Theoretische Informatik I
Bonusblatt 1

Martin Redlof

WS22

Zur Abgabe

- Einreichung der Lösungen (in Papierform, geklammert, mit diesem Deckblatt) bis zum Tutorium am 10.11.2022
- Die eigentlichen Aufgabenbeschreibungen (nach diesem Deckblatt) müssen Sie nicht mit abgeben
- Abgabe in 2er- oder 3er-Gruppen
- Rückgabe und Besprechung im Tutorium
- Bitte denken Sie daran, Ihre Lösungen zu dokumentieren. Bei Formeln als konsistente äquivalente Umformungen (bei Bedarf kommentiert); bei sprachlich notierten Argumenten mit ausreichender Begründung.
    - Ziel: Ihre Kommiliton(inn)en sollten in der Lage sein, Ihre Abgabe gut lesen zu können.

Gruppenmitglieder:

Nachname	Vorname	Matrikelnummer

Erreichte Punkte:

A1	A2	A3	A4	Σ
(15)	(15)	(15)	(9)	(54)

Aufgabe 1: Aussagen und Mengen (1+3+6+3+2=15 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Aussagen:

$$\begin{aligned}
A &:= (4 < 7)\\
B &:= (3 > 8)\\
C &:= (\text{alle natürlichen Zahlen sind gerade})\\
D &:= (\text{es gibt keine größte natürliche Zahl})
\end{aligned}$$

und folgende Mengen (die hier als nicht-leer angenommen werden) mit der Grundmenge Ω:

$$\begin{aligned}
M &:= (\text{Menge aller Millionäre})\\
S &:= (\text{Menge aller Personen, die gerne Steuern zahlen})\\
\Omega &:= (\text{Menge aller Staatsbürger})
\end{aligned}$$

(a) Geben Sie die Wahrheitswerte der Aussagen $A, \cdots, D$ an.

(b) Formulieren Sie sprachlich, und geben Sie in Klammern den Wahrheitswert an:

- **(1)** $A \vee C$
- **(2)** $B \Rightarrow (C \wedge D)$
- **(3)** $A \Leftrightarrow D$

(c) Formulieren Sie für die folgenden Szenarien mathematische Ausdrücke mit den obigen Mengen (denken Sie dabei z.B. auch an Teilmengen, Komplemente, Mengenoperationen und die leere Menge $\emptyset$). Benutzen Sie hier *keine* Aussagen mit den Quantoren $\{\forall, \exists\}$, sondern einfache Ausdrücke wie z.B. $M \cup \overline{S} \neq \emptyset$.

- **(1)** Es gibt Personen im Staat, die nicht gerne Steuern bezahlen
- **(2)** Einige Millionäre zahlen gerne Steuern
- **(3)** Alle Millionäre zahlen gerne Steuern
- **(4)** Millionäre zahlen niemals gerne Steuern
- **(5)** Wer nicht Millionär ist, zahlt gerne Steuern
- **(6)** Von den Bürgern, die keine Millionäre sind, zahlen einige gerne Steuern.

(d) Vereinfachen Sie folgende Mengen so weit wie möglich:

- **(1)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 8 = 0\}$
- **(2)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 10 = 0\}$
- **(3)** Würde sich die Menge in Teilaufgabe (2) – bei gleichem Filter – ändern, wenn die Objekte x aus einer anderen Grundmenge gezogen würden? Wenn ja, wie mächtig wäre die Menge dann?

(e) Vereinfachen Sie die verneinte Implikation

$$\neg(A \Rightarrow B),$$

sodass Sie eine elementare Verknüpfung von A und B nur mit den Basisoperatoren aus $\{\wedge, \vee, \neg\}$ erhalten.

Tipp: Sie benötigen dafür die Darstellung der Implikation mit Basisoperatoren.

Aufgabe 2: Prädikatenlogik (2+2+2+2+5+2=15 Punkte)

Aussagen in Prädikatenlogik (der ersten Art) sind einheitlich notiert. Zuerst kommt ein *Quantor* aus $\{\forall, \exists\}$, dann eine Liste von *Objekten*, die aus passenden *Mengen* gezogen werden, dann ein Doppelpunkt, dann ein *Prädikat* (also eine Funktion mit Bildbereich $\{W, F\}$ und mit Parametern, die (irgendwo) links vom jeweiligen Doppelpunkt als Objekte gezogen wurden). Ist das Prädikat *nicht* erfüllt, so wird es verneint notiert.

Bei geschachtelten Aussagen dürfen/sollten Sie Klammern verwenden; auch neue Label sind erlaubt, wie im Tutorium vorgeführt.

Bei der *Negation* von solchen Aussagen geht man von außen nach innen vor (was die Schachtelung betrifft). Dabei wird der Quantor durch seinen dualen Quantor ersetzt, und das Prädikat hinter dem Doppelpunkt negiert.

Beispiel:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \big((x > y) \vee (x \leq y)\big)$$

Mit dem Label $p(x,y) := \big((x > y) \vee (x \leq y)\big)$ heißt es also

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : p(x,y)$$

Verneint:

$$\exists x, y \in \mathbb{R} : \neg p(x,y)$$

Und die verneinte Aussage zurück übersetzt (dabei deMorgan benutzen):

$$\begin{aligned} & \exists x, y \in \mathbb{R} : \neg\big((x > y) \vee (x \leq y)\big) \\ \Leftrightarrow \quad & \exists x, y \in \mathbb{R} : \big(\neg(x > y) \wedge \neg(x \leq y)\big) \\ \Leftrightarrow \quad & \exists x, y \in \mathbb{R} : \big((x \leq y) \wedge (x > y)\big) \end{aligned}$$

Falls das Prädikat selbst wiederum eine in Prädikatenlogik formulierte Aussage ist, führt man dessen Verneinung analog wie oben beschrieben durch.

Für ersten beiden Teilaufgaben formulieren wir die Prädikate

$$m(x) := (x \in M) \qquad \text{und} \qquad s(x) := (x \in S)$$

(a) Mit diesen Prädikaten für die Mengen aus Aufgabe 1, formulieren Sie die Beziehungen 2, 3, 5 und 6 aus Aufgabe 1c in Prädikatenlogik.

(b) Negieren Sie diese vier Aussagen jeweils (nur in Prädikatenlogik).

(c) Betrachten Sie die geschachtelte Aussage:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : n > x$$

Geben Sie diese Aussage als Text wieder; danach bilden Sie die negierte Aussage (prädikatenlogisch und als Text).

Tipp: Sie können für das innere Prädikat eine eigene Funktion, z.B. $p(x)$, einführen und die Verneinung in zwei einzelnen Schritten ausführen.

(d) Übersetzen Sie folgende textuelle Aussage in Prädikatenlogik:

> Alle reellen Zahlen haben nicht-negatives Quadrat; außerdem gibt es jeweils eine natürliche Zahl, die größer als dieses Quadrat ist.

Bilden Sie auch hier die negierte Aussage (textuell und prädikatenlogisch).

Tipp: Verwenden Sie Klammern, um beim Verneinen die richtige Reihenfolge einzuhalten

(e) Negieren Sie die folgende komplexere Aussage, die sich auf Wörter einer Sprache L über dem Alphabet Σ bezieht. Beachten Sie: Der genaue *Inhalt* der Aussage ist an dieser Stelle noch nicht wichtig; hier soll es nur um die Methodik beim Verneinen von prädikatenlogischen Aussagen gehen. Lesen Sie vor dem Lösen der Aufgabe bitte zunächst alle Tipps durch.

$$\exists n \in \mathbb{N} : \left(\forall z \in L : \left[\Big(|z| \geq n\Big) \Rightarrow \left(\exists u, v, w \in \Sigma^* : \left[\begin{array}{rrcl} & z & = & uvw \\ \wedge & |v| & \geq & 1 \\ \wedge & |uv| & \leq & n \\ \wedge & \multicolumn{3}{l}{\Big(\forall j \in \mathbb{N}_0 : uv^j w \in L\Big)} \end{array} \right] \right) \right] \right)$$

Tipps:

- Führen Sie auch hier je nach Bedarf eigene Funktionen ein, z.B. um die Ausdrücke in den verschiedenen Klammern abzukürzen
- Achten Sie bei diesen Funktionen auf die Parameter. Z.B. hängt der Ausdruck in der äußersten runden Klammer nur von dem n links des ersten Doppelpunkts ab; der Ausdruck in der äußeren eckigen Klammer aber schon von n und z.
- In der äußeren eckigen Klammer steht eine Implikationsbeziehung $A \Rightarrow B$. Verwenden Sie Ihr Ergebnis aus Aufgabe 1e, um diese Beziehung zu negieren.
- In der inneren runden Klammer werden Teilwörter u, v, w eingeführt; damit ist (in der inneren eckigen Klammer) eine *Zerlegung* des Worts z definiert. Diese soll (in nicht-negierter Form) folgende Eigenschaften haben (die hier momentan noch nicht wichtig sind, aber später in der Vorlesung noch behandelt werden):
  - Das mittlere Teilwort ist nicht leer (also ungleich ε)
  - Das mittlere Teilwort befindet sich komplett innerhalb der ersten n Zeichen
  - Das mittlere Teilwort kann beliebig oft eingefügt werden (auch null mal, d.h. man kann es auch weglassen), wobei das resultierende Wort weiterhin zur Sprache L gehört

  Beim Negieren der inneren eckigen Klammer ist eine Konjunktion mit vier Termen (vier "Und-Aussagen") zu verneinen. Benutzen Sie hierfür die deMorgan-Regel (die, wie auf dem ersten Übungsblatt gezeigt, auch für mehr als zwei Variablen gültig ist).

(f) Bei der Negation des Ausdrucks in der inneren eckigen Klammer der vorigen Teilaufgabe beschränkt man sich üblicherweise (wird in der Vorlesung später noch besprochen!) auf den Fall, dass die ersten drei Und-Aussagen logisch wahr bleiben (dann sind also ihre Negationen in der verneinten Aussage jeweils logisch falsch).

Was gilt dann für die vierte Und-Aussage in der inneren eckigen Klammer, damit der gesamte Ausdruck der negierten inneren eckigen Klammer logisch wahr wird?

Notieren Sie die Negation der vierten Und-Aussage nochmals separat.

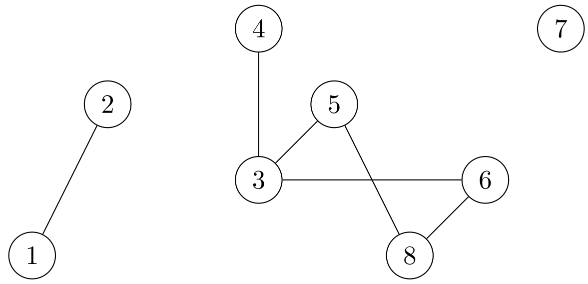
Aufgabe 3: Äquivalenzrelation (2+3+1+2+5+2=15 Punkte)

Wir betrachten hier eine Relation auf ungerichteten einfachen Graphen.

Definition: Ein *ungerichteter einfacher Graph G mit n Knoten* ist ein Paar (V, e) aus einer *Knotenmenge* $V := \{1, \cdots, n\}$ und einer Funktion $e : V \times V \to \{0, 1\}$, die beschreibt, welche der Knoten über *Kanten* verbunden sind.

Ist $e(j, k) = 1$, so existiert eine Kante (d.h. *direkte* Verbindung) zwischen den Knoten j und k. Andernfalls ($e(j, k) = 0$) gibt es keine solche Verbindung. Weiterhin ist bei einfachen Graphen kein Knoten mit sich selbst verbunden, d.h. $e(j, j) = 0$ für alle $1 \leq j \leq n$.

Beispiel:



Definition: In einem Graphen $G = (V, e)$ ist ein *Pfad der Länge k*, $k \in \mathbb{N}_0$, eine Abfolge von $(k + 1)$ Knoten aus V (Knoten dürfen mehrfach vorkommen!), hier geschrieben

$$(v_1 - v_2 - \cdots - v_k - v_{k+1}),$$

wobei jedes Paar aufeinander folgender Knoten $v_j - v_{j+1}$ eine direkte Verbindung (Kante) aufweisen muss, d.h.

$$\forall j \in \{1, \cdots, k\} : e(v_j, v_{j+1}) = 1$$

(a) Geben Sie alle Paare von Knoten (j, k) an, für die im obigen Beispielgraph $e(j, k) = 1$ ist.

Tipp: Falls $e(j, k) = 1$, was gilt dann für $e(k, j)$?

(b) Nennen Sie drei verschiedene Pfade der Länge 1 im obigen Beispielgraph

(c) Nennen Sie einen Pfad der Länge 5 im obigen Beispielgraph

(d) Nennen Sie zwei verschiedene Pfade der Länge 0 im obigen Beispielgraph

(e) Wir definieren nun eine Relation R auf der Knotenmenge V eines Graphen $G = (V, e)$, die die *indirekte Verbundenheit* beschreibt:

Definition: Zwei Knoten $j, k \in V$ heißen *indirekt verbunden*, d.h. jRk, falls es einen Pfad mit Länge n, $n \in \mathbb{N}_0$, zwischen den Knoten j und k gibt.

Zeigen Sie, dass die Relation R der indirekten Verbundenheit eine Äquivalenzrelation ist.

Tipp: Dazu müssen Sie drei Kriterien prüfen und jeweils begründen, warum sie erfüllt sind.

(f) Da R eine Äquivalenzrelation ist, zerfällt die zugrunde liegende Menge V unter R in disjunkte Äquivalenzklassen. Geben Sie für den obigen Beispielgraph alle Äquivalenzklassen von R an (man bezeichnet sie auch als *Zusammenhangskomponenten* des Graphen).

Aufgabe 4: Formale Sprachen (9 Punkte)

Geben Sie eine Zuordnung an, die jeden der linken Begriffe mit genau einem der rechten Begriffe verbindet. Es reicht, wenn Sie jeweils die Indices verbinden, z.B. in der Art "12—5".

1	Konkatenation von $w \in \Sigma^*$ mit ε
2	Alphabet
3	alle möglichen Wörter über Σ
4	Wort
5	Konkatenation von $w \in \Sigma^*$ mit w
6	Sprache über Σ
7	Konkatenation von $L \subseteq \Sigma^*$ mit $\emptyset$
8	Konkatenation von $L \subseteq \Sigma^*$ mit $\{\varepsilon\}$
9	Sprache

1	Σ^*
2	w^2
3	w
4	$\emptyset$
5	Menge von Wörtern
6	Menge von Zeichen
7	$L \subseteq \Sigma^*$
8	L
9	Konkatenation von Zeichen