D.9 Sei $S_{m,l}$ die Anzahl der Möglichkeiten, eine m-elementige Menge in l nichtleere Mengen aufzuteilen $(m, l \geq 1)$. Offenbar ist $S_{m,1} = 1$ für alle $m \geq 1$.

1. Bestimmen Sie $S_{4,2}$ und geben Sie ein Beispiel an.

$$S_{4,2} = 2^{4-1} - 1 = 8 - 1 = 7$$

Beispiel: Teile die 4-elementige Menge $\{a, b, c, d\}$ in zwei nicht leere Mengen auf

Mögliche Aufteilungen:

1. $\{a, b\}$,$\{c, d\}$
2. $\{a, c\}$,$\{b, d\}$
3. $\{a, d\}$,$\{b, c\}$
4. $\{a\}$,$\{b, c, d\}$
5. $\{b\}$,$\{b, c, d\}$
6. $\{c\}$,$\{a, b, d\}$
7. $\{d\}$,$\{a, b, c\}$

2. Beweisen Sie durch vollständige Induktion über m, dass

$$S_{m,2} = 2^{m-1} - 1$$

für alle $m \geq 1$ gilt.

Induktionsanfang: Für $m = 1$ ist

Eine einelementige Menge lässt sich nicht auf 2 nicht leere Mengen aufteilen. Somit gibt es 0 Möglichkeiten der Aufteilung. Zudem gilt:

$$S_{1,2} = 2^{1-1} - 1 = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

Induktionsannahme: Die Formel

$$S_{m,2} = 2^{m-1} - 1$$

gilt für ein $m \in \mathbb{N}^+$.

Induktionsschritt: $m \rightarrow m + 1$

$(m + 1)$-Elemente sollen auf zwei nicht-leere Mengen aufgeteilt werden. Unter der Induktionsannahme gilt, dass es $(2^{m-1} - 1)$-viele Möglichkeiten M gibt, eine m-elementige Menge, in zwei nicht-leere Mengen L_1 und L_2 aufzuteilen:

M_1:	$L_{1,1}, L_{1,2}$
M_2:	$L_{2,1}, L_{2,2}$
…	…
$M_{2^{m-1}-1}$:	$L_{2^{m-1}-1,1}, L_{2^{m-1}-1,2}$

Wird nun das $(n + 1)$-te Element hinzugezogen, kann dieses für jede Möglichkeit M_i, entweder in die Menge $L_{i,1}$ oder in die Menge $L_{i,2}$ hinzugefügt werden. Es ergeben sich also $2 \cdot (2^{m-1} - 1)$ Möglichkeiten der Aufteilung.

Zudem existiert nun **eine** weitere Möglichkeit, nämlich das $(n + 1)$-te Element in eine der Mengen, und alle anderen Elemente in die andere Menge zu verteilen.

Unter der Induktionsannahme ergibt sich also als Anzahl der Möglichkeiten eine $(m + 1)$-elementige Menge auf 2 Mengen aufzuteilen:

$$S_{m+1,2} = 2 \cdot (2^{m-1} - 1) + 1 = 2^m - 2 + 1 = 2^m - 1$$

q.e.d.