Hochschule Karlsruhe
University of Applied Sciences

Fakultät für Informatik
und Wirtschaftsinformatik

Lehrgebiet für Grundlagen der Informatik
Prof. Dr. Heiko Körner

5. Übung zur Vorlesung Theoretische Informatik I

Musterlösungen

Aufgabe 1: Natürlich ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$ stets $f(n)$ kleiner oder gleich $\max\{f(n), g(n)\}$. Analog gilt auch $g(n) \leq \max\{f(n), g(n)\}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so dass wir

$$\forall n \geq n_0\colon\ f(n) + g(n) \leq \max\{f(n), g(n)\} + \max\{f(n), g(n)\} = 2 \cdot \max\{f, g\}(n)$$

schließen können. Mit der Wahl $n_0 := 1$ und $c := 2$ erhalten wir somit die Aussage

$$\forall n \geq n_0\colon\ (f+g)(n) = f(n) + g(n) \leq c \cdot \max\{f(n), g(n)\} = c \cdot \max\{f, g\}(n)\ ,$$

d.h. es gilt $f + g = O(\max\{f, g\})$. $\square$

Aufgabe 2: Nachfolgend sind Wörter aus den einzelnen Sprachen genannt. Das leere Wort ε wurde mit angegeben, sofern es in der Sprache enthalten ist.

a) 110, 000, 010101, 1101, 000111000111, usw.

b) 111, 01010101010, 1101, 000111000111, usw.

c) ε, 0, 000, 10, 010100, 100, usw.

d) 0, 00, 000, 01, 10, usw.

e) ε, 00, 1010, 1100, 010100, 1111, usw.

Aufgabe 3: Die Lösungen lauten wie folgt:

a) Es gilt $V = \{S, A, B, C\}$ und $\Sigma = \{0, 1\}$.

b) Eine mögliche Ableitung ist

$$S \Rightarrow_G BC \Rightarrow_G BAB \Rightarrow_G B0B \Rightarrow_G 10B \Rightarrow_G 101\ .$$

Eine weitere Lösung wäre

$$S \Rightarrow_G AB \Rightarrow_G BAB \Rightarrow_G B0B \Rightarrow_G 10B \Rightarrow_G 101\ .$$

c) Für das Wort 110100 ist diese Ableitung möglich:

$$S \Rightarrow_G BC \Rightarrow_G CCC \Rightarrow_G CC0 \Rightarrow_G C00 \Rightarrow_G AB00 \Rightarrow_G BAB00$$
$$\Rightarrow_G 1AB00 \Rightarrow_G 1A100 \Rightarrow_G 1BA100 \Rightarrow_G 11A100 \Rightarrow_G 110100\ .$$

d) G ist kontextfrei und somit vom Typ 2, 1 und 0. G ist nicht vom Typ 3, da z.B. die Regel $S \to AB$ die Restriktionen für eine reguläre Grammatik verletzt.

Aufgabe 4: Die drei Sprachen können z.B. mit diesen Grammatiken erzeugt werden:

a) $S \to aSb \mid ab$

b) $S \to bSc \mid bc$

c) $S \to AB,\ A \to aAb \mid ab,\ B \to bBc \mid bc$

d) Hier führen z.B. die Produktionen

$$S \to aSa \mid aAa,\ A \to bAa \mid Aa \mid baa$$

zum Ziel. Man sieht leicht, dass aus A nur Wörter der Form $\{b^n a^{n'} \mid n, n' \in \mathbb{N} \text{ und } n < n'\}$ ableitbar sind. Ferner führt jede erfolgreiche Ableitung eines Wortes aus S zwingend über eine Satzform $a^m A a^m$ mit $m \in \mathbb{N}$. Daraus ergibt sich die Korrektheit der Grammatik.