Ejercicios Avanzados
Profesor: Mauricio Vargas

1. Fórmulas matemáticas

Ejercicio 1. Escribir el sistema lagrangeano:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(3 - x - y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Longrightarrow 2x - \lambda = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Longrightarrow 2y - \lambda = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Longrightarrow 3 - x - y = 0 \tag{3}$$

Ejercicio 2. Generar enlaces a las ecuaciones anteriores a fin de obtener lo siguiente:
Restando la ecuación (2) a (1) se obtiene

$$x - y = 0 \tag{*}$$

Si reemplazamos (*) en (3) resulta que $x = y = 3/2$.

Ejercicio 3. Escribir las derivadas del sistema anterior en forma vectorial, es decir

$$\nabla L(x, y, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x - \lambda \\ 2y - \lambda \\ 3 - x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Uso de entornos

Ejercicio 4. Defina un entorno llamado teorema y un entorno llamado demostración para obtener el siguiente texto:

Teorema 1. *A es linealmente dependiente si y sólo si existe $j = 1, \ldots, n$ tal que $\boldsymbol{x}_j$ es combinación lineal de $A \setminus \{\boldsymbol{x}_j\}$.*

Demostración. A es linealmente dependiente si y sólo si

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_n \boldsymbol{x}_n = \mathbf{0} \text{ con } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \text{ no todos nulos}$$

supongamos que $\alpha_j \neq 0$ para $1 \leq j \leq n$ entonces

$$\alpha_j \boldsymbol{x}_j = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}} \alpha_i \boldsymbol{x}_i$$

$$\boldsymbol{x}_j = -\frac{1}{\alpha_j} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}} \alpha_i \boldsymbol{x}_i$$

si definimos $\beta_i = -\alpha_i/\alpha_j$ se tiene

$$\boldsymbol{x}_j = -\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}} \beta_i \boldsymbol{x}_i$$

y por lo tanto $\boldsymbol{x}_j$ es combinación lineal de $A \setminus \{\boldsymbol{x}_j\}$. ■

Ejercicio 5. Usando el entorno de teorema enuncie el teorema del valor medio, incluya las respectivas imágenes y el disclaimer que aparecen a continuación:

Teorema 2. (Teorema del valor medio en $\mathbb{R}$)
Sean $[a, b]$ un intervalo cerrado y acotado y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y derivable en (a, b). Entonces, existe un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demostración. Buscar en Wikipedia[1] ■

La interpretación geométrica del teorema 2 es la siguiente: Si trazamos una secante que une dos puntos de una función continua y derivable, entonces existe un punto donde la tangente al gráfico de la función y la secante ya definida son paralelas.

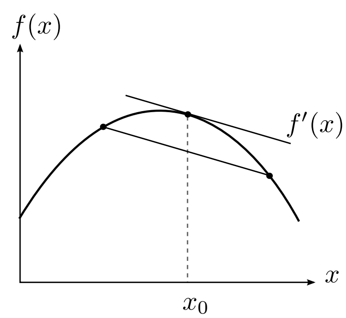

Figura 1: Teorema del valor medio.

Ejercicio 6. Las imágenes también se incluyen dentro de un entorno. Inserte la siguiente imagen:

Figura 2: El logo de la iniciativa Cátedras Libres

[1] Lo relevante es aprender Latex.

Ejericio 7. El entorno verbatim permite mostrar el código utilizado. Escriba lo siguiente:

El código:

```
Existen bastantes colores en latex como {\color{red}rojo},
{\color{blue}azul}, {\color{green}verde}, etc.
```

Genera lo siguiente:

Existen bastantes colores en latex como rojo, azul, verde, etc.

3. Tablas

Ejercicio 8. Inserte la siguiente tabla y el problema:

En Optimización Lineal, la forma de pasar del problema primal al dual se puede resumir de la siguiente forma:

Minimización	Maximización
Restricción	Variable
$\leq$	$\leq$
$\geq$	$\geq$
$=$	$\in \mathbb{R}$
Variable	Restricción
$\leq$	$\geq$
$\geq$	$\leq$
$\in \mathbb{R}$	$=$

Es decir, el dual de un problema sería algo de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{llrcrcl}
P) & \text{máx} & 3x_1 & + & 2x_2 & & \\
 & \text{s.a} & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 4 \\
 & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llrcrcl}
D) & \text{mín} & 2y_1 & + & 4y_2 & & \\
 & \text{s.a} & -2y_1 & + & 2y_2 & \geq & 3 \\
 & & y_1 & + & y_2 & \geq & 2 \\
 & & y_1 \geq 0 & , & y_2 \leq 0 & &
\end{array}
$$