Hochschule Karlsruhe
University of Applied Sciences

Fakultät für **Informatik**
und Wirtschaftsinformatik

Lehrgebiet für Grundlagen der Informatik
Prof. Dr. Heiko Körner

6. Übung zur Vorlesung Theoretische Informatik I

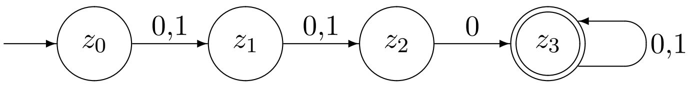
Musterlösungen

Aufgabe 1: Eine Möglichkeit ist z.B. die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

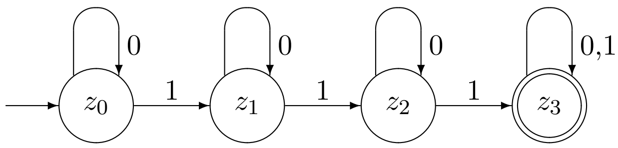
$$P = \{S \to aSa \,|\, bSb \,|\, cSc \,|\, a \,|\, b \,|\, c \,|\, aa \,|\, bb \,|\, cc\} \ .$$

Aufgabe 2: Wir geben für jede der genannten Sprachen passende DEAs an:

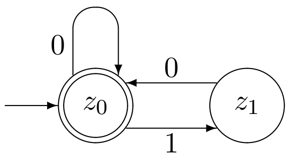
a) $L = \{w \mid w$ ist mindestens 3 Zeichen lang und das dritte Symbol ist eine Null$\}$:



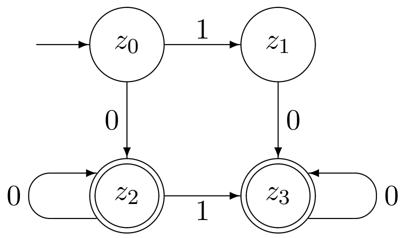
b) $L = \{w \mid w$ enthält zumindest 3 Einsen$\}$:



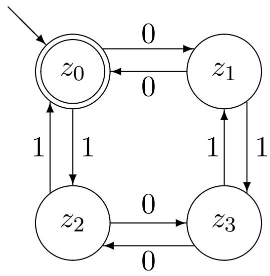
c) $L = \{w \mid$ in w folgt auf jede 1 immer (mindestens) eine 0$\}$:



d) $L = \{w \mid w$ enthält mindestens eine 0 und höchstens eine 1$\}$:



e) $L = \{w \mid$ die Anzahl der Nullen und Einsen in w ist jeweils gerade$\}$:



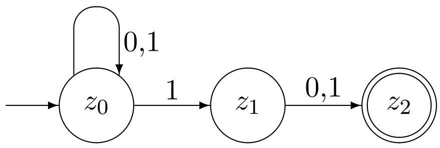
Bei diesem Automaten haben die einzelnen Zustände die folgende Bedeutung:

- z_0: „Bis jetzt wurde eine gerade Anzahl von Nullen und eine gerade Anzahl von Einsen verarbeitet."
- z_1: „Bis jetzt wurde eine ungerade Anzahl von Nullen und eine gerade Anzahl von Einsen verarbeitet."
- z_2: „Bis jetzt wurde eine gerade Anzahl von Nullen und eine ungerade Anzahl von Einsen verarbeitet."
- z_3: „Bis jetzt wurde eine ungerade Anzahl von Nullen und eine ungerade Anzahl von Einsen verarbeitet."

Diese vier Zustände reichen aus, um sich alle wichtigen Informationen zu merken.

Aufgabe 3: Sei $L := \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{das vorletzte Symbol in } w \text{ ist eine } 1\}$.

a) Die Sprache L wird von dem folgenden NEA akzeptiert:



Formal entspricht dieser NEA einem 5–Tupel $(\{z_0, z_1, z_2\}, \{0,1\}, \delta, \{z_0\}, \{z_2\})$ mit den Übergängen $\delta(z_0, 0) = \{z_0\}$, $\delta(z_0, 1) = \{z_0, z_1\}$, $\delta(z_1, 0) = \{z_2\}$, und $\delta(z_1, 1) = \{z_2\}$.

b) Die Übergangsfunktion δ des zugehörigen DEAs ergibt sich wie folgt. Wir starten von dem zukünftigen Startzustand $\{z_0\}$ und untersuchen die Zustandsmengen, die man mit den Symbolen 0 bzw. 1 erreichen kann. Wir erhalten:

$$\delta(\{z_0\}, 0) = \{z_0\} \quad \text{und} \quad \delta(\{z_0\}, 1) = \{z_0, z_1\} \ .$$

Für die neu aufgetretene Zustandsmenge $\{z_0, z_1\}$ führen wir die gleiche Analyse durch:

$$\delta(\{z_0, z_1\}, 0) = \{z_0, z_2\} \quad \text{und} \quad \delta(\{z_0, z_1\}, 1) = \{z_0, z_1, z_2\} \ .$$

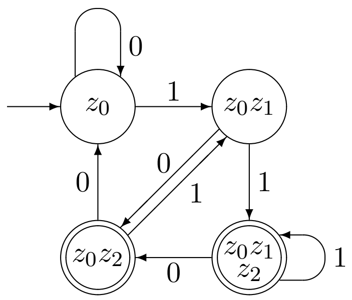
Jetzt haben wir es gleich mit zwei neuen Zustandsmengen zu tun, nämlich $\{z_0, z_2\}$ und $\{z_0, z_1, z_2\}$. Es ergibt sich:

$$\delta(\{z_0, z_2\}, 0) = \{z_0\} \quad \text{und} \quad \delta(\{z_0, z_2\}, 1) = \{z_0, z_1\}$$

sowie

$$\delta(\{z_0, z_1, z_2\}, 0) = \{z_0, z_2\} \quad \text{und} \quad \delta(\{z_0, z_1, z_2\}, 1) = \{z_0, z_1, z_2\} \ .$$

Die dabei erreichten Zustandsmengen wurden bereits analysiert. Es kommen also keine weiteren Zustandsmengen als neue Zustände zu dem Potenzmengenautomat hinzu. Die neuen Endzustände sind ferner alle diejenigen Zustandsmengen, an denen der frühere Endzustand z_2 beteiligt ist, hier also $\{z_0, z_2\}$ und $\{z_0, z_1, z_2\}$. Der Potenzmengenautomat (ohne überflüssige Zustände) sind demnach wie folgt aus:



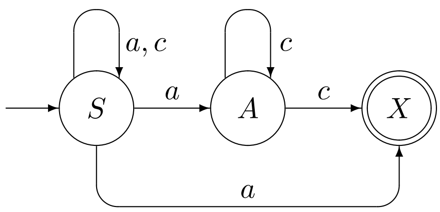
Machen Sie sich die Bedeutung der einzelnen Zustände klar (z.B. bedeutet der Zustand $\{z_0, z_1, z_2\}$: „Die beiden zuletzt gelesenen Symbole waren beides Einsen.“).

Aufgabe 4: Hier die Lösungen zu den einzelnen Teilaufgaben:

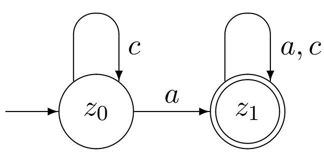
a) Drei aus G ableitbare Wörter sind z.B. a, aa und ca. Die zugehörigen Ableitungen lauten

$$S \Rightarrow a \ , \qquad S \Rightarrow aS \Rightarrow aa \ , \qquad S \Rightarrow cS \Rightarrow ca \ .$$

b) Die formale Konstruktion (Satz 2.2.12 der Vorlesung) ergibt diesen Zustandsgraph:



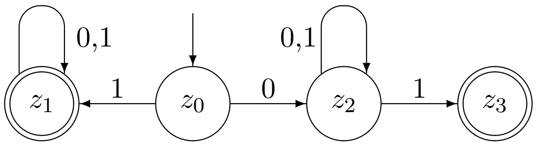
c) Der zukünftige Startzustand ist die Menge $\{S\}$. Die beiden Übergänge von dort aus sind $\delta(\{S\}, a) = \{S, A, X\}$ und $\delta(\{S\}, c) = \{S\}$. Für den neu aufgetretenen Zustand $\{S, A, X\}$ gilt ferner $\delta(\{S, A, X\}, a) = \{S, A, X\}$ und $\delta(\{S, A, X\}, c) = \{S, A, X\}$. Für den resultierenden DEA ergibt sich deshalb der folgende Zustandsgraph (dabei wurde aus Platzgründen die Menge $\{S\}$ in z_0 und $\{S, A, X\}$ in z_1 umbenannt):



d) Wegen den äquivalenten Umwandlungen akzeptiert der konstruierte DEA genau die von G generierte Sprache. Offenbar sind dies alle Wörter, die mindestens ein a enthalten.

Aufgabe 5: Die Lösungen zu den Teilaufgaben lauten:

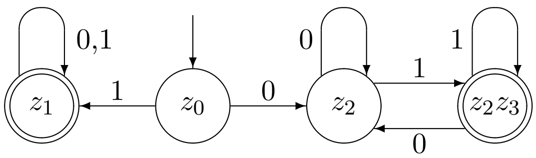
a) Ein möglicher NEA ist der folgende:



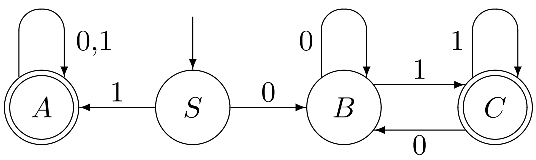
b) Der genannte NEA ist bereits „fast“ deterministisch, denn für alle Zustände außer z_2 mit einer zu verarbeitenden Eins sind die Übergänge (sofern vorhanden) eindeutig bestimmt. Also gelten die entsprechenden Übergänge auch für den DEA:

$$\delta(\{z_0\},0) = \{z_2\} \ , \quad \delta(\{z_0\},1) = \{z_1\} \ , \quad \delta(\{z_1\},0) = \{z_1\} \ ,$$
$$\delta(\{z_1\},1) = \{z_1\} \ , \quad \delta(\{z_2\},0) = \{z_2\} \ .$$

Der einzige nichtdeterministische Übergang im Ausgangs–NEA liegt beim Zustand z_2 vor, denn mit einer Eins kann man sowohl z_2 als auch z_3 erreichen. In dem neuen DEA gilt also $\delta(\{z_2\},1) = \{z_2,z_3\}$. Für die so neu erreichte Zustandsmenge $\{z_2,z_3\}$ gilt weiter $\delta(\{z_2,z_3\},0) = \{z_2\}$ und $\delta(\{z_2,z_3\},1) = \{z_2,z_3\}$, so dass sich keine weiteren Zustandmengen ergeben. Der Zustandsgraph des DEAs sieht demnach wie folgt aus:



c) Vor der formalen Umwandlung (Satz 2.2.11 der Vorlesung) des DEAs in eine reguläre Grammatik benennen wir die Zustandsmengen $\{z_0\}$, $\{z_1\}$, $\{z_2\}$ und $\{z_2,z_3\}$ in die gebräuchlicheren Variablen S, A, B und C um:



Die formale Umwandlung ergibt dann eine reguläre Grammatik $G = (V,\Sigma,P,S)$ mit der Variablenmenge $V := \{S,A,B,C\}$ sowie den Produktionen

$$P := \{S \to 0B \,|\, 1A \,|\, 1,\ A \to 0A \,|\, 1A \,|\, 0 \,|\, 1,\ B \to 0B \,|\, 1C \,|\, 1,\ C \to 0B \,|\, 1C \,|\, 1\} \ .$$

d) Drei aus G ableitbare Wörter sind z.B. 1, 10 und 01. Die zugehörigen Ableitungen lauten

$$S \Rightarrow 1 \ , \qquad S \Rightarrow 1A \Rightarrow 10 \ , \qquad S \Rightarrow 0B \Rightarrow 01 \ .$$