## 3.1 Modelare matematică

Modelarea matematică a unui sistem presupune, în linii mari, descrierea relațiilor dintre variabilele sistemului folosind expresii matematice (de obicei ecuații diferențiale). Se urmărește obținerea unei abstractizări a sistemului real (aici robotul instabil autobalansat pe două roți) și, prin aceasta, o aproximarea a comportamentului acestuia. Determinarea acestor relații matematice se poate face în 2 moduri (sau printr-o combinație între acestea): fie folosind metode analitice, fie folosind metode din identificarea sistemelor.

Prima variantă presupune descompunerea sistemului în mai multe subsisteme ale căror proprietăți sunt bine-cunoscute. În acest caz, pentru obținerea expresiilor matematice ne bazăm pe „legile fizicii”. Odată modelate, aceste subsisteme sunt reunite matematic, obținându-se modelul întregului sistem.

Cea de-a doua variantă este fundamentată direct pe experiment; în acest caz, semnalele de intrare și de ieșire ale sistemului sunt înregistrate și analizate pentru obținerea modelului. Modelul este instrumentul folosit pentru analiză (determinarea caracteristicilor robotului), pentru simulare și predicție (observarea și prezicerea reacțiilor sistemului în situații noi), pentru proiectarea controllerului (determinarea valorilor semnalelor de intrare astfel încât să se obțină comportamentul dorit) și altele [1]. Toate aceaste utilități sunt motivul pentru care modelul sistemului este o componentă esențială în derularea capitolelor următoare.

Sistemul de transport instabil pe două roţi este un robot mobil, autobalansat, pe două roţi şi autonom. Acesta a fost produs de firma INTECO şi are scop strict academic. Din acest motiv, producătorii pun la dispoziţia utilizatorilor şi o componentă software care facilitează operaţiile de modelare şi control, prin intermediul unei interfeţe compatibilă cu MatLab2015a. Rolul principal al acestei interfeţe este transformarea diagramelor Simulink create de către utilizator în cod C (compatibil cu limbajul de programare al sistemului), şi apoi transferarea codului obținut către computerul de bord al robotului. Fiind autonom, robotul este dotat cu un modul dedicat pentru comunicare wireless cu computerul pe care este instalată această componentă software. În acest fel, este eliminată necesitatea existenţei conexiunilor fizice pentru programare sau pentru achiziţii de date. Tot prin intermediul acestui modul este posibilă vizualizarea în timp real a datelor înregistrate de senzorii de la nivelul sistemului în timpul mişcării.

Din punct de vedere structural, sistemul autobalansat este alcătuit din două roți coaxiale, antrenate de câte un motor de curent continuu, un pendul inversat, conecatat la restul sistemului la mijlocul distanţei dintre cele două roți, şi un computer de bord. Computerul de bord este compus din mai multe module dedicate: pentru logica de control şi comunicarea wireless (PandaBoard), pentru achiziţionarea de date (IMU – Inertial Measurements Unit şi Encoder) şi pentru interfaţarea (Interface) modulelor menţionate anterior cu circuitele de comandă şi alimentare ale motoarelor de curent continuu (Batteries, DCMotor, Gear). Arhitectura internă a robotului este oferită de către firma producătoare, în manualul de utilizare al robotului [2], şi este prezentată în schema de mai jos.

|  |
| --- |
| *Fig3.1.1 Diagrama bloc a robotului* [2] |

Manualul de utilizare al robotului [2] oferă o expunere detaliată a componentelor hardware și software, indicații privind realizarea achizițiilor de date pentru modelare și implementarea algoritmilor de control, precum și modelul sistemului obținut prin metoda analitică.

Existența unui modul de achiziționare de date este o facilitate importantă oferită de către firma producatoare întrucât permite modelarea matematică folosind metode din identificarea sistemelor. Așa cum am menționat anterior, această abordare se bazează pe observarea și înregistrarea semnalelor de intrare și de ieșire ale sistemului. Modulul de achiziție de date raportează asupra ieșirilor: poziția roților (printr-un Encoder plasat pe fiecare roată), accelearația unghiulară a acestora (printr-un Accelerometru plasat pe fiecare motor) și viteza unghiulară a pendulului inversat în raport cu axa verticală (printr-un senzor de tip Gyroscop). Intrările sunt semnale de tip Pulse Width Modulation (PWM); lățimea acestui semnal poate fi controlată, obținăndu-se astfel diferite valori de tensiune pentru comanda celor două motoare de curent continuu atașate roților. Lățimea de comandă este cuprinsă între 0 și 1.

O scurtă descriere a funcționalităților și a structurii robotului a fost necesară pentru a avea o viziune de ansamblu asupra facilităților oferite de producător pentru dezvoltarea robotului. Acestea vor fi relevante, în continuare, în procesul de modelare matematică a sistemului.

Este important de menționat că metoda analitică de modelare a fost folosită cu succes atât în [2] cât și în celelalte cercetări științifice citate în cadrul acestei lucrări. Această metodă oferă rezultate de încredere, mai ales că folosește legi și relații foarte bine documentate și testate, așa cum se explică în [1], la care se adugă o cunoaștere aprofundată a proprietăților fizice ale sistemului. În cadrul acestei lucrări se vor folosi, însă, pentru modelare metode provenite din identificarea sistemelor.

Spre deosebire de metoda analitică, premisa de la care se pleacă în acest caz este că nu există informații a priori legate de structura transportorului instabil pe 2 roți; astfel, se urmărește obținerea modelului matematic prin efectuarea de experimente relevante care să surprindă comportamentul sistemului [1]. În [1], L. Ljung definește 3 pași necesari pentru identificarea sistemului folosind acest tip de metode:

1. achiziționarea unui set de date de identificare prin expreimente
2. definirea unui set de modele care pot fi obținute prin specificarea unei categorii de modele în care modelul corect ar putea fi găsit
3. stabilirea unei reguli prin intermediul căreia să se selecteze modelul cel mai potrivit și validarea acestuia

Pentru obținerea modelului sistemului, toți cei 3 pași au fost efectuați, iar rezultatele obținute și concluziile trase sunt relatate mai jos:

* + 1. *Achiziționarea setului de date*

Obținerea unui set de date care să fie apoi folosit în procesul de modelare matematică a sistemului se face prin proiectarea și executarea de experimente folosind sistemul de transport instabil pe 2 roți. În cadrul fiecărui experiment sunt cunoscute valorile celor 2 vectori de intrare care comandă cele 2 motoare de curent continuu, iar ieșirile sistemului vor fi înregistrate pentru prelucrare. Pe lângă aceste mențiuni, autorul cărții [2] adaugă că în proiectarea unui experiment, deciziile luate trebuie astfel încât setul de date obținut să fie cât mai informativ. De la sistem vor fi achiziționate date provenite de la cei 5 senzori integrați în echipament (cele 2 encodere, cele 2 accelerometre și gyroscopul).

În timpul desfășurării experimentului, un rol foarte important aparține utilizatorului care conduce experiemntul, întrucât acesta trebuie să aibă o influență constantă asupra transportorului pe tot parcursul experimentului. Acest fapt se datorează particularităților de construcție ale sistemului de transport instabil pe 2 roți: fiind instabil prin natura structurii sale, pendulul inversat atașat modulului de transport nu va menține o poziție verticală ci, în lipsa unui control, va devia de la axa verticală până la întănirea unui obstacol. Pentru a minimiza daunele cauzate de acest eveniment, compania care construiește robotul l-a prevăzut cu un sistem de siguranță responsabil cu:

* oprirea celor două motoare care conduc roțile dacă unghiul de deviație de la axa verticală depășește o anumită valoare;
* protejarea corpului robotului astfel încât acesta să nu facă (în cazul opririi motoarelor) contact complet cu solul.

Din cauza blocării motorului la o anumită deviere a pendului de la poziția verticală, utilizatorul trebuie să fie prezent în timpul experimentul pentru a menține pendulul într-o poziție care să permită funcționarea motoarelor. Necesitatea intervenției utilizatorului ridică problema poziției corecte în care trebuie să se afle sistemul de transport instabil pe 2 roți în timpul desfășurării experimentului. Totuși, menținerea unei poziții perfect verticale sau a unei poziții foarte apropiate de axa verticală nu este de dorit întrucât aceasta nu reflectă comportamentul real al sistemului ci comportamentul care trebuie obținut în urma aplicării algoritmului de control. Poziția recomandată a pendulului este deci între aceste 2 limite: cea impusă prin construcția echipamentului și axa verticală.

În Simulink, a fost proiectat următorul experiment pentru programarea robotului pentru procesul de achiziționarea de date:

|  |
| --- |
| *Fig 3.1.2 Interfața Simulink pentru efectuarea experimentului de modelare a datelor* |

În diagrama Simulink a experimentului, o componentă neobișnuită este blocul „State Observer” ale cărui ieșiri sunt înregistrate pentru modelare în blocul Scope. Nu sunt preluate pentru modelare semnalele brute transmise de senzori la modulul de achiziție de date. Aceste semnale sunt recalculate de către blocul „State Observer” în coordonatele generalizate ***theta***,***psi***, ***phi******thetadot***, ***psidot*** și ***phidot*** [2]. Semnificația fizică a acestora este următoarea:

theta – viteza unghiulară a roților

psi – unghiul de deviație de la poziția verticală

phi – unghiul de rotație în jurul propriei axe (axa verticală)

thetadot – accelearația unghiulară a roților

psidot – viteza unghiulară a deviație de la axa verticală

phidot – viteza unghiulară de rotație în jurul axei verticale

Prin intermediul lor, se obține o descrie mult mai sofisticată a sistemului, întrucât sunt modelate mișcările robotului în spațiul tridimensional. Primele 3 variabilele descriu, așadar, 3 grade de libertate ale sistemului: translație pe axa y (theta), rotație pe axa x (psi) și rotație în jurul axei z (phi), iar următoarele 3 se obțin din cele anterioare prin derivare. Aceste ieșiri sunt obținute prin prelucrarea datelor înregistrate de către senzorii sistemului; porcedeul de prelucrare este descris în manualul de utilizare a al sistemului [2] și presupune fuziunea informației obținute de la mai mulți senzori. Alegerea de păstrare a blocului State Observer (deși acesta nu este definit de utilizator, ci de producătorul robotului) s-a făcut din 2 motive:

* pentru avantajele pe care le aduce prin filtrarea datelor provenite de la encodere, accelerometre și de la gyroscop, întrucât aceste date sunt puternic afectate de zgomot iar filtrarea acestuia (mai ales pentru senzori ca gyroscopul) este foarte dificilă [3].
* pentru avantajele pe care le oferă un observator de stare în momentul proiectării unui controller pentru stabilizarea sistemului (acesta fiind scopul final al lucrării).

### Reprezenatarea datelor colectate se face în figurile de mai jos:

|  |  |
| --- | --- |
| a) | b) |
| *Fig 3.1.3 Intrările sistemului: a) Intrarea pentru comanda Motor stânga;*  *b) Intrarea pentru comanda Motor dreapta* | |

|  |  |
| --- | --- |
| a) | b) |
| c) | d) |
| e) | f) |
| *Fig 3.1.4 Ieșirile sistemului: a)THETA; b)THETADOT c)PSI; d)PSIODT;*  *e)PHI; f)PHIDOT* | |

### *Definirea unui set de modele*

Cea mai importantă clasă de sisteme dinamice, atât în practică, cât și în literatură, este clasa Sistemelor Liniare Invariante în Timp (SLIT). Aceste sisteme sunt idealizări ale proceselor din realitate. În cadrul acestei clase se va desfășura căutarea unui model care să descrie sistemul de transport instabil pe 2 roți. Trebuie analizate, așadar, motivele pentru care sistemul ar putea aparține acestei clase, ținând cont de faptul că robotul, prin însăși natura sa are un comportamnet neliniar care variază în timp. Totuși, concluzia la care s-a ajuns, atât in cercetările anterioare, cât și în [2], este că modelul matematic care descrie comportamentul robotului poate fii liniarizat în jurul unui punct instabil de echilibru (când pendulul inversat se află aproape de poziția verticală). Identificarea sistemului în clasa SLIT este deci posibilă și, având în vedere condițiile de desfășurare a experimentului pentru achiziția de date, identificarea se poate face pornind de la datele deja colecate.

L.Ljung definește în [1]o gamă foarte largă de modele matematice care pot fii folosite pentru descrierea unui SLIT. Totuși, pentru a selecta tipul corect de model care să descrie sistemul instabil pe 2 roți, trebuie respectate anumire constrângeri. În acest sens, decizia de achiziționare pentru modelare a ieșirilor blocului State Observer și nu a ieșirilor reale ale sistemului (cele citite de la senzori), are un impact hotărâtor în alegerea modelului matematic prin care va fi descris sistemul. Existența observatorilor de stare într-un sistem este strâns legată de reprezentarea în spațiul stărilor [1]. Așadar, se impune: reprezentarea sistemului în spațiul stărilor. În plus, din moment ce semnalele modelate sunt ieșirile blocului Satate Observer, este necesar ca modelul matematic în spațiul stărilor să respecte Forma Canonică de Observare (FCO), din moment ce ieșirile modelate sunt aceleași cu stările observate ale sistemului. Se mai impune, de asemenea, ca modelul matematic obținut să fie instabil (adică polii acestuia să fie situați în semiplanul pozitiv), din moment ce instabilitatea este o caracteristică esențială a sistemului.

Un model în spațiul stărilor descrie relațiile între semnalele de intrare, zgomot și semnalele de ieșire sub forma unui sistem de ecuații diferențiale de ordinul I, folosind un vector *x(t)* numit și vector de stare, care conține stările sistemului. Reperzentarea în spațiul stărilor este strâns legată caracteristicele fizice ale sistemului, motiv pentru care variabilele de stare *x* au semnificație fizică (poziții, viteze, etc.). De aceea, pentru majoritatea sitemelor fizice, construirea modelului în timp continuu este mult mai simplă decăt în timp discret, legile fizicii (de exemplu legile de mișcare Newtoniene) folosite pentru modelarea analitică fiind exprimate în timp continuu [1]. Și modelul sitemului de transport pe 2 roți va fi estimat în timp continuu astfell încât, în etapa de validare, rezultatul obținut să poată fi comparat cu modelul oferit de producători în [2], obținut prin metode analitice.

Aceasta înseamnă că în urma modelării, reprezentarea obținută va avea următoare formă:

*ẋ(t)* = A*x(t)* + B*u(t)* + K*e(t)*

*y(t)* = C*x(t)* + D*u(t)* + *e(t)*

Aici, A, B, C, D și K sunt matrice de dimensiuni potrivite (*n* x *n*, *n* x *m*, *n* x *p*, *m* x *p* și *p* x *n*, respectiv un număr de *n* – stări, *m* – intrări, *p* - ieșiri), *e(t)* este zgomot Gausian, iar punctul deasupra lui *x* semnifică diferențierea după timpul *t*. Reprezentarea unui sistem în spațiul stărilor elimină nevoia descentralizării sistemului de tip Multiple Input, Multiple Output (MIMO) în mai multe subsisteme de tip Multiple Input, Single Output (MISO) sau Single Input, Single Output (SISO), întrucât modelul poate descrie, prin structura sa, un sistem MIMO. Astfel, structura sistemului va fi următoarea:

|  |
| --- |
|  |
| *Fig 3.1.6. Structura modelului sistemului de transport instabil pe 2 roți* |

Identificarea sistemului, cu respect față de toate constrângerile menționate mai sus, s-a făcut cu ajutorul toolbox-ului MATLAB „System Identification Toolbox” [4]. Acesta centralizează și oferă spre folosire funcții MATLAB, blocuri Simulink și aplicații pentru construirea de modele matematice pentru identificarea sistemelor dinamice dintr-un set de date de intrare-ieșire. Accesarea uneltelor de modelare disponibile în cadrul acestui toolbox se face printr-o interfață care permite introducerea setului de date, modelarea rapidă folosind diferite funcții de identificare ușor accesibile din interfață și calcularea procentului de potrivire între setul de date reale și modelul obținut. Constrângerile care trebuie aplicate asupra modelului sunt ușor de impus folosind această interfață. Modelel obținute pot fi salvate ca obiecte în spațiul de lucru MATLAB (Workspace) sau codul folosit pentru obținerea lor poate fi preluat și implementat într-un script MATLAB.

În urma procesului de modelare (în care s-au comparat rezultatele obținute folosind mai multe funcții disponibile în toolbox), s-au ales 3 modele care, în funcție de procentul de potrivire cu datele reale achiziționate în setul de date de identificare. Menționă ca toate modele au același vector de variabile de stare *x(t)* și același vector de ieșiri *y(t)*:

*x(t)*=[theta, thetadot, psi, psidot, phhi, phidot]

*y(t)*=[theta, thetadot, psi, psidot, phhi, phidot]

Modele alese în urma identificării sunt prezentate mai jos:

|  |
| --- |
| 1. Modelul 1: |
|  |
| 1. Modelul 2: |
|  |
| 1. Modelul 3: |
|  |

Polii sistemelor sunt prezentați în tabelul demai jos:

Tabel . Polii celor 3 sisteme identificate

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| a) Model 1: | b) Model 2: | c) Model 3: |
|  |  |  |

După cum se observă mai sus, în timpul identificării, scopul urmărit prin modelare este predicția. Predicția presupune estimarea stării (sau a valorii ieșirii) următoare momentului curent de timp. S-ar putea susține că estimarea modelelor matematice având ca scop simularea comportamentului sistemului, mai degrabă decât prezicerea acestuia, ar fii o alegere mult mai bună din moment ce se încearcă surprinderea comportamenului sistemului. Motivul pentru care s-a ales setarea focusului estimării pe predicția comportamentului sistemului este existența blocului State Obeserver în diagrama Simulink cu ajutorul căreia se programează robotul pentru derularea experimentului de achiziționare de date. Este, de asemenea, un fapt cunoscut că observatorii de stare sunt foarte des folosiți în procesul computațional de predicție a stărilor sau a ieșirilor viitoare ale unui sistem [1]; așadar impunerea predicției ca focus pentru procesul de identificare a sistemului este justificată.

* + 1. *Selectarea modelului potrivit și validarea acestuia*

Alegerea „celului mai bun” model dintr-un set se stabilește în funcție de performanțele modelului când vine vorba de reproducerea datelor măsurate [1]. În continuare, vor fi comparate procentele cu care fiecare dintre cele 3 modele reușesc să aproximeze datele măsurate pentru a determina care model oferă cea mai bună aproximare pentru cele mai multe stări:

Tabel . Compararea celor 3 modele

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Modelul** | **theta**  **[%]** | **thetadot [%]** | **psi**  **[%]** | **psidot**  **[%]** | **phi**  **[%]** | **phidot**  **[%]** |
| 1 | 99.78 | 96.19 | 54.92 | 25.33 | 82.4 | 21.14 |
| 2 | 99.94 | 96.12 | 77.19 | 28.76 | 94.35 | 30.36 |
| 3 | 99.76 | 96.12 | 51.41 | 24.85 | 80.56 | 19.62 |
| Cea mai bună estimare | 99.94  **(2)** | 96.19  **(1)** | 77.19  **(2)** | 28.76  **(2)** | 94.35  **(2)** | 30.36  **(2)** |

Conform comparației efecutate mai sus, modelul care reușește cel mai bine aproximarea corectă a datelor măsurate este modelul 2, urmat de modelele 1 și apoi 3.

Ierarhizarea modelelor în funcție de eficacitatea cu care acestea estimează datele măsurate nu garantează însă că modelul ales astfel este suficient de „bun” sau că este valid. Pentru a asigura corectitudinea modelului care va fi ales, un ultim test a fost proiectat pentru a determina care dintre cele 3 modele este cel mai apropiat de adevăr. Acest test are ca scop validarea unuia dintre cele 3 modele întrucât regula modelului care oferă cea mai bună aproximare nu este suficientă pentru a stabilii dacă un model aproximează corect comportamentul sistemului.

Astfel, se stabilește ca ultimul test care trebuie trecut să fie testul simulării. Simularea are de obicei ca scop reprezentarea virtuală a comportamentului unui sitem pentru observarea acestuia în diverse scenarii de funcționare [5]. Se consideră, deci, valid modelul care aproximează sistemul într-o manieră similară cu modelul determinat prin metode analitice (modelul ideal, determinat de către producătorii echipamentului în [2]); adică modelul care are același comportament în simulare cu cel al modelului ideal.

În figura de mai jos au fost reprezentare comportamentele fiecăruia dintre cele 3 modele și a modelului referință (modelul ideal):

|  |
| --- |
| a) |
| b) |
| c) |
| d) |
| e) |
| f) |
| *Fig 3.1.5 Simularea comparativă a celor 3 modele cu modelul producătorilor:*  *a)theta; b)thetadot; c)psi; d)psidot; e)phi; f)phidot* |

Se observă că în primele 4 simulări, simularea modelului 1 este cea mai apropiată de simularea modelului ideal iar în ultimele 2 simulări, simularea modelului 2 este cea mai apropiată de simularea modelului ideal.

Luând în considerare că modele 1 și 2 au capacități de estimare a datelor măsurate apropiate și că testul validității indică modelul 1 ca având un comportamentu similar în simulare cu cel am modelului referință, s-a decis ca modelul 1 să fie în continuare considerat o descriere suficient de bună a sistemului. Acest model va fi folosit în continiare pentru atingerea scopurilor definite.

Modelul 1, la fel ca modelul analitic, nu este considerat unica și adevărata descriere a sistemului ci doar o varianta suficent de bună care poate servi cu succes scopul pentru care a fost definit.

# Bibliografie

|  |  |
| --- | --- |
| [1] | L. Ljung, in *SYSTEM IDENTIFICATION: Teory for the user*, Englewood Cliffs, New Jersey, P. T. R. Pretice-Hall, Inc., 1987, pp. 1 - 127. |
| [2] | INTECO, Two-Wheeled Unstable Transporter: User's manual, www.inteco.com.pl. |
| [3] | B. Zhang and G. Wu, "Design of two-wheel self-balancing vehicle based on visual identification" *Eurasip Jourmal on Image and Video Processing,* vol. 2019, no. 1, 2019. |
| [4] | MathWorks, "System Identification Toolbox" 1994-2019 The MathWorks, Inc., [Online]. Available: https://ch.mathworks.com/help/ident/index.html. |
| [5] | MathWorks, "Modeling and Simulation," 1994-2019 The MathWorks, Inc., [Online]. Available: https://ch.mathworks.com/discovery/modeling-and-simulation.html. |