A.7:

1. Sei $r \geq 0$. Beweisen Sie durch vollständige Induktion über r, dass

$$\sum_{i=0}^{r-1}(i+1)2^i = (r-1)2^r + 1.$$

Induktionsanfang: Für $r = 0$ ist

$$\sum_{i=0}^{-1}(i+1)2^i = 0 = (0-1)2^0 + 1 = -1 + 1 = 0$$

Induktionsannahme: Die Formel

$$\sum_{i=0}^{r-1}(i+1)2^i = (r-1)2^r + 1$$

gilt für ein $r \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: $r \to r+1$

Unter der Induktionsannahme gilt:

$$\sum_{i=0}^{r}(i+1)2^i = (r+1)2^r + \sum_{i=0}^{r-1}(i+1)2^i = (r+1)2^r + (r-1)2^r + 1 = 2^r(r+1+r-1) + 1$$

$$2^r \cdot (2 \cdot r) + 1 = r \cdot 2^{r+1} + 1$$

q.e.d.

2. Sei $m \geq 1$ eine Zweierpotenz, d.h. $m = 2^r$ für ein $r \geq 0$, und sei $M =_{\text{def}} \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Bestimmen Sie $|M|$ so genau wir möglich in Abhängigkeit von m. In welcher Θ-Klasse liegt $|M|$?

$$|M| = 1 + \sum_{j=1}^{\log_2 m} j \cdot 2^{j-1}$$

Θ-Klasse: $O(2^n)$