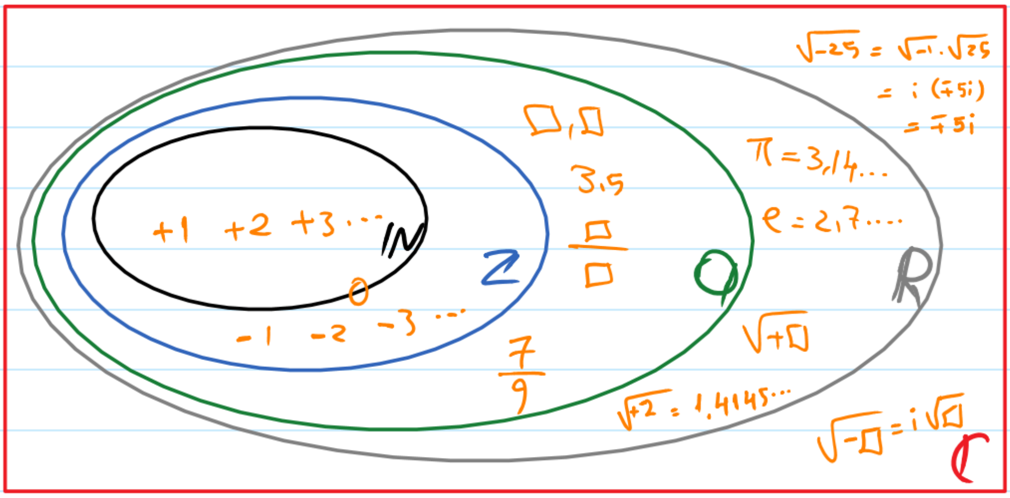
Mathematik.1, Ahmad Assani

Vorlesung (1)

1 Einführung

1.1 Das Reich der Zahlen



\+ Menge $\quad M = \{\text{rot}, \text{Gelb}, \text{grün}\}$ ↗ Geschweifte Klammern

$A = \{\text{Apfel}, \text{Banane}, \text{Ananas}, \text{Birne}\}$

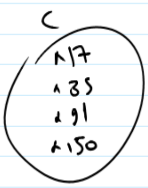
$B = \{\text{Sarah}, \text{Ahmad}, \text{Marc}, \text{Ilave}\}$

$C = \{17, 35, 91, 150\}$

( ) Runde Klammern

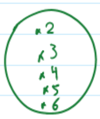
[ ] Eckige "

{ } Geschweifte "



Ven Digramm

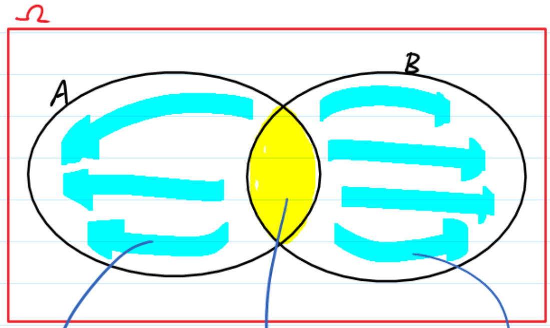
$\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

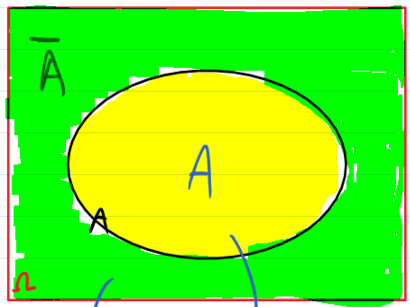


Mit Eigenschaft

→ $\Omega = \{x \in \mathbb{N}, 2 \leq x \leq 6\}$

→ $\Omega = \{x \in \mathbb{N}; 1 < x < 7\}$





$A-B$ oder $A\setminus B$

$A\cap B$

$B-A$ oder $B\setminus A$

zusammen

$A\cup B$

$\Omega\setminus A = \Omega - A = \bar{A}$

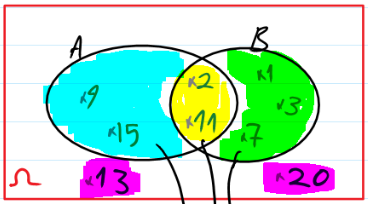
A

Beispiel:

$\Omega = \{1, 2, 3, 7, 9, 11, 13, 15, 20\}$

$A = \{2, 9, 11, 15\}$

$B = \{1, 2, 3, 7, 11\}$



1. Vereinigungsmenge: $A\cup B = \{1, 2, 3, 7, 9, 11, 15\}$ zusammen
2. Schnittmenge: $A\cap B = \{2, 11\}$
3. Differenz: $A - B = A\setminus B = \{9, 15\}$

   $B - A = B\setminus A = \{1, 3, 7\}$
4. $\bar{A} = \{1, 3, 7, 13, 20\} = \Omega - A$

   $\bar{B} = \{9, 13, 15, 20\} = \Omega - B$
5. $\overline{A\cup B} = \Omega - A\cup B = \{13, 20\}$

Teilmenge $\not\subset$ $\subset$

* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 11, 19\}$

Menge — Menge

$A = \{2, 3, 5\} \longrightarrow A \subset \Omega$ $\left\{ \Omega \text{ enthält } A \text{ oder } A \text{ eine Teilmengen von } \Omega \right\}$

$B = \{8, 19\} \longrightarrow B \not\subset \Omega$

$C = \{17, 20, 25\} \longrightarrow B \not\subset \Omega$

* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 10, 17\}$

$\in$ "Element"

$\notin$ "element nicht"

$1 \in \Omega$ $\quad$ $15 \notin \Omega$ $\quad$ $\{3\} \subset \Omega$ (Menge, Menge)

$17 \in \Omega$ $\quad$ $\{3,4\} \subset \Omega$ $\quad$ $\{15\} \not\subset \Omega$

element — Menge — Menge — Menge

1.2 Logische Grundlagen

1.2.1 Aussagen:

Mathematische Aussagen sind sprachliche Äußerungen, denen sich stets ein eindeutigen Wahrheitsgehalt
habe, nämlich

wahr (auch w, 1) oder falsch (auch f, 0).

Wir werden Aussagen oft mit großen Buchstaben A, B, C, . . . bezeichnen.

Beispiele:

• A: Konstanz ist eine Stadt am Bodensee. (w)
• B: 3 > 2 (w)
• C: Montag ist der Name eines Monats (f)

Aussagen können sich auch auf andere Aussagen beziehen:
• D: C ist eine wahre Aussage (f)

Kein Aussagen (im mathematischen Sinn) sind hingegen sind z.B.
• Pizza schmeckt gut.
• Wo liegt Konstanz?
• -h2439“„€IA“„EK“IAKßîçé8

1.2.2 Verknüpfungen von Aussagen:

Aussagen können logisch miteinander verknüpft werden, d.h. aus mehreren Aussagen wird eine neue Aussage erzeugt. Die Verknüpfungen werden auch Junktoren genannt. Für Aussagen A, B
werden folgende logische Verknüpfungen von Aussagen verwendet:

Bezeichnung	Symbol	Bedeutung / Sprechweise
Negation (Verneinung)	$\neg A$	nicht A
Konjunktion	$A \wedge B$	A *und* B
Disjunktion	$A \vee B$	A *oder* B
Implikation	$A \Rightarrow B$	*wenn* A *dann* B
Äquivalenz	$A \Leftrightarrow B$	A *genau dann wenn (g.d.w)* B

1.2.3 Wahrheitstafeln:

Wenn in der Mathematik Aussagen durch
nicht (¬), und (∧), oder (∨), entweder . . . oder (XOR = ⊕), genau dann wenn (↔),
wenn . . . dann (→) verknüpft sind, dann ist die Bedeutung gemäß folgender Wahrheitstafel gemeint.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \operatorname{xor} B$	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1

Bemerkung: Folgende Formulierungen sind gleichbedeutend:

$A \Rightarrow B$:
- A impliziert B
- Aus A folgt B
- Wenn A (wahr ist), dann (ist auch) B wahr
- A ist hinreichend für B

$B \Rightarrow A$:
- A ist notwendig für B !Reihenfolge beachten!
- Nur wenn A (wahr ist), dann kann B (wahr sein) !Reihenfolge beachten!

$A \Leftrightarrow B$:
- A ist äquivalent zu B
- A genau dann wenn B
- A gilt dann und nur dann wenn B
- A ist notwendig und hinreichend für B

Definition (Tautologie, Kontradiktion)
Ein Ausdruck heißt Tautologie bzw. allgemeingültig, wenn er immer wahr ist - unabhängig von den Wahrheitswerten der darin auftretenden Aussagevariablen.

Ein Ausdruck heißt Kontradiktion bzw. kontradiktorisch, wenn er immer falsch ist - unabhängig von den Wahrheitswerten der darin auftretenden Aussagevariablen.

Beispiele

- $A \vee \neg A$ ist eine Tautologie.
- $A \wedge \neg A$ ist kontradiktorisch.
- $A \rightarrow \neg A$ ist weder eine Tautologie noch eine Kontradiktion.

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$	$A \wedge \neg A$	$A \rightarrow \neg A$
0	1	1	0	1
1	0	1	0	0

Bei einer Tautologie enthält die Ergebnisspalte **nur** den Wert 1, bei einer Kontradiktion **nur** den Wert 0.

Satz (de Morgansche Regeln)
Es gilt:

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

Beweis

Wir beweisen die Äquivalenzen mittels Wahrheitstafel.

A	B	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0

Satz
Es gelten die Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
A \rightarrow B &\Leftrightarrow \neg A \vee B \\
A \rightarrow B &\Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A \\
A \leftrightarrow B &\Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \\
&\Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \\
A \wedge (B \vee C) &\Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\
A \vee (B \wedge C) &\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)
\end{aligned}$$

Beispiel.1:

Zeige anhand einer Wahrheitstafel, dass auch die folgenden Aussageformen Tautologien sind.

$$(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C) \quad \text{(Distributivität von } \vee\text{)}$$

Lösung:

Wir setzen φ: $(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$.

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \vee C$	$A \vee C$	$B \vee C$	$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$	φ
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Beispiel.2:

Gegeben sind die Aussagevariablen:
P: Der Preis fällt.
W: Das Warenangebot nimmt zu.
N: Die Nachfrage stagniert.
A: Der Anbieter ist zufrieden.
E: Neue Einsatzgebiete entstehen.

Formalisieren Sie die Aussagen jeweils mit Hilfe der obigen Aussagevariablen:
1. Der Preis fällt, wenn das Warenangebot zunimmt und die Nachfrage stagniert.
2. Nur wenn der Preis fällt, können neue Einsatzgebiete entstehen.
3. Der Anbieter ist zufrieden, aber die Nachfrage stagniert.
4. Dafür, dass der Anbieter zufrieden ist, ist hinreichend, dass der Preis nicht fällt.
5. Der Preis fällt genau dann, wenn die Nachfrage stagniert.
6. Entweder ist der Anbieter zufrieden, oder der Preis fällt und die Nachfrage stagniert.
7. Notwendig für das Fallen des Preises ist die Stagnation der Nachfrage.
8. Obwohl das Warenangebot zunimmt, entstehen keine neuen Einsatzgebiete und der Anbieter ist nicht zufrieden.

Lösung:

1. $(W \wedge N) \rightarrow P$
2. $E \rightarrow P$
3. $A \wedge N$
4. $\neg P \rightarrow A$
5. $P \leftrightarrow N$
6. A xor $(P \wedge N)$
7. $P \rightarrow N$
8. $W \wedge (\neg E \wedge \neg A)$

Beispiele:

Zeige anhand einer Wahrheitstafel oder durch Umformung unter Verwendung schon bekannter Tautologien, dass auch die folgenden Aussageformen Tautologien sind.

(a) $A \vee (B \wedge \neg B) \Rightarrow A$

(b) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

Lösung:

(a)

A	B	$\neg B$	$B \wedge \neg B$	$A \vee (B \wedge \neg B)$	$A \vee (B \wedge \neg B) \Rightarrow A$
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1

(b) Wir setzten $\psi : (A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	ψ
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1