Hochschule Karlsruhe
University of Applied Sciences

Fakultät für Informatik
und Wirtschaftsinformatik

Lehrgebiet für Grundlagen der Informatik
Prof. Dr. Heiko Körner

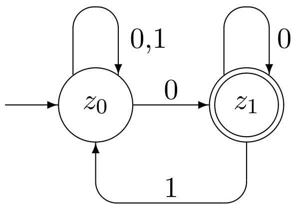
10. Übung zur Vorlesung Theoretische Informatik I

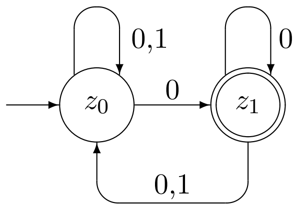
Musterlösungen

Aufgabe 1: Der NEA M kann nach dem Satz 2.2.10 der Vorlesung in einen DEA M' mit $L(M') = L(M)$ umgewandelt werden. Weiterhin kann nach Satz 2.2.11 aus M' eine reguläre Grammatik G mit $L(G) = L(M')$ konstruiert werden. Nach Satz 2.2.12 existiert wiederum ein NEA N mit $L(N) = L(G)$, also $L(N) = L(M)$. Dieser NEA besitzt zudem gemäß Konstruktion nur einen Endzustand, den wir X genannt haben. $\square$

Aufgabe 2: Bei einer endlichen Sprache L kann man die Pumping–Lemma–Zahl n einfach so groß wählen, dass jedes Wort aus L kürzer als n ist. Dann sind alle Bedingungen des Pumping–Lemmas trivialerweise erfüllt, denn diese treffen nur auf Wörter aus L mit einer Mindestlänge von n zu — und von diesen gibt es keine. $\square$

Aufgabe 3: Die beiden folgenden NEAs akzeptieren die genannte Sprache, sind aber nicht völlig identisch, da der zweite Automat noch einen weiteren (an sich überflüssigen) Übergang von z_1 nach z_0 besitzt:





Aufgabe 4: Für die Nichtregularität von $L := \{a^p b^{2q} a^q \mid p, q \in \mathbb{N}\} \cup \{b^p a^q \mid p, q \in \mathbb{N}\}$ werden nachfolgend die verschiedenen Beweistechniken analysiert.

a) Angenommen, L wäre regulär. Sei n die Pumping–Lemma–Zahl. Für jede Zerlegung von einem Wort $x \in \{a^p b^{2q} a^q \mid p, q \in \mathbb{N}\}$ mit $|x| \geq n$ in $x = uvw$ und $|uv| \leq n$ sowie $|v| \geq 1$ könnte $u = \varepsilon$ und $|v| = 1$ sein. Da x mit zumindest einem a beginnt, ist also $v = a$. Wird v nun zusätzlich gepumpt, so entstehen lediglich weitere führende a's — aber alle diese Wörter sind ebenfalls in $\{a^p b^{2q} a^q \mid p, q \in \mathbb{N}\}$ und damit L enthalten. Gleiches gilt, wenn das Teilwort v ausgelassen wird. Lediglich im Fall $p = 1$ wird das einzige führende a von x entfernt. Das resultierende Wort ist dann aber von der Form $b^{2q} a^q$ für ein $q \in \mathbb{N}$, d.h. es ist jetzt in $\{b^p a^q \mid p, q \in \mathbb{N}\}$ enthalten und somit immer noch ein Wort aus der Sprache L. Für die Wörter aus $\{a^p b^{2q} a^q \mid p, q \in \mathbb{N}\}$ kann deshalb kein Widerspruch abgeleitet werden.

Ähnliches gilt für die Wörter aus $\{b^p a^q \mid p, q \in \mathbb{N}\}$. Für jedes solche Wort x — es besteht aus einer nichtleeren Folge von b's, gefolgt von einer nichtleeren Folge von a's — kann die

Sprechstunde montags 08-09 Uhr Raum E 204 ∗ Tel.: (0721) 925–1507 ∗ Email: heiko.koerner[at]h–ka[dot]de

Zerlegung in $x = uvw$ ungünstigerweise immer so ausfallen, dass das zusätzliche Pumpen oder Weglassen von v nichts ausmacht. Denn v könnte auch hier ein einzelnes a bzw. b innerhalb des a– oder b–Bereichs von x sein, so dass durch das Pumpen von v der jeweilige Bereich nur verlängert oder um ein Symbol verkürzt wird. Einzige Ausnahme hiervon wäre das Wort $x = ab$, da das Weglassen eines Teils von x auf jeden Fall ein Wort außerhalb von L erzeugen würde. Dieses Wort erfüllt jedoch nicht unbedingt die Voraussetzung $|x| \geq n$. In der Tat kann man für die Menge $\{b^p a^q \,|\, p, q \in \mathbb{N}\}$ leicht einen passenden regulären Ausdruck angeben, nämlich $b^+ a^+$.

Die Beweiskraft des Pumping–Lemmas ist also hier zu schwach, um etwas über die Regularität von L auszusagen.

b) Wir betrachten z.B. die Wörter ab^{2q} mit $q \in \mathbb{N}$. Alle diese Wörter sind paarweise R_L–inäquivalent, denn für je zwei solche Wörter ab^{2q} und ab^{2p} mit $q \neq p$ und $z := a^q$ ist zwar $ab^{2q}z = ab^{2q}a^q$ in L enthalten, nicht aber $ab^{2p}z = ab^{2p}a^q$. Folglich gibt es unendlich viele R_L–Äquivalenzklassen. Also ist L nicht regulär.

Aufgabe 5: Die Antwort auf die erste Frage ist „ja“, die Antwort auf die zweite Frage „nein“:

a) Für jede Sprache L_i, $i \in X$, existiert ein passender regulärer Ausdruck α_i mit $\varphi(\alpha_i) = L_i$. Für endliche Mengen $X = \{i_1, i_2, \ldots, i_j\}$ ist demnach $\alpha := \alpha_{i_1} \,|\, \alpha_{i_2} \,|\, \ldots \,|\, \alpha_{i_j}$ ein regulärer Ausdruck mit $\varphi(\alpha) = L$. Also ist L regulär.

b) Wir geben ein Gegenbeispiel für den Fall $X := \mathbb{N}$ an. Für die einelementigen (und deshalb regulären) Sprachen $L_i := \{a^i b^i\}$ ergibt sich nämlich $L = \{a^n b^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, und diese Sprache ist bekanntlich nicht regulär.