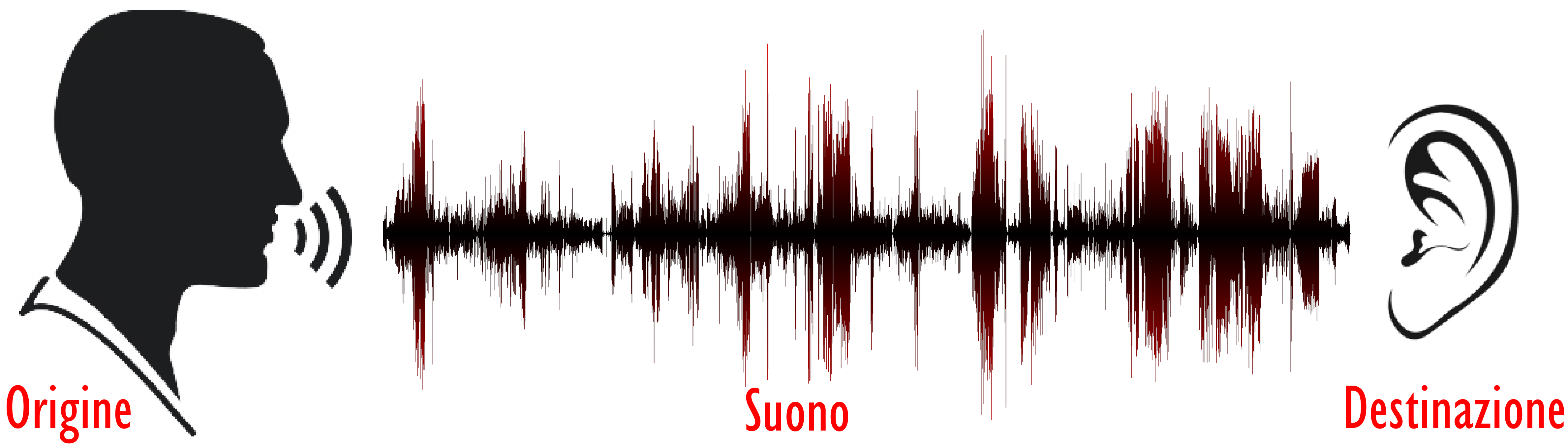
# Richiami sulle onde

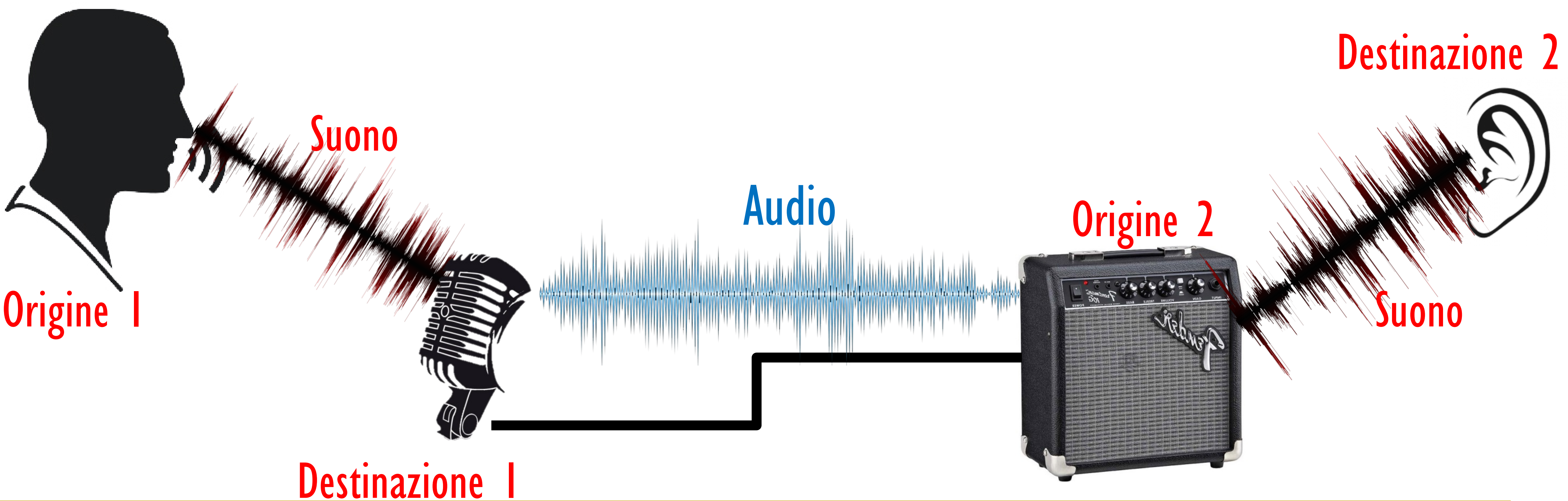
# Suono e Audio

Il **suono** è un insieme di onde meccaniche longitudinali. L'oggetto che origina il suono produce una vibrazione che si propaga attraverso un mezzo modificando nel tempo la pressione locale delle particelle che lo costituiscono.



# Suono e Audio

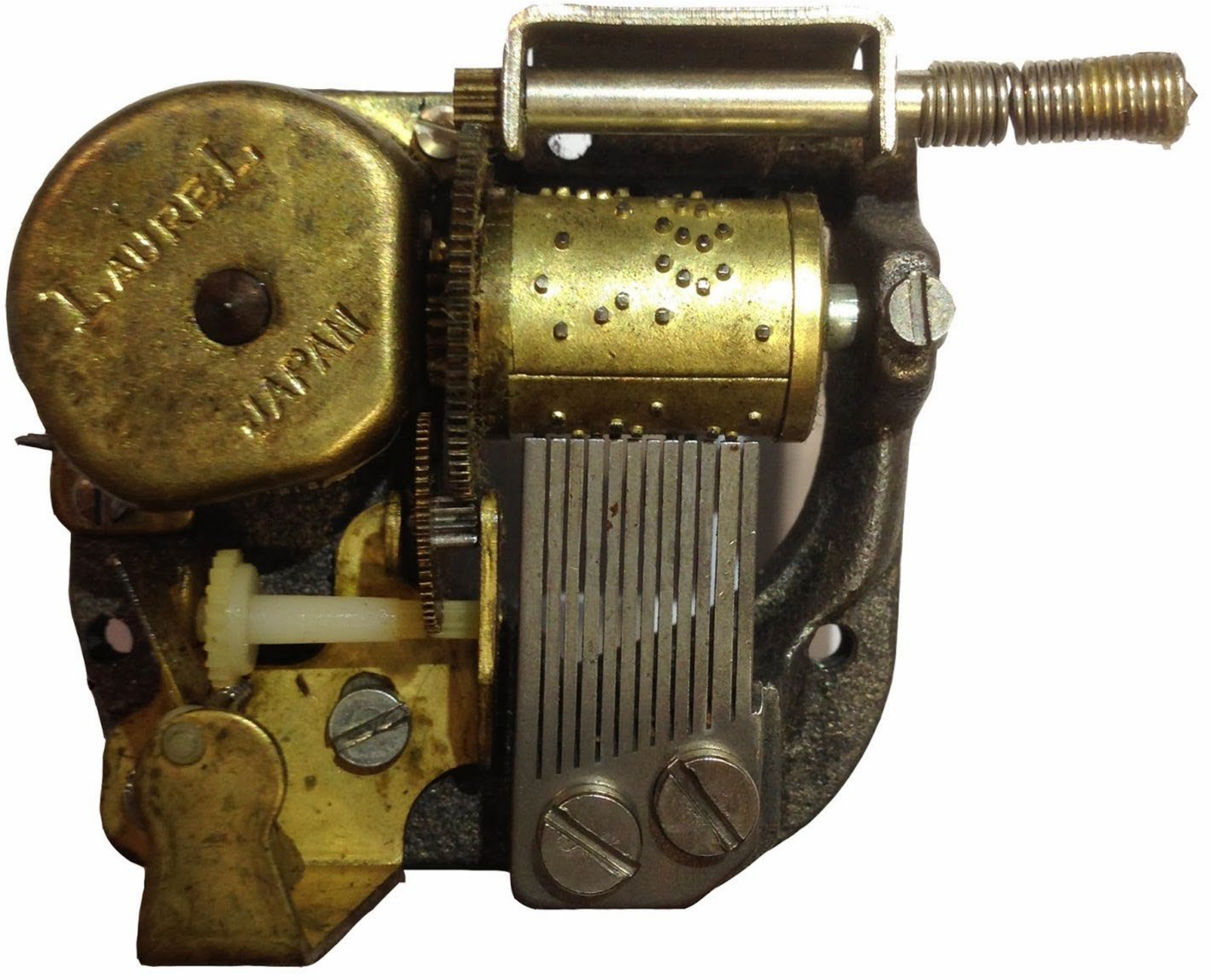
L' **audio** è un **segnale** elettromagnetico che rappresenta e trasporta informazione sonora. L'audio e il suono sono quindi fisicamente differenti, in particolare il primo permette di trasmettere il secondo facendolo viaggiare attraverso apparecchiature elettroniche.



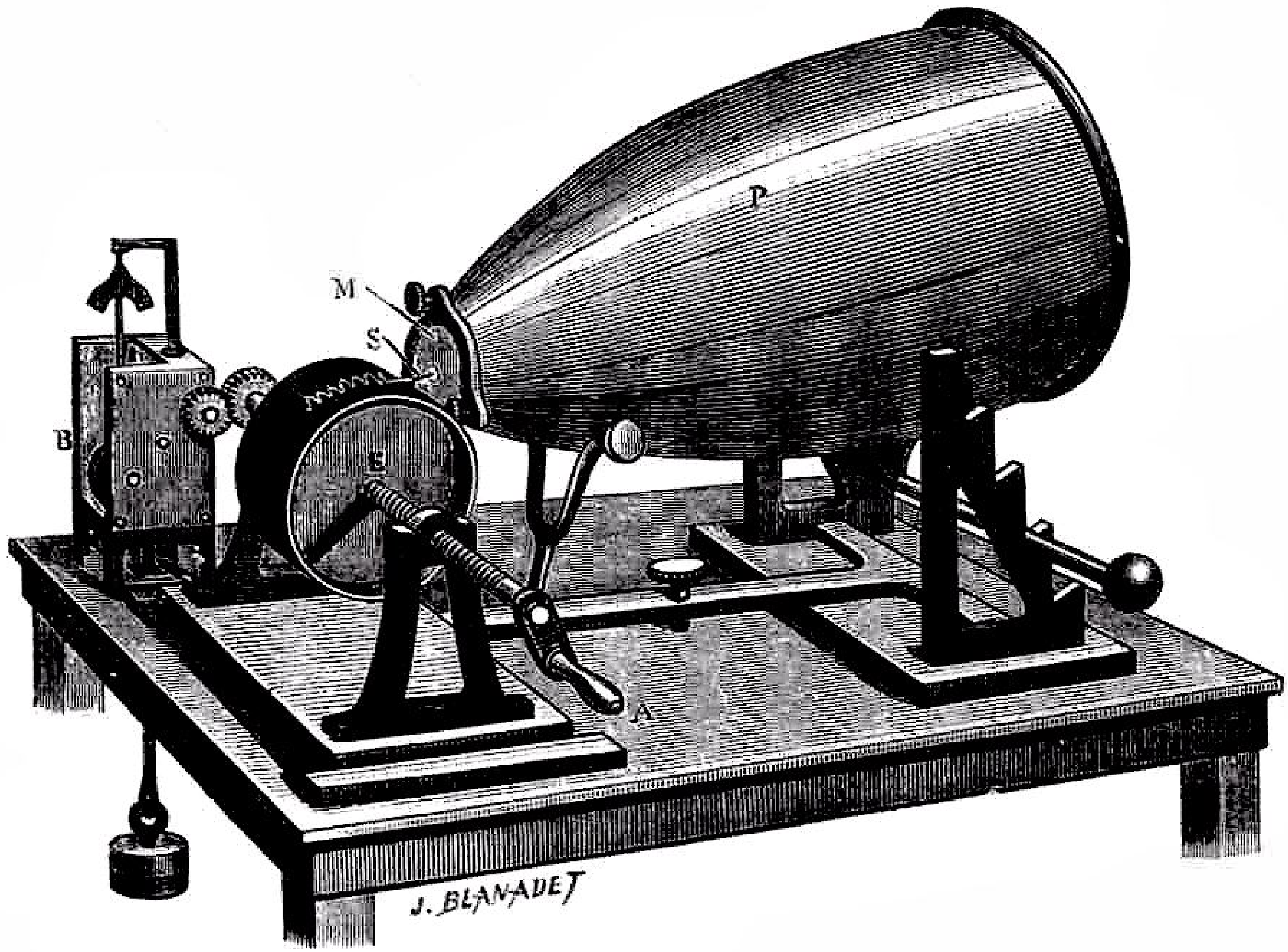
# Storia

- Riproduzione di suoni pre-registrati e registrazione non automatica (IX secolo).
- Registrazione automatica di suoni arbitrari, ma impossibili da riprodurre (1857).
- Riproduzione e registrazione di suoni arbitrari (1877).

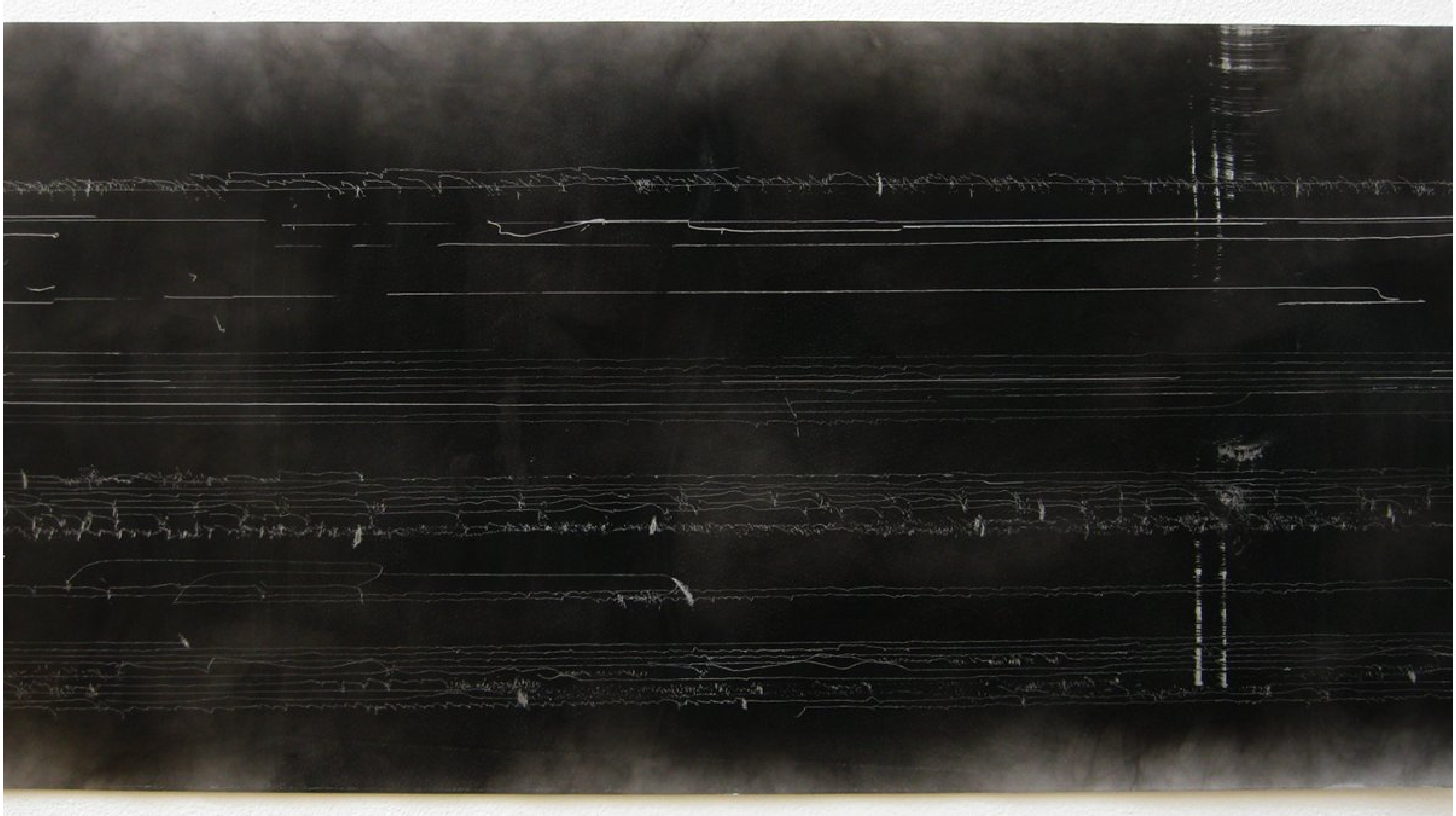
# Storia – Carillon (XIV secolo)



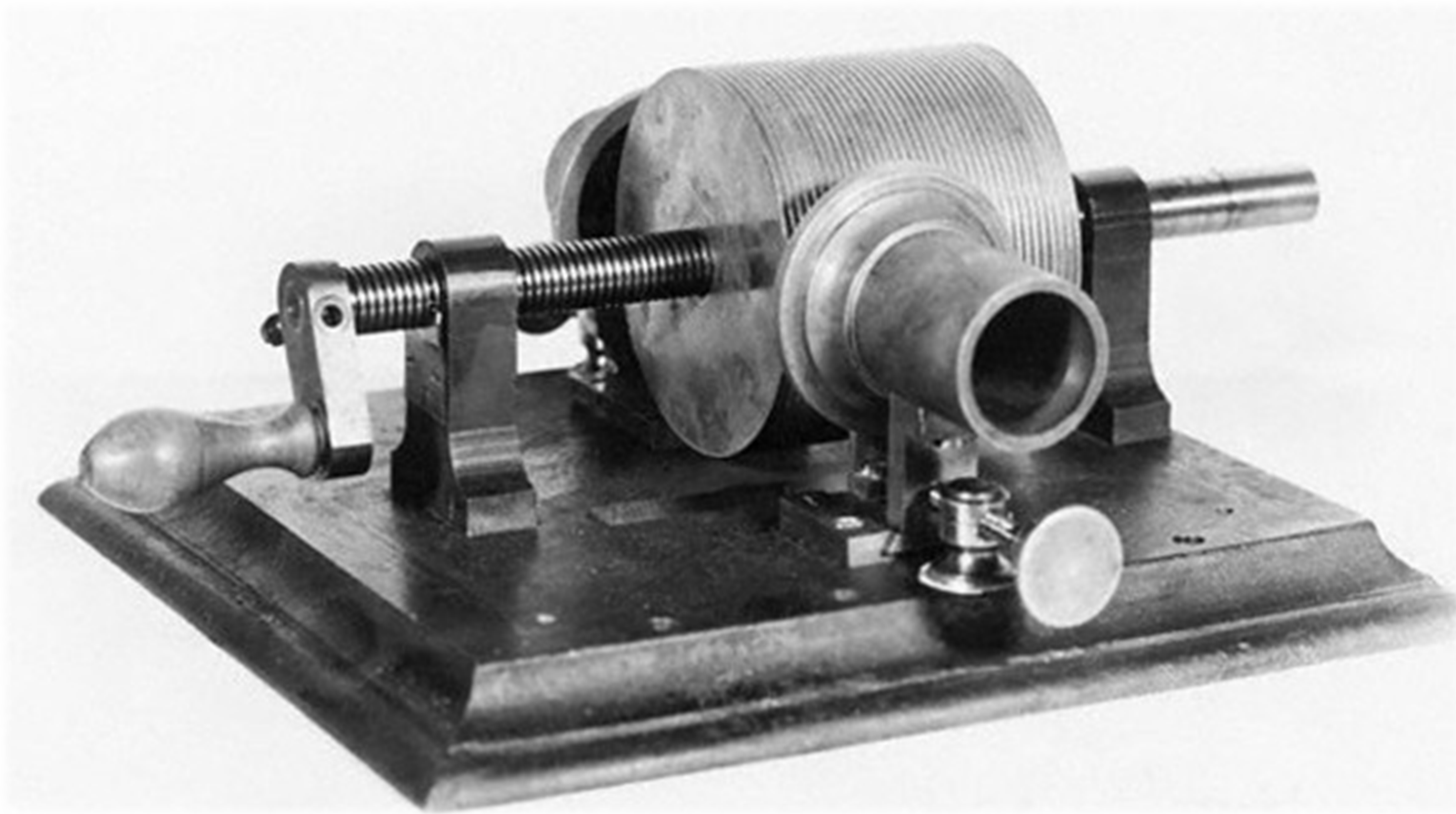
# Storia – Fonautografo (1857)



# Storia - Fonautogramma



# Storia – Fonografo (1877)



# Cenni sulle onde

Un'**onda** è una perturbazione di una grandezza fisica che si propaga nel tempo trasportando energia o quantità di moto.

**Classificazione**:

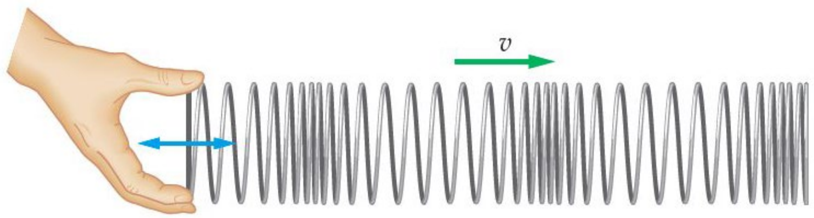
- Rispetto al **mezzo di propagazione.**
- Rispetto alla **direzione** di movimento delle particelle.
- Rispetto alla **forma**.
- Rispetto alla **periodicità**.

# Classificazione onde - Mezzo

- **Onda meccanica:** la perturbazione interessa particelle di materia. Affinché avvenga la propagazione serve quindi un mezzo materiale in forma gassosa, liquida o solida.

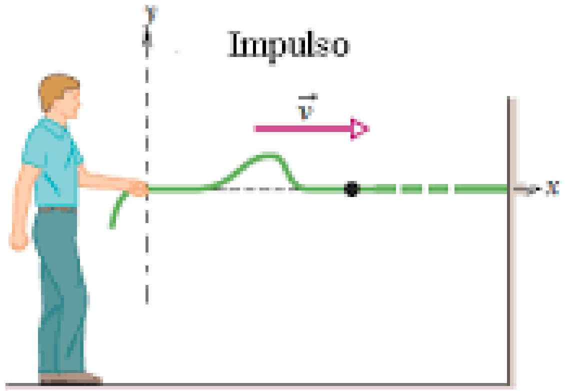
- **Onda elettromagnetica:** la perturbazione interessa grandezze elettromagnetiche, in particolare la variazione di campi elettrici e magnetici. Si può propagare nel vuoto.

# Classificazione onde - Direzione




- **Onda longitudinale:** le particelle perturbate si muovono lungo la stessa direzione di propagazione dell'onda (parallelamente o longitudinalmente).

- **Onda trasversale:** le particelle perturbate si muovono lungo la direzione perpendicolare a quella di propagazione dell'onda (trasversalmente).



# Classificazione onde - Forma

La **forma d'onda** è il grafico che descrive l'ampiezza dell'onda in funzione del tempo.

- **Onda sinusoidale:** la relazione tra il tempo e l'intensità dell'onda è descritta dalla funzione seno. Dunque la forma d'onda corrisponde al grafico della funzione seno.

- **Altre onde:** nonostante per alcune sia nota la funzione che le descrive, la maggior parte delle onde ha una forma generica.

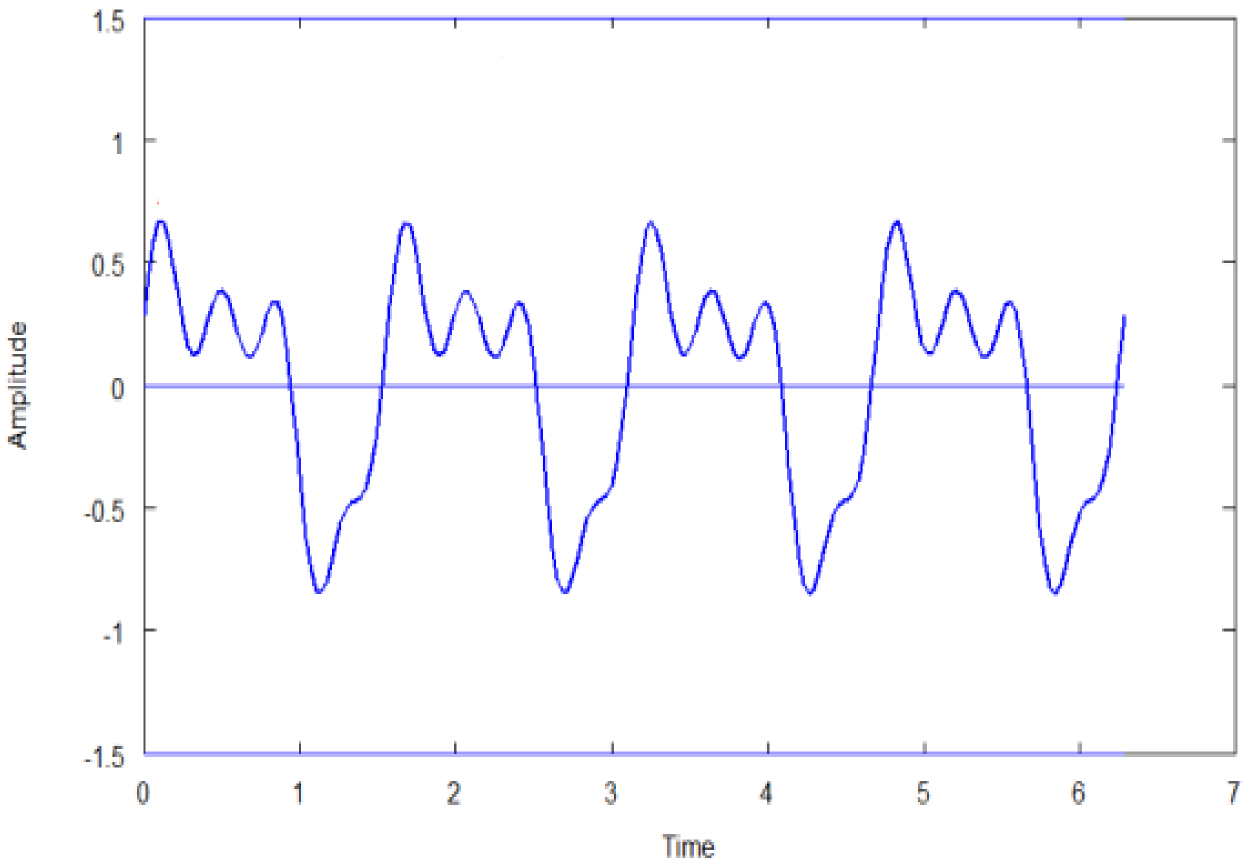
# Classificazione - Periodicità

- Un'onda si dice **periodica** e di periodo $T$ se è costituita da una sequenza di oscillazioni che si ripetono ad intervalli di tempo regolari e pari a $T$. Si può descrivere matematicamente tramite una funzione periodica di periodo $T$.

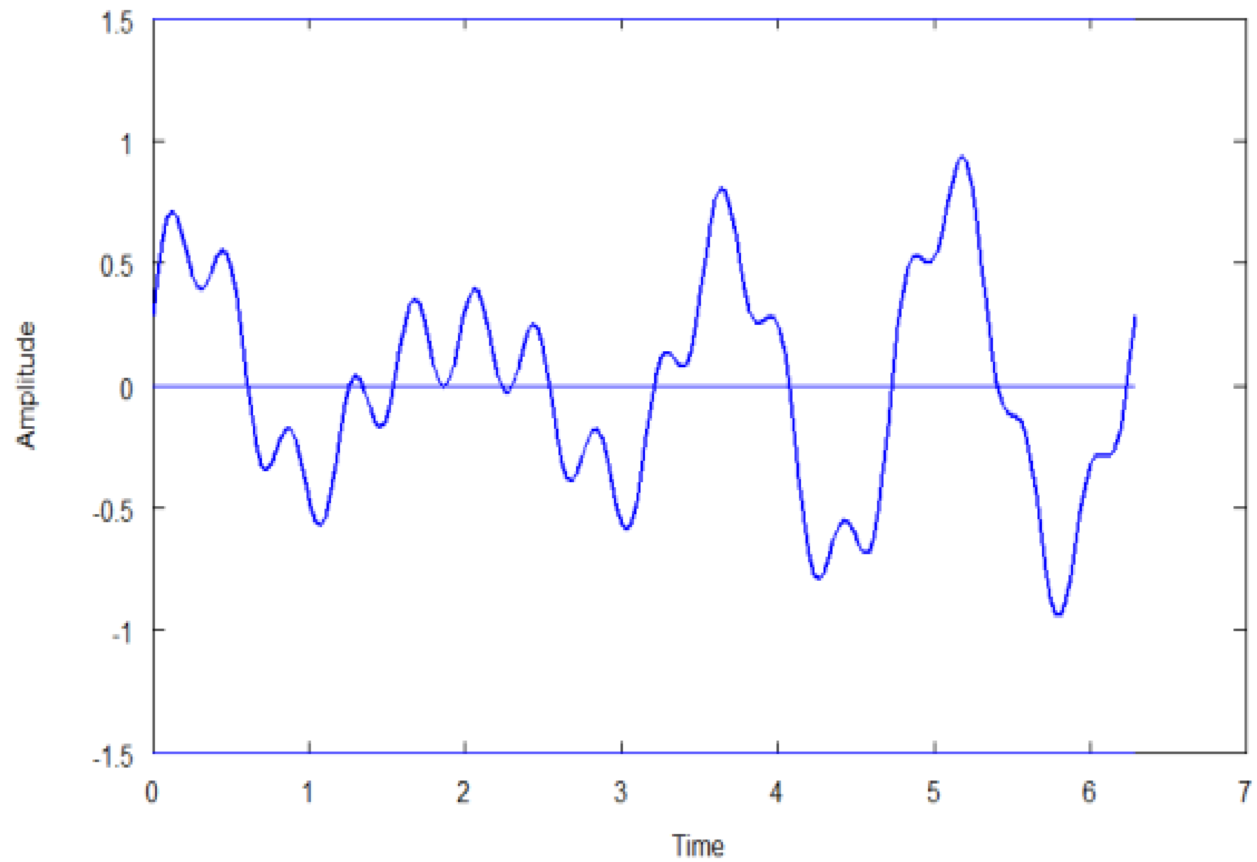
- Un'onda si dice **aperiodica** o **non periodica** se non si può individuare una regolarità nelle oscillazioni. Spesso è difficile da descrivere tramite una funzione matematica, ma quando ciò accade si utilizza una funzione non periodica.

# Periodicità - Esempio

Onda periodica




Onda aperiodica



# Onda periodica – Funzione matematica

Una funzione $f$ si dice ***periodica*** e di periodo $T$ quando:

$$\exists\, T > 0 : \forall\, t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = f(t+T)$$

**Esempio:** un tipico esempio è quello delle funzioni trigonometriche, come seno o coseno. Infatti:

$$\sin(x) = \sin(x+T) \qquad \text{per} \qquad T = 2\pi$$

Lo stesso vale per la funzione coseno.

# Grandezze fisiche - Onda periodica

- **Frequenza:** indica il numero di oscillazioni complete nell'unità di tempo. Si misura in Hertz [Hz] ([1/s]).

- **Periodo:** indica il tempo necessario per compiere un'oscillazione completa. Si misura in secondi [s]. Se $f$ è la frequenza, il periodo $T$ vale:

$$T = \frac{1}{f}$$

- **Ampiezza:** serve a descrivere il range massimo di oscillazione. L'unità di misura dipende dalla grandezza fisica perturbata

# Grandezze fisiche - Onda periodica

- **Fase:** rappresenta una generica parte di periodo trascorso rispetto ad un istante di tempo fissato. Può avere altre significati che dipendono dallo specifico tipo di onda.

- **Fase iniziale:** rappresenta il periodo trascorso rispetto all'istante di tempo 0.

- **Pulsazione:** numero di oscillazioni complete in un tempo pari a $2\pi$. Si misura tipicamente in radianti al secondo [rad/s]. Se $f$ è la frequenza ( e $T$ il periodo), la pulsazione $\omega$ vale:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Queste **tre** grandezze possono avere diversi significati in base al tipo di onda. Per semplicità riferiamoci ad esse con il significato che hanno per le **onde sinusoidali**.

# Grandezze fisiche - Onda periodica

- **Velocità d'onda:** è lo spazio percorso dalla perturbazione nel tempo. Si misura in metri al secondo [m/s]. Dipende dal mezzo in cui l'onda si propaga.

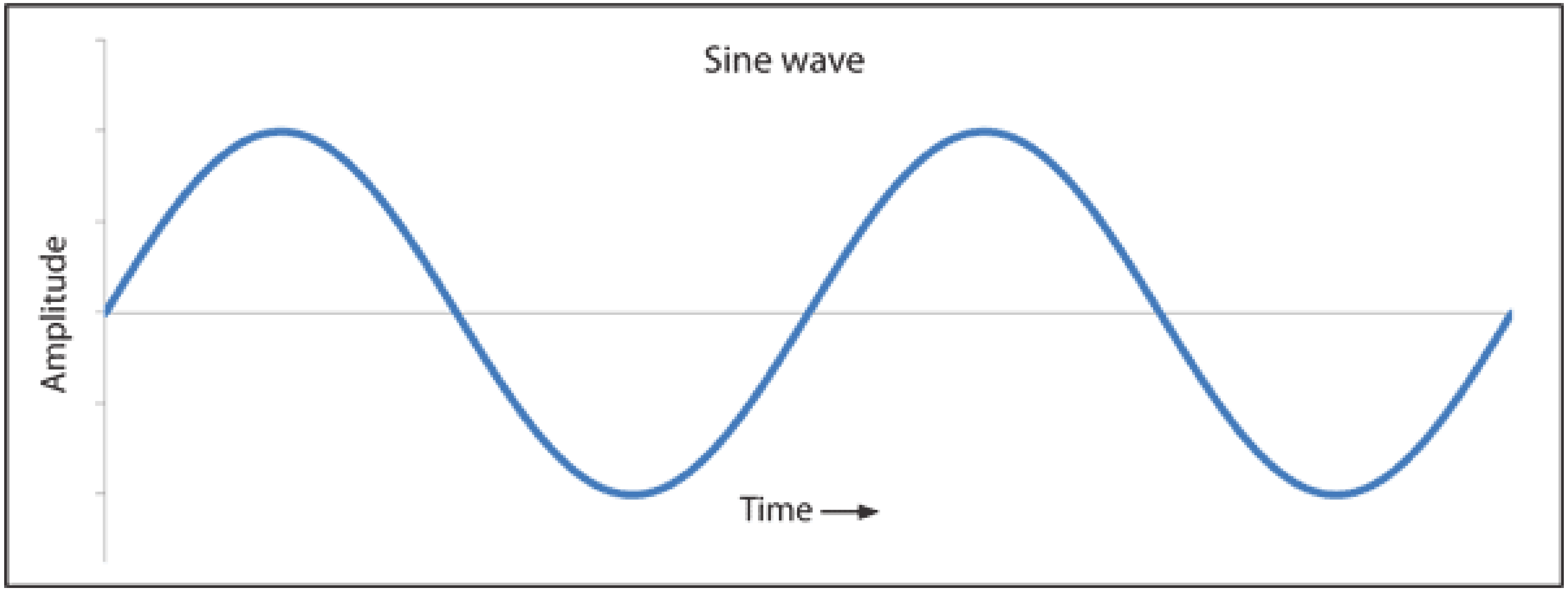
- **Lunghezza d'onda:** è la distanza percorsa dall'onda, nel tempo necessario a passare da un punto di massimo o di minimo al corrispondente punto di massimo o di minimo dell'oscillazione successiva, chiamati rispettivamente ***creste*** e ***ventri***. Si misura in metri [m]. Se $v$ è la velocità dell'onda ed $f$ la sua frequenza allora la lunghezza d'onda λ vale:

$$\lambda = vT = \frac{v}{f}$$

# Esempio – Onda sinusoidale

Un'onda sinusoidale può essere descritta matematicamente dalla seguente funzione periodica:

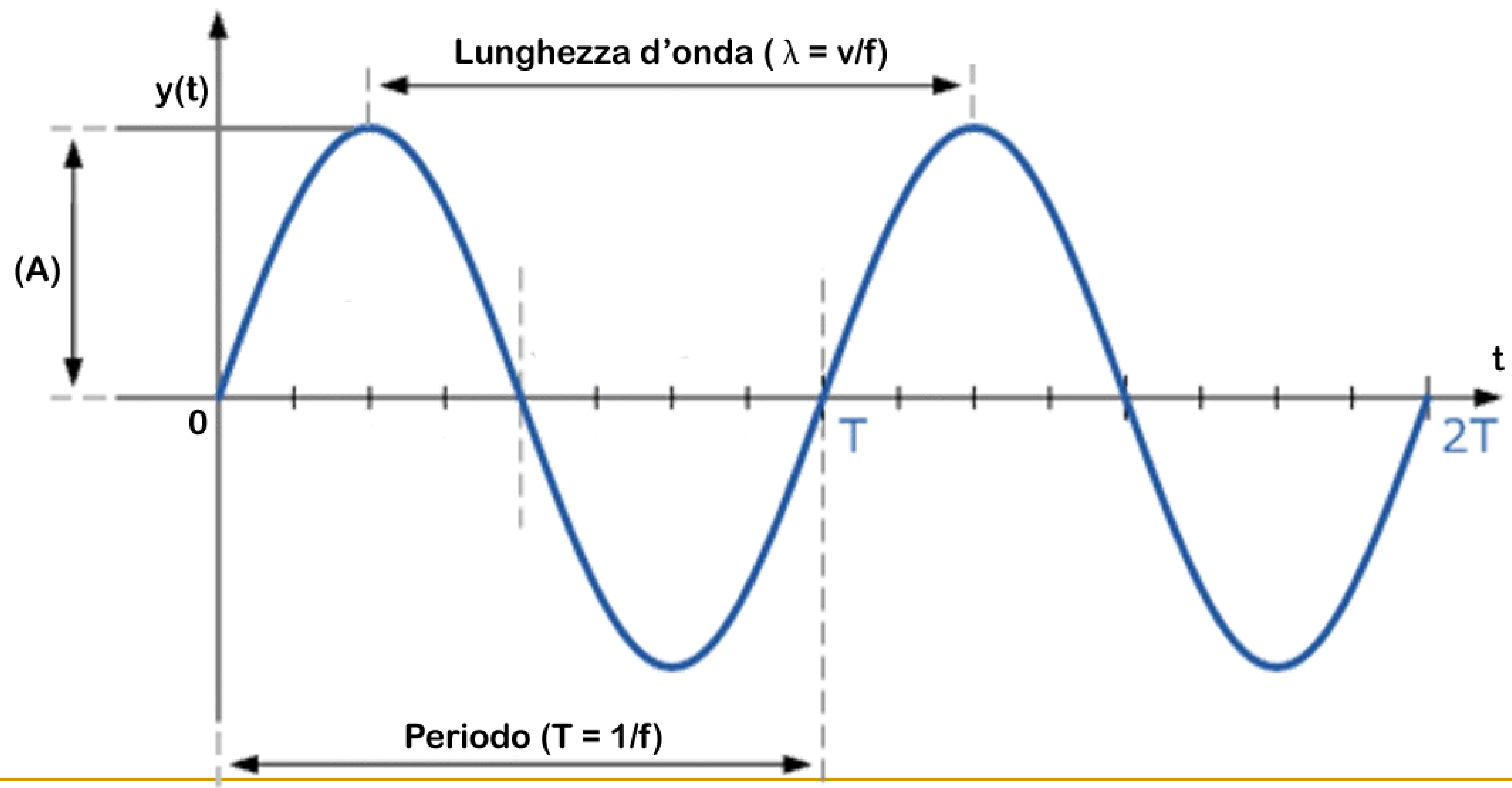
$$y(t) = A\sin(2\pi f t + \varphi_0)$$



# Esempio – Onda sinusoidale

$$y(t) = A\sin(2\pi f t + \varphi_0)$$

Dove $A$ è la metà dell'ampiezza, $f$ la frequenza. **In questo caso**, il termine $2\pi f t + \varphi_0$ è la **fase**, mentre $\varphi_0$è la fase iniziale,



# Ampiezza, Periodo, Frequenza, Fase, Lunghezza d’onda

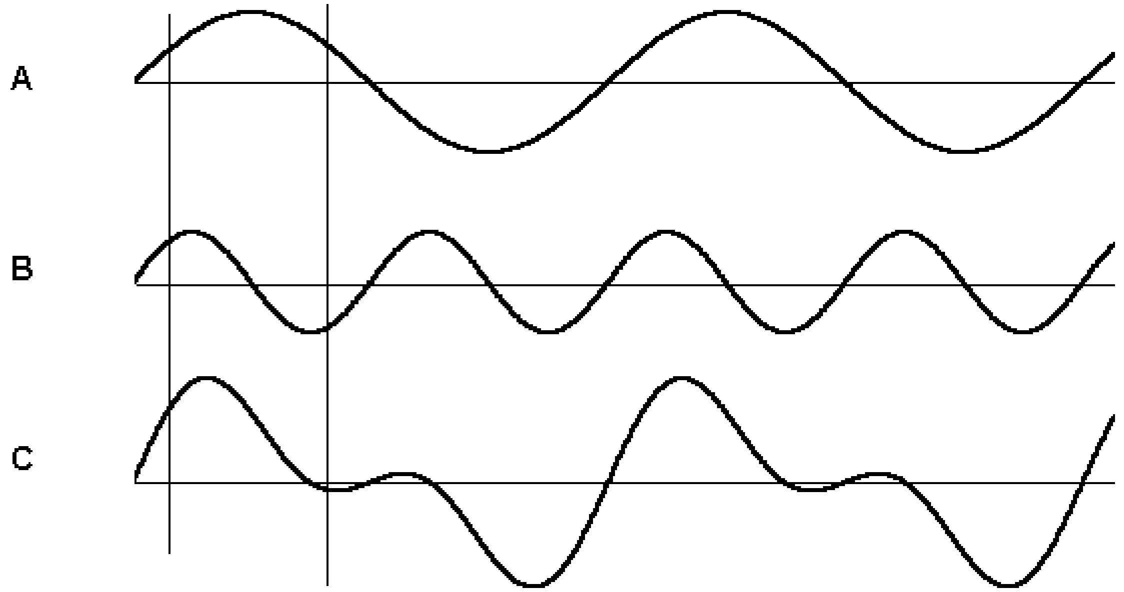
- Ampiezza: intensità del suono
  - Volume del suono (bisbiglio VS urlo)
  - Proporzionale all’energia trasportata dall’onda
- Frequenza: altezza di un suono
  - Suono acuto VS grave
- Fase: spazializzazione del suono

# Principio di sovrapposizione delle onde

- *Se due o più onde della stessa natura (onde elettromagnetiche, onde sonore) che si propagano nello stesso mezzo si sovrappongono in un certo punto dello spazio, → **allora** la perturbazione generata è pari **alla somma algebrica** delle oscillazioni di ciascuna onda presa singolarmente*

- Qualunque sia il numero di sorgenti sonore presenti, al nostro orecchio giunge una sola onda sonora, risultato eventualmente della somma delle onde sonore prodotte dalle varie sorgenti

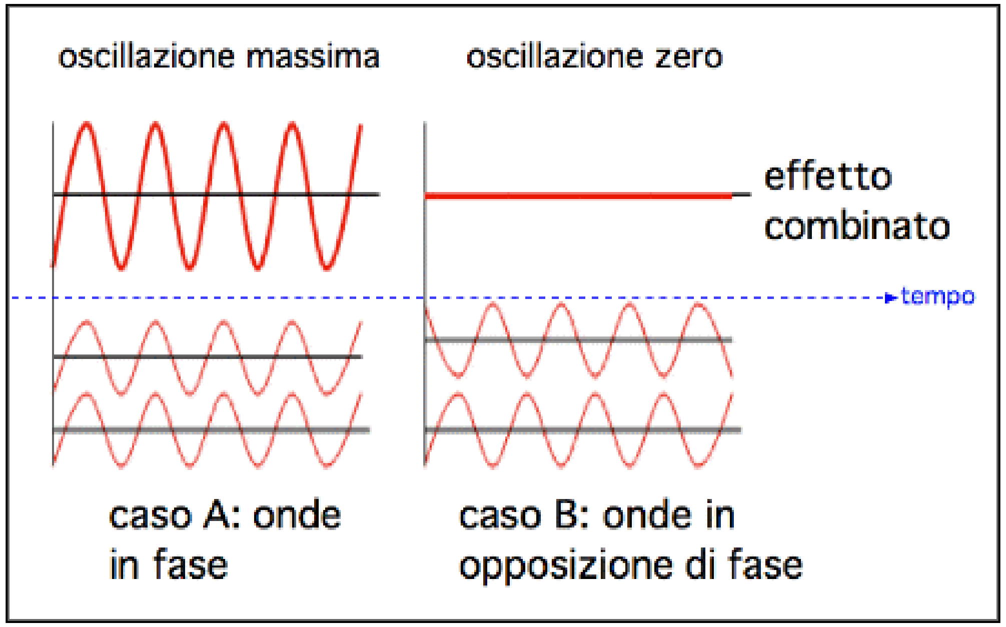
- Istante per istante i valori istantanei dell'ampiezza delle diverse onde si sommano algebricamente, cioè con il loro segno, positivo o negativo



# Classificazione di coppia di onde

- **Onde in fase:**
  - Due o più onde con la stessa frequenza raggiungono l'ampiezza max nello stesso istante

- **Onde in opposizione di fase:**
  - Due o più onde con la stessa frequenza raggiungono rispettivamente l'ampiezza max e min nello stesso istante
  - Presentano una differenza di fase di 180°



# Parametri fisici
# Onda sinusoidale

- Data l'equazione sinusoidale

$$y(t) = 10sin(4 * \pi * t + 4)$$

- Quanto vale l'ampiezza?
  - 10
- Quanto vale la frequenza?
  - 2
- Quanto vale la fase iniziale?
  - 4

# Analisi armonica di Fourier

- Per studiare le onde è molto utile scriverle in forma matematica (es: sinusoide), cioè descriverle tramite una **funzione**.

- La maggior parte delle onde ha una forma generica difficile da descrivere.

- **L'analisi armonica di Fourier** è uno strumento molto potente, poiché ci permette di descrivere onde complesse come somma di onde più semplici, in particolare onde  sinusoidali e/o cosinusoidali.

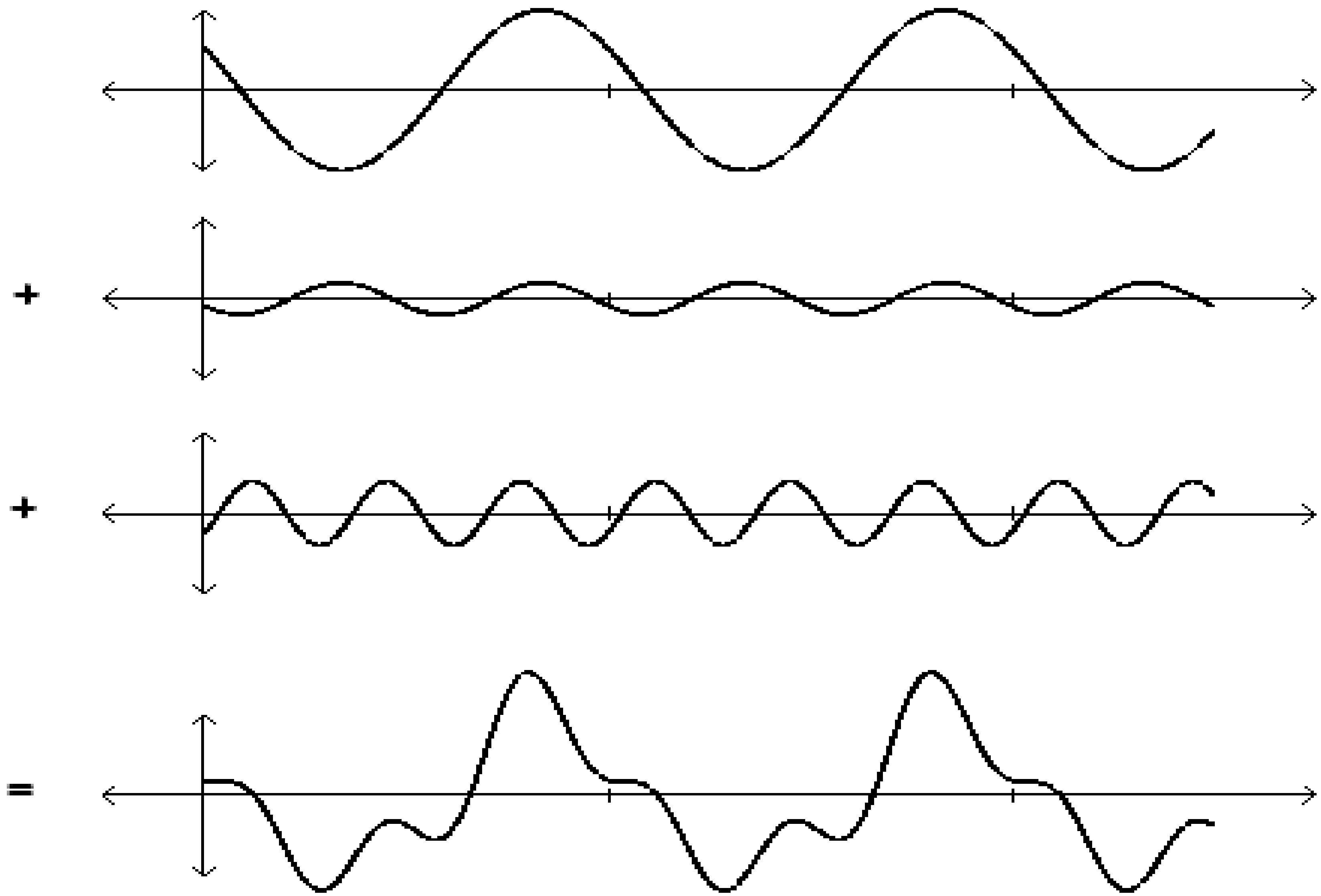
# Teorema di Fourier

L'analisi armonica di Fourier si basa sull'omonimo teorema:

Qualunque funzione periodica, sotto opportune condizioni matematiche, di periodo $T_1$ o di **frequenza fondamentale** $f_1 = \frac{1}{T_1}$, può essere rappresentata mediante una somma di onde sinusoidali e/o cosinusoidali di opportuna ampiezza e di frequenza multipla della frequenza fondamentale.

Queste «condizioni matematiche» sono sempre verificate nei segnali **fisici**. Dunque tutte le onde periodiche che incontreremo potranno sempre essere trattate con l'analisi di Fourier.

# Teorema di Fourier – Idea




L'onda in basso può essere rappresentata come somma delle prime tre sinusoidi.

# Serie e Trasformata di Fourier

- Lo strumento matematico per trovare i termini elementari che costituiscono un’onda <u>periodica</u> è la **Serie di Fourier**

- Nella maggior parte dei casi le onde non sono periodiche, ma si può comunque agire usando la **Trasformata di Fourier**. In questo caso le frequenze delle onde elementari non apparterranno all’insieme discreto dei multipli della **frequenza fondamentale,** ma varieranno in un insieme continuo.

# Serie di Fourier

Sia $y(t)$ una funzione periodica di periodo $T$ che soddisfi le condizioni di Dirichlet, allora essa può sempre essere scritta come:

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\frac{2\pi}{T}t) + b_n \sin(n\frac{2\pi}{T}t)$$

**Dove:**

- $n$ è un numero naturale e $\frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \omega$;
- l'espressione $a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ si chiama ***n*-esima armonica;**
- I termini $a_n$ e $b_n$ sono i **coefficienti** dell' $n$-esima armonica;
- L'armonica ottenuta per $n = 1$ si chiama **armonica fondamentale** ed ha frequenza pari a quella dell'onda.

# Serie di Fourier - Coefficienti

La formula vista prima non è complicata. Gli unici valori non noti sono i coefficienti, descritti dai seguenti integrali in $t$ che dipendono dalla funzione iniziale $y(t)$.

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t)\ \cos(n\omega t)\ dt$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t)\ dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) \sin(n\omega t)\ dt$$

$$\boxed{\frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \omega}$$

# Serie di Fourier - Sinusoide

In realtà ogni armonica può essere scritta usando una sola funzione tra seno e coseno. Si dimostra cioè che:

$$y(t) = A\ sin(\omega t + \varphi_0) = a\,cos\,\omega t + b\,sin\,\omega t$$

**DIM.**

I. Applicando la formula di addizione del seno:

$$A\,sin(\omega t + \varphi_0) = A\ sin\,\omega t\,cos\,\varphi_0 + A\,sin\,\varphi_0\,cos\,\omega t$$

II. Ponendo $A\,cos\,\varphi_0 = b$ e $A\,sin\,\varphi_0 = a$ si conclude.

Analogo ragionamento vale per la funzione $A\,cos(\omega t + \varphi_0)$:

# Serie di Fourier – Ampiezza armonica *n*

In generale si può dunque affermare che:

$$A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) = a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$$

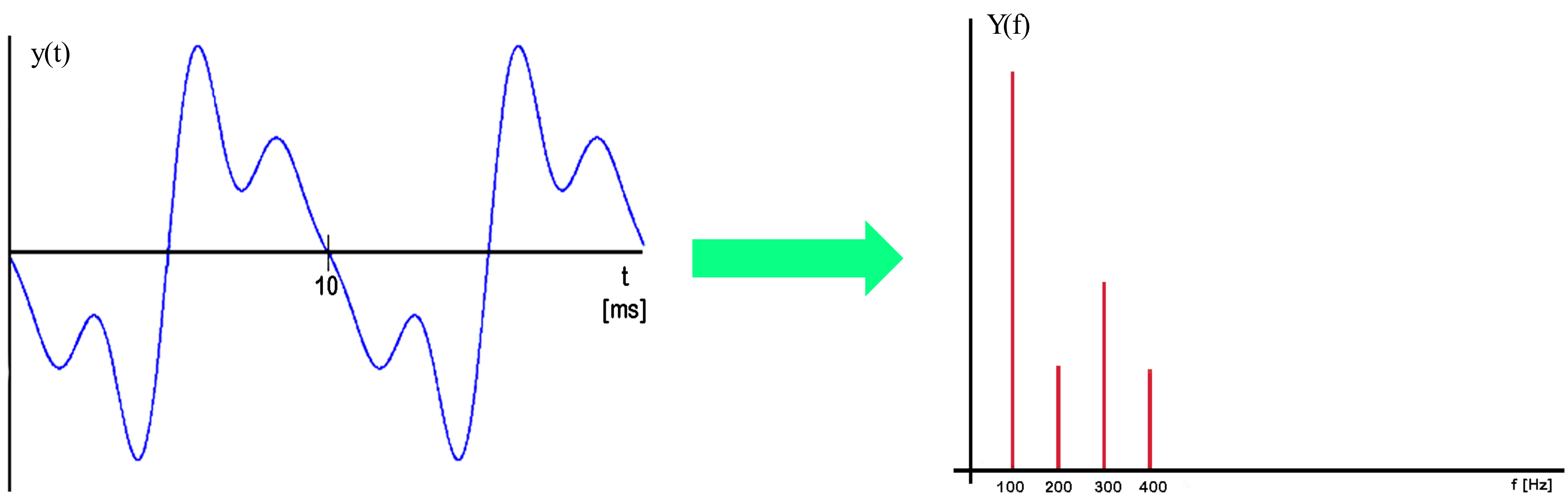
Il valore $A_n$ e $\varphi_n$ sono allora **l'ampiezza e la fase dell' *n*-esima armonica rispettivamente**. Si può dimostrare (esercizio) che:

$$A_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2} \qquad \varphi_n = \tan^{-1}\frac{a_n}{b_n}$$

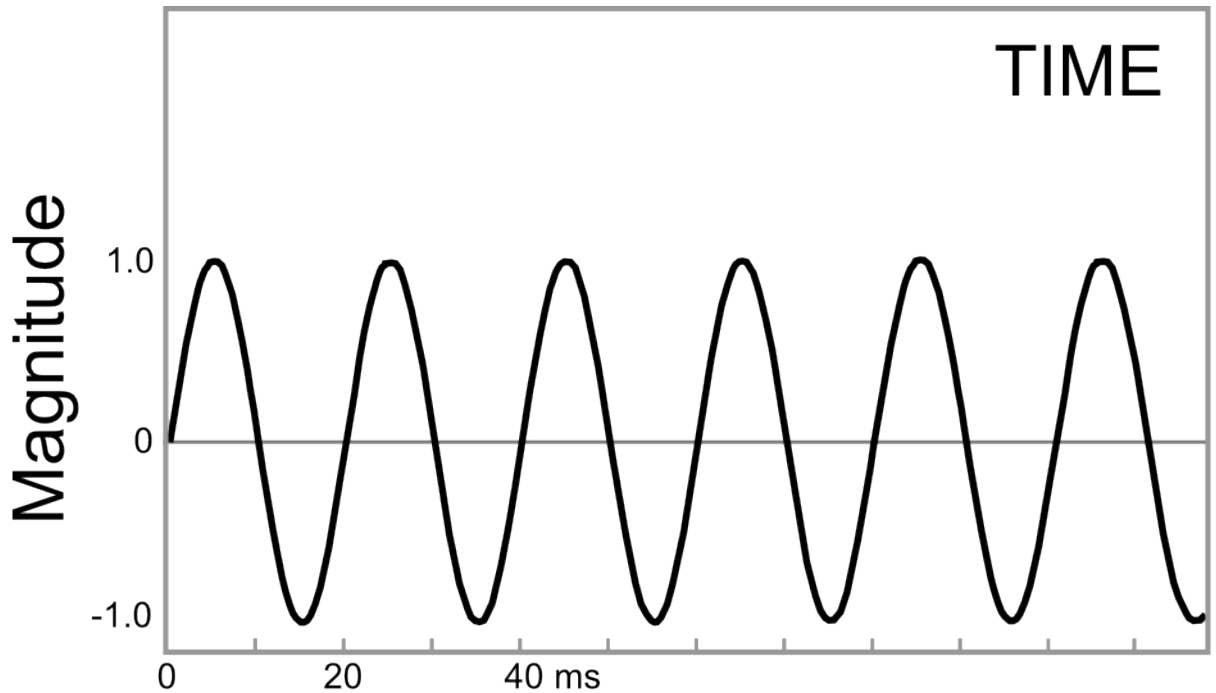
# Serie di Fourier - Spettro

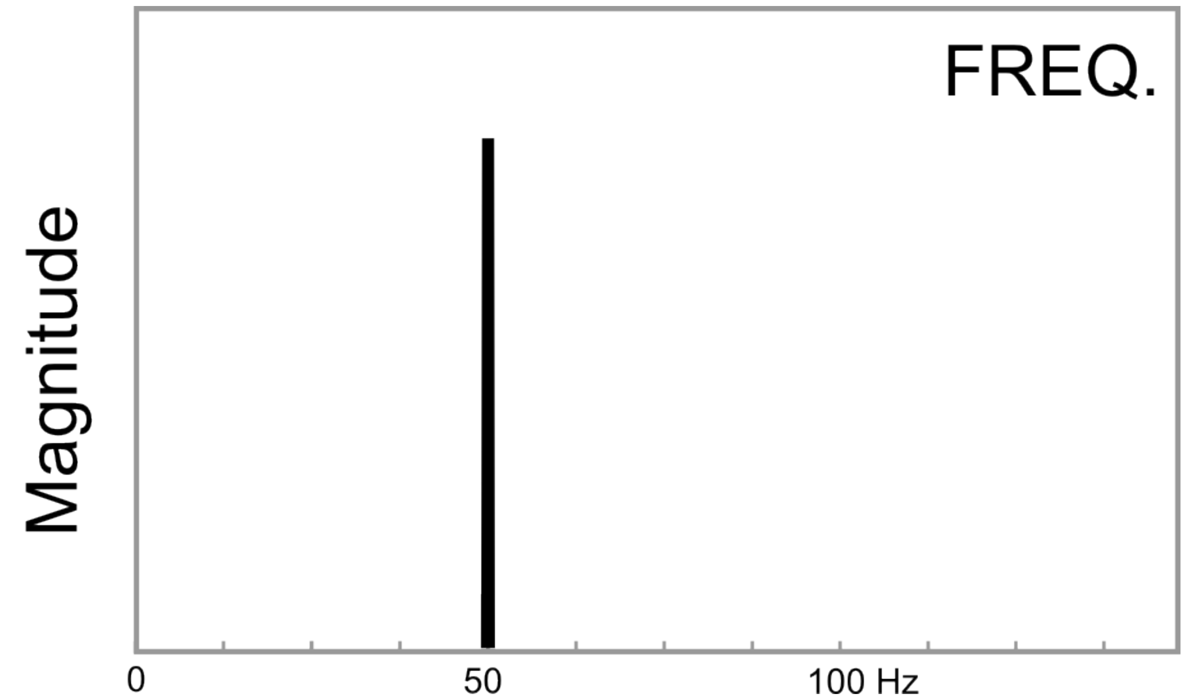
L'insieme delle frequenze delle onde elementari, con relativi contributi $(A_n)$, che costituisce un'onda complessa prende il nome di **spettro**. Può essere indicato con $Y(f)$.

Lo spettro può essere rappresentato in un grafico **frequenza-ampiezza**. Si passa quindi dal **dominio del tempo** a quello **delle frequenze**



# Esempi – Spettro onda sinusoidale

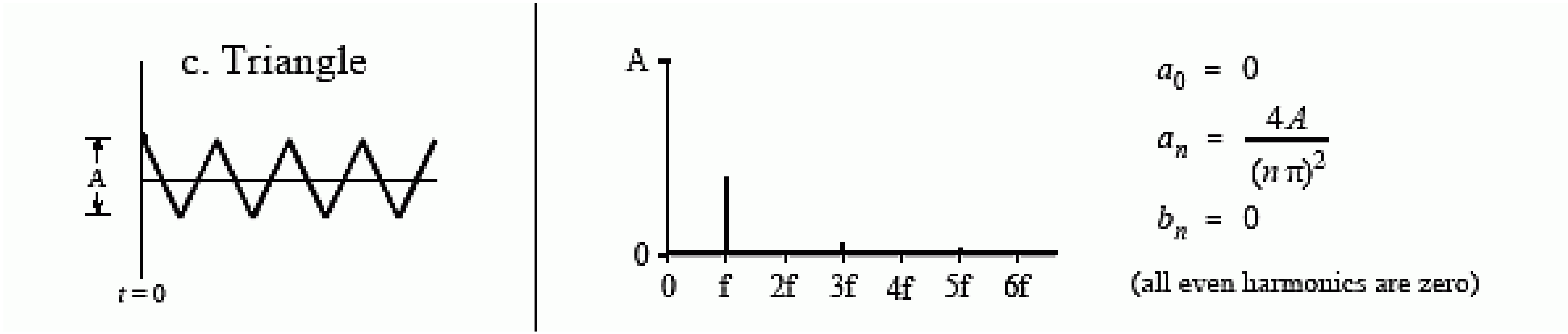


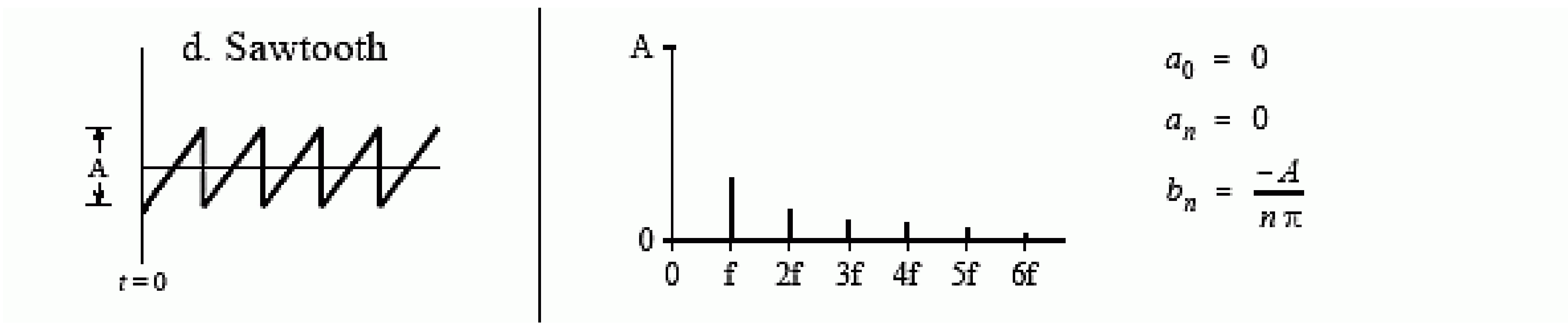




$$y(t) = sin(2\pi * 50 * t) \quad \Rightarrow \quad Y(f) = \begin{cases} 1, & f = 50 \\ 0, & altrimenti \end{cases}$$

Onda sinusoidale di periodo $20\,ms$ e quindi di frequenza $50\,Hz$. Lo spettro è chiaramente composto dalla sola frequenza dell'unica sinusoide che costituisce l'onda

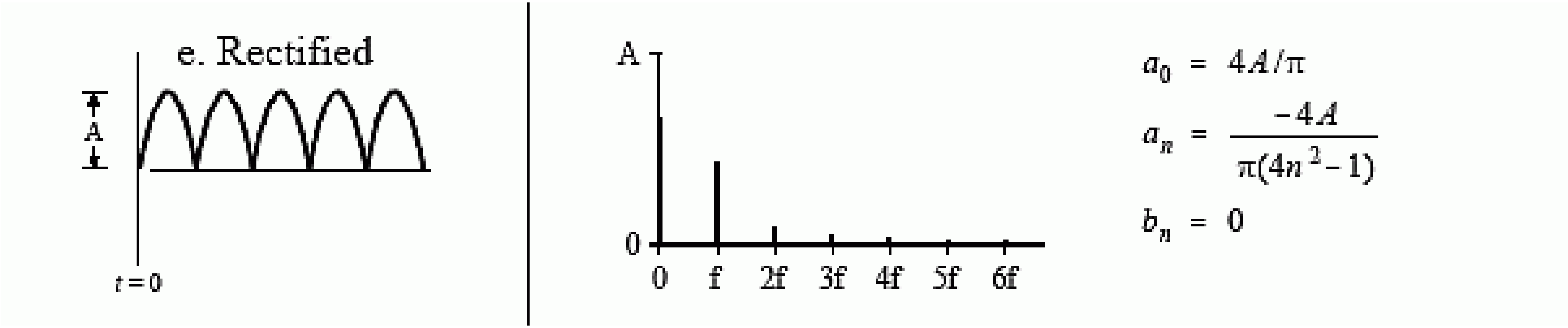
# Esempi – Triangolare e Dente di sega

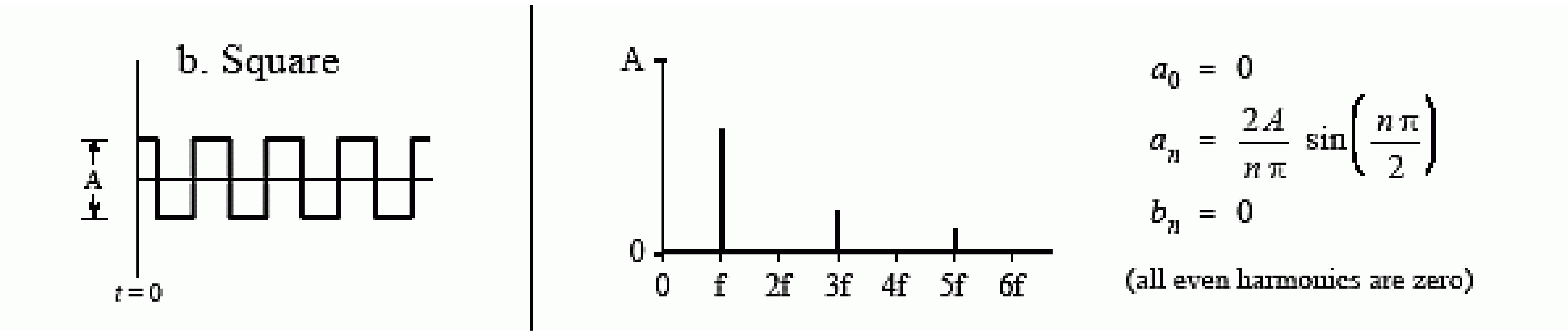



L'onda **triangolare** e a **dente di sega** richiede infiniti termini per essere sintetizzata. Al livello digitale ciò è chiaramente impossibile, per cui di norma si usano solo i primi termini per approssimare l'onda originale.

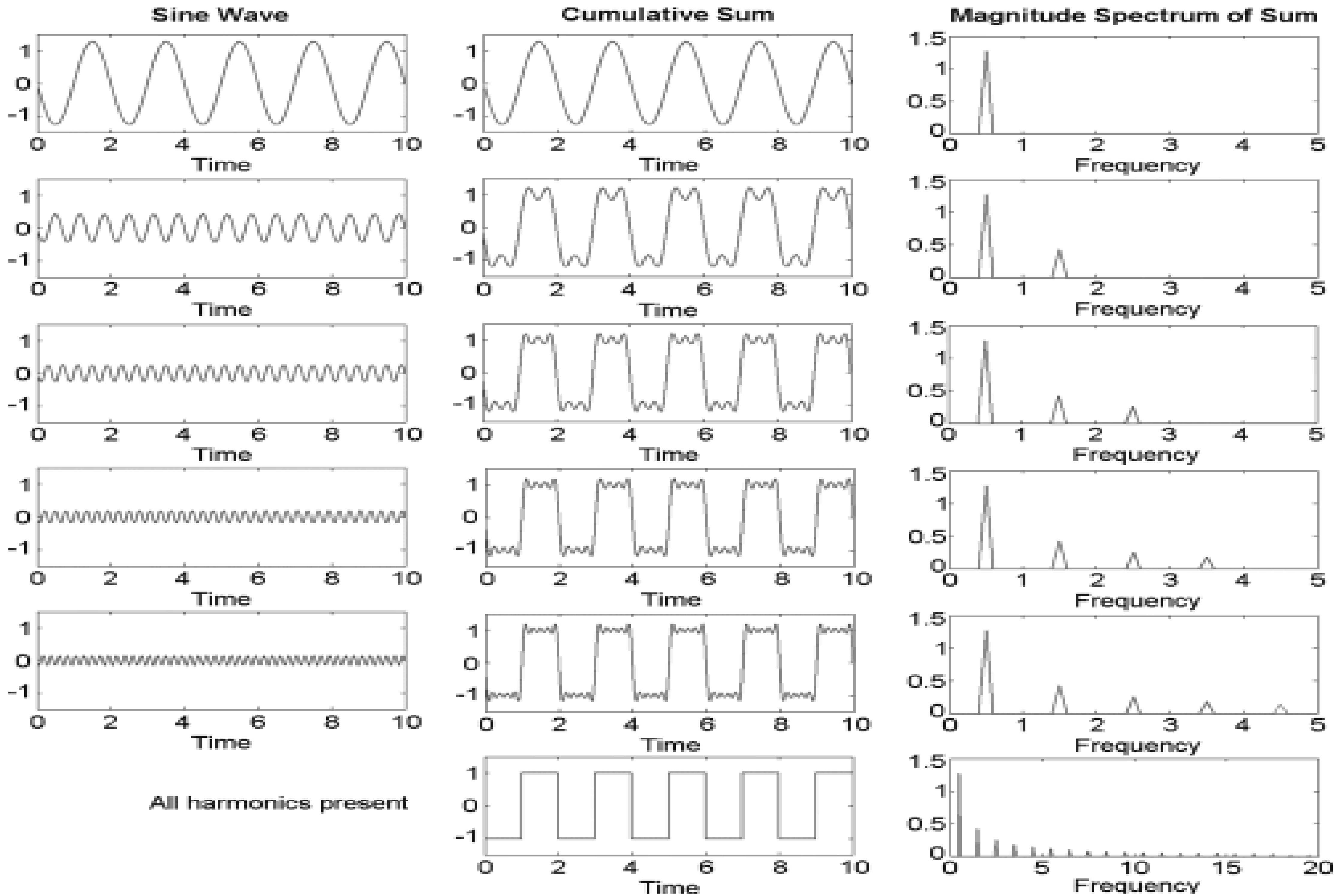
# Esempi – Raddrizzata e Quadra



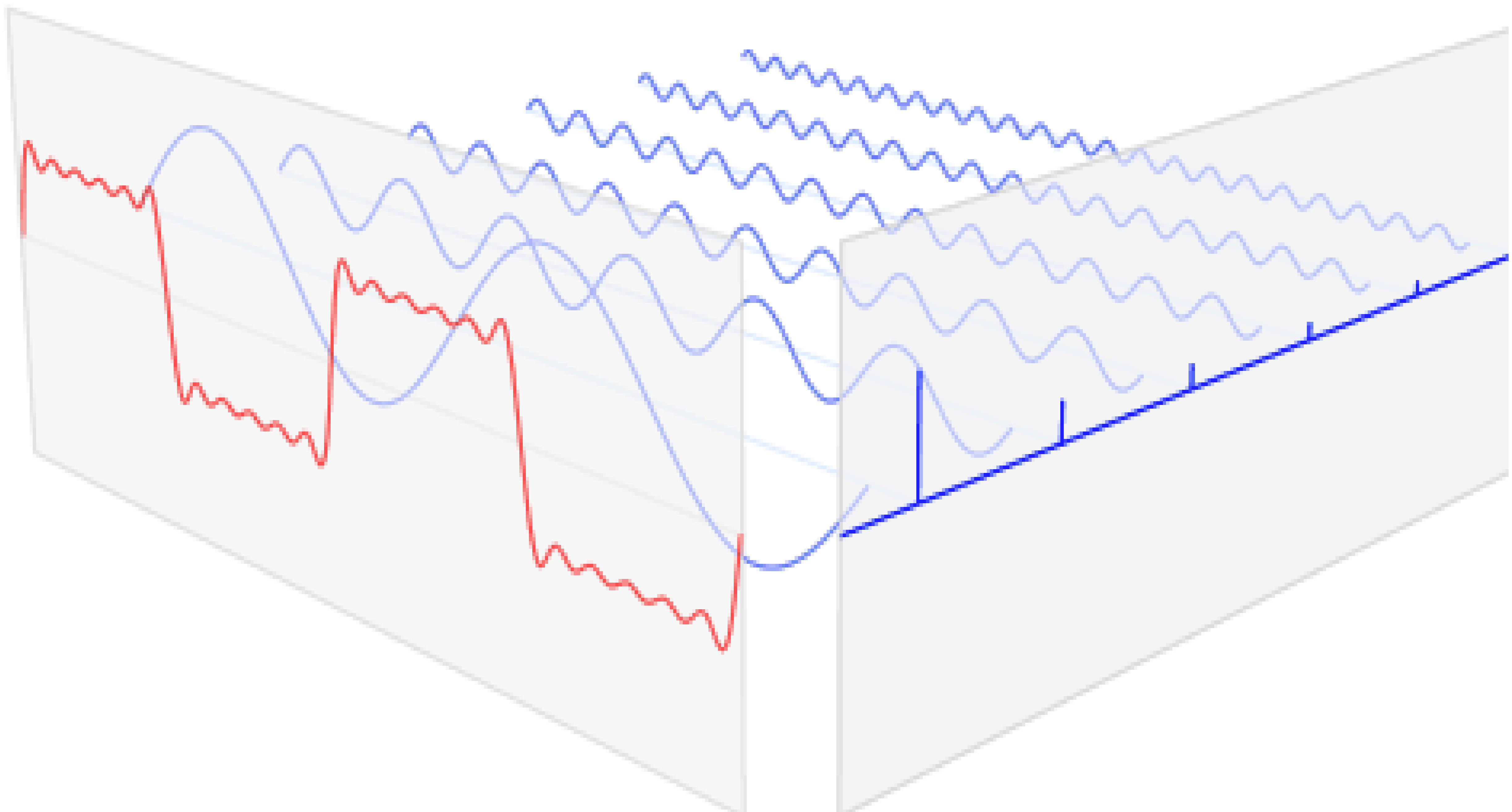




Lo stesso discorso relativo al numero di termini elementari necessari a rappresentare le onde triangolari e a dente di sega, vale per le due onde sopra.

# Esempi – Spettro onda quadra



# Esempi – Rappresentazione Frequenza-Tempo-Ampiezza



# Trasformata di Fourier

- Come abbiamo visto, la Serie di Fourier può essere utilizzata solo per onde periodiche.
- In natura moltissime onde sono però **aperiodiche**.
- Per questo motivo, se l'onda è periodica a meno di qualche piccola variazione si usa la Serie al prezzo di un po' di imprecisione.
- In alternativa si è costretti ad utilizzare la Trasformata di Fourier. Gli spettri ottenuti dalla Trasformata di Fourier per onde generiche, sono ricchi di frequenze che variano in un insieme **continuo** e non discreto (Serie).

# Serie e trasformata - Forma esponenziale

## Trasformata di Fourier

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(f) e^{i2\pi ft} df \qquad C(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

## Serie di Fourier

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i2\pi fnt} \qquad c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) e^{-i2\pi fnt} dt$$

Ponendo $c_{-n} = c_n{}^*$ (* complesso coniugato)

**Verificare che:**

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

Come si può notare, la Serie di Fourier è un caso particolare della Trasformata. **Nella pratica, per i segnali digitali, si utilizzano la Serie discreta e la Trasformata discreta di Fourier.**