ in M existiert ein Übergang $\delta'(z, a) = \{z'\}$ in M'.

Aufgabe 2: Es ergeben sich folgende Lösungen:

a) Der DEA M könnte z.B. so aussehen:



b) Ein passender regulärer Ausdruck ist z.B. $0 \,|\, 0(0 \,|\, 1)^\star 0$.

Aufgabe 3: Der kürzestmögliche Ausdruck ist $a^\star b$. Der Ausdruck a^+ beschreibt nämlich alle nichtleeren Wörter, die nur aus a's bestehen. Insbesondere sind damit auch die Wörter a und aa abgedeckt, d.h. man kann den Ausdruck zunächst zu $((a^+)^\star \,|\, \varepsilon \,|\, \emptyset)b$ vereinfachen. Weiter hat die Kleenesche Hüllenbildung für diese Wortmenge offenbar keine Auswirkung, ausser dass noch das leere Wort hinzukommt. Daher ist $(a^+)^\star$ zu $a^\star$ gleichwertig, d.h. der Ausdruck verkürzt sich weiter zu $(a^\star \,|\, \varepsilon \,|\, \emptyset)b$. Nun ist das leere Wort bereits in $\varphi(a^\star)$ enthalten, und auch die Vereinigung einer Sprache mit der leeren Menge hat keine Auswirkungen. Also kann der Teilausdruck $a^\star \,|\, \varepsilon \,|\, \emptyset$ durch $a^\star$ ersetzt werden.

Aufgabe 4: Hier die Lösungen zu allen Teilaufgaben:

a) Wörter aus L sind z.B. 1, 011, 110, 111 und 1001110.

b) Sei n die Pumping–Lemma–Zahl. Das Wort $x := 0^n 1 0^n$ hat die Länge $|x| = 2n + 1 \geq n$, d.h. es gibt eine Zerlegung $x = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$, so dass $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt. Wegen $|uv| \leq n$ muss das nichtleere Wort v jedoch im Bereich der führenden n Nullen von x liegen, d.h. v besteht selbst nur aus Nullen. Durch das einmalige zusätzliche Pumpen von v wird der linke Nullenbereich also erweitert, d.h. in dem Wort $uv^2w = uvvw$ liegt die Eins auf keinen Fall mehr in der Mitte (sofern $uvvw$ überhaupt eine ungerade Länge besitzt). Also gilt $uvvw \notin L$, was im Widerspruch zum Pumping–Lemma steht. Also ist L nicht regulär. $\square$

Sprechstunde montags 08-09 Uhr Raum E 204 ∗ Tel.: (0721) 925–1507 ∗ Email: heiko.koerner[at]h–ka[dot]de

Aufgabe 5: Hier die Beweise zu allen Behauptungen:

a) Unter den ersten 100 Primzahlen ist die 100ste Primzahl die größte. Sei p diese Primzahl. Jedes Wort aus L enthält also höchstens p Nullen und höchstens p Einsen. Es gibt nur endlich viele Wörter, die diese Bedingung erfüllen. Also ist L eine Teilmenge einer endlichen Sprache, also selbst endlich, und deshalb regulär. $\square$

b) Der Beweis erfolgt analog zum Beispiel 2.4.4 der Vorlesung. Angenommen, L sei regulär. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass sich alle $x \in L$ mit $|x| \geq n$ gemäß den Bedingungen des Pumping–Lemmas in $x = uvw$ zerlegen lassen. Man betrachte nun die Zerlegung uvw von dem Wort $0^n 1^n \in L$, welches die Länge $2n$ besitzt. Wegen $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ besteht v nur aus einer nichtleeren Folge von Nullen. Laut der dritten Bedingung des Pumping–Lemmas wäre dann (für $i = 0$) auch $uw = 0^{n-|v|}1^n$ in L enthalten. Da aber $|v| \geq 1$ gilt, ist die Anzahl der Nullen (also $n - |v|$) kleiner als die Anzahl der Einsen (nämlich n). Also gehört das „gepumpte“ Wort im Widerspruch zum Pumping–Lemma doch nicht zu L, d.h. L kann nicht regulär sein. $\square$

c) Die Arumentation ist fast identisch. Angenommen, L sei regulär. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass sich alle $x \in L$ mit $|x| \geq n$ in $x = uvw$ zerlegen lassen. Wir betrachten nun die Zerlegung uvw von dem Wort $0^n 1^{n+1} \in L$. Auch dieses Wort ist wegen $|0^n 1^{n+1}| = 2n + 1$ wieder lang genug. Wegen $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ besteht v nur aus einer nichtleeren Folge von Nullen. Nach der Aussage des Pumping–Lemmas wäre nun $uvvw = 0^{n+|v|}1^{n+1}$ in L enthalten, was wegen $n + |v| \geq n + 1$ nicht der Fall ist. Also gilt das Pumping–Lemma nicht, und somit ist L nicht regulär. $\square$

Aufgabe 6: Ein möglicher Ausdruck für L wäre

$$\varepsilon \,|\, a^+(b^+a^+)^\star \,|\, b^+(a^+b^+)^\star \;\; .$$

Zunächst sei bemerkt, dass das leere Wort die genannte Eigenschaft erfüllt, denn beide Infixe kommen in ε 0–mal und damit gleich oft vor. Gleiches gilt für Zeichenketten, die nur aus a´s oder nur aus b´s bestehen. Ansonsten gilt: wenn eine Zeichenkette mit (mindestens) einem a beginnt und darauf (mindestens) ein b folgt, so kommt der Infix ab einmal vor. Also muss auch der andere Infix ba zum Ausgleich einmal vorkommen, d.h. auf die Folge der b's muss wieder (mindestens) ein a folgen. Der Aufbau solcher Wörter lässt sich durch den Ausdruck $a^+b^+a^+$ beschreiben. Natürlich kann sich hinter der Folge der abschließenden a's eine weitere Folge von b's anschließen, die wiederum zum Ausgleich eine erneute Folge von a's erzwingt, usw. Insgesamt ist hierfür der Ausdruck $a^+(b^+a^+)^\star$ passend. Für den Fall, dass das Wort mit einem b beginnt, ergibt sich analog der Ausdruck $b^+(a^+b^+)^\star$.

Noch einfacher ausgedrückt müssen die Wörter (abgesehen vom leeren Wort) also immer mit einem gleichen Zeichen beginnen und enden. Also ist auch der noch einfachere Ausdruck

$$\varepsilon \,|\, a \,|\, b \,|\, a(a \,|\, b)^\star a \,|\, b(a \,|\, b)^\star b$$

korrekt (einfacher in dem Sinne, dass keine verschachtelten $^+$– und *–Operatoren auftreten, so dass sie leichter zu durchdenken sind).