

## 5. Übung zur Vorlesung Theoretische Informatik I

**Aufgabe 1 (•••):** Seien  $f, g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  zwei Funktionen. Man kann aus  $f$  und  $g$  zwei weitere Funktionen namens  $f + g$  und  $\max\{f, g\}$  definieren. Ihre Funktionwerte sind jeweils die Summe bzw. das Maximum der beiden ursprünglichen Funktionswerte, d.h. es gilt für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ :

$$(f + g)(n) := f(n) + g(n) \quad \text{und} \quad \max\{f, g\}(n) := \max\{f(n), g(n)\} .$$

Ist z.B.  $f(n) := 4n^2$  und  $g(n) := n^3$ , so gilt  $(f + g)(n) = n^3 + 4n^2$  sowie

$$\max\{f, g\} = \begin{cases} 4n^2 & \text{falls } n \leq 4 \\ n^3 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass dann stets (also nicht nur in diesem Beispiel!)  $f + g = O(\max\{f, g\})$  gilt.

**Aufgabe 2 (•):** Notieren Sie zu jeder der folgenden Sprachen über  $\Sigma = \{0, 1\}$  fünf darin enthaltene Wörter:

- a)  $L = \{w \mid w \text{ ist mindestens 3 Zeichen lang und das dritte Symbol ist eine Null}\}$
- b)  $L = \{w \mid w \text{ enthält zumindest 3 Einsen}\}$
- c)  $L = \{w \mid \text{in } w \text{ folgt auf jede 1 immer (mindestens) eine 0}\}$
- d)  $L = \{w \mid w \text{ enthält mindestens eine 0 und höchstens eine 1}\}$
- e)  $L = \{w \mid \text{die Anzahl der Nullen und Einsen in } w \text{ ist jeweils gerade}\}$

Wie steht es um das leere Wort  $\varepsilon$ ? Ist es jeweils in  $L$  enthalten oder nicht?

**Aufgabe 3 (•):** Betrachten Sie die Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  mit folgenden Produktionen:

$$P = \{S \rightarrow AB \mid BC, A \rightarrow BA \mid 0, B \rightarrow CC \mid 1, C \rightarrow AB \mid 0\} .$$

- a) Geben Sie die Variablenmenge  $V$  und das Terminalalphabet  $\Sigma$  von  $G$  an.
- b) Versuchen Sie für das Wort  $101 \in L(G)$  eine passende Ableitung zu finden.
- c) Versuchen Sie für das Wort  $110100 \in L(G)$  eine passende Ableitung zu finden.
- d) Ordnen Sie  $G$  entsprechend der Chomsky-Hierarchie ein. Geben Sie dazu an, ob  $G$  eine Typ 0-, Typ 1-, Typ 2-, und/oder Typ 3-Grammatik ist.

**Aufgabe 4 (••):** Konstruieren Sie kontextfreie Grammatiken für die folgenden Sprachen:

- a)  $L = \{a^m b^m \mid m \geq 1\}$
- b)  $L = \{b^n c^n \mid n \geq 1\}$
- c)  $L = \{a^m b^{m+n} c^n \mid m, n \geq 1\}$
- d)  $L = \{a^m b^n a^\ell \mid m, n, \ell \geq 1 \text{ und } \ell > m + n\}$