دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی کاربردی

کمیت‌های آشوب و چالش‌های محاسبه‌ی آن

نگارش

محمد نوربخش مروست

استاد راهنما

دکتر محمدرضا رزوان

تابستان ۱۴۰۳

به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

این پایان‌نامه به عنوان تحقق بخشی از شرایط دریافت درجه کارشناسی ارشد است.

عنوان: کمیت‌های آشوب و چالش‌های محاسبه‌ی آن

نگارش: محمد نوربخش مروست

کمیته‌ی ممتحنین

استاد راهنما: دکتر محمدرضا رزوان امضاء:

استاد داور: دکتر میثم نصیری امضاء:

استاد داور: دکتر امین‌السادات طالبی امضاء:

تاریخ:

اظهارنامه

(اصالت متن و محتوای پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد)

عنوان پایان‌نامه: کمیت‌های آشوب و چالش‌های محاسبه‌ی آن

نام استاد راهنما: دکتر محمدرضا رزوان نام استاد راهنمای همکار: نام استاد مشاور:

این‌جانب محمد نوربخش مروست اظهار می‌دارم:

۱- متن و نتایج علمی ارائه شده در این پایان‌نامه اصیل بوده و منحصراً توسط این‌جانب و زیرنظر استادان (راهنما، همکار و مشاور) نام‌برده شده در بالا تهیه شده است.

۲- متن پایان‌نامه به این صورت در هیچ جای دیگری منتشر نشده است.

۳- متن و نتایج مندرج در این پایان‌نامه، حاصل تحقیقات این‌جانب به عنوان دانشجوی کارشناسی‌ارشد دانشگاه صنعتی شریف است.

۴- کلیه مطالبی که از منابع دیگر در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار گرفته، با ذکر مرجع مشخص شده است.

نام دانشجو: محمد نوربخش مروست

تاریخ 1403/5/1

امضا

نام استادان راهنما: محمدرضا رزوان

تاریخ 1403/5/1

امضا

نام دانشجو: محمد نوربخش مروست

تاریخ 1403/5/1

امضا

سپاس

از استاد بزرگوارم دکتر رزوان که با کمک‌ها و راهنمایی‌های بی‌دریغشان، مرا در به سرانجام رساندن این پایان‌نامه یاری داده‌اند، تشکر و قدردانی می‌کنم.

در نوشتن این مطلب، در طول دوران کارشناسی ارشد، دانش زمینه‌ای با راهنمایی‌ها و آموزگاری اساتیدم دکتر رزوان، دکتر نصیری و دکتر طالبی کسب کردم که بی‌شک این راهنمایی‌ها به من در مطالعه‌ی سیستم‌های دینامیکی جهت داد. از این بزرگواران صمیمانه سپاسگزارم.

در طول دوره‌ی کارشناسی ارشد، کمک‌های خانم شهیدی مرا با جنبه‌های کاربردی سیستم‌های دینامیکی آشنا کرد. از زحمات و کمک‌های ایشان بسیار متشکرم.

چکیده

آشوب در سیستم‌های دینامیکی به معنای وجود حساسیت شدید به شرایط اولیه در رفتار سیستم است و باعث می‌شود که پیش‌بینی رفتار سیستم در طولانی مدت غیرممکن یا بسیار دشوار شود. این رفتار آشوبناک حتی در سیستم‌های قطعی هم وجود دارد. مشاهده‌ی این مفهوم، علاوه‌بر تغییرات فلسفی که به همراه داشت، در زمینه‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفت و دلیلی بر مشاهده‌ی بسیاری از پدیده‌های فیزیکی، شیمیایی و زیستی شد. این پدیده در بخش‌های مختلفی مانند دینامیک سیالات، دینامیک نورون و واکنش‌های شیمیایی مطالعه شده است. در این پژوهش، قصد داریم سیستم‌های دینامیکی آشوبناک را با استفاده از کمیت‌هایی مانند آنتروپی توپولوژیک، نمای لیاپانوف و بعد هاسدورف تحلیل کنیم و معیارهایی را برای تشخیص این سیستم‌ها معرفی کنیم. برای فراگیری این کمیت‌ها، ابتدا مبانی تئوری آشوب و نظریه‌ی آنتروپی را مورد بررسی قرار خواهیم داد و به معرفی و تحلیل چندین مدل دینامیکی شناخته شده در حوزه های گوناگون خواهیم پرداخت. در این قسمت، با مطالعه‌ی روش‌های استفاده‌شده در مقالات، به تحلیل نحوه‌ی تخمین آشوب در هر مدل می‌پردازیم و سعی می‌کنیم با استفاده از الگوریتم‌های عددی، نتایج هر یک را بررسی کنیم و نتایج حاصل را با هم مقایسه خواهیم کرد. در انتها، به فرآیندهایی اشاره خواهیم کرد که موجب ایجاد آشوب در سیستم می‌شوند. کاربرد این فرآیندها را بررسی خواهیم کرد.

کلیدواژه‌ها: سیستم‌های دینامیکی، آشوب، آنتروپی، نمای لیاپانوف، بعد هاسدورف

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فصل ۱

مقدمه‌ای بر نظریه‌ی آشوب

۱-۱ پیشینه

آیزاک نیوتن [۱] ایده‌ی استفاده از معادلات دیفرانسیل را برای مدل‌سازی حرکت سیستم‌های فیزیکی، به جهانیان نشان داد. و لازمه‌ی ادامه این راه، ابداع حساب‌دیفرانسیل و انتگرال بود. یکی از بزرگ‌ترین موفقیت‌های وی کشف این موضوع بود که حرکت سیارات و قمرهای آن‌ها در نتیجه‌ی یک نیروی بنیادی صورت می‌گیرد و آن نیرو، نیروی گرانش بین دو جسم است. او نشان داد که حرکتی که از سیارات می‌دیدند، با فرض وجود نیروی جاذب بین اجرام کیهانی قابل توصیف است؛ همان نیرویی که متناسب با حاصل ضرب جرم دو جسم است و با مربع فاصله‌ی بین آن دو جسم نسبت عکس دارد. در نجوم دیگر مدارهای دایره‌شکل، بیضی‌شکل و سهمی‌شکل سیارات عنصری پایه‌ای در تعیین حرکت آن‌ها نبودند، بلکه این مدارها تنها تقریب‌هایی از قوانینی شدند که توسط معادلات دیفرانسیل توصیف می‌شدند. و این روش هم‌اینک نیز در علوم، روشی بنیادی که با آن می‌توانیم جواب چرایی‌ها را بدهیم. و به قولی رازِ گلِ سرخ را شناسایی کنیم. مثلا: چرا فلان واکنش شیمیایی به تعادل نمی‌رسد؟! یا آیا در آینده سیارات منظومه شمسی از هم فاصله می‌گیرند و هر یک در سویی از منظومه شمسی ناپدید می‌شوند؟

[۱] Sir Isaac Newton

نسل بعدی دانشمندان، از این معادلات استفاده کردند و این روش را توسعه دادند تا بتوانند تکامل یک سیستم فیزیکی را توصیف کنند و به نحوی به آرزوی دیرینه بشر مبنی بر پیش‌بینی آینده، جامه‌ی تحقق ببخشند؛ اما در حالی که معادلات دیفرانسیل ابزاری کافی برای توصیف رفتار یک سیستم است، در بعضی موارد، پیش‌بینی دقیق آن رفتار کاری سخت و در مواردی ناشدنی است. گاهی نوشتن جواب‌های معادلات دیفرانسیل در متناهی جمله جبری، کاری ناشدنی است.

اکثرا هنگامی که جواب‌ها را می‌توانیم مشخص کنیم، آن معادلات حرکات بسیار منظمی را توصیف می‌کنند. درباره‌ی این نوع جواب‌ها می‌توانیم بگوییم اگر در ناحیه‌ای کراندار باشند، یا به یک حالت پایدار میل می‌کنند که گاهی به علت از دست رفتن انرژی است، یا رفتاری تناوبی یا شبه‌تناوبی [۲] دارند شبیه آن‌چه در سیارات و قمرهای آن‌ها رخ می‌دهد (در منظومه شمسی مسیر حرکت سیارات از تناوب‌های برابری تبعیت نمی‌کند. به سیستم‌هایی که تعدادی دوره‌ی تناوب‌های نابرابر دارند، شبه‌تناوبی گویند.)

علاوه بر این دو نوع رفتاری که نام بردیم، دانشمندان سیستم‌هایی می‌شناختند که رفتاری پیچیده‌تری از خود نشان می‌دادند؛ مثلا آب در حال جوشیدن یا رفتار مولکول‌های هوایی که در یک اتاق قرار دارند و پیاپی به یک‌دیگر برخورد می‌کنند. این نوع سیستم‌ها از آن‌جا که در آن‌ها ذرات زیادی با هم تعامل دارند، دور از ذهن نیست که رفتاری پیچیده نیز از خود نشان دهند.

حدود سال ۱۹۷۵ بود که بعد از سه قرن مطالعه، دانشمندان با نوع سومی از حرکات آشنا شدند که به آن امروزه « آشوب » گوییم. این نوع حرکات نامنظم هستند اما نه مانند سیستم‌های شبه‌تناوبی با تناوب‌های زیاد و همچنین بی‌نظمی این سیستم‌ها به خاطر تعامل تعداد زیادی از ذرات نیست. این نوع رفتار در سیستم‌های ساده نیز رخ می‌دهد.

[۲] Quasiperiodic

قبل این سال نیز ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانانی از این رفتار آگاه بودند. احتمالا ماکسول [۳] که حدود سال ۱۸۶۰ حرکات مولکول‌های گاز را بررسی می‌کرد از این موضوع آگاه بود که سیستم شامل تنها دو مولکول که در یک جعبه قرار دارند جزو هیچ‌کدام از دو نوع حرکت اول یادشده نیست و پیش‌بینی آینده‌ی این سیستم ناممکن است. او از این موضوع آگاه بود که تغییرات کوچک در محل اولیه دو ذره، تغییرات بزرگی در مسیر حرکت دو ذره ایجاد می‌کند؛ حتی اگر به دو ذره به چشم دو گوی نگاه کنیم.

هنری پوآنکاره [۴] در سال ۱۸۹۰ منظومه‌ای شامل سه جسم را بررسی کرد و نتیجه گرفت که تعامل این‌ها و آینده‌ی سیستم به شدت پیچیده است.

در ادامه‌ی این مشاهدات، آزمایش‌های عددی را داریم که پیشگامی مانند لورنز پیش‌بینی ناپذیری و پیچیدگی برخی سیستم‌ها را در این آزمایش‌ها مشاهده کردند. این مشاهدات و آزمایش‌ها بنیادی شد برای مطالعه‌ی سیستم‌های دینامیکی و آشوب!

---

[۳] James Clerk Maxwell

[۴] Henri Poincare

۱-۲ انواع آشوب

آشوب را می‌توان در سیستم‌های دینامیکی گسسته و پیوسته مشاهده کرد. بنابراین سیستم‌های پیوسته و گسسته‌ی زیر را روی $\mathbb{R}^n$ در نظر می‌گیریم:

$$\dot{x} = f(x) \tag{۱-۱}$$

$$x \mapsto g(x) \tag{۱-۲}$$

شار متناظر با میدان برداری (سیستم دینامیکی پیوسته ۱-۱) را $\phi(t,x)$ می‌نامیم. همچنین فرض می‌کنیم Λ یک مجموعه‌ی ناوردای فشرده است تحت ϕ (متناظرا تحت g) می‌باشد. این به این معنا است که $\phi(t,\Lambda) \subset \Lambda$ برای تمامی زمان‌های $t \in \mathbb{R}$ (و متناظرا $g^n(\Lambda) \subset \Lambda$ برای تمامی $n \in \mathbb{Z}$ یا $n \in \mathbb{N}$).

بر اساس این ملاحظات و مفروضات، تعاریف زیر را داریم:

تعریف ۱-۱ (حساسیت به شرط اولیه) *شار $\phi(t,x)$ (و متناظرا نگاشت $g(x)$) را حساس به شرط اولیه‌ی در Λ گوییم هرگاه*

وجود داشته باشد $\epsilon > 0$ که به ازای هر $x \in \Lambda$ و هر همسایگی U از x، $y \in U$ و $t > 0$ (متناظرا $n > 0$) یافت شوند که

$$|\phi(t,x) - \phi(t,y)| > \epsilon$$

(متناظرا

$$(|g^n(x) - g^n(y)| > \epsilon$$

اگر دو مدار به طور نمایی از هم دور شوند، یعنی:

$$|\phi(t,x) - \phi(t,y)| > \epsilon e^{ht}$$

(متناظرا

$$(|g^n(x) - g^n(y)| > \epsilon e^{ht}$$

به ازای یک $h > ۰$، آنگاه گوییم سیستم به طور نمایی به شرط اولیه حساس است.

به طور شهودی این تعریف بیان می‌کند که به ازای هر شرط اولیه $x \in \Lambda$ حداقل یک شرط اولیه‌ی به حد دلخواه نزدیک به Λ وجود دارد که مدار آن از مدار x دور می‌شود.

مثال ۱-۱ (حساس به شرط اولیه) *سیستم‌های زیر سیستم‌های حساس به شرط اولیه هستند. در هر مورد مجموعه فشرده‌ی Λ و دینامیک سیستم معرفی شده است:*

- *سیستم خطی زیر را در نظر بگیریم:*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

و همچنین $\Lambda = \{(-۱, ۱)\}$.

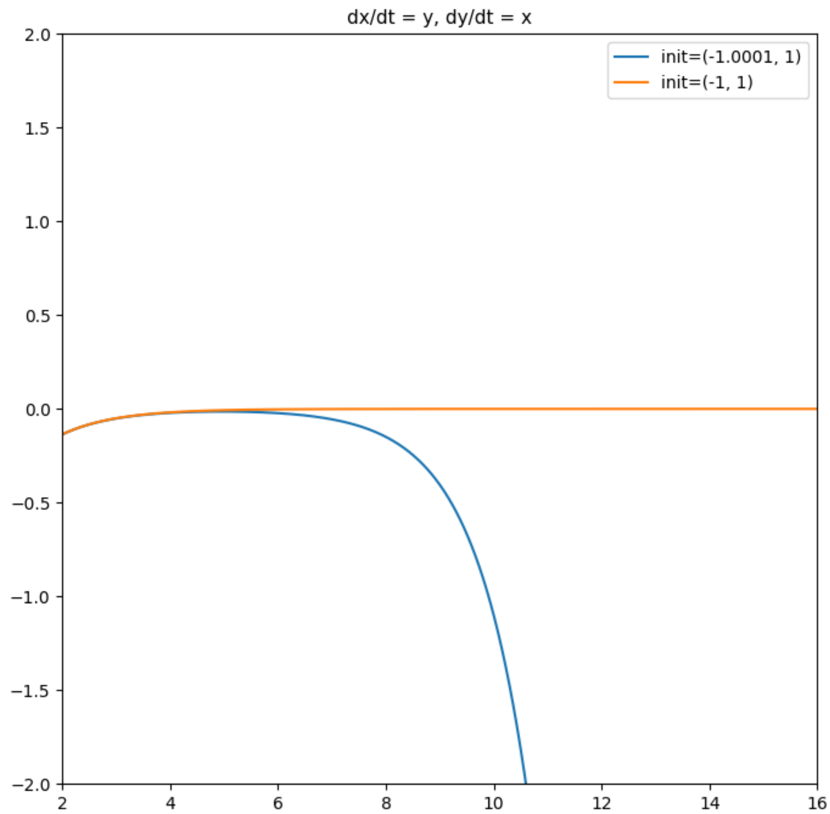
برای این سیستم می‌توان شارهای جواب را به طور مستقیم محاسبه کرد:

$$\begin{cases} x(t) = -e^{-t} \\ y(t) = e^{-t} \end{cases}$$

حال برای ϵ داده شده، کافیست از هر همسایگی $(-۱, ۱)$ نقطه‌ی $(-۱ - \epsilon/۲^n, ۱)$ را انتخاب کنیم (برای n به قدر کافی بزرگ) شار متناظر با شرط اولیه $(-۱ - \epsilon/۲^n, ۱)$ برابر است با:

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{\epsilon}{۲^{n-۱}}e^t - (۱ + \frac{\epsilon}{۲^n})e^{-t} \\ y(t) = -\frac{\epsilon}{۲^{n-۱}}e^t + (۱ + \frac{\epsilon}{۲^n})e^{-t} \end{cases}$$

وقتی $t \to \infty$ آنگاه شار جواب به منفی بی‌نهایت میل می‌کند. درصورتی که شار جواب اصلی به صفر میل می‌کرد. (۱-۱)



شکل ۱-۱: حساسیت به شرط اولیه

- دینامیک گسسته را این‌گونه در نظر بگیرید:

$$f(x) = ۲x$$

و قرار دهیم: $\Lambda = \{۰\}$.

در این صورت برای هر $\epsilon > ۰$، و هر همسایگی دلخواه، قرار دهید $y = \epsilon/۲^n$ (n به گونه‌ای انتخاب شود که y در همسایگی بیفتد.)

$$f^{n+۱}(y) = ۲^{n+۱}y = ۲\epsilon$$

پس حساسیت به شرط اولیه را داریم.

تعریف ۱-۲ (تراگذری توپولوژیک) *دینامیک $f: X \to X$ را تراگذر توپولوژیک نامیم هرگاه برای*

هر دو باز U و V عددی طبیعی چون k موجود باشد که

$$f^k(U) \cap V \neq \emptyset$$

مثال ۱-۲ (سیستم تراگذر توپولوژیک) دینامیک چرخش با زاویه گنگ α روی دایره $S^1 := [0,1]/\{0,1\}$ را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} R_\alpha \colon S^1 \to S^1 \\ R_\alpha(x) = x + \alpha \quad (mod\ 1) \end{cases}$$

این دینامیک تراگذر توپولوژیک است؛ کافیست پایه‌های توپولوژی خارج قسمتی را بررسی کنیم. هر عضو پایه توپولوژیک، عنصری به فرم $[0,a)$، $(a,1]$، یا (a,b) است که $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$. حال داریم: برای هر باز (a,b) یک $n \in \mathbb{N}$ موجود است که

$$\bigcup_{i=0}^{n-1} R_\alpha^i((a,b)) = S^1$$

و لذا سیستم تراگذر توپولوژیک است.

مثال ۱-۳ (سیستم تراگذر توپولوژیک) نگاشت

$$\begin{cases} T \colon [0,1] \to [0,1] \\ T(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x & x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \end{cases}$$

برای این نگاشت نیز به مانند مثال قبل هر بازی در نظر بگیریم، پس از یک بار اثر تابع، طول آن دو برابر می‌شود پس برای هر باز مانند (a,b) عددی مانند $n \in \mathbb{N}$ موجود است که

$$T^n((a,b)) = [0,1]$$

پس لذا سیستم تراگذر توپولوژیک است.

مثال ۱-۴ (سیستم غیر تراگذر توپولوژیک دارای یک مدار چگال) *نگاشت*

$$\begin{cases} f\colon \{۲^i\colon i\in\mathbb{N}\}\to\{۲^i\colon i\in\mathbb{N}\} \\ f(x)=۲x \end{cases}$$

برای این سیستم،

$$O(۲)=\{۲^i\colon i\in\mathbb{N}\}$$

در فضای مورد بحث چگال است. اما برای این سیستم در نظر بگیریم: $U=\{۴\}$ و $V=\{۲\}$ در این صورت $f^k(U)=\{۲^{k+۲}\}$ که همواره داریم $۲^{k+۲}\neq ۲$ برای $k\in\mathbb{N}$. پس سیستم تراگذر توپولوژیک نمی‌باشد اما کل فضا مدار یک نقطه می‌باشد.

مثال ۱-۵ (سیستم غیر تراگذر توپولوژیک انقباضی) *سیستم زیر را در نظر بگیرید:*

$$\begin{cases} f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=۲x \end{cases}$$

برای این نگاشت در نظر بگیریم: $U=[-۲,-۱]$ و $V=[۱,۲]$ در این صورت $f^k(U)=[-۲^{k+۱},-۲^k]$ زیر مجموعه اعداد حقیقی منفی است اما V همواره زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی مثبت است. بنابراین

$$f^k(U)\cap V=\emptyset$$

برای هر عدد طبیعی k.

حال در جایگاهی هستیم که به شناخته‌شده‌ترین تعریف از اشوب بپردازیم:

۱-۲-۱ آشوب از دیدگاه دِونی

تعریف ۱-۳ (آشوب از دیگاه دونی [۵]) *اگر X یک فضای متریک باشد، $f\colon X\to X$ را آشوب‌ناک گوییم هرگاه سه شرط زیر را دارا باشد:*

- f نسبت به شرط اولیه حساس باشد.

- f تراگذر توپولوژیک باشد.

- مجموعه تمامی نقاط تناوبی f در X چگال باشد. به عبارت دیگر

$$\{x \in X : \exists k \in \mathbb{N} \ s.t. \ f^k(x) = x\} \subset X$$

چگال باشد.

قضیه‌ی ۱-۱ ([۸]) *اگر X یک فضای متریک باشد و $f : X \to X$ یک نگاشت پیوسته باشد، در صورتی که f تراگذر توپولوژیک باشد و مجموعه نقاط تناوبی آن در X چگال باشد، آنگاه f نسبت به شرط اولیه حساس است.*

همان‌طور که دیده شد، برای توابع پیوسته، تراگذر بودن سیستم به همراه چگال‌بودن مجموعه نقاط تناوبی باعث می‌شود سیستم نسبت به شرط اولیه، حساس نیز باشد.

اگر روی یک بازه از اعداد حقیقی حرف بزنیم، برای توابع پیوسته، تراگذری‌بودن سیستم، چگال بودن مجموعه نقاط تناوبی را نیز نتیجه می‌دهد. برای این منظور لم زیر را در نظر بگیریم:

لم ۱-۲ ([۷۴]) *اگر $I \subset \mathbb{R}$ بازه‌ای از اعداد حقیقی باشد، و $f : I \to I$ تابعی پیوسته روی این بازه باشد. اگر $J \subset I$ زیربازه‌ای باشد که شامل هیچ نقطه تناوبی‌ای از f نباشد و $z, f^n(z), f^m(z) \in J$ ($0 < m < n$) آنگاه یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد:*

- $z < f^m(z) < f^n(z)$

- $z > f^m(z) > f^n(z)$

قضیه‌ی ۱-۳ *$I \subset \mathbb{R}$ را بازه‌ای در اعداد حقیقی و $f : I \to I$ را تابعی پیوسته در نظر بگیریم. اگر f تراگذر توپولوژیک باشد، آنگاه مجموعه نقاط تناوبی f در I چگال هستند و بعلاوه f نسبت به شرط اولیه حساس است. به عبارت دیگر، اگر f تراگذر توپولوژیک باشد، آنگاه از دید دونی، آشوب‌ناک است.*

۱-۲-۲ آشوب از دیدگاه لیاپانوف

سیستم‌های یک بعدی

فرض کنیم $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ داده شده است. **هدف بررسی میزان حساسیت به شرط اولیه است.**
برای این منظور مدار $x\in\mathbb{R}$ را در نظر بگیریم: $O(x)=\{x_n:=f^n(x):n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$
همچنین از x به اندازه‌ی کوچکی فاصله می‌گیریم؛ به اندازه‌ی δ_0! پس حال مدار $x+\delta_0$ را در نظر می‌گیریم. این فاصله را در زمان n با δ_n نشان می‌دهیم. هدف این است که ببینم با گذشت زمان x چه موقعیتی نسبت به $x+\delta_0$ پیدا می‌کند.
برای این منظور، ابتدا به محاسبه‌ی $O(x+\delta_0)=\{\hat{x}_n:=x_n+\delta_n=f(\hat{x}_{n-1}):n\in\mathbb{N}\}$ می‌پردازیم:

$$\begin{aligned}\hat{x}_n=x_n+\delta_n&=f(x_{n-1}+\delta_{n-1})=f(x_{n-1})+f'(x_{n-1})\delta_{n-1}+O(\delta_{n-1}^2)\\&=x_n+f'(x_{n-1})\delta_{n-1}+O(\delta_{n-1}^2)\end{aligned}$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\delta_n&=f'(x_{n-1})\delta_{n-1}+O(\delta_{n-1}^2)\\&=f'(x_{n-1})f'(x_{n-2})\delta_{n-2}+O(\delta_{n-2}^2)\\&=\dots\\&=\delta_0\prod_{i=0}^{n-1}f'(x_i)+O(\delta_0^2)\end{aligned}$$

با تقسیم دو طرف تساوی بر δ_0 خواهیم داشت:

$$\lim_{\delta_0\to 0}|\frac{\delta_n}{\delta_0}|=\prod_{i=0}^{n-1}|f'(x_i)|$$

پس مشخص است که میزان دور شدن مدارها که در لحظه‌ی nام همان δ_n است، با $\prod_{i=0}^{n-1}|f'(x_i)|$ رابطه مستقیم دارد.

به طور مثال فرض کنیم f نگاشت پوآنکاره یک جربان تناوبی باشد، در این حال

$$\begin{aligned}|\frac{\delta_n}{\delta_0}| &= \prod_{i=0}^{n-1}|f'(x_i)| + O(\delta_0)\\ &= |f'(x_0)|^n + O(\delta_0)\\ &= e^{n\lambda} + O(\delta_0)\end{aligned}$$

که $\lambda = \ln|f'(x_0)|$ در این حالت مدارها رشد نمایی دارند! و دینامیک به شرط اولیه حساس است. بعلاوه،

$$\begin{aligned}&\lim_{\delta_0\to 0}|\frac{\delta_n}{\delta_0}| = e^{n\lambda}\\ \Rightarrow &\lambda = \lim_{\delta_0\to 0}\frac{1}{n}\ln|\frac{\delta_n}{\delta_0}|; \quad \forall n\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

به λ نمای لیاپانوف $O(x)$ گویند و میزان رشد نمایی مدارها را مشخص می‌کند! این تعریف نخستین بار توسط لیاپانوف ارایه شد. و اگر نمای لیاپانوف سیستمی مثبت باشد، آن سیستم را آشوب‌ناک با دیدگاه لیاپانوف گویند. در حالت کلی، تعریف زیر را داریم:

تعریف ۱-۴ (نمای لیاپانوف) *برای دینامیک گسسته‌ی $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ نمای لیاپانوف با شرط اولیه‌ی x_0 به صورت زیر تعریف می‌شود:*

$$\begin{aligned}\lambda &:= \limsup_{n\to\infty}\lim_{\delta_0\to 0}\frac{1}{n}\ln|\frac{\delta_n}{\delta_0}|\\ &= \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\prod_{i=0}^{n-1}|f'(x_i)|\\ &= \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln|f'(x_i)|\end{aligned}$$

این کمیت میزان رشد نمایی فاصله‌ی مدارهای اطراف مدار x_0 از مدار x_0 را نشان می‌دهد.

این حساسیت به شرط اولیه است که نشان می‌دهد سیستم پیش‌بینی‌پذیر نیست. نمای لیاپانوف در حقیقت میانگین انبساط‌ها و انقباض‌های مدار است. اگر مثبت باشد به طور میانگین انقباض خواهیم داشت.

سیستم‌های با بعد بیشتر از یک

برای سیستم‌های m- بعدی، در هر راستا امکان انقباض یا انبساط وجود دارد. بنابراین m نمای لیاپانوف نیز تعریف می‌شود که هر نما، میانگین انبساط یا انقباض مدار در راستای مشخصی را نشان می‌دهد.

فرض کنید $F:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ دینامیک مفروض باشد. شرط اولیه $x_\circ = x\in\mathbb{R}^m$ باشد و $O(x)=\{x_n := F^n(x) : n\geqslant \circ\}$. همچنین فرض کنیم $\{e_i : ۱\leqslant i\leqslant m\}$ پایه‌های متعامد یکه فضا باشند. حال می‌خواهیم در راستای یکی از اعضای این پایه‌ها، تکان کوچکی به شرط اولیه بدمیم. فرض کنیم $\Delta_n\in\mathbb{R}^m$ و $\hat{x}_n\in\mathbb{R}^m$ به گونه زیر تعریف شوند:

$$\hat{x}_\circ = \hat{x} := x+\Delta_\circ$$

$$\hat{x}_n := F(\hat{x}_{n-۱}) = x_n+\Delta_n$$

به مانند حالت یک بعدی داریم:

$$\begin{aligned}\hat{x}_n = x_n+\Delta_n &= F(x_{n-۱}+\Delta_{n-۱})\\ &= F(x_{n-۱}) + J_F(x_{n-۱})\cdot\Delta_{n-۱} + h(x_{n-۱},\Delta_{n-۱})\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\Delta_n &= J_F(x_{n-۱})\cdot\Delta_{n-۱} + h(x_{n-۱},\Delta_{n-۱})\\ &= \prod_{i=۱}^{n} J_F(x_{n-i})\cdot\Delta_\circ + h(x_{n-۱},\Delta_{n-۱})\\ \Rightarrow \lim_{||\Delta_\circ||\to\circ}\frac{||\Delta_n||}{||\Delta_\circ||} &= ||\prod_{i=۱}^{n} J_F(x_{n-i})\cdot u||\end{aligned}$$

با این دید، نمای لیاپانوف دینامیک F با شرط اولیه x و با تکانی کوچک در جهت $u := \frac{۱}{||\Delta_\circ||}\Delta_\circ$ را

این‌گونه تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\sigma(x,u) &:= \limsup_{n\to\infty} \lim_{||\Delta_\circ||\to \circ} \frac{۱}{n} \ln \frac{||\Delta_n||}{||\Delta_\circ||} \\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{۱}{n} \ln || \prod_{i=۱}^{n} J_F(x_{n-i}) \cdot u|| \\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{۱}{۲n} \ln u^T H_n(x_\circ) u\end{aligned}$$

که

$$H_n(x_\circ) = (\prod_{i=۱}^{n} J_F(x_{n-i}))^T (\prod_{i=۱}^{n} J_F(x_{n-i}))$$

حال n بزرگی را ثابت فرض کنیم. e جهت بردار ویژه‌ی ماتریس $H_n(x_\circ)$ به نام λ_n در نظر می‌گیریم. حال داریم:

$$\begin{aligned}\sigma_n(x,e) &= \frac{۱}{۲n} \ln e^T H_n(x_\circ) e \\ &= \frac{۱}{۲n} \ln \lambda_n e^T e \\ &= \frac{۱}{۲n} \ln \lambda_n\end{aligned}$$

ماتریس $H_n(x_\circ)$ حداکثر m بردار مقدار ویژه‌ی حقیقی مقدار متمایز دارد. حال فرض کنیم

$$\{e_i : ۱ \leqslant i \leqslant m\}$$

مجموعه بردارهای ویژه‌ی ماتریس متقارن $H_n(x_\circ)$ باشد. از قضیه‌ی طیفی ماتریس‌ها می‌دانیم ماتریس‌های متقارن، دارای m بردار ویژه‌ی متعامد یکه هستند. اگر u را جهتی جز راستای بردارهای ویژه در نظر بگیریم، آنگاه داریم:

$$
\begin{aligned}
u &= \sum_{i=1}^{m} c_i e_i \\
\Rightarrow \sigma_n(x,u) &= \frac{1}{2n} \ln u^T H_n(x_0) u \\
&= \frac{1}{2n} \ln (\sum_{j=1}^{m} c_j e_j)^T H_n(x_0)(\sum_{i=1}^{m} c_i e_i) \\
&= \frac{1}{2n} \ln (\sum_{j=1}^{m} c_j e_j^T)(\sum_{i=1}^{m} c_i H_n(x_0) e_i) \\
&= \frac{1}{2n} \ln \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} c_j c_i e_j^T H_n(x_0) e_i \\
&= \frac{1}{2n} \ln \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} c_j c_i e_j^T H_n(x_0) e_i \\
&= \frac{1}{2n} \ln \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} c_j c_i \lambda_i e_j^T e_i \\
&= \frac{1}{2n} \ln \sum_{i=1}^{m} c_i^2 \lambda_i
\end{aligned}
$$

حال اگر فرض کنیم بزرگ‌ترین مقدار ویژه‌ی ماتریس $H_n(x_0)$، λ_1 باشد آنگاه:

$$
\sigma_n(x,u) \approx \frac{1}{2n} \ln c_1^2 \lambda_1 = \frac{1}{2n} \ln c_1^2 + \frac{1}{2n} \ln \lambda_1
$$

که اگر $n \to \infty$، خواهیم داشت:

$$
\sigma_n(x,u) \approx \frac{1}{2n} \ln \lambda_1
$$

پس برای هر مدار، حداکثر m نمای لیاپانوف می‌توان متصور بود [۵۹].

برای مطالعه بیشتر به کتاب دینامیک تصادفی آرنولد [۶] فصل سوم مراجعه کنید.

جلوتر خواهیم دید اگر یک مجموعه جاذب، دارای یک نمای لیاپانوف مثبت باشد، آن را آشوب‌ناک گوییم. برای این مجموعه اگر اندازه را اندازه‌ی لبگ فرض کنیم، تقریبا برای تمامی مدارهای نقاط مجموعه جاذب، نماهای لیاپانوف مدارها با هم برابرند. [۶۵].

حال، سوالی طبیعی این است که چه زمان حدهای بالایی، همان حد هستند و حدها موجودند. پاسخ این سوال قضیه‌ی قضیه ارگودیک ضربی اسلدیت [۶] است! که بیان می‌کند تحت شرایطی حدهای بالایی همان حد هستند. [۶۵].

۱-۲-۳ آشوب و آنتروپی

در کنار نمای لیاپانوف، آنتروپی دیگر کمیتی است که رفتار سیستم را برای ما توصیف می‌کند. این کمیت را به دو بیان یکی از نظرگاه توپولوژی و دیگری از نظرگاه نظریه‌اندازه بررسی می‌کنیم و ارتباط آن‌ها را بیان می‌کنیم. [۷]

آنتروپی نخستین‌بار در سال ۱۸۶۵ توسط فیزیک‌دان و ریاضیدان آلمانی، رادولف کلاسیوس [۸]، یکی از پیشگامان ترمودینادیک، مورد استفاده قرار گرفت. در نظریه‌ی سیستم‌های ترمودینامیکی، آنتروپی کمیتی برای اندازه‌گیری بی‌نظمی سیستم است.

پیشینه لغوی آن بر می‌گردد به کلمه یونانی آنتروپیا که به معنای «در تغییر» است.

شنون [۹] که پایه‌گذار نظریه‌ی اطلاعات است نیز از این واژه استفاده کرده است. در نظریه‌ی اطلاعات این واژه مفهوم عدم قطعیت را بیان می‌کند و به پیشنهاد فان نومن [۱۰] این واژه بر این مفهوم نهاده شد.

در سیستم‌های دینامیکی، کلوموگروف [۱۱] و سینایی [۱۲] از کلمه‌ی آنتروپی برای کمی‌کردن رشد نمایی مدارهای سیستم، در نظریه‌ی ارگودیک، استفاده کردند. امروزه به آنتروپی در نظریه‌ی ارگودیک، آنتروپی کلوموگروف ــ سینایی گفته می‌شود.

---

[۶] Oseledet's Multiplicative Ergodic Theorem
[۷] برای بررسی دقیق‌تر نظریه آنتروپی برای دینامیک گسسته به لینک مراجعه کنید.
[۸] Rudolf Clausius
[۹] Shannon
[۱۰] John Von Neumann
[۱۱] Kolomogrov
[۱۲] Sinai

در سال ۱۹۶۵، ادلر [13] این مفهوم را از دید توپولوژیک گسترش داد.

در مطالعه‌ی نمای لیاپانوف، به بررسی فاصله‌ی مدار از مدار خطا (مداری که مقدار کوچکی شرط اولیه‌ی آن تغییر کرده) پرداختیم. اینجا قصد داریم نرخ اطلاعات دریافت شده از مدار را در تکامل آن در طول زمان، بدست آوریم. منظورمان از « اطلاعات » میزان اطلاعاتی که آن تکان ناچیز شرط اولیه در بلندمدت در اختیار ما قرار می‌دهد است. گاهی این تکان، در حد ۱۰^{-n} است اما ممکن است در زمان t که به آن نگاه کنیم، این تکان در حد ۱۰^{m} باشد. یعنی این دقت nــ رقمی شرط اولیه، در طول زمان به قدر دلخواه ممکن از کاهش یابد! در حقیقت توقع داریم اگر این نرخ عدد مثبتی شد، سیستم حتما به شرط اولیه حساس باشد.

ابتدا این مفهوم را در فضای اندازه مطالعه می‌کنیم، سپس به بررسی آن در فضاهای توپولوژیک می‌پردازیم.

آنتروپی از دیدگاه نظریه‌ی اندازه، آنتروپی کلوموگروف‌ــ سینایی

این آنتروپی نخستین بار توسط کلوموگروف [۳۷] و به طور مستقل توسط سینایی [۶۹] معرفی شد. و نام‌های دیگر این آنتروپی، آنتروپی متریک، آنتروپی کلوموگروف‌ــسینایی و آنتروپی از دیدگاه نظریه‌اندازه است.

اگر r پیشامد $x_۱, \ldots, x_r$ داشته باشیم، و احتمال پیشامد iــام p_i باشد، آنگاه آنتروپی شنون در نظریه اطلاعات این‌گونه تعریف می‌شود:

$$h = -\sum_{i=۱}^{r} p_i \log p_i$$

این کمیت میزان غیرقابل پیش‌بینی بودن رخداد پیشامدها را می‌سنجد. اگر صفر باشد، یعنی یکی از پیشامدها حتما اتفاق می‌افتد و هیچ پیش‌بینی‌ناپذیری‌ای وجود ندارد.

h در حقیقت میزان بی‌نظمی سیستم را می‌سنجد. و کلوموگرف [۳۶] نیز از همین ایده استفاده کرد

[13] Adler

و این کمیت را به سیستم‌های دینامیکی آورد. در بیشتر حالت، این کمیت $\log r$ را اختیار می‌کند که مربوط به حالتی است که همه پیشامدها با احتمال برابر $p = \frac{1}{r}$ رخ دهند.

تعابیر متفاوتی از آنتروپی شنون وجود دارد. به بیان [۲۲] یکی از این تعابیر، میانگین تعداد افرازهای دوتایی است که برای تفکیک اطلاعات نیاز داریم. حال در سیستم‌های دینامیکی ما به دنبال اطلاعاتی هستیم که مدارها از سیستم در اختیار ما قرار می‌دهند. یکی از این اطلاعات ، حساسیت به شرط اولیه است. اگر مدار نقطه x را داشته باشیم و اینکه از نقطه‌ای به فاصله‌ی ϵ از آن شروع کنیم، نکامل این فاصله‌ی ϵ در طول زمان، چه میزان اطلاعات را از سیستم حذف می‌کند!

قصد ما بررسی اطاعات ناشی از خطای ϵ است. هر چه قدر این اطلاعات بیشتر باشد، به معنای رشد ϵ است و اگر این تکامل اطلاعاتی را از سیستم حذف نکند یعنی آنتروپی این تکامل صفر باشد، آنگاه توقع رشد نمایی مدارها را نخواهیم داشت.
آنتروپی کلوموگروف‑سینایی بیان می‌کند با تکامل سیستم، چه میزان اطلاعات از حالت اولیه‌ی سیستم حذف می‌شود. به بیان دیگر، این کمیت چگونگی رشد عدم قطعیت اولیه سیستم را گزارش می‌دهد [۶۸].

در اینجا به بررسی دقیق این موضوع از دید نظریه‌ی ارگودیک می‌پردازیم.

فرض کنید در فضای احتمال $(X, \mathcal{B}, \mu)$ قرار داریم و $O(x)$ مدار نقطه‌ی $x \in X$ تحت دینامیک $f : X \to X$ باشد. افرازی متناهی از فضا در نظر می‌گیریم: $\mathcal{P} = \{P_i : ۱ \leqslant i \leqslant n\}$.
آنتروپی شنون این افراز عبارت است از:

$$H(\mathcal{P}) = -\sum_{i=۱}^{n} \mu(P_i) \ln \mu(P_i)$$

اما آنچه برای ما اهمیت دارد، آنتروپی شنون تکامل یافته‌ی این افراز در فضا است. بنابراین بیاییم تکامل این افراز را نگاه کنیم.

تکامل یک افراز تحت دینامیک به چه معنا است؟!

تکامل یک افراز از لحظه‌ی اولیه ($t = ۰$) تا لحظه‌ی $t = n - ۱$ برابر است با تکامل یافته‌ی تک‌تک اعضای افراز. فرض کنید $P \in \mathcal{P}$ عضوی از افراز باشد. تکامل این عضو تا لحظه‌ی $t = ۱$ برابر است با مکان‌هایی که چگونگی پخش‌شدن نقاط P در فضای X در یک واحد زمانی بعد؛ یعنی نقاط واقع در P در یک واحد زمانی بعد، در کدام خانه‌های افراز $\mathcal{P}$ قرار گرفته‌اند. به بیان دقیق‌تر تکامل در یک واحد زمانی P مجموعه‌ی زیر می‌شود:

$$\{P \cap f^{-۱}(Q) : Q \in \mathcal{P}\}$$

$P \cap f^{-۱}(Q)$ نشان‌دهنده‌ی نقاطی از P است که طی یک واحد زمانی به $Q \in \mathcal{P}$ منتقل شدند.

حال می‌توانید تصور کنید که اگر $\mathcal{P}$ افرازی از X به اعضای کوچکی باشد، آنگاه اگر به ازای هر $Q \in \mathcal{P} \setminus \{P\}$، $P \cap f^{-۱}(Q) = \emptyset$ آنگاه نقاط P طی یک واحد زمانی، به شرط اولیه حساستی نشان نمی‌دهند. نزدیک هم بودند و نزدیک هم نیز باقی‌مانده‌اند. حال همین روند را می‌توان ادامه داد و سیر تکامل نقاط P تحت دینامیک و به مدت n واحد زمانی را تعریف کرد.

پس نمادگذاری‌های زیر را در نظر بگیریم:

$$\mathcal{P}_n^m := \{f^{-n}P_n \cap f^{-(n+۱)}P_{n+۱} \cap \cdots \cap f^{-m}P_m : \{P_n, \ldots, P_m\} \subset \mathcal{P}\}$$

$$P^m := P \cap \mathcal{P}_۱^m = \{P \cap f^{-۱}P_۱ \cap \cdots \cap f^{-m}P_m : \{P_۱, \ldots, P_m\} \subset \mathcal{P}\}$$

$\mathcal{P}_۰^m$ یک افراز از X است و تکامل‌یافته‌ی افراز $\mathcal{P}$ از $t = ۰$ تا $t = m$ است.

اگر $P^m = \{P\}$ به ازای تمامی $m \in \mathbb{N}$ آنگاه سیستم هیچ حساسیتی به شرط اولیه با نقاط P ندارد.

حال آنتروپی شنون P^m را حساب کنیم.

$$H(P^m) = \sum_{Q \in P^m} \mu(Q) \ln \mu(Q)$$

این کمیت میزان بی‌نظمی ناشی از P است. حال روی تمام خانه‌های افراز اگر جمع زنیم، بی‌نظمی سیستم تا لحظه‌ی $t = m$ برابر است با

$$H(\mathcal{P}_۰^m) = \sum_{P \in \mathcal{P}} H(P^m) = \sum_{Q \in \mathcal{P}_۰^m} \mu(Q) \ln \mu(Q)$$

حال میانگین اطلاعات از دست رفته تا زمان m را باید حساب کنیم:

$$h_\mu(f,\mathcal{P}) := \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} H(\mathcal{P}_0^{m-1})$$

این کمیت میزان اطلاعات از دست رفته سیستم طی زمان را نشان می‌دهد.

تعریف ۱-۵ (آنتروپی کلوموگروف-سینایی) *فضای احتمال* $(X,\mathcal{A},\mu,f: X\to X)$ *را در نظر بگیریم. در این فضا آنتروپی کلموگروف- سینایی برای افراز $\mathcal{P}$ به شکل زیر تعریف می‌شود* [۱۴] *:*

$$h_\mu(f,\mathcal{P}) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{P}_0^{n-1}) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} H(\mathcal{P}_0^{n-1})$$

و آنتروپی سیستم به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$h_\mu(f) := \sup_{\mathcal{P}\in\mathcal{P}_X} h_\mu(f,\mathcal{P})$$

که $\mathcal{P}_X$ مجموعه تمامی افرازهای متناهی فضا است.

آنتروپی توپولوژیک

آنتروپی توپولوژیک را ادلر در سال ۱۹۶۵ [۱] معرفی کرد.
در این تعریف، به جای افراز، یک پوشش باز از فضا گرفته می‌شود. حال به مانند قبل، باید به بررسی اطلاعات مفقود شده در اثر تکامل این پوشش باز تحت دینامیک باشیم. پوشش تکامل یافته در n واحد زمانی را α_0^{n-1} بنامیم.

این پوشش لزوما مینیمال نیست. پس کوچک‌ترین زیرپوشش آن را در نظر می‌گیریم. به این معنا که این زیرپوشش، کوچکترین کاردینالیتی را بین تمام زیرپوشش‌های α_0^{n-1} دارد. بیایید آن‌را α^* بنامیم ($\alpha^* \subset \alpha_0^{n-1}$.)
حال دقت کنید که برای استفاده از آنتروپی شنون و بدست آوردن اطلاعات حذف‌شده در طول زمان، نیاز به یک اندازه داریم. در اصل تنها اندازه‌ی اعضای α^* را نیاز داریم. بیایید اندازه‌ای روی فضا در

[۱۴] برای بررسی دقیق‌تر نظریه آنتروپی برای دینامیک گسسته به لینک مراجعه کنید.

نظر بگیریم به نام μ_α که

$$\mu_\alpha \restriction_{\alpha^*} = \frac{۱}{\#\alpha^*}$$

در اصل روی σـ جبر تولید شده توسط α^* کار می‌کنیم: در حقیقت $H(\alpha^*) = \#\alpha$

بنابراین آنتروپی توپولوژیک به شکل زیر تعریف می شود:

$$h_{top}(f, \alpha) := \lim_{n \to \infty} \frac{۱}{n} \ln \#\alpha^*$$

فرض کنید برای پوشش بازی، همواره هر عضو هر خانه‌ی پوشش، در همان خانه باقی‌بماند. یعنی اگر

$$\alpha = \{U_۱, \dots, U_n\}$$

$$\forall j \in \{۱, \dots, n\}, \quad \forall x \in U_j, \quad \forall i \in \mathbb{N} : f^i(x) \in U_j$$

یا به بیان دیگر

$$\forall j \in \{۱, \dots, n\}, \quad \forall i \in \mathbb{N} : f^i(U_j) \subset U_j$$
$$\Rightarrow \dots \subset f^m(U_j) \subset \dots \subset f(U_j) \subset U_j \subset f^{-۱}U_j \subset \dots$$

در این صورت، این پوشش باز، به شرط اولیه حساسیتی نشان نمی‌دهد! به بیان آنتروپی،

$$\alpha_۰^{m-۱} = \{A_۰ \cap A_۱ \cap \dots \cap A_{m-۱} : A_i \in f^{-i}\alpha, \quad \forall ۰ \leqslant i \leqslant m-۱\}$$

بنابر فرض داریم

$$\{A_۰ \cap A_۱ \cap \dots \cap A_{m-۱} : A_i \in f^{-i}\alpha, \quad \forall ۰ \leqslant i \leqslant m-۱\}$$
$$\preceq \bigvee_{i=۰}^{m-۱} \alpha := \{A_۰ \cap A_۱ \cap \dots \cap A_{m-۱} : A_i \in \alpha, \quad \forall ۰ \leqslant i \leqslant m-۱\}$$

که $\preceq$ نماد تظریف افراز است. حال اگر $m \geqslant n$ آنگاه

$$\bigvee_{i=۰}^{m-۱} \alpha = \bigvee_{i=۰}^{n-۱} \alpha$$

که افرازی با تعداد متناهی عضو است. که زیر پوششی از آن همان α است. این افراز ظریف‌تر آنتروپی بیشتری دارد پس بیایید کران آنتروپی مورد نظر را محاسبه کنیم؛

$$\begin{aligned} h_{top}(\alpha, f) &\leqslant h_{top}(\alpha, id) \\ &\leqslant \lim_{m\to\infty} \frac{۱}{m} \ln n = ۰ \end{aligned}$$

پس همان‌طور که انتظار می‌رفت، این پوشش آنتروپی توپولوژیک آن صفر است.

۱-۲-۴ آنچه از آشوب به یاد داشته باشیم!

در علوم اغلب منظور از آشوب، پیش‌بینی‌ناپذیری سیستم یا همان حساسیت به شرط اولیه است به همراه تراگذری توپولوژیک. گاهی با محاسبه‌ی نمای لیاپانوف نتیجه می‌گیریم که سیستم آشوب‌ناک است؛ اما باید همواره دقت داشته باشیم در تمامی محاسبات، امکان خطاهای عددی وجود دارد. دانشمندان همواره در تلاش بودند شروطی کافی برای آشوب‌ناک بودن سیستم ارایه دهند که از مهم‌ترین آن‌ها وجود نعل اسب اسمیل است.
همواره به یاد داشته باشیم که آزمایش‌های عددی در سیستم‌های آشوب‌ناک باید با علم بر بزرگ‌شدن خطاهای عددی صورت بگیرد. و کارکردن با این سیستم‌ها دشوار است.

آنچه باید از آشوب متصور شویم شامل حساسیت به شرط اولیه است و وجود فرآیندی برای جمع کردن مدارهایی که از هم فاصله می‌گیرند. در فصل‌های پیش‌رو این مطالب را توضیح داده‌ایم.

فصل ۲

جاذب‌های پیچیده، فراکتال‌ها و بعد

۲-۱ جاذب‌ها

فرض کنیم ϕ_t شار سیستم دینامیکی زیر باشد.

$$\dot{x} = F(x)$$

تعریف ۲-۱ (مجموعه‌های جاذب [۷۷]) *$A \subset \mathbb{R}^n$ را یک مجموعه جاذب [۱] گویند هرگاه*

- *بسته باشد.*
- *تحت شار ناوردا باشد.*
- *همسایگی‌ای مانند U داشته باشد که:*

$$\forall t \geqslant \circ : \phi(t,U) \subset U \text{ و } \bigcap_{t>\circ} \phi(t,U) = A$$

تعریف ۲-۲ (دام یا همسایگی منزوی‌ساز [۷۷]) *در تعریف بالا، به همسایگی U یک دام[۲] یا یک همسایگی منزوی‌ساز [۳] گوییم.*

[۱] Attracting Set
[۲] Trapping region
[۳] Isolating neighbourhood

تعریف ۲-۳ (دامنه جذب [۷۷]) *اگر U همسایگی منزوی‌ساز مجموعه جاذب A باشد،*

$$\bigcup_{t\leqslant 0}\phi(t,U)$$

را دامنه جذب [۴] *مجموعه‌ی جاذب A گوییم.*

در تعاریف بالا باید دو نکته را در نظر بگیریم:

۱. اگر در زمانی مانند τ مدار x به یک دام وارد شود، دیگر نمی‌تواند از آن خارج شود چرا که طبق تعریف دام بازی است ناوردا.

۲. اگر x در زمان τ وارد یک دام شود، مدارش به مجموعه جاذب آن دام میل می‌کند. یعنی $\omega(x)\subset A$

۳. هر مجموعه ناوردای درون دامنه‌ی جذب یک مجموعه جاذب، یا شامل آن جاذب است یا مشمول در آن.

گزاره‌ی ۲-۱ ([۷۷]) *اگر $A\subset\mathbb{R}^n$ یک مجموعه جاذب باشد، دامنه‌ی جذب A به انتخاب دام بستنگی ندارد.*

اثبات. فرض کنیم U_1 و U_2 دو دام باشند. بعلاوه به برهان خلف فرض کنیم

$$\bigcup_{t<0}\phi_t(U_1)\neq\bigcup_{t<0}\phi_t(U_2)$$

بدون کاستن از کلیت، فرض کنیم

$$\exists x\in\bigcup_{t<0}\phi_t(U_1)\ \text{s.t.}\ x\notin\bigcup_{t<0}\phi_t(U_2)$$

در این صورت

[۴] Domain or Basin of attraction

۱. زمان $t_\circ > \circ$ وجود خواهند داشت که

$$x \in \phi_{-t_\circ}(U_1)$$

پس مدار x به A میل خواهد کرد.

۲. از اینکه $\phi_t(x) \in U_2^c$ به ازای تمامی زمان‌های مثبت، نتیجه می‌گیریم که مدار x همواره درون U_2^c خواهد بود که یعنی به A میل نمی‌کند.

این تناقض نشان می‌دهد ناحیه‌ی جذب یک جاذب، به دام بستگی ندارد. $\square$

تعریف ۲-۴ (تراگذری توپولوژیک [۷۷]) *به A یک مجموعه تراگذر توپولوژیک گویند هرگاه*

- *بسته باشد.*
- *ناوردا باشد.*
- *برای هر دو همسایگی باز آن مانند $U, V \subset A$ داشته باشیم:*

$$\exists t \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \phi_{-t}(U) \cap V \neq \emptyset$$

به بیان دیگر مجموعه بسته و ناوردای A تراگذر توپولوژیک است، هرگاه هر بازی از A در طول زمان، از تمامی بازهای A گذر کند.

گزاره‌ی ۲-۲ ([۲]) *برای سیستم دینامیکی پیوسته $(X, (\phi_t)_{t\in\mathbb{R}^+})$ که X فشرده باشد، روابط زیر معادل‌اند:*

۱. *سیستم تراگذر توپولوژیک است.*

۲. *برای هر دو باز ناتهی U و V از X، وجود دارد $t \in \mathbb{R}^+$ که $\phi_{-t}(U) \cap V \neq \emptyset$*

۳. *برای هر دو باز ناتهی از X مانند U و V داریم:*

$$N(U, V) := \{t \in \mathbb{R}^+ : \phi_t(U) \cap V \neq \emptyset\} = \{t \in \mathbb{R}^+ : U \cap \phi_{-t}(V) \neq \emptyset\} \neq \emptyset$$

۴. *برای هر دو باز ناتهی از X مانند U و V، $N(U,V)$ مجموعه‌ای نامتناهی است.*

۵. *وجود دارد $x \in X$ که مدار آن در فضا چگال است.*

۶. *برای هر باز ناتهی از X مانند U، $\bigcup_{t\in\mathbb{R}^+} \phi_{-t}(U)$ در فضا چگال است.*

۷. *برای هر باز ناتهی از X مانند U، $\bigcup_{t\in\mathbb{R}^+} \phi_{t}(U)$ در فضا چگال است.*

۸. *اگر $U \subset X$ بازی ناتهی باشه که $\phi_{-t}(U) \subset U$ در این صورت U در فضا چگال است.*

۹. *اگر $E \subset X$ بسته باشد و $\phi(E) \subset E$ در این صورت $E = X$ یا E در X هیچ‌جا چگال است.*

اثبات. • ۴ $\to$ ۳:

فرض کنیم $U \cap \phi_{-t_۱}(V) \neq \emptyset$ حال از قسمت ۳ دوباره داریم

$$\exists t_۲ : U \cap \phi_{-t_۲}\big(U \cap \phi_{-t_۱}(V)\big) \neq \emptyset$$

پس

$$U \cap \phi_{-(t_۱+t_۲)} \neq \emptyset$$

به همین ترتیب دنباله‌ی $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ یافت می‌شوند که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\tau := \sum_{i=۱}^{n} t_i \quad \longrightarrow \quad U \cap \phi_{-\tau}(V) \neq \emptyset$$

پس

$$\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset N(U,V)$$

• ۵ $\to$ ۴:

فرض کنیم $\{V_i\}_{i\in I}$ یک پایه شمارا برای X باشند. برای هر $i \in I$ مجموعه $W_i = \bigcup_{t\in\mathbb{R}^+} \phi_{-t}(V_i)$ مجموعه‌ای باز است. از ۴ نتیجه می‌شود این مجموعه در X چگال نیز می‌باشد. حال طبق قضیه کتگوری بئر [۵] مجموعه $B = \bigcap_{i\in I} W_i$ در X چگال است. حال به ازای هر $x \in B$، مدار

[5] Baire category theorem

x در X چگال است.

این اثبات نشان می‌دهد که نه تنها نقاطی با مدار چگال وجود دارند بلکه این نقاط در X چگال نیز هستند [۱۹].

- ۶ $\to$ ۵:

کافیست دقت کنیم که

$$\exists \tau \in \mathbb{R}^+ : x \in \phi_{-\tau}(U)$$

- ۷ $\to$ ۶: دو همسایگی دلخواهی مانند $V, U \subset X$ در نظر بگیریم. در این صورت از ۶ داریم:

$$\bigcup_{t \in \mathbb{R}^+} \phi_{-t}(V) \cap U \neq \emptyset$$

پس

$$\bigcup_{t \in \mathbb{R}^+} V \cap \phi_t(U) \neq \emptyset$$

و لذا ۷ نتیجه می‌شود.

- ۸ $\to$ ۷:

بازهای دلخواه U و V از فضا را در نظر بگیریم. از ۷ داریم:

$$\bigcup_{t \in \mathbb{R}^+} \phi_t(V) \cap U \neq \emptyset$$

از اینجا خواهیم داشت

$$V \cap \bigcup_{t \in \mathbb{R}^+} \phi_t(U) \neq \emptyset$$

و چون $\phi_{-t}(U) \subset U$، ۸ نتیجه می‌شود.

- ۹ $\to$ ۸:

از اینکه $\phi_t(E) \subset E$ می‌توان نتیجه گرفت $E \subset \phi_{-t}(E)$. حال برای باز $E^c := X \setminus E$ خواهیم داشت $\phi_{-t}E^c \subset E^c$ پس از ۸ خواهیم داشت

E^c در فضا چگال است یا $E^c = \emptyset$

و ۹ نتیجه می‌شود.

- ۱ $\rightarrow$ ۹: دو باز ناتهی دلخواه مانند U و V از فضا در نظر بگیریم. از ۹ می‌دانیم که

$$\bigcap_{t\in\mathbb{R}^+} \phi_{-t}(U^c)$$

در فضا هیچ‌جا چگال است متناظرا

$$\bigcup_{t\in\mathbb{R}^+} \phi_{-t}(U)$$

در فضا چگال است. و به عبارت بهتر،

$$\bigcup_{t\in\mathbb{R}^+} \phi_{-t}(U)\cap V \neq \emptyset$$

و حکم بدست می‌آید.

□

توجه: گزاره‌ی بالا را برای سیستم‌های دینامیکی گسسته نیز می‌توان معادل‌سازی کرد. کافیست شار سیستم را با تکرارهای دینامیک جایگزین کنیم.

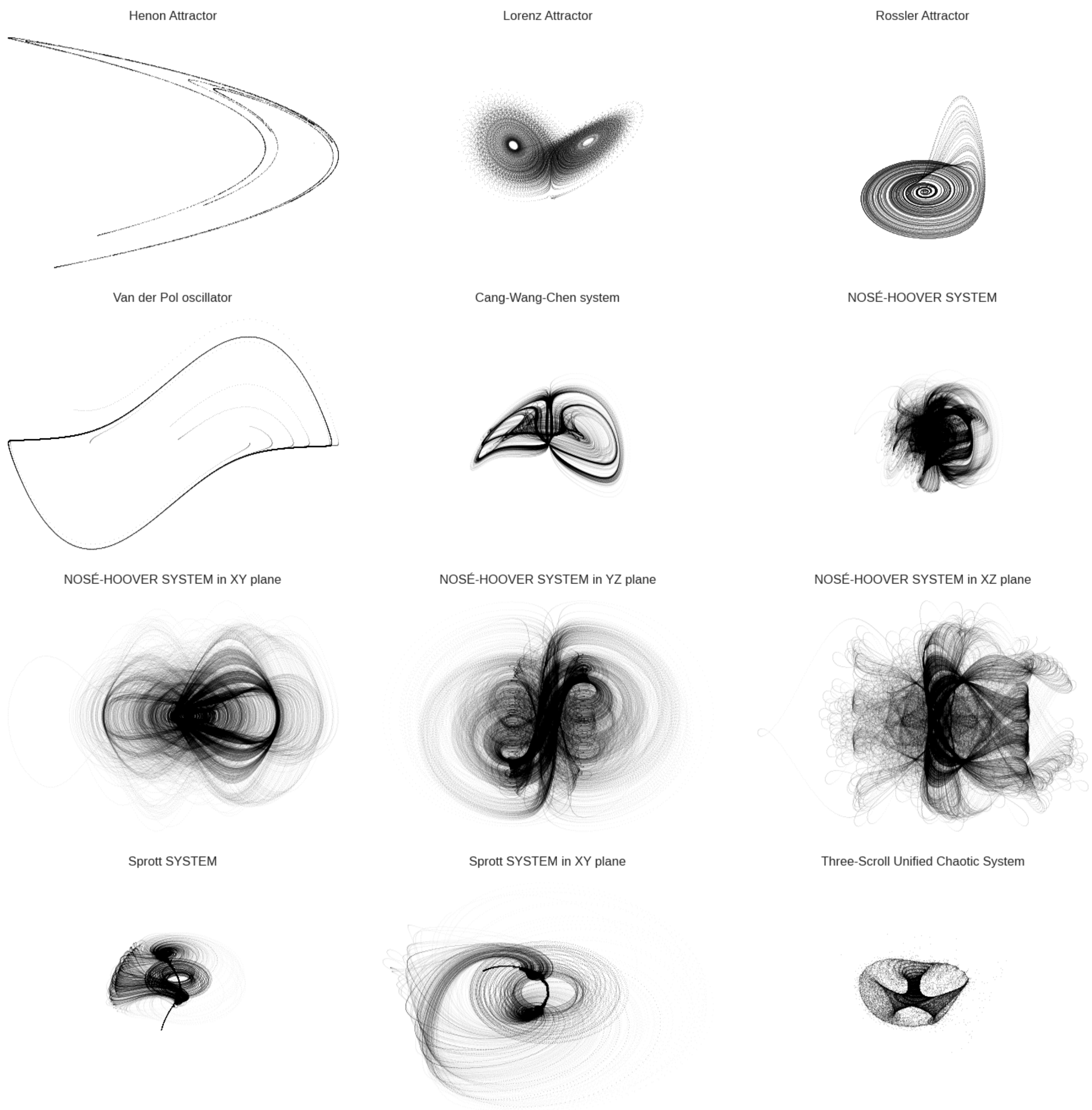
تعریف ۲-۵ (جاذب [۷۷]) *A را یک جاذب [۶] گوییم هرگاه هم یک مجموعه جاذب باشد و هم تراگذر توپولوژیک.*

نمونه‌های معروف از جاذب‌ها در شکل (۲-۱) قابل مشاهده است [۴۰] [۷۱] [۱۲] [۶۷].

برای مطالعه‌ی بیشتر جاذب‌ها منابع [۷۷]، [۱۷] و [۱۴] پیشنهاد می‌شود. در اینجا قصد داریم بیشتر به جاذب‌های پیچیده [۷] و ارتباط آن‌ها با آشوب صحبت کنیم.

تعریف ۲-۶ (مجموعه آشوب‌ناک) *مجموعه ناوردای A را آشوب‌ناک گوییم هرگاه*

---
[۶] Attractor
[۷] Strange attractors



شکل ۲-۱: نمونه‌های معروف جاذب‌ها

- *سیستم نسبت به شرط‌های اولیه‌ای که در A قرار دارند، حساس به شرط اولیه باشد.*

- *سیستم روی A تراگذر توپولوژیک باشد.*

- *مدارهای تناوبی سیستم در A چگال باشند.*

تعریف ۲-۷ (جاذب‌های پیچیده) *اگر $A \subset \mathbb{R}^n$ جاذب و آشوب‌ناک باشد، آنگاه A را یک جاذب پیچیده گوییم.*

قضیه‌ی ۲-۳ ([۷۷]، [۲۶]) *فرض کنیم $\phi_t(x)$ شار سیستم دینامیکی پیوسته باشد. در این صورت اگر $\mathcal{M}$ یک دام باشد، $C \subset \mathcal{M}$ یک مجموعه ناوردای آشوب‌ناک باشد و $A := \bigcap_{t>0} \phi_t(\mathcal{M})$ مجموعه جاذب متناظر با دام $\mathcal{M}$ باشد، آنگاه*

$$C \subset A$$

اثبات. ابتدا لازم است دقت کنیم که چون C ناوردا است پس $C \subset A$ یا $A \subset C$. پس به برهان خلف فرض کنیم $A \subset C$.

در این حالت چون C تراگذر توپولوژیک است پس A یک مجموعه هیچ‌جا چگال در C است. بگیریم $x \in C \setminus A$ که x مداری چگال در C دارد.

در این حالت، چون $x \in \mathcal{M}$ پس $\omega(x) \subset \mathcal{A}$.

ابتدا فرض کنیم: $\omega(x) = \{z\}$ که $z \in A$.

$\epsilon > 0$ دلخواهی را در نظر بگیریم. در این حالت، برای همسایگی $B_\epsilon(z)$ داریم:

$$\exists \tau \in \mathbb{R}^+ \text{ s.t. } \forall t \geqslant \tau : \phi_t(x) \in B_\epsilon(z)$$

پس

$$x^* := \phi_\tau(x) \in A$$

و همسایگی

$$U_z := B_\epsilon(z)$$

را در نظر بگیریم:

۱. $\phi_t(x^*) \in U_z$ برای $t \geqslant ۰$.

۲. برای هر $y \in U_z$ چون مدار x در C چگال است، برای هر $t \geqslant ۰$ عنصری از مدار x^* خواهیم یافت مانند $y^* = \phi_{t_۰}(x^*)$ که

$$d\big(\phi_t(y^*), \phi_t(y)\big) \leqslant \epsilon$$

و در نتیجه

$$d\big(\phi_t(x^*), \phi_t(y)\big) \leqslant d\big(\phi_t(x^*), \phi_t(y^*)\big) + d\big(\phi_t(y^*), \phi_t(y)\big) \leqslant ۲\epsilon$$

اما این حکم با فرض داشتن حساسیت به شرط اولیه در تناقض است. پس فرض خلف باطل و

$$C \subset A$$

حال اگر $|\omega(x)| \geqslant ۲$ آنگاه کافیست تعریف کنیم

$$U_z := \bigcup_{z \in \omega(x)} B_\epsilon(z)$$

در این حالت اجتماع روی تعداد متناهی عنصر می‌تواند گرفته شود تا $\omega(x)$ را بپوشاند. و نتایج به صورت مشابه به دست می‌آیند.

$\square$

پس اگر بخواهیم ثابت کنیم سیستمی یک جاذب پیچیده دارد، باید به شرح زیر عمل کنیم:

۱. یک دام پیدا کنیم که آن را $\mathcal{M}$ می‌نامیم.

۲. نشان دهیم که $\mathcal{M}$ شامل یک مجموعه ناوردا و آشوب‌ناک به نام A است.

۳. مجموعه جاذب متناظر با دام $\mathcal{M}$ را $\mathcal{A}$ بنامیم. در اینجا خواهیم داشت $A \subset \mathcal{A}$ حال باید نشان دهیم که $\mathcal{A}$ یک جاذب پیچیده است. در حقیقت باید نشان دهیم حساسیت به شرط اولیه از A به $\mathcal{A}$ توسعه پیدا می‌کند و $\mathcal{A}$ تراگذر توپولوژیک است و بعلاوه مدارهای تناوبی در آن چگال هستند.

۲-۲ فراکتال‌ها

نمای لیاپانوف محک مناسبی برای تشخیص وجود آشوب یا یک جاذب پیچیده است. در این بخش قصد داریم کمیت دیگری را معرفی کنیم که میزان پیچیدگی یک جاذب را با آن کمی کنیم [۵۳]. این کمیت بعد فراکتالی [۸] است. قبل از اینکه به تعریف فراکتال بپردازیم، قصد داریم بعد یک مجموعه را تعریف کنیم. و این نقطه‌ی شروعی خواهد بود که به بررسی فراکتال‌ها، و نقش‌شان در ایجاد یک جاذب پیچیده بپردازیم.

تعریف ۲-۸ (ظرفیت یا ظرفیت جعبه‌ای) *فرض کنید $S \subset \mathbb{R}^n$ یک مجموعه کراندار باشد. در این صورت $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ را کمترین تعداد مکعب‌هایی با طول ضلع ϵ در نظر می‌گیریم که با آن‌ها بتوانیم S را بپوشانیم. اگر ϵ خیلی کوچک باشد و S مجموعه‌ی بزرگی باشد $N(\epsilon) = \mathcal{O}(\frac{1}{\epsilon^n})$. حال ظرفیت S چنین تعریف می‌شود:*

$$d_c = \lim_{\epsilon \to ۰} \frac{\log N(\epsilon)}{\log ۱/\epsilon}$$

از تعریف بالا کاملا مشخص است که اگر S یک مجموعه متناهی با $N_۰$ عضو باشد آنگاه خواهیم داشت

$$d_c \leqslant \lim_{\epsilon \to ۰} \frac{\log N_۰}{\log ۱/\epsilon} = ۰$$

حال با تعریف این بعد می‌توانیم فراکتال را تعریف کنیم:

---

[۸] Fractal dimension

تعریف ۲-۹ (فراکتال) *$S \subset \mathbb{R}^n$ را یک فراکتال*[۹] *گوییم هر گاه ظرفیت آن عددی صحیح نباشد. و از بعد فراکتالی به جای ظرفیت استفاده می‌کنیم.*

مثال ۲-۱ *قرار دهیم $S = I^n = [0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ در این صورت داریم به ازای $\epsilon > 0$*

$$\frac{1}{\epsilon^n} - 1 \leqslant N(\epsilon) \leqslant \frac{1}{\epsilon^n} + 1$$

پس

$$d_c = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log 1/\epsilon} = n$$

مثال ۲-۲ (مجموعه کانتور) *مجموعه کانتور را در نظر بگیریم. در مرحله‌ی nــ ام تشکیل مجموعه کانتور، $N_n = 2^n$ زیربازه خواهیم داشت که طول هر زیربازه $\epsilon = \frac{1}{3^n}$ است. و بعلاوه بدیهی است که $N_n(\epsilon) = N_n$ پس به ازای هر $n \geqslant 0$*

$$d_c = d_c^n = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log 2^n}{\log 3^n} = \frac{\log 2}{\log 3}$$

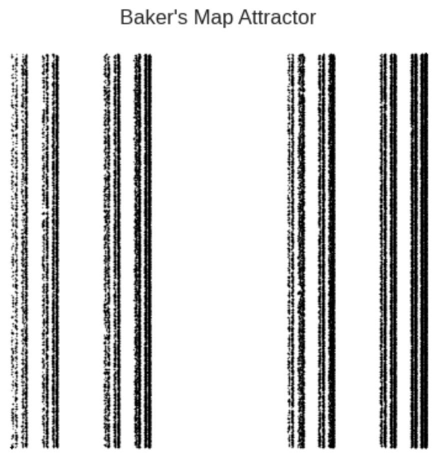
مثال ۲-۳ (برف‌دانه کخ) *به مانند مجموعه‌ی کانتور، برف‌دانه کخ نیز یک فراکتال است چرا که در مرحله‌ی nــ ام $N_n = 4^n$ زیربازه به طول $\epsilon = \frac{1}{3^n}$ خواهیم داشت. پس*

$$d_c = d_c^n = \frac{\log 4}{\log 3}$$

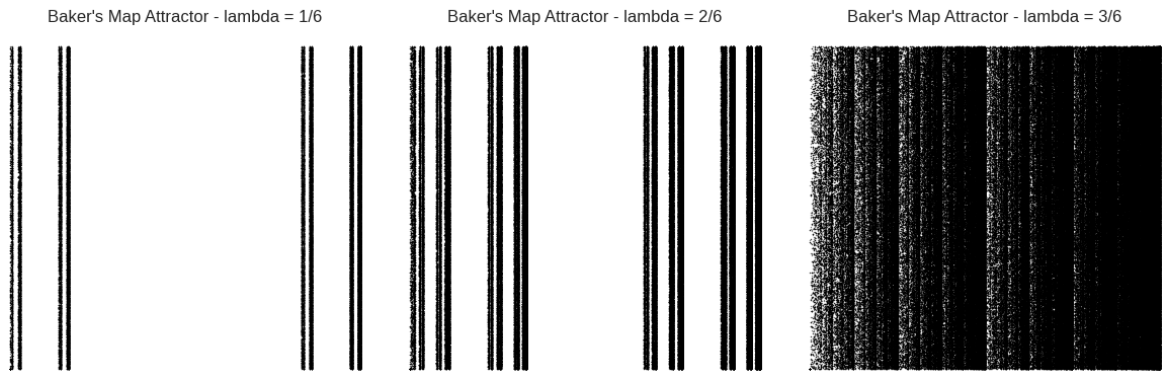
به تعبیری می‌توانیم بگوییم توزیع نقاط در برف‌دانه کخ از یک پاره‌خط بیشتر و از یک سطح کمتر است.

به همین ترتیب می‌توانیم ظرفیت یک جاذب پیچیده را نیز محاسبه کنیم:

---
[۹] Fractal



شکل ۲-۲: جاذب نگاشت بیکر



شکل ۲-۳: جاذب نگاشت بیکر

مثال ۲-۴ (نگاشت بیکر [۱۰]) *نگاشت بیکر را در نظر بگیرید:*

$$\begin{cases} I^2 & \to I^2 \\ (x,y) & \to \left(\lambda x\ \delta_{I\times[0,\alpha]} + (\frac{1}{2}+\lambda x)\ \delta_{I\times(\alpha,1]},\ \frac{y}{\alpha}\ \delta_{I\times[0,\alpha]} + \frac{y-\alpha}{1-\alpha}\ \delta_{I\times(\alpha,1]}\right) \end{cases}$$

تصویر جاذب این نگاشت را می‌توانید در شکل (۲-۲) ببینید. این جاذب در حقیقت $C \times I$ است که C مجموعه کانتور است.

به مانند قبل، با اثر nــ ام نگاشت بیکر، مجموعه $I \times I$ به $N_n = 2^n$ نوار با طول یک و عرض λ^n تصویر خواهد شد. پس با قرار دادن $\epsilon_n = \lambda^n$ خواهیم داشت

$$2^n(\frac{1}{\lambda^n}) \leqslant N_n(\epsilon_n) \leqslant 2^n(\frac{1}{\lambda^n}+1)$$

پس خواهیم داشت:

$$d_c = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(۲/\lambda)^n}{\log(۱/\lambda)^n} = ۱ + \frac{\log ۲}{\log ۱/\lambda} = ۱ + \frac{\log ۱/۲}{\log \lambda}$$

که همان‌طور که انتظار می‌رفت عددی بین یک و دو است. یعنی توزیع نقاط آن از یک پاره‌خط بیشتر و از یک سطح کمتر است. و اگر $\lambda \to \frac{۱}{۲}$ آنگاه $d_c \to ۲$.

این رفتار در شکل (۲-۳) نیز قابل مشاهده است.

استفاده از ظرفیت برای بیان بعد فراکتالی یک جاذب پیچیده، دو مشکل دارد. اول آنکه ظرفیت یک مفهوم هندسی است و تعداد بارهایی که سیستم از یک زیرمکعب عبور می‌کند را در نظر نمی‌گیرد. و دلیل دوم آن‌است که شمارش این ابرمکعب‌ها در فضای فاز، از نظر محاسباتی، وقت‌گیر است. در ادامه کمیت‌هایی معرفی می‌کنیم که می‌توانند این مشکلات را پوشش دهند.

هنگامی که حرف از مدت زمانی می‌شود که مدار یک نقطه مانند x در یک مجموعه مانند C می‌گذراند به طور طبیعی داریم یک اندازه احتمال تعریف می‌کنیم. این اندازه

$$\mu_x(C) = \lim_{T\to\infty} \frac{\eta(C,x,T)}{T}$$

است که $\eta(C,x_۰,T)$ مدت زمانی است که مدار X در C در بازه‌ی زمانی $[۰,T]$ می‌گذراند.

تعریف ۲-۱۰ (بعد نقطه‌ای) *اگر $S \subset \mathbb{R}^n$ کراندار باشد، آنگاه برای هر $x \in X$ بعد نقطه‌ای*[۱۱] *این‌گونه تعریف می‌شود [۸۲]:*

$$d_p(x) := \lim_{\epsilon\to ۰} \frac{\ln \mu_x(C_\epsilon(x))}{\ln \epsilon}$$

که $C_\epsilon(x)$ ابرمکعبی به طول ضلع ϵ حول x است. در حالت کلی‌تر، این بعد را برای هر اندازه‌ی دلخواه μ می‌توان تعریف کرد.

حال تعریف می‌کنیم

$$d_p = E_S(d_P(x))$$

---

[۱۱] The pointwise dimension

که $E_S(d_P(x))$ امید ریاضی $d_p(x)$ روی مجموعه S است.

راه دیگر برای آنکه بتوانیم نرخ عبور از مکعب‌ها را نیز در بعد جعبه‌ای لحاظ کنیم آن است که به مکعب‌ها ارزش برابر ندهیم و هر یک را با احتمال‌شان در نظر گیریم. در اینجا $\mathcal{C} = \{C_\epsilon^i\}_{i=1}^m$ را ϵـ مکعب‌هایی در نظر گیریم که مجموعه بسته و کراندار $S \subset \mathbb{R}^n$ را پوشش می‌دهند. در این صورت داریم:

تعریف ۲-۱۱ (بعد اطلاعاتی) *برای مجموعه بسته و کراندار $S \subset \mathbb{R}^n$ بعد اطلاعاتی [۱۲] به صورت زیر تعریف می‌شود:*

$$d_I := \lim_{\epsilon \to 0} \frac{H(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)}$$

که $H(\epsilon)$ آنتروپی پوشش $\mathcal{C}$ است.

به طور شهودی، اگر تعداد یکسانی از اعضای S درون هر مکعب قرار گیرند، آنگاه بعد اطلاعاتی همان بعد جعبه‌ای خواهد بود. و بعلاوه در حالت کلی $d_I \leqslant d_c$.

علاوه بر این ابعادی که تعریف کردیم، کاپلن [۱۳] و یورک [۱۴] [۳۳] بعدی تحت عنوان بعد لیاپانوف تعریف کردند که با استفاده از نمای لیاپانوف تعریف می‌شود [۲۵] [۲۳]:

تعریف ۲-۱۲ (بعد لیاپانوف) *برای یک جاذب با نماهای لیاپانوف $\lambda_1 > \cdots > \lambda_k > \lambda_{k+1}$ بعد لیاپانوف برابر است با:*

$$d_L = k - \frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k}{\lambda_{k+1}}$$

حدس کاپلن و یورک این است که این کمیت برای سیستم‌های خوبی، با بعد اطلاعاتی برابر است.

---

[۱۲] Information dimension
[۱۳] Kaplan
[۱۴] Yorke

فصل ۳

کمیت‌های آشوب

در این فصل قصد داریم به مطالعه‌ی راه‌هایی برای کمی‌کردن آشوب بپردازیم. معمولا دو راه برای تشخیص حساسیت به شرط اولیه وجود دارد که در این‌جا به مطالعه‌ی آن‌ها می‌پردازیم.
باید دقت داشته باشیم در بعد یک و برای توابع پیوسته روی بازه‌ی بسته I حساسیت به شرط اولیه برای آنکه بگوییم سیستم آشوب‌ناک است کفایت می‌کند، اما در ابعاد بالا باید ذکر کنیم که منظورمان از آشوب، حساسیت به شرط اولیه است یا تعریف مورد نظر، تعریف دونی از آشوب است. در اغلب مواردی که در مقالات نمای لیاپانوف به صورت عددی محاسبه می‌شود، منظور از آشوب، حساسیت به شرایط اولیه است.

۳-۱ نمای لیاپانوف

نمای لیاپانوف به ما این امکان را می‌دهد که پایداری یک مدار را بررسی کنیم و درباره‌ی پایداری یک مدار خاص از سیستم، صحبت کنیم. بعلاوه این امکان را به ما می‌دهد که که مجموعه‌های جاذب [۱] را از هم تفکیک کنیم [۵]. هنگامی که یک مجوعه جاذب منظم [۲] (مانند نقطه ثابت جاذب و

[۱] Attractor
[۲] Regular attractor

چرخه‌های حدی) داریم، چنان جاذبه‌ی قوی‌ای دارند که در همسایگی خاصی، تمامی مدارها به طور مجانبی به آن‌ها همگرا می‌شوند. مجموعه‌های جاذب با پیچیدگی‌های بیشتر [۳] نیز نقاط درون ناحیه‌ی جذب‌شان [۴] جذب می‌کنند اما مدار نقاط روی خودشان از یک‌دیگر به طور نمایی دور می‌شوند.

در سال ۱۸۹۲ لیاپانوف کاری در جهت حل مسئله پایداری مدارها انجام داد که منجر به توسعه مفهومی به اسم نماهای مشخصه [۵] شد که در نهایت موجب ایجاد مفهوم نماهای لیاپانوف گشت. کار لیاپانوف با تاثیر از کارهای فلوکه [۶] روی مدارهای تناوبی و کارهای پوآنکاره هنگام بررسی پایداری معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم انجام شد.

تلاش لیاپانوف این بود که حتی برای سیستم‌هایی که فرم بسته جواب‌شان مشخص نیست نیز راجع به پایداری مدارها بتوان صحبت کرد. در اینجا قصد داریم به پیروی از لیاپانوف، ابتدا پایداری نقاط ثابت را بحث کنیم، سپس مدارهای تناوبی و در انتها هر مدار کرانداری را.

بررسی پایداری لیاپانوف برای نقاط ثابت، به مقادیر ویژه‌ی سیستم خطی‌شده بستگی دارد : اگر تمامی مقادیر ویژه‌ی سیستم خطی‌شده حول نقطه ثابت، در اندازه کمتر از یک برای سیستم‌های دینامیکی گسسته و قسمت حقیقی‌مقدار تمامی مقادیر ویژه در سیستم‌های دینامیکی پیوسته منفی باشد، آنگاه نقطه ثابت به طور مجانبی پایدار است.

اگر یکی از مقادیر ویژه‌ی سیستم خطی شده برای سیستم‌های گسسته در اندازه از یک بیشتر باشد، و برای سیستم‌های پیوسته قسمت حقیقی مقدار یکی از مقادیر ویژه مثبت باشد، آنگاه به طور مجانبی نقطه ثابت مورد نظر غیرپایدار است؛ و در انتها برای حالتی که یکی از مقادیر ویژه‌ی سیستم گسسته در اندازه برابر یک باشد و قسمت حقیقی یکی از مقادیر ویژه‌ی سیستم پیوسته برابر صفر باشد، باید به بررسی خمینه‌ی مرکزی نقطه تعادل پرداخت.

---

[۳] Strange attractors

[۴] Basin of attraction

[۵] Characteristic exponents

[۶] G.Floquet

باید توجه داشته باشیم که در این حالت برای رسیدن به نتایج فوق، قضیه‌ی هاتمن_ گروبمن [۷] نقش کلیدی‌ای ایفا می‌کند.

۳-۱-۱ پایداری جواب‌های تناوبی: نظریه‌ی فلوکه

در اینجا قصد داریم پایداری یک مدار تناوبی را بررسی کنیم. پایداری مدارهای تناوبی نیز از طریق خطی‌سازی سیستم به نحوی که می‌خوانیم رخ می‌دهد و از جمله کارهای فلوکه در سال ۱۸۸۳ بوده‌است.

یک مدارهای تناوبی با تناوب T را می‌توان به فرم $x_r(t) = x_r(t+T)$ نشان داد که ممکن از جوابی از معادله‌ی دیفرانسیلی باشد که به طور مستقیم [۸] یا غیرمستقیم [۹] به زمان وابستگی داشته باشد. بنابراین بیایید دو حالت در نظر بگیریم:

- هنگامی که $x_r(t) = x_r(t+T)$ جوابی از یک معادله‌ی دیفرانسیل به فرم

$$\dot{x} = F(x,t) = F(x,t+T), \quad F(\circ,t) \neq \circ$$

باشد، کافی‌است جواب x_r را اندکی جابه‌جا [۱۰] کنیم:

$$x(t) = x_r(t) + \tilde{x}(t)$$

در این حالت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} F(x_r,t) + \dot{\tilde{x}}(t) &= \dot{x}_r(t) + \dot{\tilde{x}}(t) \\ &= F(x_r + \tilde{x}, t) \end{aligned}$$

---

[۷] Hartman-Grobman theorem
[۸] Non-autonomous
[۹] Autonomous
[۱۰] Perturbation

یا به عبارت دیگر

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= F(x_r+\tilde{x},t) - F(x_r,t)\\ &=: \tilde{F}(\tilde{x},t)\\ &= \tilde{F}(\tilde{x},t+T)\end{aligned}$$

حال برای $\tilde{F}$ خواهیم داشت

$$\tilde{F}(\circ,t) = \circ$$

اگر جابه‌جایی $\tilde{x}$ به حد کافی کوچک باشد، خواهیم داشت:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \frac{\partial \tilde{F}(\tilde{x},t)}{\partial \tilde{x}} + \dots$$

حال برای اینکه این جابه‌جایی را بررسی کنیم، کافی‌است سیستم خطی شده را که ماتریس ضرایب‌اش به زمان وابسته است به شکل زیر است:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = D(t)\tilde{x}(t)$$

که

$$D(t) = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{x}}\Big|_{\tilde{x}=\circ} = \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}\Big|_{x_r(t)}$$

چون $x_r(t)$ تابعی تناوبی است، $D(t)$ نیز تناوبی با همان دوره‌ی تناوب است؛ یعنی

$$D(t) = D(t+T)$$

- در حالتی که $x_r(t) = x_r(t+T)$ جواب سیستم

$$\dot{x} = F(x)$$

باشد، به مانند حالت قبل می‌توان عمل کرد و ماتریس زیر را بدست آورد:

$$D(t) = \frac{\partial F(x)}{\partial x}\Big|_{x_r(t)} \tag{۳-۱}$$

در این حالت نیز $D(t) = D(t+T)$

تا اینجا توانستیم برای هر دو حالت، سیستم خطی‌ای بیابیم که توصیف رفتارش، رفتار جابه‌جایی کوچک‌مان را نشان می‌دهد.

ایده‌ی پشت نظریه‌ی پایداری فلوکه این حدس است که ماتریس D به خاطر داشتن درایه‌های تناوبی، بتواند رفتار سیستم را با مشاهده‌ی تنها زمان‌های گسسته $t = ۰, T, ۲T, ۳T, \dots$ پیش‌بینی کند. از دید هندسی اما این دقیقا ایده‌ای است که در پس نگاشت پوآنکاره بوده و مشاهده‌ی سیستم تنها در زمان‌های گسسته نام‌برده، همان استفاده از مقطع پوآنکاره [۱۱] است.

پس بیایید ابتدا فضای مورد بحث را فضایی nـ بعدی برای معادله

$$\dot{\tilde{x}}(t) = D(t)\tilde{x}(t) \qquad (۳-۲)$$

در نظر بگیریم در حالتی که معادله‌ی اصلی وابستگی مستقیمی با زمان ندارد.

این سیستم n جواب مستقل خطی $\tilde{x}_۱(t), \tilde{x}_۲(t), \dots, \tilde{x}_n(t)$ دارد که به آن‌ها جواب‌های بنیادی [۱۲] گویند که خاصیت این‌ها این است که هر جواب معادله را بر حسب ترکیب خطی این جواب‌های بنیادی، می‌توان نوشت:

$$\tilde{x}(t) = c_۱\tilde{x}_۱(t) + c_۲\tilde{x}_۲(t) + \cdots + c_n\tilde{x}_n(t)$$

قرار دهیم:

$$\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_۱(t) & \tilde{x}_۲(t) & \dots & \tilde{x}_n(t) \end{pmatrix}_{n\times n}, \quad c = \begin{pmatrix} c_۱ \\ c_۲ \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

با این طریقه‌ی نوشتن خواهیم داشت:

$$\tilde{x}(t) = \tilde{X}(t)c$$

اگر $\tilde{x}(t)$ جواب معادله‌ی (۳-۲) باشد، آنگاه $x(t+T)$ نیز جواب معادله‌است چرا که $D(t) = D(t+T)$

[۱۱] Poincare section
[۱۲] Fundamental solutions

است.

حال که بنیادی برای حرف‌مان بنا کردیم، بیایید جواب‌های بنیادی‌ای را در نظر بگیریم که

شرط اولیه آن‌ها روی کره‌ی واحد nـ بعدی قرار گیرد. ماتریس متناظر با این جواب‌ها را

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \end{pmatrix}$$

بنامیم که

$$\Phi(0) = I$$

حال از توضیحات بالا داشتیم که اگر $\tilde{x}(t)$ جواب معادله (۳-۲) باشد، آنگاه $x(t \tilde{+} T)$ نیز جوابی از معادله است. پس وجود دارد ماتریسی مانند $C_{n\times n}$ که

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)C$$

یعنی C توابع بنیادی $\Phi(t)$ را به T ثانیه بعد منتقل می‌کند! به عبارت دیگر، C دقیقا همان نگاشت پوآنکاره است. با فرض این‌که جواب‌های اولیه $\Phi_i(0) = I$ داریم

$$\Phi(T) = \Phi(0)C = C$$

که این‌گونه می‌توان C را تعیین کرد. به C ماتریس مونودرومی [۱۳] گویند و به مقادیر ویژه‌ی آن ضرایب فلوکه [۱۴]. اگر مقادیر ویژه‌ی C همگی کمتر از یک باشند به این معنا است که کره‌ی اولیه، بعد از طی یک دوره تناوب، به بیضی‌ای تبدیل خواهد شد درون کره اولیه. به عبارت دیگر جابه‌جایی کوچک‌مان را اگر یادتان باشد، $\tilde{x}(t)$ بعد از طی یک دوره تناوب، کوچک‌تر خواهد شد. و اثرش را از دست می‌دهد. این به معنای پایداری مدار تناوبی اولیه می‌باشد. بعلاوه چون در طی هر دوره‌ی گردش، ماتریس C ظاهر می‌شود، این پایداری، مجانبی است:

$$\Phi(kT) = \Phi^k(T) = C^k$$

[۱۳] Monodromy matrix
[۱۴] Floquet multipliers

بعلاوه به خاطر این خاصیت، اگر ξ بردار ویژه‌ی متناظر با $\lambda(T)$ یکی از مقادیر ویژه‌ی $\Phi(T)$ باشد آنگاه ξ بردار ویژه‌ی ماتریس‌های $\Phi(kT)$ نیز می‌باشد چرا که

$$\Phi(T)\xi = \lambda(T)\xi \Rightarrow \Phi(kT)\xi = \Phi^k(T)\xi = \lambda^k(T)\xi = \lambda(kT)\xi$$

پس ما یک معادله تابعی اسکالر خواهیم داشت:

$$\lambda^k(T) = \lambda(kt) \qquad (۳-۳)$$

جواب‌های این معادله تابعی، به شکل توابع نمایی هستند؛ پس مقادیر ویژه‌ی ماتریس مونودرومی به شکل

$$\lambda(T) = e^{\sigma T}$$

هستند که $\sigma = \sigma_۱ + i\sigma_۲$. به σ نمای فلوکه [۱۵] گویند:

$$\sigma = \frac{۱}{T}\ln\lambda(T) + \frac{۲\pi k}{T}i \qquad k = ۰, \pm۱, \pm۲, \dots$$

پس در حالتی که معادله‌ی دیفرانسیل وابستگی مستقیم به زمان دارد می‌توان با نگاه بر ضرایب فلوکه یا نماهای فلوکه پایداری مدار تناوبی را بررسی کرد:
اگر ضرایب فلوکه همگی درون دایره‌ی واحد قرار بگیرند یا به طور معادل قسمت حقیقی مقدار تمامی نماهای لیاپانوف منفی باشد، مدار پایدار مجانبی است.
در حالتی که یکی از ضرایب فلوکه بیرون از دایره‌ی واحد باشد، یا به طور معادل، یکی از نماهای فلوکه قسمت حقیقی‌مقدار مثبت داشته باشد، جابه‌جایی کوچک‌مان، $\tilde{x}(t)$ به طور نمایی افزایش می‌یابد و مدار متناظر، غیرپایدار خواهد شد.

برای حالتی که سیستم ما با زمان ارتباط مستقیم ندارد، یک ضریب فلوکه حتما برابر یک خواهد شد! این به این معنا است که برای بررسی پایداری، نمی‌شود از این روش استفاده کرد و باید خمینه

[۱۵] Floquet exponent

مرکزی را مطالعه کنیم. حال که سیستم ما وابستگی مستقیم با زمان ندارد، بیایید از معادله‌ی

$$\dot{x} = F(x)$$

نسبت به زمان مشتق بگیریم:

$$\ddot{x} = \frac{\partial F}{\partial x}\dot{x}$$

بنابر (۳-۱)، برای جواب خاص $X_r(t)$ خواهیم داشت:

$$\ddot{x}_r = D(t)\dot{x}_r \qquad (۳-۴)$$

با یکتایی جواب معادله خواهیم داشت

$$\tilde{x} \equiv \dot{x}_r(t)$$

که یعنی جابه‌جایی کوچک‌مان، که مماس بر جواب اصلی معادله‌است، در حقیقت جواب مسئله‌ی خطی‌شده است. پس داریم:

$$\dot{x}_r(t) = \Phi(t)\dot{x}_r(0)$$

حال از آنجا که $\dot{x}_r(t)$ تناوبی است، خواهیم داشت:

$$\dot{x}_r(0) = \dot{x}_r(T) = \Phi(T)\dot{x}_r(0)$$

این به این معنا است که $\lambda = 1$ یک مقدار ویژه‌ی ماتریس مونودرومی است.

۳-۱-۲ نمای لیاپانوف برای نگاشت‌های یک بعدی

در قسمت قبل دیدیم که حول هر چرخه‌ی حدی، نمای فلوکه می‌تواند به ما در تعیین رفتار مدارهای اطراف یاری رساند. این کار را از طریق نگاه بر مقطع پوآنکاره و با تشکیل نگاشت پوآنکاره انجام دادیم. لیاپانوف اما این مفهوم را به هر مداری که رفتار بازگشتی [۱۶] داشته باشد توسعه داد. این

[۱۶] Recurrent

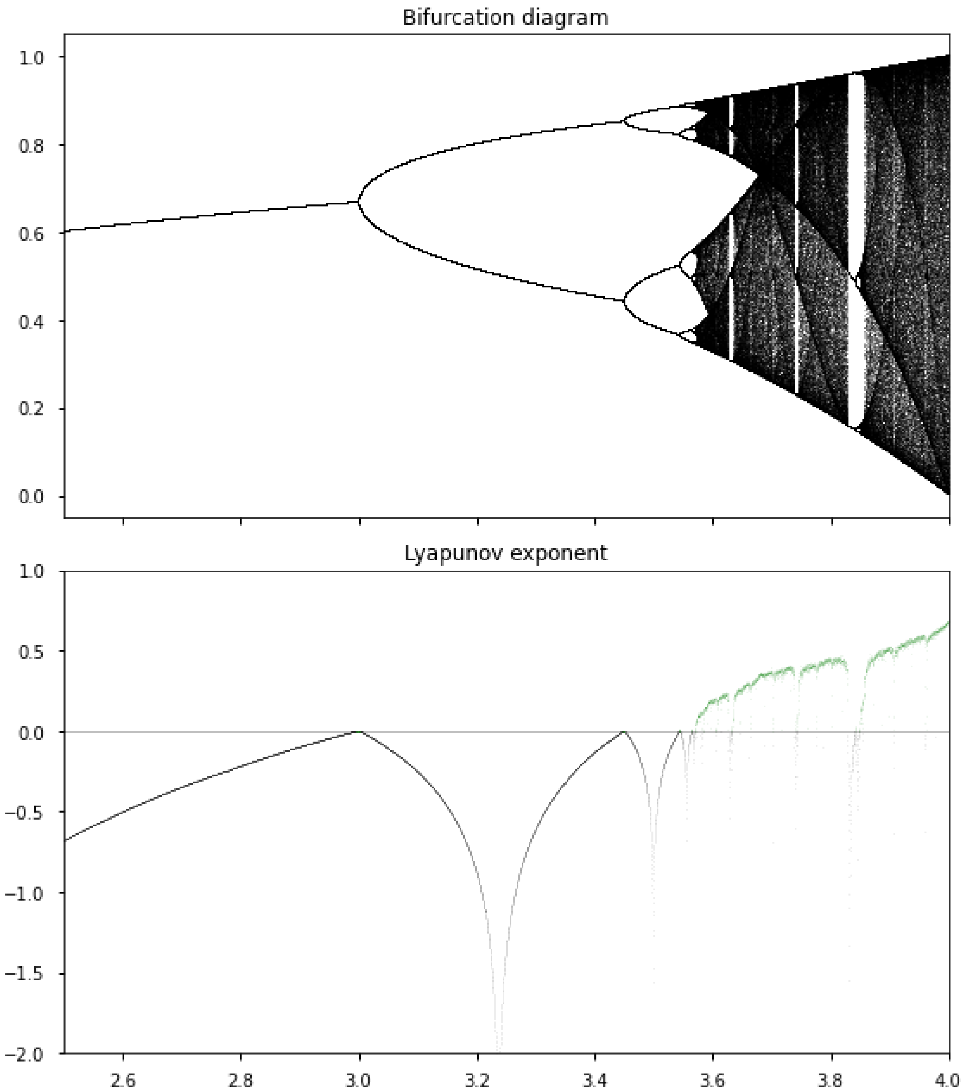
مدارها لزوما نیاز نیست که یک خم بسته باشند. در بخش (۱-۲-۲) دیدیم که برای نگاشت یک بعدی

$$x \to f(x) \text{ or } x_{n+1} = f(x_n)$$

که دامنه‌ی f را بازه‌ای بسته و کراندار درون اعداد حقیقی اتخاذ کردیم، نمای لیاپانوف به شکل زیر تعریف شد:

$$\sigma = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|$$

در شکل (۳-۱) نمای لیاپانوف را برای نگاشت لاجستیک حساب کردیم.



شکل ۳-۱: نمودار انشعاب و نمای لیاپانوف نگاشت لاجستیک

با دانشی که از نظریه‌ی فلوکه در قسمت قبل کسب کردیم، نمای لیاپانوف به‌گونه‌ای توسعه‌ی نمای فلوکه است. باید توجه داشته باشیم که نمای فلوکه امکان دارد مختلط باشد اما نمای لیاپانوف همواره حقیقی‌مقدار است.

فرض کنید یک چرخه‌ی حدی با تناوب T داریم برای این چرخه بیایید نمای لیاپانوف را محاسبه کنیم. برای این کار کافی است صرفا حد را روی زیردنباله‌های با اندیس $\{nT\}_{n\in\mathbb{N}}$ در نظر بگیریم و برای باقی اندیس‌ها الگوریتم اقلیدس را پیاده کنیم و نتایج مشابه بگیریم:

$$\begin{aligned}\sigma &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{nT} \sum_{i=0}^{nT-1} \ln|f'(x_i)| \\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{n}{nT} \ln \prod_{i=0}^{T-1} |f'(x_i)| \\ &= \frac{1}{T} \ln \prod_{i=0}^{T-1} |f'(x_i)|\end{aligned}$$

حال کافیست توجه کنیم که $\prod_{i=0}^{T-1}|f'(x_i)|$ در معادله تابعی (۳-۳) صدق می‌کند. پس لذا σ همان قسمت حقیقی مقدار نمای فلوکه است.

۳-۱-۳ نمای لیاپانوف برای نگاشت‌های nـ بعدی

مواردی که در قسمت قبل مطرح شد قابل توسعه به سیستم‌های nـ بعدی نیز می‌باشد.

فرض کنید مدار مورد بحث، $x_r(t)$ باشد. با کمک نمای لیاپانوف قصد داریم حساسیت این مدار به تکان‌ها یا جابه‌جایی‌های کوچک را بررسی کنیم. (این نما را برای نگاشت‌های nـ بعدی در قسمت (۱-۲-۲) معرفی کردیم. حال برای سیستم‌های پیوسته نیز این نما را معرفی می‌کنیم.)

پس

$$\dot{x}_r = F(x_r)$$

فرض کنیم نکان کوچکی مانند $\tilde{x}(t_\circ)$ در لحظه‌ی صفر به آن می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = \dot{x}_r(t) + \dot{\tilde{x}}(t) &= F(x_r(t) + \tilde{x}(t)) \\ &= F(x_r(t)) + J_F(x_r(t))\tilde{x}(t) + \dots\end{aligned}$$

پس به طور موضعی خواهیم داشت:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = J_F(x_r(t))\tilde{x}(t)$$

که $J_F(x_r(t)) = \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x_r(t)}$ ماتریس ژاکوبی F است که در $x_r(t)$ محاسبه شده است. از نظریه‌ی معادلات دیفرانسیل می‌دانیم تا هنگامی که $F(x)$ به طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد، جواب $\tilde{x}(t)$ از معادله‌ی فوق با شرط اولیه $(t_\circ, \tilde{x}(t_\circ))$ همواره وجود دارد. و از صحبت‌های ابتدای این فصل می‌دانیم ماتریس بنیادی‌ای مانند $\Phi(t, t_\circ)$ داریم که جواب معادله در لحظه‌ی $t = t_\circ$ را به جواب معادله در لحظه‌ی $t = t$ منتقل می‌کند:

$$\tilde{x}(t) = \Phi(t, t_\circ)\tilde{x}(t_\circ)$$

رابطه‌ی فوق را می‌توان این‌گونه نیز به زبان فضاهای برداری بیان کرد:

تبدیل خطی $\Phi(t, t_\circ) : \mathbb{E}_{t_\circ} \to \mathbb{E}_t$ بردار $\tilde{x}(t_\circ)$ را از فضای مماسی $\mathbb{E}_\circ$ در نقطه‌ی $x_r(t_\circ)$ به بردار $\tilde{x}(t)$ در صفحه مماسی $\mathbb{E}_t$ در نقطه‌ی $x_r(t)$ می‌برد. بعلاوه به وضوح خواهیم داشت:

$$\Phi(t_۲, t_\circ) = \Phi(t_۲, t_۱)\Phi(t_۱, t_\circ)$$

شبیه آنچه در (۱-۲-۲) دیدیم، می‌توان نمای لیاپانوف را این‌گونه تعریف کرد:

$$\sigma_{x_r}(\tilde{x}) := \limsup_{t\to\infty} \frac{۱}{t} \ln \frac{||\tilde{x}(t)||}{||\tilde{x}(t_\circ)||} = \limsup \frac{۱}{t} \ln ||\tilde{x}(t)||$$

برای آنکه تضمین کنیم حد بالایی فوق متناهی است فرض می‌کنیم

$$\limsup \frac{۱}{t} \ln ||\Phi(t, t_\circ)|| < \infty$$

از تعریف بالا به راحتی دو خاصیت زیر نتیجه می‌شوند:

۱. $\sigma_{x_r}(c\tilde{x}) = \sigma_{x_r}(\tilde{x})$

۲. $\sigma_{x_r}(\tilde{x}_۱ + \tilde{x}_۲) \leqslant \max\{\sigma_{x_r}(\tilde{x}_۱), \sigma_{x_r}(\tilde{x}_۲)\}$

اثبات. بدون کاستن از کلیت فرض کنیم

$$\max\{\sigma_{x_r}(\tilde{x}_۱), \sigma_{x_r}(\tilde{x}_۲)\} = \sigma_{x_r}(\tilde{x}_۱)$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\sigma_{x_r}(\tilde{x}_۱ + \tilde{x}_۲) &= \limsup_{t\to\infty} \frac{۱}{t} \ln ||\tilde{x}_۱(t) + \tilde{x}_۲(t)|| \\
&\leqslant \limsup_{t\to\infty} \frac{۱}{t} \ln \Big[||\tilde{x}_۱(t)|| \big(۱ + \frac{||\tilde{x}_۲(t)||}{||\tilde{x}_۱(t)||}\big)\Big] \\
&= \limsup_{t\to\infty} \frac{۱}{t} \Big[\ln ||\tilde{x}_۱(t)|| + \ln \big(۱ + \frac{||\tilde{x}_۲(t)||}{||\tilde{x}_۱(t)||}\big)\Big] \\
&\leqslant \limsup_{t\to\infty} \frac{۱}{t} \Big[\ln ||\tilde{x}_۱(t)|| + \ln ۲\Big] \\
&= \limsup_{t\to\infty} \frac{۱}{t} \ln ||\tilde{x}_۱(t)|| \\
&= \sigma_{x_r}(\tilde{x}_۱)
\end{aligned}$$

□

همان طور که در بخش (۱-۲-۲) اشاره کردیم، اسلدیت نشان داد که $\sigma = \sigma_{x_r}$ برای تقریبا همه‌ی مدارها یکی است و حدبالایی را می‌توان با حد جایگزین کرد چرا که تقریبا همه جا وجود دارد. اگر دو خاصیت بالا را در نظر بگیریم، به راحتی می‌توانیم نشان دهیم $\mathbb{L}_r := \{\tilde{x} \in \mathbb{E}_۰ : \sigma(\tilde{x}) \leqslant r\}$ به ازای هر $r \in \mathbb{R}$ زیر فضایی از $\mathbb{E}_۰$ است. با در نظر گرفتن این می‌توانیم نشان دهیم که در فضا حداکثر $n := \dim(\mathbb{E}_۰)$ نمای لیاپانوف داریم.

اثبات. کافی است توجه کنیم که اگر $\sigma(\tilde{x}_۱) \neq \sigma(\tilde{x}_۲)$ باشد آنگاه $\tilde{x}_۱$ و $\tilde{x}_۲$ مستقل خطی هستند. این نکته با برهان خلف و توجه به دو خاصیت نمای لیاپانوف به راحتی بدست می‌آید. حال اگر به استقرا فرض کنیم برای هر k بردار $x_۱, \ldots, x_k$ که خاصیت

$$\sigma(x_۱) > \sigma(x_۲) > \cdots > \sigma(x_k)$$

را دارند این k بردار مستقل خطی هستند، آنگاه برای $k+1$ بردار $x_1, \dots, x_{k+1}$ با خاصیت

$$\sigma(x_1) > \sigma(x_2) > \cdots > \sigma(x_{k+1})$$

خواهیم داشت:

اگر

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i x_i = 0$$

آنگاه اگر وجود داشته باشد $1 \leqslant i \leqslant k+1$ که $a_i = 0$ آنگاه طبق فرض استقرا x_iها مستقل خطی هستند. پس به برهان خلف، فرض کنیم تمامی a_iها ناصفر هستند. در این حالت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} -a_1 x_1 &= \sum_{i=2}^{k+1} a_i x_i \\ \rightarrow \sigma(-a_1 x_1) = \sigma(x_1) &\leqslant \sigma\Big(\sum_{i=2}^{k+1} a_i x_i\Big) \\ &\leqslant \sigma(x_2) \end{aligned}$$

این با فرض‌مان در تناقض است. پس لذا $a_i = 0$ به ازای تمامی $1 \leqslant i \leqslant k+1$.

از اینجا مشخص است که ما حداکثر n نمای لیاپانوف می‌توانیم داشته باشیم. □

این n نمای لیاپانوف را معمولاً به صورت زیر می‌نویسیم:

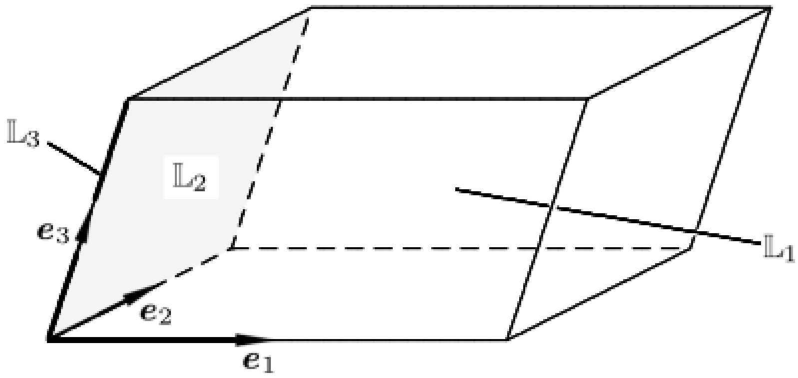
$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_n$$

و فرض کنیم دقیقا s نمای لیاپانوف متمایز داشته باشیم که به فرم

$$\nu_1 > \nu_2 > \cdots > \nu_s \qquad (1 \leqslant s \leqslant n)$$

نمایش‌شان دهیم. و همچنین قرار دهیم:

$$\mathbb{L}_k := \mathbb{L}_{\nu_k}$$



شکل ۳-۲: زیرفضاهای خطی $\mathbb{L}_k$

در این صورت به وضوح

$$\mathbb{E}_۰ = \mathbb{L}_۱ \supset \mathbb{L}_۲ \supset \cdots \supset \mathbb{L}_s$$

به شکل (۳-۲) نگاه کنید!

می‌توانیم پایه‌ای برای $\mathbb{E}_۰$ مانند $\{e_۱, \ldots, e_n\}$ در نظر بگیریم که

$$\sigma(e_i) = \sigma_i \qquad (i = ۱, \ldots, n)$$

به ازای هر تکان کوچکی به فرم

$$\tilde{x} = \sum_{i=۱}^{n} c_i e_i$$

که $c_1 \neq 0$ در این صورت

$$\begin{aligned}
-c_1 e_1 &= \tilde{x} - \sum_{i=2}^{n} c_i e_i \\
\rightarrow \sigma_1 = \sigma(e_1) &= \sigma\Big(\tilde{x} - \sum_{i=2}^{n} c_i e_i\Big) \\
&\leqslant \max\{\sigma\Big(\sum_{i=2}^{n} c_i e_i\Big), \sigma(\tilde{x})\} \\
&\leqslant \max\{\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n, \sigma(\tilde{x})\} \\
&\leqslant \sigma_1
\end{aligned}$$

از آنجا که σ_1 بزرگترین مقدار را بین بقیه σ_iها دارد پس باید داشته باشیم

$$\sigma_1 = \sigma(\tilde{x})$$

پس در حالت کلی داریم:

$$\forall 1 \leqslant i < s : \forall x \in \mathbb{L}_i \setminus \mathbb{L}_{i+1} : \sigma(x) = \nu_i$$

در کارهای عددی معمولا نمی‌توان به طور دقیق نتیجه ی بالا را نشان داد. و به ازای تقریبا تمامی بردار ها، در کارهای عددی ما می‌توانیم σ_1 را که بزرگترین نمای لیاپانوف سیستم است، محاسبه کنیم. برای بدست آوردن باقی نماها، باید این مفهوم را توسعه دهیم که نتیجه‌ی آن **نماهای لیاپانوف از مرتبه** p [17] می‌باشد که توسط اسلدیت [58] معرفی شد. بر این مفهوم، نمای لیاپانوفی که در بالا معرفی کردیم، نمای لیاپانوف مرتبه اول خواهد بود. کاری که قبلا انجام دادیم، همان طور که در بخش (۱-۲-۲) توضیح دادیم، محاسبه‌ی میانگین انقباض یا انبساط سیستم در یک راستا بود. برای ارتقای این مفهوم، کافیست میزان متوسط انقباض یا انبساط حجم یک متوازی‌السطوح pـ بعدی در فضای مماسی $\mathbb{E}_0$ را مورد مطالعه قرار دهیم. در اینجا حجم این متوازی‌السطوح را با V_p نمایش خواهیم داد. بر این اساس خواهیم داشت:

$$\sigma_{x_r}^{(p)}(V_p) = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{V_p t}{V_p(0)} \qquad (۵-۳)$$

[17] Lyapunov exponents of p-th order

در اینجا نیز فرض می‌کنیم حد بالایی فوق، برای تقریبا تمامی مدارها یکی و متناهی است و حد بالایی را می‌توانیم با حد جایگزین کنیم.
اگر متوازی‌السطوحی در نظر بگیریم که با $e_۱, e_۲, \ldots, e_p$ ساخته شده باشد، آنگاه خواهیم داشت

$$\sigma^{(p)}(V_p) = \sigma(e_۱) + \sigma(e_۲) + \cdots + \sigma(e_p)$$

پس نمای لیاپانوف مرتبه p برابر است با جمع p نمای لیاپانوف اول. در حقیقت

$$\sigma^{(p)} = \sigma_۱ + \sigma_۲ + \cdots + \sigma_p$$

حال اگر نمای لیاپانوف مرتبه‌های $p = ۱, \ldots, n$ را بدانیم، نماهای لیاپانوف $\sigma_۱, \ldots, \sigma_n$ نیز به راحتی به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
&\sigma^{(۱)} = \sigma_۱ \\
&\sigma^{(۲)} = \sigma_۱ + \sigma_۲ \Rightarrow \sigma_۲ = \sigma^{(۲)} - \sigma^{(۱)} \\
&\quad\vdots \\
&\sigma^{(n)} = \sigma_۱ + \sigma_۲ + \cdots + \sigma_n \Rightarrow \sigma_n = \sigma^{(n)} - \sigma^{(n-۱)}
\end{aligned}$$

در اینجا چند قضیه در ارتباط با نمای لیاپانوف خواهیم دید که می‌توانند به ما در دسته‌بندی سیستم‌ها کمک کنند:

قضیه‌ی ۳-۱ ([۲۸]) *سیستم زیر را در یک فضای nـ بعدی نظر بگیرید:*

$$\dot{x} = F(x)$$

که یک جواب آن مانند $x_r(t)$ در شرایط زیر صدق کند:

۱. *کراندار باشد.*

۲. F *در تنها متناهی نقطه از* $x_r(t)$ *صفر شود.*

۳. $x_r(t)$ *به نقطه تعادل سیستم همگرا نشود.*

در این صورت سیستم یک نمای لیاپانوف صفر دارد.

اثبات. با داشتن سیستمی که به زمان وابستگی مستقیم ندارد، و تکان کوچکی در جواب مسئله مانند $\tilde{x}$ به مانند آنچه در (۴-۲) دیدیم، خواهیم داشت:

$$\tilde{x} = \dot{x}_r(t)$$

از پیوستگی F و کرانداری $x_r(t)$ نتیجه می‌گیریم که وجود دارد $\delta > ۰$ که

$$||\tilde{x}|| = ||\dot{x}_r|| = ||F(x_r(t))|| < \delta$$

پس لذا طبق تعریف نمای لیاپانوف:

$$\begin{aligned}\sigma(\tilde{x}) &= \limsup_{t\to\infty} \frac{۱}{t} \ln ||\tilde{x}(t)|| \\ &\leqslant \limsup_{t\to\infty} \frac{۱}{t} \ln \delta \\ &= ۰\end{aligned}$$

حال فرض کنیم $\sigma(\tilde{x}) < ۰$.

برای هر $\epsilon > ۰$ یک t_ϵ خواهد بود که برای هر $t > t_\epsilon$:

$$\frac{۱}{t} \ln ||\dot{x}_r(t)|| = \frac{۱}{t} \ln ||\tilde{x}(t)|| < \sigma(\tilde{x}) + \epsilon$$

از روابط فوق بدست می‌آید که اگر ϵ را آن‌قدر کوچک در نظر بگیریم که $\sigma(\tilde{x}) + \epsilon < ۰$ آنگاه:

$$\forall t > t_\epsilon : ||\dot{x}_r(t)|| < e^{-t|\sigma(\tilde{x})+\epsilon|}$$

حال اگر $t \to \infty$ آنگاه

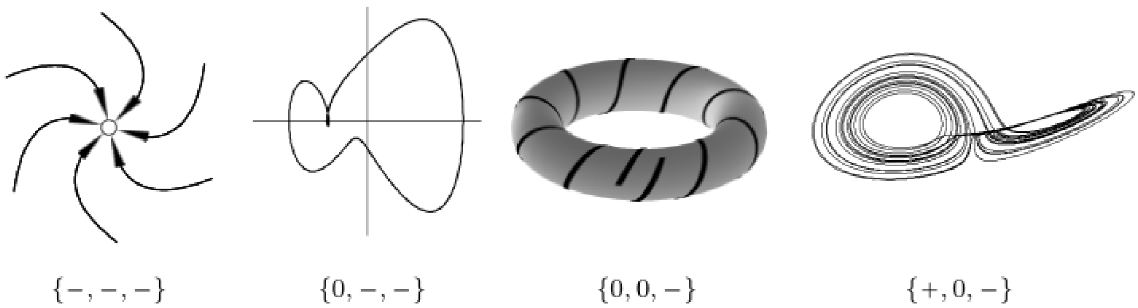
$$||F(x_r(t))|| = ||\dot{x}_r(t)|| \to ۰$$

حال از آنجا که F و $x_r(t)$ پوسته هستند، $x_r(t)$ کراندر است و F در متناهی نقطه صفر می‌شود پس هنگامی که $t \to \infty$

$$x_r(t) \to \hat{x}$$

که $\hat{x}$ نقطه تعادل سیستم است. این با فرض در تناقض بوده و در نتیجه $\sigma(\tilde{x}) = 0$. □

از قضیه‌ی قبل به راحتی حکمی که در نظریه‌ی فلوکه برای سیستم‌های بدون وابستگی مستقیم به زمان، بدست آوردیم را می‌توانیم نتیجه بگیریم.



شکل ۳-۳: دسته‌بندی جاذب‌های بعد ۳ با کمک نماهای لیاپانوف

نمای لیاپانوف به ما این امکان را می‌دهد که بتوانیم مجموعه‌های جاذب سیستم را تفکیک کنیم. مثلا برای سیستم‌های سه‌ـ بعدی شکل (۳-۳) به ما نشان می‌دهد چگونه این جاذب‌ها با کمک نمای لیاپانوف $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ از هم تمییز داده می‌شوند. یک نقطه ثابت، پایدار سه نمای لیاپانوف منفی دارد؛ یک چرخه حدی، با دو نمای لیاپانوف منفی و یک نمای لیاپانوف صفر مشخص می‌شود؛ یک چنبره، با دو نمای لیاپانوف صفر و یک نمای لیاپانوف منفی؛ و یک مدار آشوب‌ناک روی یک جاذب پیچیده، با یک نمای لیاپانوف مثبت، یک نمای لیاپانوف صفر و یک نمای لیاپانوف منفی شناخته می‌شود.

مثبت شدن نمای لیاپانوف به معنای این است که مدارها به طور نمایی واگرا هستند. جاذب‌های پیچیده فضای محدودی را اشغال می‌کنند و این به این معنا است که نمی‌توان انتظار داشت در تمامی جهت‌ها ما انقباض داشته باشیم. این مفهوم خودش را در منفی بودن σ_3 نشان می‌دهد. در این موارد، در فضا در جهت‌های انقباض و در جهت‌های انبساط خواهیم داشت.

در ابعاد بالا، مواردی اتفاق می‌افتد که چند نمای لیاپانوف مثبت خواهند شد؛ در این موارد، ما از ابرآشوب [۱۸] صحبت می‌کنیم.

۳-۱-۴ حل عددی نماهای لیاپانوف

برای بررسی عددی نمای لیاپانوف، باید دستگاه خطی

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x_r(t)}\tilde{x}(t)$$

را بررسی کنیم که ماتریس ژاکوبی‌مان به مدار مرجع‌مان $x_r(t)$ بستگی داره که خود جواب معادله‌ی غیرخطی

$$\dot{x} = F(x)$$

است.

بزرگ‌ترین نمای لیاپانوف

برای شرط اولیه داده شده $x_r(t_\circ) = x_{r,\circ}$ و $\tilde{x}(t_\circ) = \tilde{x}_\circ$ قصدمان این است که تکامل $\tilde{x}(t)$ را در طول مدار مرجع رصد کنیم و مقدار $d(t) = ||\tilde{x}(t)||$ را بدست آوریم.
مشکلات عددی از آنجایی شروع می‌شوند که بخواهیم رفتارهای آشوب‌ناک را رصد کنیم! یعنی حالاتی که $d(t)$ به طور نمایی رشد می‌کند! بله دقیقا همین رشد نمایی باعث می‌شود نتوانیم $d(t)$ را به طور مستقیم محاسبه کنیم! علاوه بر رشد نمایی خطاهای عددی‌مان، کامپیوترها از ظرفیت عددی کافی برخوردار نیستند و به سرعت خطای افزایش بیش‌ازحد تعداد ارقام [۱۹] را نشان می‌دهند.
این مشکل را با استفاده از محاسبه‌ی ماتریس بنیادی $\Phi(t, t_\circ)$ برطرف می‌کنیم.

[۱۸] Hyperchaos
[۱۹] Overflow

طول بازه‌ی زمانی را Δt بگیریم. با گسسته‌سازی زمان به صورت

$$\{t_m = t_۰ + m\Delta t\}$$

می‌توانیم رابطه‌ی زیر را بدست آوریم:

$$\tilde{x}(t_k) = \Phi(t_k, t_{k-۱})\Phi(t_{k-۱}, t_{k-۲})\dots\Phi(t_۱, t_۰)\tilde{x}(t_۰)$$

حال در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} ||\tilde{x}_۰|| = d_۰ \\ \tilde{y}_۰ := \frac{\tilde{x}_۰}{d_۰} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi(t_۱, t_۰)\tilde{y}_۰ = \tilde{x}_۱ \\ ||\tilde{x}_۱|| = d_۱ \\ \tilde{y}_۱ := \frac{\tilde{x}_۱}{d_۱} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi(t_۲, t_۱)\tilde{y}_۱ = \tilde{x}_۲ \\ ||\tilde{x}_۲|| = d_۲ \\ \tilde{y}_۲ := \frac{\tilde{x}_۲}{d_۲} \end{cases}$$

$$\vdots$$

با نمادگذاری‌های بالا خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
||\tilde{x}(t_k)|| &= ||\Phi(t_k, t_{k-1})\Phi(t_{k-1}, t_{k-2})\ldots\Phi(t_1, t_0)\tilde{x}(t_0)|| \\
&= ||\Phi(t_k, t_{k-1})\Phi(t_{k-1}, t_{k-2})\ldots\Phi(t_1, t_0)(d_0\tilde{y}_0)|| \\
&= ||\Phi(t_k, t_{k-1})\Phi(t_{k-1}, t_{k-2})\ldots\Phi(t_1, t_0)\tilde{y}_0||d_0 \\
&= ||\Phi(t_k, t_{k-1})\Phi(t_{k-1}, t_{k-2})\ldots(d_1\tilde{y}_1)||d_0 \\
&= ||\Phi(t_k, t_{k-1})\Phi(t_{k-1}, t_{k-2})\ldots\tilde{y}_1||d_1 d_0 \\
&\vdots \\
&= ||\Phi(t_k, t_{k-1})\tilde{y}_{k-1}||d_{k-1}d_{k-2}\ldots d_1 d_0 \\
&= d_k d_{k-1} d_{k-2}\ldots d_1 d_0 \\
&= \prod_{i=0}^{k} d_i
\end{aligned}
$$

از این محاسبات خواهیم داشت:

$$\sigma_1 = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln||\tilde{x}(t)|| = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k\Delta t}\ln\prod_{i=0}^{k} d_i = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k\Delta t}\sum_{i=0}^{k}\ln d_i$$

تمامی نماهای لیاپانوف

برای محاسبه‌ی باقی نماهای لیاپانوف، همان طور که قبلا اشاره کردیم، باید نماهای لیاپانوف مرتبه p را محاسبه کنیم. در اینجا نیز خطای افزایش بیش‌ازحد تعداد ارقام، مشکلی اساسی در محاسبه‌ی این نماها توسط کامپیوتر است. علاوه بر این مشکل دیگری نیز ظاهر می‌شود: زاویه‌ی بین اضلاع هر متوازی‌السطوح، در طول زمان در اثر خطاهای عددی و رشد نمایی آن‌ها در سیستم‌های آشوب‌ناک، به صفر میل می‌کند. این نکته را سعی می‌کنیم در زیر نشان دهیم:

برای این کار، پایه‌ی متعامدی از فضا در نظر بگیریم: $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ بنابراین می‌توان ضرایب

مناسبی یافت که

$$\tilde{x}(0) = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$$

در اینجا فرض می‌کنیم $c_1 \neq 0$ با کمک مقادیر تخمین‌زده شده از نماهای لیاپانوف $\tilde{\sigma}_i \approx \sigma_i$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &\approx \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\tilde{\sigma}_i} e_i \\ &= c_1 e^{\tilde{\sigma}_1 t}\Big(e_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{c_i}{c_1} e^{(\tilde{\sigma}_i - \tilde{\sigma}_1)t} e_i\Big) \to c_1 e^{\tilde{\sigma}_1 t} e_1\end{aligned}$$

و در جایی که $c_1 = 0$ در زمان اولیه، خطاهای عددی باعث می‌شوند ضریب e_1 در طی زمان مقداری اتخاذ کند. این مقدار در طی زمان به طور نمایی زیاد می‌شود و بر بقیه مقادیر غلبه کند. پس در هر حالت، هر برداری در طی زمان طولانی، موازی با e_1 خواهد شد و در نتیجه هر متوازی‌السطوحی در نظر بگیریم، در طی زمان حجمش صفر می‌شود.
برای حل این مشکل در هر تکرار روش عددی، پایه‌های متعامد بالا را با پایه‌های متعامدی که همان زیرفضا را ایجاد می‌کنند، جایگزین می‌کنیم. این پایه‌ها را می‌توانیم بر اساس فرآیند گرام‌اشمیت بسازیم.

پس به طور مثال برای محاسبه‌ی $\tilde{\sigma}^{(3)}$ با بردارهای مستقل خطی $\{f_1, f_2, f_3\}$ شروع می‌کنیم و سپس پایه‌های متعامد $\{e_1, e_2, e_3\}$ را به شرح فوق می‌سازیم:

$$\begin{aligned}&e_1 = \frac{f_1}{|f_1|} \\ &\overline{e}_2 = f_2 + c_{21} e_1, \quad c_{21} = -f_2^T e_1 \to e_2 = \frac{\overline{e}_2}{|\overline{e}_2|} \\ &\overline{e}_3 = f_3 + c_{31} e_1 + c_{32} e_2, \quad c_{ij} = -f_i^t e_j \to e_3 = \frac{\overline{e}_3}{|\overline{e}_3|}\end{aligned}$$

برای حالتی که با p بردار $\{f_1, f_2, \dots, f_p\}$ شروع کنیم در مرحله‌ی kـام خواهیم داشت:

$$\overline{e}_k = f_k + \sum_{i=1}^{k-1} c_{ki} e_i, \quad c_{ki} = -f_k^T e_i \to e_k = \frac{\overline{e}_k}{|\overline{e}_k|}$$

حال برای بدست آوردن نمای لیاپانوف مرتبه‌های p این‌گونه عمل می‌کنیم:

۱. پایه‌ی متعامد فضا را $\{e_1, \ldots, e_n\}$ در نظر می‌گیریم. برای هر $p \leqslant n$ بردارهای $\{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ یک ابرمکعب pــ بعدی تشکیل می‌دهند.

۲. گام زمانی ثابت Δt را تعیین می‌کنیم.

۳. با حل عددی معادله دیفرانسیل، در زمان‌های $t_k = t_0 + k\Delta t$ متناظر با شروط اولیه e_i بردارهای زیر را برای زمان t_k بدست می‌آوریم:

$$f_i = \Phi(t_k, t_{k-1})e_i$$

۴. برای هر $p \leqslant n$، حجم $V_k^(p)$ را برای متوازی‌السطوح تولید شده توسط $\{f_1, \ldots, f_p\}$ محاسبه می‌کنیم.

۵. الگوریتم گرام‌ــ اشمیت که در بالا توضیح دادیم را پیاده می‌کنیم و پایه‌های متعامد $\{e_1, \ldots, e_n\}$ از فضا را بدست می‌آوریم به طوری که برای هر $0 < p \leqslant n$

$$\text{span}\{e_1, \ldots, e_p\} = \text{span}\ \{f_1, \ldots, f_p\}$$

۶. به مورد ۳ برمی‌گردیم و الگوریتم را تکرار می‌کنیم.

از طریق الگوریتم بالا خواهیم داشت:

$$V_p(t_k) = \prod_{i=1}^{k} V_i^{(p)}$$

و نمای لیاپانوف مرتبه p نیز برابر خواهد بود با

$$\sigma^{(p)} = \lim_{k\to\infty} \sigma_k^{(p)}, \qquad \sigma_k^{(p)} = \frac{1}{k\Delta t}\sum_{i=1}^{k} \ln V_i^{(p)} = \frac{k-1}{k}\sigma_{k-1}^{(p)} + \frac{1}{k\Delta t}\ln V_k^{(p)}$$

برای سیستم‌های گسسته این محاسبه راحت‌تر خواهد بود چرا که دیگر نیاز به حل عددی معادله‌ی دیفرانسیل نخواهیم داشت.

نکته‌ی بعدی که باید به آن توجه کنیم این است که در سیستم‌های آشوب‌ناک، مدار مرجع و مدار با اندکی جابه‌جایی، برای مدت زمانی نزدیک هم باقی می‌مانند. این ناپایداری موضعی سیستم است که همان‌طور که دیدیم در مثبت بودن نمای لیاپانوف نشان داده می‌شود و موجب واگرایی نمایی دو مدار می‌شود. اگر شرط اولیه دارای اندکی خطا $|\delta x(0)|$ باشد این خطا به طور نمایی افزایش می‌یابد

$$|\delta x(t)| \sim |\delta x(0)| e^{\sigma_1 t}$$

اما تا زمانی مانند t^* هنوز پیش‌بینی برای ما ممکن است و خطا آن‌چنان رشد زیادی نداشته اشت. در این زمان

$$|\delta x(0)| e^{\sigma_1 t^*} \sim L$$

و ما خواهیم داشت

$$t^* \sim \frac{1}{\sigma_1} \ln \frac{L}{|\delta x(0)|}$$

این رابطه نشان می‌دهد هرچه خطا در شرط اولیه کمتر باشد، مدت زمان بیشتری می‌توانیم به نتایج اطیمینان داشته باشیم. و البته هرچه σ_1 بیشتر باشد، t^* کمتر خواهد بود. از اینجا خواهیم داشت:

$$\sigma_1 \propto \frac{1}{t^*} \qquad (۳-۶)$$

۳-۲ آنتروپی

در اینجا قصد داریم کمیتی که پیش‌تر با عنوان آنتروپی در مقدمه دیدیم را دقیق‌تر معرفی کنیم و چند قضیه از آن ببینیم. همچنین قصد داریم به سیستم‌های دینامیکی پیوسته نیز بپردازیم و ارتباط آنتروپی را با نمای لیاپانوف بررسی کنیم.

۳-۲-۱ آنتروپی توپولوژیک

سیستم‌های گسسته

فرض کنید $\mathcal{C}_X^{\circ}$ خانواده‌ی تمامی پوشش‌های باز مجموعه فشرده‌ی متریک X باشد. اگر $U \in \mathcal{C}_X^{\circ}$ آنگاه $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ را تعداد اعضای زیرپوشش مینیمال $\mathcal{U}$ در نظر بگیریم. بعلاوه با در نظر گرفتن دینامیک سیستم به عنوانی تابعی پیوسته مانند $f : X \to X$، تکامل این پوشش را از زمان M تا N اینگونه تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{U}_M^N := \bigvee_{n=M}^{N} f^{-n}\mathcal{U}$$

تعریف ۳-۱ (آنتروپی توپولوژیک) *آنتروپی توپولوژیک پوشش باز* $\mathcal{U} \in \mathcal{C}_X^{\circ}$ *تحت دینامیک* $f : X \to X$ *برابر است با*

$$h_{top}(\mathcal{U}, f) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(\mathcal{N}(\mathcal{U}_{\circ}^{n-1})\right)$$

همچنین آنتروپی توپولوژیک سیستم، سوپریمم تمامی آنتروپی‌های متناظر با زیرپوشش‌های باز آن است یعنی

$$h(f) := \sup_{\mathcal{U}\in\mathcal{C}_X^{\circ}} h(f,\mathcal{U})$$

دقت داریم که حد بالا وجود دارد چرا که دنباله‌ی $a_m := \mathcal{N}(\mathcal{U}_{\circ}^{m-1})$ زیرجمعی است به این معنا که $a_{m+n} \leqslant a_m a_n$.

همچنین برای راحتی تعریف کنیم: $H(\mathcal{U}) := \log\left(\mathcal{N}(\mathcal{U})\right)$. در قضیه‌ی بعد به خواص آنتروپی توپولوژیک می‌پردازیم [۱۳]، [۷۵].

قضیه‌ی ۳-۲ (ویژگی‌های آنتروپی توپولوژیک) *با نمادگذاری‌های بالا داریم:*

۱. $H(\mathcal{U}) \leqslant \log \#\mathcal{U}$

۲. $\mathcal{U} \succeq \mathcal{U}' \implies h(\mathcal{U}, f) \succeq h(\mathcal{U}', f)$

۳. $h(f^{-1}\mathcal{U}, f) \leqslant h(\mathcal{U}, f)$

۴. $h(f^{-1}\mathcal{U}, f) = h(\mathcal{U}, f)$ اگر f پوشا باشد.

۵. $h(\mathcal{U} \vee \mathcal{U}', f) \leqslant h(\mathcal{U}, f) + h(\mathcal{U}', f)$

۶. $h(\mathcal{U} \vee \mathcal{U}', f) \leqslant h(\mathcal{U}, f) + h(\mathcal{U}', f|\mathcal{U})$

۷. $h(\pi^{-1}\mathcal{U}, S) = h(\mathcal{U}, f)$، که $\pi : Y \to X$ یک نیم‌ـ تناظر دینامیکی است.

۸. $h(f) \leqslant h(S)$، که $\pi : (Y, S) \to (X, f)$ یک نیم‌ـ تناظر دینامیکی است.

۹. $h(f) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} h(f\ |_{\Lambda_i})$ اگر $X = \bigcup_{i=1}^{n} \Lambda_i$ که Λ_iها بسته و f ـ ناوردا باشند.

۱۰. $h(f) = \sup_i h(f|_{\Lambda_i})$ اگر $X = \bigcup_i \lambda_i$ و λ_iها فشرده باشند.

۱۱. $h(f^m) = |m| h(f)$.

۱۲. $h(f \times g) = h(f) + h(g)$ که $f : X \to X$ و $g : Y \to Y$ هستند و $f \times g(x, y) = (f(x), g(y))$.

۱۳. $h(f) = h(f|_{X_\infty})$ که $X_\infty = \bigcap_{n \geqslant 0} f^n(X)$

۱۴. $h(f) = h(f|_{N.W.(X)})$ که $N.W.(X) = \{x \in X \mid \forall U_x : \exists n \in \mathbb{N}\ s.t.\ f^n(U_x) \cap U_x \neq \emptyset\}$

اثبات قضیه‌ی بالا را در اینجا می‌توانید دنبال کنید.

از قضیه‌ی بالا مشخص است که هر زیرسیستم، آنتروپی توپولوژیکی کمتر از سیستم اصلی دارد. در اینجا می‌توانیم از بزرگ‌ترین زیرسیستمی صحبت کنیم که آنتروپی توپولوژیک‌اش صفر است این زیرسیستم را زیرسیستم پینسکر [۲۰] می‌نامند.

[۲۰] Pinsker factor

همچنین آنتروپی توپولوژیک کمیتی است ناوردای دینامیکی یعنی تحت تناظر دینامیکی ناوردا باقی می‌ماند.

گزاره‌ی ۳-۳ *اگر $\pi : (Y, S) \to (X, T)$ یک نیم‌ـ تناظر دینامیکی باشد، و بعلاوه $\mathcal{U} \in \mathcal{C}_X^{\circ}$ آنگاه*

$$h_{top}(T, \mathcal{U}) = h_{top}(S, \pi^{-1}\mathcal{U})$$

اثبات. کافیست توجه کنیم که

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}((\pi^{-1}\mathcal{U})_{\circ}^{n-1}) &= \mathcal{N}(\bigvee_{i=\circ}^{n-1} S^{-i}\pi^{-1}\mathcal{U}) \\
&= \mathcal{N}(\bigvee_{i=\circ}^{n-1} (\pi S^{i})^{-1}\mathcal{U}) \\
&= \mathcal{N}(\bigvee_{i=\circ}^{n-1} (T^{i}\pi)^{-1}\mathcal{U}) \\
&= \mathcal{N}(\bigvee_{i=\circ}^{n-1} \pi^{-1}T^{-i}\mathcal{U}) \\
&= \mathcal{N}(\pi^{-1}\bigvee_{i=\circ}^{n-1} T^{-i}\mathcal{U}) \\
&= \mathcal{N}(\bigvee_{i=\circ}^{n-1} T^{-i}\mathcal{U})
\end{aligned}$$

□

قضیه‌ی ۳-۴ *برای سیستم دینامیکی (X, f) و پوشش باز $\mathcal{U}$ اگر T پوشا باشد داریم:*

$$h_{top}(T, \mathcal{U}) = h_{top}(T, T^{-1}\mathcal{U})$$

تعریف ۳-۲ *اگر (X, T) یک سیستم دینامیکی توپولوژیک باشد، آنگاه $E \subset X$ را یک (n, ϵ)ـ مولد*[۲۱] *مجموعه‌ی $K \subset X$ گوییم هرگاه خانواده‌ی $\{B(x; n, \epsilon) | x \in E\}$ یک پوشش K باشند. در اینجا*

$$B(x; n, \epsilon) := \{y \in X | \forall \circ \leqslant i \leqslant n-1 : d(T^{i}x, T^{i}y) < \epsilon\}$$

[۲۱] Generating set

را یک گوی وابسته به دینامیک [۲۲] به مرکز x، طول n و شعاع ϵ گوییم.

تعریف ۳-۳ *فرض کنیم (X,T) دینامیک گسسته باشد. به $E \subset X$ یک (x,ϵ)ـ جداساز گوییم هرگاه*

$$\forall x, y \in E: \quad y \notin B(x; n, \epsilon)$$

یا معادلا

$$\forall x \in X : E \cap B(x; n, \epsilon) = \{x\}$$

گزاره‌ی ۳-۵ *برای سیستم دینامیکی (X,T) داریم:*

۱. *$K \subset X$ به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر $\epsilon > ۰$ یک (n,ϵ)ـ مولد K است.*

۲. *برای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر $\epsilon > ۰$ و هر $x \in X$، $\{x\}$ یک (n,ϵ)ـ جداساز بدیهی است.*

۳. *هر (n,ϵ)ـ جداساز ماکسیمال، یک (n,ϵ)ـ مولد X است.*

حال نمادگذاری‌های زیر را در نظر بگیریم:

$$\begin{aligned}
G_n(T,\epsilon) &:= \inf\{\#E \mid E \subseteq X \text{ be a } (n.\epsilon)\text{-generating set for } X\} \\
S_n(T,\epsilon) &:= \sup\{\#E \mid E \subseteq X \text{ be a } (n.\epsilon)\text{-separated set}\} \\
G(T,\epsilon) &:= \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{۱}{n} \log G_n(T,\epsilon) \\
S(T,\epsilon) &:= \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{۱}{n} \log S_n(T,\epsilon) \\
G(T) &:= \lim_{\epsilon\to ۰} G(T,\epsilon) \\
S(T) &:= \lim_{\epsilon\to ۰} S(T,\epsilon)
\end{aligned}$$

قضیه‌ی ۳-۶ *برای یک فضای متریک فشرده مانند X و نگاشت پیوسته $T : X \to X$ داریم:*

$$h_{top}(T) = S(T) = G(T)$$

[۲۲] Dynamical ball

حال برای آنکه دیدی از آنتروپی توپولوژیک داشته باشیم، بیابید آنتروپی توپولوژیک را برای سیستم‌های خطی بررسی کنیم [۹].

قضیه‌ی ۳-۷ *برای تابع مشتق‌پذیر $T: M \to M$ که M یک منیفلد ریمانی mـ بعدی داریم:*

$$h_{top}(M,T) \leqslant \max\{0, m \log \sup_{x\in M} ||dT|_{T_xM}||\}$$

اثبات. $d: M\times M \to \mathbb{R}$ را متریک ریمانی در نظر بگیریم. و همچنین قرار دهیم

$$a := \sup_{x\in M} ||dT|_{T_xM}||$$

در این صورت اگر $a = \infty$ حکم به طور بدیهی درست است. پس فرض کنیم $a < \infty$. بعلاوه زیرمجموعه فشرده‌ای ای M مانند K در نظر بگیریم (توجه داریم که اگر فضای کل قشرده بود، K را زیرمجموعه دلخواهی از M فرض می‌کردیم. در اینجا نیاز داریم مفاهیم جداساز و مولد، خوش‌تعریف باشند.) توابع مشتق‌پذیر $f_1, \ldots, f_r : B_3(0) \subset \mathbb{R}^m \to M$ را چنان در نظر بگیرید که

$$K \subset \bigcup_{1\leqslant i\leqslant r} f_i(B_1(0))$$

چون K فشرده است متناهی از این توابع وجود دارند.

همچنین $C > 0$ را به گونه‌ای انتخاب کنیم که برای هر $x, y \in B_2(0)$ و هر $1 \leqslant i \leqslant r$

$$d(f_i(x), f_i(y)) \leqslant Cd(x,y)$$

اگر $a \leqslant 1$ آنگاه T فاصله‌ی نقاط را هیچگاه زیاد نمی‌کند. پس هر $(1,\epsilon)$ـ مولد K یک (n,ϵ)ـ مولد K است و لذا

$$h(T) = G(T) = 0$$

پس فرض کنیم $a > 1$ در این حالت برای هر $1 \geqslant \delta > 0$ تعریف کنید:

$$E(\delta) := \{(r_1\delta, \ldots, r_m\delta) : r_i \in \mathbb{Z}, |r_i\delta| < 2\} \subset B_2(0)$$

در این صورت مشاهده می‌شود که

$$\#E(\delta) \leqslant (\frac{۵}{\delta})^m$$

حال به ازای هر $y \in B_۱(۰)$، $x = \delta\hat{r} \in E(\delta)$ را به گونه‌ای در نظر بگیریم که

$$d(\hat{r}, y/\delta) < ۱$$

پس

$$d(x, y) \leqslant \delta$$

در نتیجه به ازای هر $y \in B_۱(۰)$ عنصری از $E(\delta)$ یافت شد که فاصله‌شان کمتر از δ است. قرار دهید

$$F(\delta) = \bigcup_{۱\leqslant i\leqslant r} f_i(E(\delta))$$

این مجموعه یک $(n, a^n C\delta)$ــ مولد K است؛ چرا که به ازای هر $z \in K$، $i \leqslant r$ و $y \in B_۱(۰)$ را چنان در نظر بگیرید که

$$z = f_i(y) \in f_i(B_۱(۰))$$

و همچنین $x \in E(\delta)$ را چنان در نظر بگیرید که $d(x, y) < \delta$. پس برای هر $۰ \leqslant j \leqslant n - ۱$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} d(T^j z, T^j f_i(x)) &= d(T^j f_i(y), T^j f_i(x)) \\ &< a^n d(f_i(y), f_i(x)) \\ &\leqslant a^n C d(x, y) \\ &\leqslant a^n C\delta \end{aligned}$$

پس

$$z \in B(f_i(x); n, a^n C\delta)$$

و لذا $F(\delta) = \bigcup_{۱\leqslant i\leqslant r} f_i(E(\delta))$ یک $(n, a^n C\delta)$ــ مولد K است.

اما

$$\#F(\delta) \leqslant (\frac{۵}{\delta})^m r$$

قرار دهیم $\delta = \frac{\epsilon}{a^n C}$ در این صورت

$$G_n(T,\epsilon,K) \leqslant (\frac{۵a^nC}{\epsilon})^m r = \big[(\frac{۵C}{\epsilon})^m r\big] a^{mn}$$

پس

$$h_{top} = G(T) = \inf_K G(T,K) \leqslant m \log a$$

$\square$

نتیجه‌ی ۳-۸ *اگر $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ نگاشتی خطی باشد، آنگاه*

$$h_{top} \leqslant \max\{۰, m \log |\lambda|\}$$

که λ بزرگ‌ترین مقدار ویژه‌ی T بر حسب قدرمطلق .است

اثبات.

$$h(T) = \frac{۱}{n} h(T^n) \leqslant \frac{۱}{n} \max\{۰, m \log ||T^n||\}$$
$$= \max\{۰, m \log ||T^n||^{۱/n}\}$$
$$\to \max\{۰, m \log |\lambda|\}$$

$\square$

در جلوتر خواهیم دید که [۹]، [۷۶]

قضیه‌ی ۳-۹ **([۹])** *اگر $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ نگاشتی خطی باشد آنگاه*

$$h(T) = \sum_{|\lambda_i|>۱} \log |\lambda_i|$$

که λ_iها مقادیر ویژه‌ی T هستند.

سیستم‌های پیوسته

برای سیستم پیوسته‌ی $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ می‌توان به دو شیوه آنتروپی توپولوژیک را تعریف کرد. اولین نوع متداول تعریف، آن است که

$$h((\phi_t)_t) := h(\phi_۱)$$

با این تعریف

$$h(\phi_t) = |t| h(\phi_۱)$$

و در نتیجه سیستم به یک سیستم گسسته بدل می‌شود. بدیهی‌است که تمامی خواص سیستم‌های گسسته نیز برای آن صدق می‌کند. اما در این قسمت با چالشی مواجه خواهیم بود و آن این‌است که آنتروپی توپولوژیک دیگر یک ناوردای دینامیکی نخواهد بود! و مشکل آن‌جا است که تغییر مختصات در سیستم‌های پیوسته، تغییر زمان را نادیده می‌گیرد.

در نگارش دوم تعریف، می‌توانیم آنتروپی توپولوژیک را به گونه‌ای تعریف کنیم که بر کل شار سیستم بستگی داشته باشد [۷۲].

۲-۲-۳ آنتروپی برمبنای نظریه‌ی اندازه

سیستم‌های گسسته

آنتروپی برمبنای نظریه‌ی اندازه را در مقدمه تعریف کردیم. در اینجا به بررسی دقیق‌تر این کمیت می‌پردازیم. ابتدا نمادگذاری زیر را برای افرازهای $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_X$ در نظر گیریم:

$$H_\mu(\alpha) = \sum_{A\in\alpha} -\mu(A)\log\mu(A)$$

$$H_\mu(\beta \mid \alpha) = \sum_{\substack{A\in\alpha\\ B\in\beta}} -\mu(A\cap B)\log\frac{\mu(A\cap B)}{\mu(A)}$$

و دیدم که آنتروپی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h_\mu(T,\alpha) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\alpha_0^{n-1}) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} H_\mu(\alpha_0^{n-1})$$

$$h_\mu(T) := \sup_{\alpha\in\mathcal{P}_X} h_\mu(T,\alpha)$$

قضیه‌ی ۳-۱۰ *اگر $(X,\mathcal{A},\mu)$ یک فضای اندازه باشد و α و β افرازهایی از X باشند آنگاه آنتروپی خواص زیر را دارد:*

۱. $h_\mu(T,\alpha) \leqslant H_\mu(\alpha)$

۲. $h_\mu(T,\alpha\vee\beta) \leqslant h_\mu(T,\alpha) + h_\mu(T,\beta)$

۳. $\alpha \succeq \beta \implies h_\mu(T,\alpha) \geqslant h_\mu(T,\beta)$

۴. $h_\mu(T,\alpha) \leqslant h_\mu(T,\beta) + H_\mu(\alpha \mid \beta)$

۵. $h_\mu(T,T^{-1}\alpha) = h_\mu(T,\alpha)$ *اگر T همیومورفیسم باشد.*

۶. $\forall m\in\mathbb{N}\colon h_\mu\left(T,\alpha_0^{m-1}\right) = h_\mu(T,\alpha)$

۷. *اگر T وارون‌پذیر باشد*

$$\forall m\in\mathbb{N}\colon h_\mu\left(T,\alpha_{-m}^{m}\right) = h_\mu(T,\alpha)$$

۸. *اگر α افرازی با آنتروپی متناهی باشد.*

$$h_\mu(T,\alpha) = \lim_{n\to\infty} H_\mu(\alpha \mid \alpha_1^n) = H_\mu(\alpha \mid \alpha_0^\infty)$$

۹. $\forall k\in\mathbb{N}\colon h_\mu(T^k) = k h_\mu(T)$

۱۰. اگر سیستم وارون‌پذیر باشد $\forall k \in \mathbb{Z}\colon h_\mu(T^k) = |k| h_\mu(T)$

قضیه‌ی ۳-۱۱ (کلوموگروف‌ـ‌سینایی) *اگر $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ یک سیستم دینامیکی دارای اندازه باشد، و $\alpha_1 \prec \alpha_2 \prec \cdots \prec \alpha_n \prec \ldots$ یک دنباله از افرازها با آنتروپی متناهی باشد، که σـ جبر تولید شده توسط $\bigcup_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ تقریبا همان $\mathcal{A}$ شود، آنگاه*

$$h_\mu(T) = \lim_{n \to \infty} h_\mu(T, \alpha_n)$$

۳-۲-۳ قانون تغییراتی آنتروپی

در این قسمت به بررسی رابطه‌ی میان آنتروپی توپولوژیک و آنتروپی حاصل از اندازه‌های بورل می‌پردازیم:

قضیه‌ی ۳-۱۲ (قانون تغییراتی آنتروپی) *برای سیستم دینامیکی توپولوژیک (X, T) مجموعه‌ی تمامی اندازه‌های بورل Tـ ناوردا را با $M_T(M)$ نمایش دهیم. آنگاه داریم*

$$h_{\text{top}}(T) = \sup\{h_\nu(T) \mid \nu \in M_T(X)\}$$

قضیه‌ی ۳-۱۳ ([۹]) *اگر $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ نگاشتی خطی باشد آنگاه*

$$h(T) = \sum_{|\lambda_i| > 1} \log |\lambda_i|$$

که λ_iها مقادیر ویژه‌ی T هستند.

اثبات. ابتدا با استفاده از قضیه تجزیه‌ی اول [۲۳] $\mathbb{R}^m$ و نگاشت T را به فضاهای ویژه‌ی توسعه‌یافته‌ی [۲۴] E_j و نگاشت‌های $T_j : E_j \to E_j$ تجزیه می‌کنیم؛ یعنی

$$\mathbb{R}^m = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_s$$

[۲۳] Primary decomposition theorem
[۲۴] Generalized eigenspaces

و

$$T = T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_s$$

که

$$T_j = T|_{E_i}$$

و

$$T(E_j) \subset E_j$$

بعلاوه از قضیه‌ی تجزیه‌ی اول بدست می‌آید که تمامی مقادیرویژه‌ی نگاشت T_j با هم برابر بوده و در اینجا قدرمطلق آن‌ها را با α_j نشان می‌دهیم. پس خواهیم داشت

$$\sum_{|\lambda_i|>1} \log|\lambda_i| = \sum_{\alpha_j>1} \mathrm{dim} E_j \log \alpha_j$$

حال طبق قضیه‌ی بالا کافی است ثابت کنیم برای $\alpha_j > 1$

$$h(T_j) \geqslant \dim E_j \log \alpha_j = \log|\det T_j|$$

$\square$

۳-۳ آنتروپی و نمای لیاپانوف

در این بخش قصد داریم به ارتباط بین نماهای لیاپانوف و آنتروپی بپردازیم. البته همان‌طور که در [۳۴] نیز آمده، برای همه‌ی توابع از M به M که M یک خمینه‌ی ریمانی دلخواه باشد، این رابطه وجود ندارد. و مواردی داریم که نماهای لیاپانوف هیچ تاثیری روی آنتروپی سیستم ندارند. برای مثال کاتوک [۳۴] دیفئومورفیسمی روی کره‌ی دو بعدی در نظر می‌گیرد که آنتروپی توپولوژیک آن صفر است اما رابطه مشخصی بین نماهای لیاپانوف و آنتروپی توپولوژیک وجود ندارد.

در این بخش به برخی نتایج و قضایا اشاره می‌کنیم.

در رابطه‌ی نماهای لیاپانوف و آنتروپی سه قضیه‌ی معروف زیر را داریم:

قضیه‌ی ۳-۱۴ (نامساوی یانگ [۸۲]) *$f : M \to M$ را یک دیفئومورفیسم در $C^2(M)$ در نظر گیرید که M^2 یک سطح فشرده باشد. اگر μ یک اندازه احتمال بورل و ارگودیک باشد، آنگاه*

$$d_\mu = h_\mu(f)(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2})$$

که d_μ بعد فراکتالی (هاسدورف) فضا است و $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$ دو نمای لیاپانوف سیستم هستند.

قضیه‌ی ۳-۱۵ (نامساوی روله [۲۵] [۶۴]) *$f : M \to M$ را یک دیفئومورفیسم در $C^1(M)$ در نظر بگیریم که M یک خمینه‌ی ریمانی فشرده باشد. همچنین μ را اندازه‌ای f ـ ارگودیک در نظر بگیرید. نماهای لیاپانوف سیستم را $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ بنامیم. در این صورت*

$$h_\mu(f) \leqslant \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i$$

قضیه‌ی ۳-۱۶ (پسین [۲۶] [۸۰]) *اگر $f : M \to M$ یک دیفئومورفیسم در $C^2(M)$ باشد. M یک خمینه‌ی ریمانی فشرده باشد. و μ اندازه‌ای f ـ ارگودیک و معادل با اندازه‌ی لبگ باشد، با نام‌گزاری $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ خواهیم داشت:*

$$h_\mu(f) = \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i$$

در [۳۵] کاوان [۲۷] تعمیمی از تعاریف آنتروپی و تعمیمی بر نامساوی روله و قضیه‌ی پسین بیان می‌کند.

همان طور که در [۸۳] نیز اشاره می‌شود، برای دیفئومورفیسم‌های $f : M \to M$ که $f \in C^2(M)$ و یک اندازه‌ی احتمال بورل و f ـ ناوردا که دارای محمل فشرده‌است احکام نسبتا خوبی مانند قضایای بالا وجود دارد. در کل می‌توان این‌گونه آن‌ها را خلاصه کرد:

قضیه‌ی ۳-۱۷ ([۸۳]) *اگر f تابعی با خواص بالا باشد آنگاه*

---
[۲۷] Kawan

- [۶۴] *در کل*

$$h_\mu(f) \leqslant \int \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i$$

- [۸۰] *اگر بعلاوه μ معادل اندازه لبگ باشد*

$$h_\mu(f) = \int \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i$$

- [۳۹] *اگر $\lambda_1 > 0$ آنگاه تساوی بالا برقرار است اگر و تنها اگر μ یک اندازه SRB باشد.*

همچنین در [۱۶] کاتالان و تهذیبی اثبات می‌کنند که یک نگاشت سیمپلکتیک و جنریک در C^1 یا آناسوف است یا آنتروپی توپولوژیک آن از سوپریمم جمع نماهای لیاپانوف مثبت روی مدارهای تناوبی بیشتر است. و در [۱۵] کاتالان قضیه‌ی زیر را بیان می‌کند:

قضیه‌ی ۳-۱۸ (کاتالان [۱۵]) *اگر $f : M^{2n} \to M^{2n}$ یک دیفئومورفیسم غیر تکه‌ای هذلولوی [۲۸] و سیمپلکتیک [۲۹] و جنریک [۳۰] در $C^1(M)$ باشد آنگاه*

$$h_{top}(f) = \sup\{S(p,f) : \text{به ازای تمامی نقاط تناوبی هذلولوی}\}$$

که $S(p,f)$ مجموع نماهای لیاپانوف مثبت مدار تناوبی p است.

[۲۸] Non-Partially Hyperbolic
[۲۹] Symplectic
[۳۰] Generic

فصل ۴

تشخیص آشوب

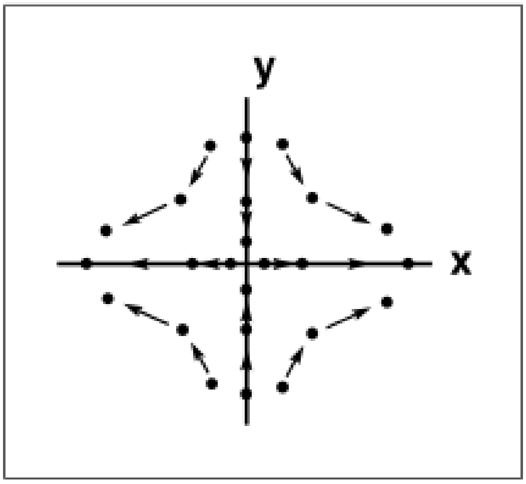
۴–۱ آشوب و خمینه‌های پایدار و ناپایدار

در اینجا قصد داریم به بررسی خمینه‌های پایدار و ناپایدار برای سیستم‌های دو بعدی و ارتباط آن‌ها با آشوب بپردازیم. بررسی خمینه‌های پایدار و ناپایدار روشی برای بررسی آشوب‌ناک بودن سیستم است.

در اینجا کتاب [۳] مرجع قرار گرفته است.

برای نقطه ثابت زینی سیستم، مجموعه نقاطی که به آن همگرا هستند را خمینه‌ی پایدار آن نقطه زینی گوییم. با مثالی این رفتار را نشان می‌دهیم:

مثال ۴–۱ *نگاشت خطی $f(x,y) = (۲x, \frac{۱}{۲}y)$ را در نظر بگیریم. برای این سیستم، مبدا نقطه ثابت*



شکل ۴-۱: نقطه زینی

زینی است زوج‌ویژه‌های این نگاشت عبارتند از

$$\lambda_1 = 2, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

مبدا نقطه ثابت ناپایدار است اما نقاطی که در راستای v_2 هستند رفتار انقباضی دارند و به مبدا همگرا خواهند بود. و باقی نقاط به علت مقدار ویژه‌ی انبساطی λ_1 از مبدا دور می‌شوند. لذا خمینه‌ی پایدار متناسب با مبدا محور yها است. و به محور xها خمینه‌ی ناپایدار گوییم (۴-۱). یک نقطه نظر دیگر این است که می‌توانیم به خمینه‌ی ناپایدار به چشم خمینه‌ی پایدار نگاشت

$$f^{-1}(x, y) = (\frac{1}{2}x, 2y)$$

تعریف ۴-۱ (خمینه‌ی پایدار و ناپایدار) *اگر $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ یک تابع هموار و یک به یک باشد و $p \in \mathbb{R}^2$ نقطه ثابت زینی یا نقطه تناوبی زینی برای تابع f باشد، آنگاه خمینه‌ی پایدار p چنین تعریف می‌شود:*

$$W^s(p) = \{v \in \mathbb{R}^{\nvDash} : \lim_{n\to\infty} |f^n(v) - f^n(p)| = 0\}$$

خمینه‌ی ناپایدار نیز چنین تعریف می‌شود:

$$W^u(p) = \{v \in \mathbb{R}^{۲} : \lim_{n\to\infty} |f^{-n}(v) - f^{-n}(p)| = ۰\}$$

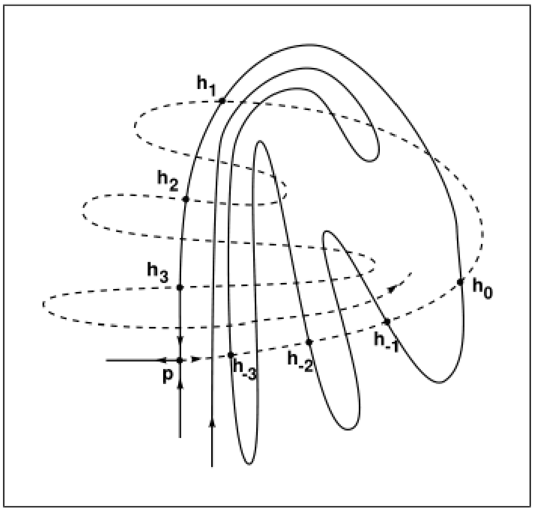
از مثال بالا قابل مشاهده است که اگر نگاشتی خطی داشته باشیم، خمینه‌های پایدار و ناپایدار مجموعه نقاطی هستند که در راستای بردارویژه‌های انقباضی و انبساطی قرار دارند. اما اگر نگاشت خطی نباشد، خمینه‌های پایدار و ناپایدار خم‌هایی هستند که بر بردارهای ویژه مماس هستند.

همچنین از تعریف قابل مشاهده است که هر نقطه با مدارش روی خمینه‌های پایدار یا ناپایدار قرار می‌گیرد.

در حالت کلی، اگر نگاشتی خطی داشته باشیم، خمینه‌های پایدار و ناپایدار همواره زیرفضاهایی خطی هستند. اما برای نگاشت‌های غیرخطی پیدا کردن فرم بسته‌ای برای خمینه‌های پایدار و ناپایدار همواره امکان پذیر نیست. و مجبوریم از روش‌های تقریبی برای پیدا کردن آن‌ها استفاده کنیم. قضیه‌ای تحت عنوان قضیه‌ی خمینه‌های پایدار بیان می‌کند که این خمینه‌ها همواره خمینه هستند و بر زیرفضاهای خطی ایجاد شده توسط مقادیرویژه‌ی انبساطی یا انقباضی، مماس هستند.
این خمینه‌ها و موقعیت نسبی‌شان از هم می‌تواند به ما در یافتن آشوب کمک کند. تقاطع خمینه‌ی پایدار و ناپایدار یک نقطه ثابت اولین‌بار توسط پوآنکاره کشف شد. در اولین نگاه او به این مسئله، فرض او این بود که خمینه‌های پایدار و ناپایدار یک نقطه ثابت نمی‌توانند با هم اشتراکی داشته باشند جز در خود آن نقطه ثابت. و کشف این موضوع، او را متوجه پیچیدگی سیستم‌های دینامیکی در اطراف آن نقطه ثابت کرد. به نقاط این تقاطع به جز آن نقطه ثابت نقاط هموکلینیک [۱] گوییم. و همان طور که اشاره کردیم، وجود یکی از این نقاط، باعث می‌شود نامتناهی از این نقاط وجود داشته باشند.

پوآنکاره شکلی مانند (۴-۲) رسم کرده که این رفتار را نشان دهد.

[۱] Homoclinic point



شکل ۴-۲: نمایی از نقطه هموکلینیک

در شکل (۴-۳) حالت‌هایی که خمینه‌های پایدار و ناپایدار نسبت به هم می‌توانند اتخاذ کنند را می‌توانید ببنید.

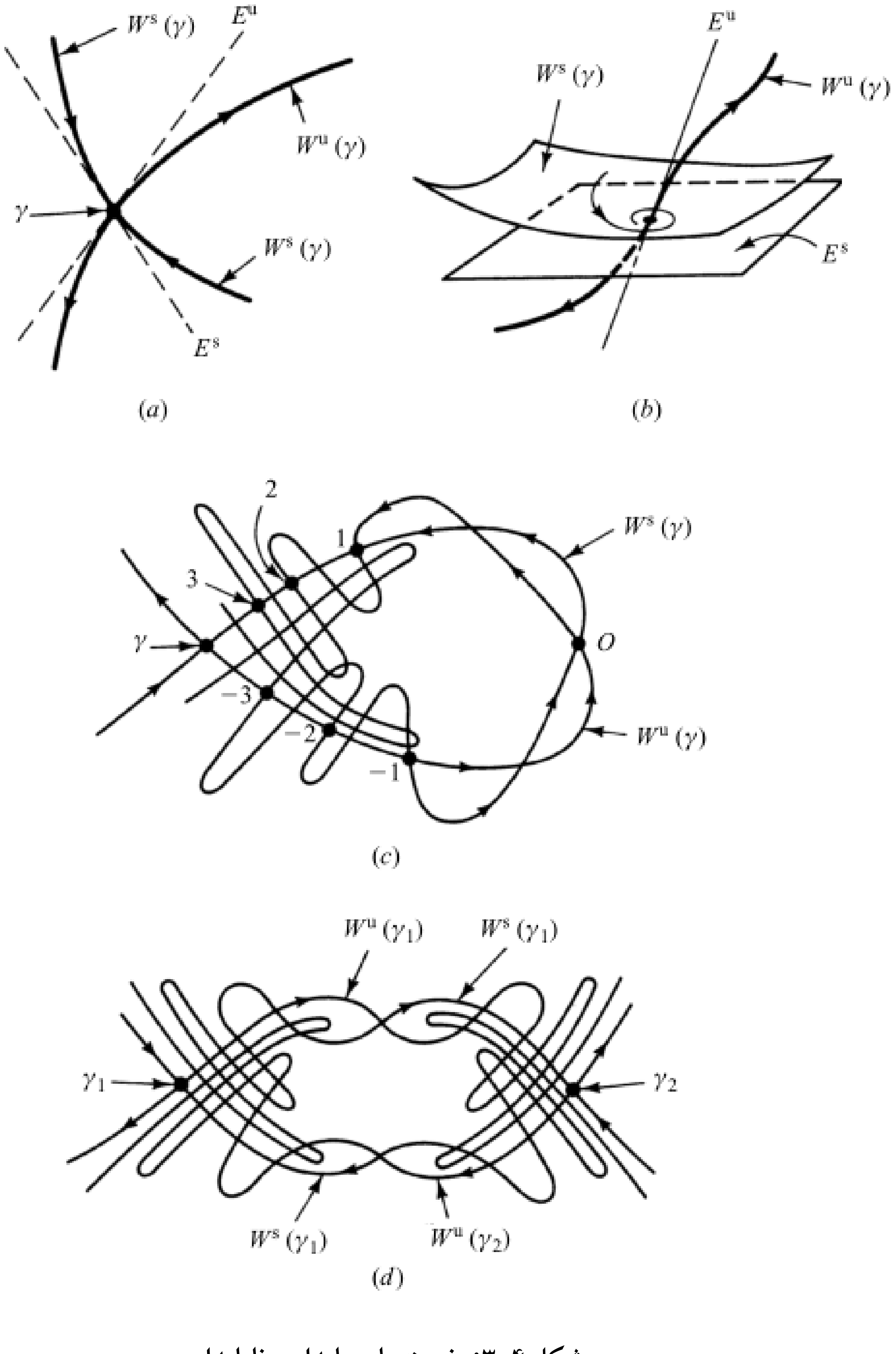
قضیه‌ی خمینه‌ی پایدار به ما نشان می‌دهد چه رابطه‌ای بین خمینه‌های پایدار و ناپایدار $f : M \to M$ که M یک خمینه‌ی دلخواه است با خمینه‌های پایدار و ناپایدار تابع $Df(p)$ که p نقطه ثابت زینی است برقرار است. همچنین این قضیه تضمین می‌کند که خمینه‌های پایدار و ناپایدار حقیقتا خمینه هستند.

نسخه‌ی کلی این قضیه را می‌توان در [۱۱] مطالعه نمود.

در اینجا قصد داریم به پیروی از [۳] این قضیه را برای $M = \mathbb{R}^۲$ بیان کنیم.

قضیه‌ی ۴-۱ (خمینه‌ی پایدار) *$f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$ را یک دیفیومورفیسم [۲] در نظر بگیرید. همچنین p را نقطه ثابت زینی سیستم در نظر بگیریم که $Df(p)$ یک مقدار ویژه‌ی انقباضی مانند s ($|s| < ۱$) و یک مقدار ویژه‌ی انبساطی مانند u ($|u| > ۱$) داشته باشد. E^s را زیرفضای تولید شده توسط v_s بردار ویژه‌ی متناظر با s و E^u را زیرفضای تولید شده توسط v_u بردار ویژه‌ی متناظر با u در نظر*

[۲] Diffeomorphism



شکل ۴-۳: خمینه‌های پایدار و ناپایدار

بگیرید. در این صورت خمینه‌ی پایدار $W^s(p)$ و خمینه‌ی ناپایدار $W^u(p)$ خم‌هایی یک بعدی شامل p هستند و $W^s(p)$ بر E^s و $W^u(p)$ بر E^u در نقطه p مماس است.

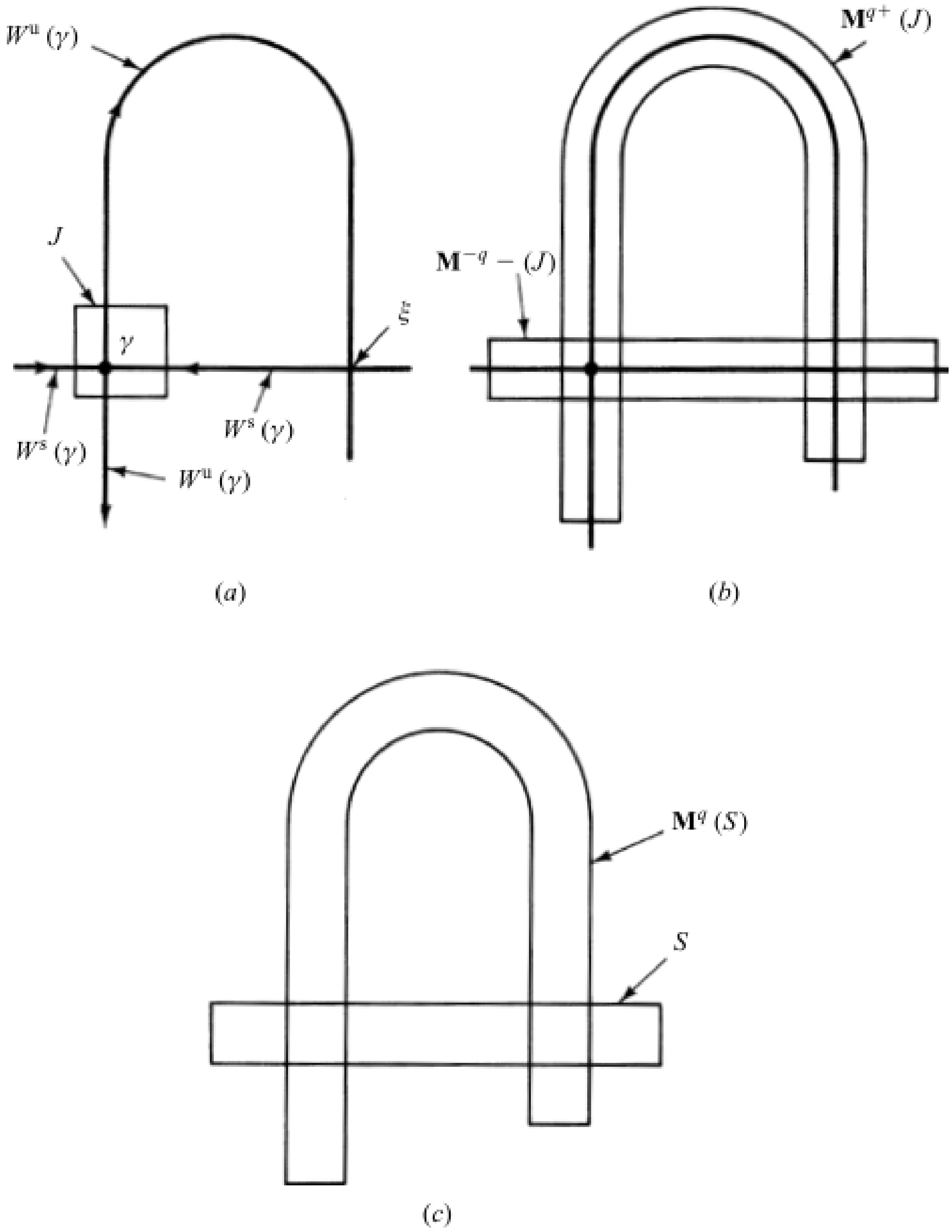
وجود نقاط هموکلینیک در سیستم موجب آشوب‌ناک بودن سیستم می‌شود. در حقیقت قضیه‌ی زیر را داریم:

قضیه‌ی ۴-۲ ([۷۰]) *فرض کنیم x یک نقطه هموکلینیک متقاطع [۳] باشد برای دیفیومورفیسم $f:M\to M$ باشد. در این صورت $m\in\mathbb{N}$ وجود دارد که f^m زیر سیستمی معادل با نگاشت شیفت روی $\Sigma=\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ است.*

این قضیه معادل بودن نعل اسب اسمیل را با نگاشت شیفت نشان می‌دهد و وجود این نعل‌اسب موجب ایجاد آشوب در سیستم می‌شود.

برای مشاهده‌ی این قضیه بیایید سیستمی دارای یک نقطه هموکلینیک مانند ξ برای نقطه ثابت γ را در نظر بگیریم (۴-۴). مستطیل کوچکی شامل γ در نظر بگیریم. این مستطیل در طول زمان با اثر دینامیک در زمانی مانند q^+ ξ درون این نوار قرار می‌گیرد. و با اثر وارون دینامیک روی مستطیل اولیه (J) در زمانی مانند $-q_-$ ξ درون نوار قرار می‌گیرد. بنامیم $S:=M^{-q_-}(J)$ در این صورت $M^{q^+}(J)=M^q(S)$ که $q=q^++q_-$. مجموعه S در طی اثر M^q به یک نعل‌اسب تصویر می‌شود و زیرمجموعه‌ی ناوردایی درون S دارد که یک مجموعه کانتور است و دینامیک روی آن معادل با دینامیک نگاشت شیفت روی $\Sigma=\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ است. و از آشوب‌ناک بودن نگاشت شیفت، آشوب‌ناک بودن سیستم اصلی نیز نتیجه می‌شود. برای مطالعه مرجع [۲۷] پیشنهاد می‌شود.

[۳] Transversal Homoclinic Point



شکل ۴-۴: نعل‌اسب اسمیل از وجود نقطه هموکلینیک

۲-۴ آشوب در اثر انشعاب

بیشتر سیستم‌های فیزیکی به پارامترهایی فیزیکی بستگی دارند. و سوال مهمی که مطرح می‌شود این است که این سیستم‌ها نسبت به پارامترها چگونه رفتار می‌کنند.
با تغییرات پیوسته پارامترها، باید انتظار چه نوع رفتاری از سیستم داشته باشیم؟ این تغییرات پارامتر، آیا می‌توانند در سیستم آشوب ایجاد کنند؟
در این قسمت قرار است نظریه‌ی انشعاب و تغییرات سیستم نسبت به پارامتر را ببرسی کنیم و ارتباط این نظریه را با نظریه آشوب بررسی می‌کنیم.
برای سیستم دینامیکی پیوسته

$$\begin{cases} f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^{n+m} \\ \dot{x}=f(x,\alpha) \end{cases} \tag{۱-۴}$$

و برای سیستم‌های گسسته

$$\begin{cases} f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^{n} \\ (x,\alpha)\rightsquigarrow f(x,\alpha) \end{cases} \tag{۲-۴}$$

را در نظر می‌گیریم. در اینجا $\alpha\in\mathbb{R}^m$ پارامتر سیستم است.

تعریف ۴-۲ (انشعاب) *با تغییرات پیوسته پارامتر، اگر سیستم غیر هم‌ارز توپولوژیک با سیستم قبل بدست آید، گوییم یک انشعاب رخ داده است. و به آن مقداری از پارامتر که توپولوژی فضای فاز را تغییر داده، مقدار بحرانی انشعاب گوییم.*

این واژه (انشعاب) نخستین بار توسط پوآنکاره برای توصیف «دو نیم شدن» نقاط تعادل یک خانواده از معادلات دیفرانسیل مانند $\dot{x}=f_\alpha(x)$ به کار رفته.

تعریف ۴-۳ (مقدار بحرانی انشعاب) *برای معادله (۴-۱) مقدار بحرانی انشعاب، $\alpha_\circ\in\mathbb{R}^m$ است که سیستم پایداری ساختاری خود را از دست می‌دهد.*

برای درک یک انشعاب، کافیست فضای تمام سیستم‌های دینامیکی را در نظر بگیریم. در این فضا تمام سیستم‌های دینامیکی که از لحاظ ساختاری پایدار نیستند را در نظر بگیریم. به این‌ها انشعاب‌های فضا گویند. شاید به نظر برسد این‌ها اهمیت چندانی ندارند چرا که همواره با کوچک‌ترین تکانی، می‌توان از آن‌ها دور شد و به یکی سیستم پایدار ساختاری رسید. اما هنگامی که یک خم در فضای تمامی سیستم‌های دینامیکی در نظر بگیریم، به علت پیوستگی، اگر این خم از فضای سیستم‌های دینامیکی غیر پایدار ساختاری عبور کند، دیگر نمی‌توان با تکانی کوچک، از این فضا پرهیز کرد. این‌جاست که مطالعه‌ی انشعاب اهمیت می‌یابد.

تعریف ۴-۴ *دو سیستم دینامیکی زیر را در نظر بگیرید:*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,\alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m \\ \\ \dot{y} = g(y,\beta), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

این دو سیستم را هم‌ارز توپولوژیک گوییم هرگاه

- *همئومورفیسمی از فضای پارامتر مانند* $p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ **وجود داشته باشد:** $\beta = p(\alpha)$
- *همئومورفیسمی وابسته به پارامتر مانند* $h_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ **وجود داشته باشد:** $y = h_\alpha(y)$ *که مدارهای سیستم اول را در پارامتر* α *به طور پوشا به مدارهای سیستم دوم در پارامتر* $\beta = p(\alpha)$ *ببرد. بعلاوه جهت زمان را حفظ کند.*

دقت کنیم که در تعریف بالا نیازی نیست h_α به طور پیوسته به α وابسته باشد.

تعریف ۴-۵ (نمودار انشعاب [۷]) *خانواده‌ی* $\{f(.,\alpha)\}_\alpha$ *را در نظر بگیریم. روی این خانواده، هم‌ارزی توپولوژیک یک رابطه هم‌ارزی تعریف می‌کند این رابطه هم‌ارزی معادلا به ما یک افراز از فضای پارامتر می‌دهد. به این افراز نمودار انشعاب گوییم.*

اگر دو سیستم وابسته به پارامتر، هم‌ارز توپولوژیک باشند، آنگاه نمودارهای انشعاب یکسانی نیز

دارند.

برای دسته‌بندی انشعاب‌های فضا، روش متداول دسته‌بندی این انشعابات به دو دسته موضعی و سراسری است. حال هر انشعاب در تناظر با یک سیستم (به آن فرم نرمال انشعاب گویند) به همراه مفروضات خاصی قرار می‌گیرد. حال هر انشعاب را در فرم نرمال آن انشعاب مطالعه می‌کنند. در ابعاد یک و دو مطالعه و دسته‌بندی انشعابات راحت‌تر از ابعاد بالاتر انجام شده است. در ابعاد بالا، پیچیدگی‌های سیستم افزایش می‌یابد. از مهمترین ابزارهای مطالعه انشعاب، خمینه‌های مرکزی [۴] هستند.

برای مطالعه نظریه انشعاب و انواع آن منابع [۳۸]، [۷۸] و [۵۲] پیشنهاد می‌شوند.
در اینجا قصد داریم به بررسی رابطه انشعاب و آشوب بپردازیم.

۴-۲-۱ انشعاب و آشوب

آبشار انشعاب‌های دو شاخه‌ای از دید فِیگِنبِن

این دیدگاه [۵] معروف‌ترین دیدگاه بین نظریات مرتبط با چگونگی پدید آمدن آشوب است.

این آبشار انشعاب‌های شاخه‌ای منجر به پدید آمدن مجموعه‌ی جاذب غیر منظم به اسم مجموعه جاذب فیگنبن می‌شود (۴-۵).

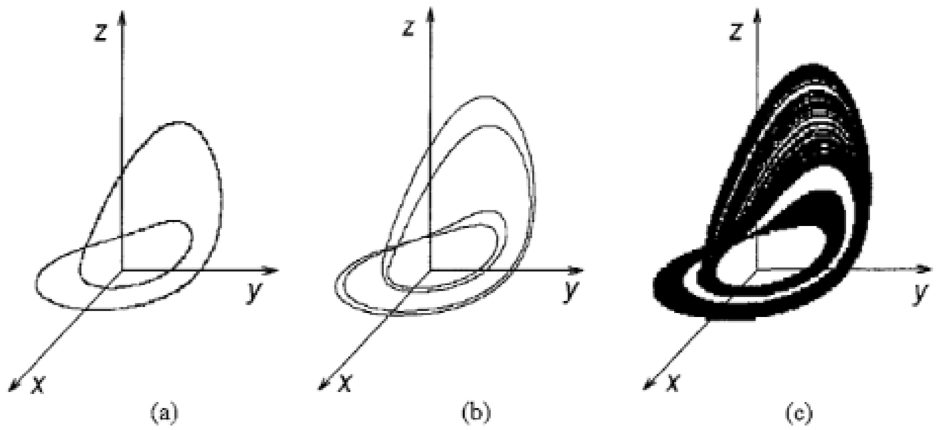
اگر $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ پارامترهایی باشند که انشعاب‌ها در آن‌ها رخ دادند، می‌توان نشان داد

$$\mu_\infty := \lim_{n\to\infty} \mu_n$$

و اولین مجموعه‌ی جاذب غیر منظم سیستم در μ_∞ رخ می‌دهد که آن مجموعه جاذب فیگنبن

[۴] Center Manifolds

[۵] Cascade of period-doubling bifurcations, Feigenbaum scenario



شکل ۴-۵: مدار تناوبی پایدار با تناوب ۲ (a)، مدار تناوبی با تناوب ۴ (b) و مجموعه جاذب فیگنبن (c) در سیستم راسلر

است. این آبشار انشعاب‌های دوشاخه‌ای منجر به پدید آمدن مجموعه جاذب فیگنبن می‌شود که آن هم منجر به پدید آمدن مجموعه‌های جاذب پیچیده‌تری می‌شود.

انشعاب ساب‌هارمونیک چرخه‌های پایدار از دید شارکوفسکی

در ادبیات نظریه‌ی انشعاب گاهی به آبشار انشعاب‌های دوشاخه‌ای فیگنبن، آبشار ساب‌هارمونیک [۶] می‌گویند. ما در اینجا به پیروی از کتاب مگنیتسکی [۷] و سیدوروف [۸] [۵۲] این اسم را برای دسته‌ی بزرگتری از آبشارها به کار می‌بریم که با آبشار انشعاب‌های دوشاخه‌ای فیگنبن آغاز می‌شوند و رفته رفته رفتار پیچیده‌تری از خود نشان می‌دهند.

سوال: پس از عبور پارامتر سیستم از μ_∞ چه اتفاقی رخ می‌دهد؟ بر اساس دیدگاه شارکوفسکی [۶۶]، از هر مرتبه‌ای چرخه حدی تناوبی پایدار در سیستم قابل مشاهده می‌شود. شارکوفسکی ترتیبی در اعداد طبیعی تعریف می‌کند که بزرگ‌ترین عدد سه است که به این معنا است که اگر چرخه حدی با تناوب سه در سیستم مشاهده شود، از تمامی مرتبه‌ها چرخه حدی در سیستم قابل مشاهده است. این آبشار انشعاب‌ها، منجر به ایجاد بی‌نهایت چرخه جاذب می‌شود که هر کدام از آبشار انشعاب‌های

[۶] Subharmonic cascade of bifurcations of stable cycles, Sharkovskii scenario

[۷] Nikolai Alexandrovich Magnitskii

[۸] Sergey Vasilevich Sidorov

دوشاخه‌ای فیگنبن روی هر چرخه حدی با یکی از تناوب‌های شارکوفسکی، پدید آمده. هنگامی که آبشار انشعاب‌های دوشاخه‌ای بر چرخه حدی تناوب سه اثر می‌کند، چرخه حدی کامل جاذب [۹] پدید می‌آید.

آبشار انشعاب‌های هموکلینیک - دیدگاه مگنیتسکی

در بسیاری از سیستم‌های دینامیکی توصیف شده توسط معادلات دیفرانسیل عادی، کار با به وجود آمدن چرخه حدی کامل جاذب تمام نمی‌شود؛ بلکه آبشار انشعاب‌ها ادامه می‌یابد تا چرخه‌های حدی هموکلینیک پایدار [۱۰] در سیستم ظاهر شود. و این چرخه‌ها نیز به یک کانتور هموکلینیک موجود در سیستم میل می‌کنند [۱۱].

از فیگنبن تا مگنیتسکی - سیری بر کارهای انجام شده

ایده‌ی اصلی در بالا ذکر شد. با تغییر پارامتر ابتدا انشعاب‌های دوشاخه‌ای فیگنبن را شاهد هستنیم بعد مداری با تناوب سه در سیستم ظاهر می‌شود که طبق قضیه شارکوفسکی مدارهای با تناوب دلخواه در سیستم دیده خواهند شد. حال چرخه‌های حدی هموکلینیک پایدار را شاهد خواهیم بود. این روندی‌ای که موجب ایجاد آشوب در سیستم‌ها می‌شود.

در این بخش سعی داریم رویه کار را بیشتر توضیح دهیم. برای این کار از مقاله فیگنبن [۲۴] شروع می‌کنیم.

فیگنبن:

در [۲۴] فیگنبن با مطالعه نگاشت لاجستیک، به عددی دست می‌یابد که در بین تمامی نگاشت‌های اکسترممِ یکتا [۱۲]، مشترک است. کار فیگنبن روی تمامی نگاشت‌های $f: I \to I$ بوده که $I = [0, 1]$ و f اکسترمم‌یکتا است. به این معنا که f تنها و تنها درون I یک اکسترمم اتخاذ می‌کند. خاصیت

[۹] Complete cyclic subharmonic singular attractor

[۱۰] Stable homoclinic cycles

[۱۱] Homoclinic cascade of bifurcations, Magnitskii scenario

[۱۲] Unimodal

مشترک تمامی این نگاشت‌ها این است که f^{-1} هر زیربازه، دو قسمت خواهد داشت.
فیگنبن با مطالعه نگاشت

$$\begin{cases} f: I \to I \\ f(x) = \mu x(1-x) \quad \mu \in [1, 4] \end{cases}$$

توانست ساختار انشعاب‌های دوشاخه‌ای را بشناسد. در انتها توانست نشان دهد صرف ضابطه نگاشت لاجستیک موجب رسیدن به ثابت به دست آمده‌اش نیست؛ بلکه این ثابت در بین تمامی دینامیک‌های یکتا_اکسترممی $x_{n+1} = f(x_n, \mu)$ نیز صادق است.
به پیروی از فیگنبن، در این بخش ما نیز نگاشت لاجستیک را در نظر می‌گیریم.

- نقاط ثابت:

$$x = 0, \qquad x^* := 1 - \frac{1}{\mu}$$

که x^* با تغییر پارامتر از ۱ به ۴ از سمت چپ به سمت راست حرکت می‌کند و بعلاوه در $\mu = 2$ به $x^* = \frac{1}{2}$ می‌رسد.
با بررسی پایداری x^* (با استفاده از مقدار مشتق تابع در این نقطه) به این نتیجه می‌رسیم که با عبور پارامتر از $\mu = \mu_1 =: 3$ نقطه ثابت x^* ناپایدار خواهد شد.

- ایجاد مدار تناوبی از مرتبه ۲:

با بررسی تابع f^2 هنگامی که پارامتر از $\mu = 3$ عبور می‌کند، خواهیم دید که علاوه بر $x = 0$ و $x^* = 1 - \frac{1}{\mu}$ دو نقطه ثابت دیگر نیز تابع f^2 اتخاذ می‌کند که آن‌ها را x_1^* و x_2^* می‌نامیم. و این نقاط دیگر نقاط ثابت f نبوده و مداری تناوبی از درجه ۲ برای آن هستند. با محاسبه‌ی مشتق تابع، ($f^{2\prime}(x_1^*, \mu) = f'(x_1^*, \mu)f'(x_2^*, \mu)$) به این نتیجه می‌رسیم که این مدار مداری پایدار است.

به عبارت دیگر با نزدیک‌شدن به $\mu = ۳$ مقدار بیشینه تابع f به $\frac{۳}{۴}$ میل می‌کند؛ و همچنین

$$\lim_{\mu \to ۳} f'(x^*, \mu) = -۱$$

$$\lim_{\mu \to ۳} (f^۲)'(x^*, \mu) = \lim_{\mu \to ۳} (f'(x^*, \mu))^۲ = ۱$$

و برای $\mu > ۳$

$$|f'(x^*, \mu)| > ۱$$

$$|(f^۲)'(x^*, \mu)| > ۱$$

و شاهد به وجود آمدن یک مدار تناوبی از مرتبه دو هستیم. به عبارت دیگر برای تابع $f^۲$ دو نقطه ثابت در کنار x^* ایجاد می‌شوند که هر دو پایدار هستند.

بعلاوه برای این نقاط داریم

$$x_۱^* = f(x_۲^*, \mu)$$

$$x_۲^* = f(x_۱^*, \mu)$$

در این مرحله، مدار هر نقطه به مجموعه $\{x_۱^*, x_۲^*\}$ میل می‌کند. به بیان دیگر

$$\forall x \in I \setminus \mathrm{Fix}_f : \omega(x) = \{x_۱^*, x_۲^*\}$$

که $\omega(x) := \{y \in I : \exists \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N} \text{ s.t. } f^{n_i}(x, \mu) \to y\}$ مجموعه نقاط حدی مدار x است.

- بررسی مدارهای از تناوب بالاتر تابع f:

  یک مدار تناوبی از تناوب n تابع f متناظر است با n نقطه ثابت تابع f^n.

  دقت داریم که اگر $x_۰ = x \in I,\ x_۱ := f(x_۰, \mu), x_n := f(x_{n-۱}, \mu)$ آنگاه

$$\forall ۰ \leqslant k \leqslant n-۱ : (f^n)'(x_k, \mu) = \prod_{i=۰}^{n-۱} f'(x_i, \mu)$$

که با در نظر گرفتن یک مدار تناوبی از مرتبه n به این معنا است که در دینامیک f^n تمامی این نقاط در یک لحظه‌ی واحد پایداری خود را از دست می‌دهند.

و بعلاوه چون همواره $f'(\frac{۱}{۲}, \mu) = ۰$ داریم

$$(f^n)'(\frac{۱}{۲}, \mu) = ۰$$

یعنی $x = \frac{۱}{۲}$ همواره نقطه اکسترمم نسبی باقی می‌ماند. و همچنین نتیجه می‌شود هر نقطه‌ای که در طی n واحد زمانی، از $\frac{۱}{۲}$ عبور کند نیز یک اکسترمم نسبی تابع f^n است.

برای تابع $f^۲$، $x_۱^* = \frac{۱}{۲}$ برای پارامتری مانند $\mu = \mu_۱^*$. در دقیقا همین پارامتر، $x_۲^* = f(x_۱^*, \mu_۱^*)$ متناظر است با اکسترمم دیگر تابع $f^۲$ و ما شاهد این هستیم که

$$(f^۲)'(x_۱^*, \mu_۱^*) = (f^۲)'(x_۲^*, \mu_۱^*) = ۰$$

در این حالت این مدار تناوبی را ابر مدار تناوبی یا ابر چرخه [۱۳] می‌نامیم.

بعلاوه فاصله‌ی این دو نقطه را $d_۱$ می‌نامیم؛ به عبارت دیگر

$$d_۱ = d(x_۱^*, x_۲^*) = d\big(\frac{۱}{۲}, f(\frac{۱}{۲}, \mu_۱^*)\big) = f(\frac{۱}{۲}, \mu_۱^*) - \frac{۱}{۲}$$

برای تابع $f^۲$ با افزایش بیشتر پارامتر مشاهده می‌شود که $(f^۲)'(x_۱^*, \mu_۱^*) = (f^۲)'(x_۲^*, \mu_۱^*) < ۰$ و در نهایت با گذر از $\mu = \mu_۱ := ۱ + \sqrt{۶}$، $x_۱^*$ و $x_۲^*$ ناپایدار خواهند شد. حال رفتار تابع $f^۲$ در $\mu = \mu_۲$ شبیه رفتار تابع f در $\mu = \mu_۱$ است. همان طور که نقطه ثابت تابع f مدار تناوبی از مرتبه ۲ ایجاد کرد، نقاط ثابت تابع $f^۲$ با عبور پارامتر از $\mu = \mu_۲$ نیز مدار تناوبی از مرتبه ۲ برای تابع $f^۲$ ایجاد می‌کنند که مداری تناوبی و پایدار از مرتبه ۴ برای تابع f است.

[۱۳] Supercycle

به بیان دیگر با عبور پارامتر سیستم از $\mu = \mu_۲$ دو نقطه ثابت برای تابع $f^۴$ ایجاد می‌شود که نقاط ثابت تابع $f^۲$ نیستند. آن‌ها را $x^*_{۲۱}$ و $x^*_{۲۲} = f^۲(x^*_{۲۱}, \mu_۲)$ بنامیم. $x^*_{۲۱}$ در پارامتری مانند $\mu^*_۲$ $x^*_{۲۱} = \frac{۱}{۲}$.

بعلاوه $x^*_{۲۲} = f^۲(x^*_{۲۱}, \mu^*_۲) = f^۲(\frac{۱}{۲}, \mu^*_۲)$

و همچنین $d_۲ := d(x^*_{۲۱}, x^*_{۲۲}) = d(\frac{۱}{۲}, x^*_{۲۲}) = f^۲(\frac{۱}{۲}, \mu^*_۲) - \frac{۱}{۲}$.

در این مرحله مشتق تابع برابر صفر است و ما یک ابر مدار تناوبی داریم. و با عبور پارامتر از $\mu = \mu^*_۲$ مشتق در نقاط ثابت منفی شده. و در پارامتری مانند $\mu = \mu_۳$ این نقاط ثابت، پایداری خود را از دست می‌دهند. و در این پارامتر سیستم دوباره تحت انشعاب دوشاخه‌ای قرار می‌گیرد و مدار تناوبی از مرتبه ۸ در سیستم مشاهده می‌شود. در اینجا هم اگر دو نقطه ثابت تابع $f^۸$ که نقاط ثابت تابع $f^۴$ نیستند را $x^*_{۳۱}$ و $x^*_{۳۲}$ در نظر بگیریم در پارامتر $\mu = \mu^*_۳$ خواهیم داشت: $x^*_{۳۱} = \frac{۱}{۲}$، $x^*_{۳۲} = f^۴(x^*_{۳۱}, \mu^*_۳) = f^۴(\frac{۱}{۲}, \mu^*_۳)$ و $d_۳ = f^۴(\frac{۱}{۲}, \mu^*_۳) - \frac{۱}{۲}$.

پس در کل با بررسی نقاط ثابت تابع $f^{۲^{n+۱}}$ به مدار تناوبی مرتبه دو تابع $f^{۲^n}$ می‌رسیم:

$$f^{۲^{n+۱}} = f^{۲^n} \circ f^{۲^n}$$

پس تابع $f^{۲^{n+۱}}$ از روی تابع $f^{۲^n}$ بدست می‌آید همین طور است برای تابع $f^{۲^{n+۲}}$ که از تابع $f^{۲^{n+۱}}$ ساخته می‌شود.

بعلاوه

$$x^*_{n۱} = \frac{۱}{۲}$$

$$x^*_{n۲} = f^{۲^{n-۱}}(\frac{۱}{۲}, \mu^*_n)$$

$$d_n = f^{۲^{n-۱}}(\frac{۱}{۲}, \mu^*_n) - \frac{۱}{۲}$$

با یک تغییر مختصات خواهیم داشت:

$$x^*_{n1} = 0$$

$$x^*_{n2} = f^{2^{n-1}}(0, \mu^*_n)$$

$$d_n = f^{2^{n-1}}(0, \mu^*_n)$$

- نرمال کردن [۱۴]:

در اینجا قصد داریم دینامیک تابع $f^n(., \mu^*_n)$ را به طور موضعی بررسی کنیم.
تابع f^2 را در نظر بگیریم. این تابع در پارامتر μ^*_2 در بازه‌ای حول $x^*_1 = \frac{1}{2}$ (مربعی به ضلع d_1) با یک تغییر مقیاس همانند تابع f در پارامتر μ^*_1 خواهد شد. این مقیاس را α_1 در نظر بگیریم. بنا بر کاری که انجام دادیم، مربعی به ضلع d_2 را با تغییر مقیاس α_1 به مربعی با ضلع d_1 بدل کردیم. در این صورت:

$$\alpha_1 = -\frac{d_1}{d_2}$$

به همین ترتیب می‌توان دنباله‌ی $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ را تشکیل داد که

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ \alpha_n := \frac{d_{n-1}}{d_n} < -1$$

بعلاوه اگر $\beta_n = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n d_{n+1} = d_1$$

و به عبارت دیگر

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n f^{2^n}(0, \mu^*_{n+1}) = d_1$$

پس به زبان ریاضی داریم:

$$\alpha_1 f^2(\frac{x}{\alpha_1}, \mu^*_2) \approx f(x, \mu^*_1)$$

Re-normalization[۱۴]

به همین ترتیت داریم:

$$
\begin{aligned}
f(x,\mu_1^*) &\approx \beta_1 f^2(\frac{x}{\beta_1},\mu_2^*)\\
&\approx \beta_2 f^4(\frac{x}{\beta_2},\mu_3^*)\\
&\approx \dots\\
&\approx \beta_n f^{2^n}(\frac{x}{\beta_n},\mu_{n+1}^*)
\end{aligned}
$$

و به عبارت بهتر چون حد جملات فوق در $x = 0$ موجود است،

$$
\begin{cases}
g_1(x) := \lim_{n\to\infty} \beta_n f^{2^n}(\frac{x}{\beta_n},\mu_{n+1}^*)\\
g_1(0) = d_1
\end{cases}
$$

به همین ترتیب تعریف کنیم:

$$
g_i(x) := \lim_{n\to\infty} \beta_n f^{2^n}(\frac{x}{\beta_n},\mu_{n+i-1}^*) \quad i = 0,1,2,\dots
$$

مشاهده می‌شود که:

$$
\begin{aligned}
g_{i-1}(x) &= \lim_{n\to\infty} \beta_n f^{2^n}(\frac{x}{\beta_n},\mu_{n+i-1}^*)\\
&= \lim_{n\to\infty} \alpha_n\beta_{n-1} f^{2^{n-1}}\Big(f^{2^{n-1}}(\frac{x}{\alpha_n\beta_{n-1}},\mu_{n+i-1}^*),\mu_{n+i-1}^*\Big)\\
&= \lim_{m\to\infty} \alpha_{m+1}\beta_m f^{2^m}\Big(f^{2^m}(\frac{x}{\alpha_{m+1}\beta_m},\mu_{m+i}^*),\mu_{m+i}^*\Big)\\
&= \lim_{m\to\infty} \alpha_{m+1} \lim_{m\to\infty} \beta_m f^{2^m}\Big(f^{2^m}(\frac{x}{\alpha_{m+1}\beta_m},\mu_{m+i}^*),\mu_{m+i}^*\Big)\\
&= \alpha \lim_{m\to\infty} \beta_m f^{2^m}\Big(\frac{1}{\beta_m}\beta_m f^{2^m}(\frac{\frac{x}{\alpha_{m+1}}}{\beta_m},\mu_{m+i}^*),\mu_{m+i}^*\Big)\\
&= \alpha g_i\big(g_i(\frac{x}{\alpha})\big) =: T(g_i(x))
\end{aligned}
$$

که $\alpha = \lim_{n\to\infty}\alpha_n$ و $T(g)$ را عملگر انشعاب دوشاخه‌ای نامیم. اگر قرار دهیم

$$
g(x) := \lim_{i\to\infty} g_i(x)
$$

آنگاه g نقطه ثابت عملگر انشعاب دوشاخه‌ای است.

$$g(x) = Tg(x) = \alpha g\big(g(\frac{x}{\alpha})\big) \qquad (۳-۴)$$

در زیر به بررسی این عملگر می‌پردازیم.

- عملگر انشعاب دوشاخه‌ای:

معادله (۴-۳) به ما این امکان را می‌دهد که α را محاسبه کنیم. برای این منظور ابتدا توجه کنیم که معادله (۴-۳) نسبت به تغییر مقیاس تابع $g(x)$ ناوردا است؛ یعنی با جایگذاری $\lambda g(\frac{x}{\lambda})$ به جای g داریم:

$$\lambda g(\frac{x}{\lambda}) = \alpha\lambda g\big(\frac{۱}{\lambda}\lambda g(\frac{x}{\alpha\lambda})\big)$$

که اگر قرار دهیم $u = \frac{x}{\lambda}$ آنگاه

$$g(u) = \alpha g\big(g(\frac{u}{\alpha})\big)$$

به بیان دیگر اگر $g(x)$ نقطه ثابت عملگر انشعاب دوشاخه‌ای باشد، آنگاه $\lambda g(\frac{x}{\lambda})$ نیز به ازای هر λ نقطه ثابت دیگری از عملگر است. پس می‌توان λ را به گونه‌ای در نظر گرفت که $g(۰) = ۱$.

حال برای اینکه فرم تقریبی تابع g را بیابیم آن را با چند جمله‌ای ها تقریب می‌زنیم:

$$g(x) = ۱ + a_۱x^۲ + a_۲x^۴ + \cdots + a_nx^{۲n} + \dots$$

در تقریب بالا از این نکته استفاده می‌کنیم که می‌خواهیم تابع g در $x = ۰$ دارای ماکزیمم درجه دوم باشد پس کافی‌است با توابع این چنینی آن را تقریب بزنیم. با این کار معادله (۴-۳) به فرم زیر در می‌آید:

$$۱ + a_۱x^۲ = \alpha(۱ + a_۱) + \frac{۲a_۱^۲}{\alpha}x^۲ + \mathcal{O}(x^۴)$$

پس داریم

$$\begin{cases} \alpha & = ۲a_۱ \\ \alpha(۱ + a_۱) & = ۱ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = -۱ - \sqrt{۳} \approx -۲/۷۳۲ \\ a_۱ = \frac{-۱-\sqrt{۳}}{۲} \approx -۱/۳۶۶ \end{cases}$$

مقدار a_1 به‌گونه‌ای انتخاب می‌شود که تابع g در صفر ماکزیمم داشته باشد. این تخمین حدود ۱۰ درصد با آزمایش‌های عددی فاصله دارد. فیگنبن با استفاده از تخمینی از $\mathcal{O}(x^8)$ تابع g را این‌گونه بدست آورد: $g(x) = 1 - 1.527630x^2 + 0.104815x^4 - 0.0267057x^6$ و در کارهای عددی او، $\alpha = -2.502907875$ بدست آمد.
در تمامی محاسبات بالا تفاوتی نمی‌کند اگر قرار دهیم $\alpha_n = \alpha$ این عدد تغییر مقیاس متغییر x را در تابع $f(x, \mu)$ نشان می‌دهد.

شارکوفسکی بر اساس قضیه‌ی شارکوفسکی، پیچیدگی ساختاری مدارهای توابع اکسترمم یکتا با آبشار انشعاب‌های فیگنبن به اتمام نمی‌رسد بلکه با آبشار انشعاب‌های حتی پیچیده‌تری، به همان ترتیبی که در قضیه آمده است، ادامه می‌یابد.

قضیه‌ی ۴-۳ (قضیه شارکوفسکی) *اگر تابع پیوسته $f : I \to I$ یک مدار تناوبی از درجه n داشته باشد، آنگاه تمام مدارهای از درجات کمتر از آن را (طبق ترتیب شارکوفسکی) دارد.*

نتیجه‌ی ۴-۴ *اگر تابع پیوسته $f : I \to I$ مداری از درجه ۳ داشته باشد آنگاه مداری از تمام مراتب دارد.*

در این قضیه حرفی از پایداری مدارهای تناوبی زده نمی‌شود؛ اما در مثال لاجستیک دیدم که تابع f چرخه حدی پایدار یکتایی از مرتبه 2^n به همراه چرخه‌های حدی غیرپایداری از مراتب 2^i به ازای $i = 0, 1, \dots, n-1$ هنگامی که $\mu_n < \mu < \mu_{n+1}$. بعلاوه در هنگامی که $\mu = \mu_\infty$ نگاشت $f(x, \mu)$ یک مدار غیرتناوبی نیمه پایدار [15] دارد که همان مجموعه جاذب فیگنبن است. در هر همسایگی هر نقطه این مجموعه جاذب، نقاطی از مدارهای غیرپایدار از همه مراتب $2^n; n \in \mathbb{N}$ وجود دارند. بنابراین آبشار انشعاب‌های دو شاخه‌ای فیگنبن، با ترتیب شارکوفسکی رخ می‌دهند و نقطه‌ی شروعی برای رخ‌داد آبشار انشعاب‌های ساب‌هارمونیک شارکوفسکی است.
مگنیتسکی این تئوری را برای سیستم‌های دینامیکی دو بعدی (معادلات دیفرانسیل عادی) توسعه داده است:

[15] semistable

قضیه‌ی ۴-۵ ([۵۲]) *در معادلات دیفرانسیل عادی دو بعدی که به زمان وابستگی مستقیم ندارند* [۱۶] *اولین مرحله چگونگی آشوب‌ناک شدن، پدید آمدن آبشار انشعاب‌های دو شاخه‌ای فیگنبن است و بعد از آن آبشار انشعاب‌های ساب‌هارمونیک شارکوفسکی.*

۴-۳ آشوب در اثر نوسانات ناگهانی

یکی از سناریوهای ایجاد آشوب در سیستم، نوسانات ناگهانی [۱۷] است. این‌گونه که به نظر می‌رسد، این پدیده اولین بار در سیستم لورنز مشاهده شده است. [۱۸] این پدیده تعریف دقیق و مشخصی ندارد اما می‌توان آن را این‌گونه توصیف کرد: در اثر تغییر پارامتر سیستم، چرخه حدی پایدار سیستم از بین می‌رود اما یادی از خود به جا می‌گذارد! در نتیجه مدارهای سیستم، با اینکه چرخه حدی از بین رفته‌است، مانند قبل اطراف چرخه‌ی حدی پایدار از میان‌رفته، سیر می‌کنند، اما هر از گاهی نوسانات آشوب‌ناکی از خودش نشان می‌دهند.

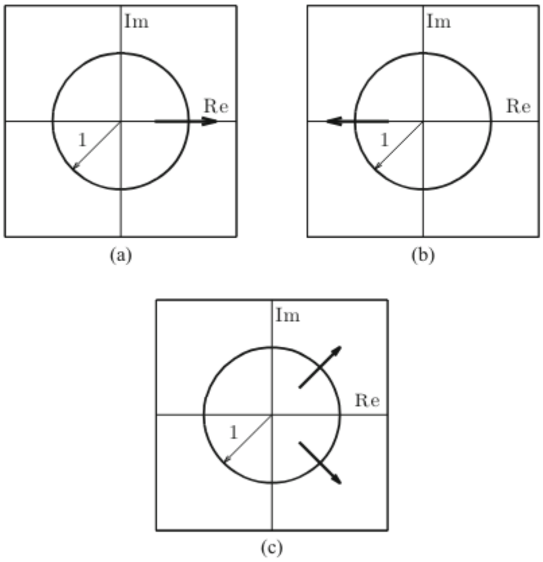
در کتب کلاسیک نوسانات ناگهانی به سه دسته تقسیم می‌شوند: نوسانات نوع I ، نوسانات نوع II و نوسانات نوع III .

این نوسانات را می‌توان به این سه طریق به یاد سپرد:

- **نوع I** : این نوسانات هنگامی ظاهر می‌شوند که یک ضریب فلوکه [۱۹] دایره واحد را در ۱+ ترک کند و سپس جواب تناوبی طی انشعاب زینی‌ـ نقطه‌ای پایداری خود را از دست می‌دهد.
- **نوع II** : نوع دوم نوسانات هنگامی رخ می‌دهد که طی انشعاب هاپف یا انشعاب نیمارک‌ـ سکر [۲۰] رخ می‌دهد و دو ضریب فلوکه مختلط مزدوج سیستم، از دایره واحد دور می‌شوند.
- **نوع III** : نوع سوم نوسانات هنگامی رخ می‌دهد که یک ضریب فلوکه، دایره‌ی واحد را از ۱− ترک کند. در این حالت انشعاب دوشاخه‌ای رخ می دهد. (۴-۶)

---

[۱۶] Non-autonomous
[۱۷] Intermittency
[۱۸] هر چند به بیان مگنیتسکی، به علت خطای محاسباتی بوده و در لورنز این پدیده وجود ندارد.
[۱۹] Floquet Exponent
[۲۰] Neimark-Sacker



شکل ۴-۶: ضرایب فلوکه

برای سیستم‌های دینامیکی پیوسته (معادلات دیفرانسیل) مطالعه‌ی هر سه نوع این نوسانات، از طریق نگاشت پوآنکاره آن‌ها امکان‌پذیر است. پس کافیست صرفا دینامیک گسسته را بررسی کنیم.
ابتدا اجازه دهید با یک مثال این پدیده را نشان دهیم بعد به بررسی انواع نوسانات ناگهانی بپردازیم:

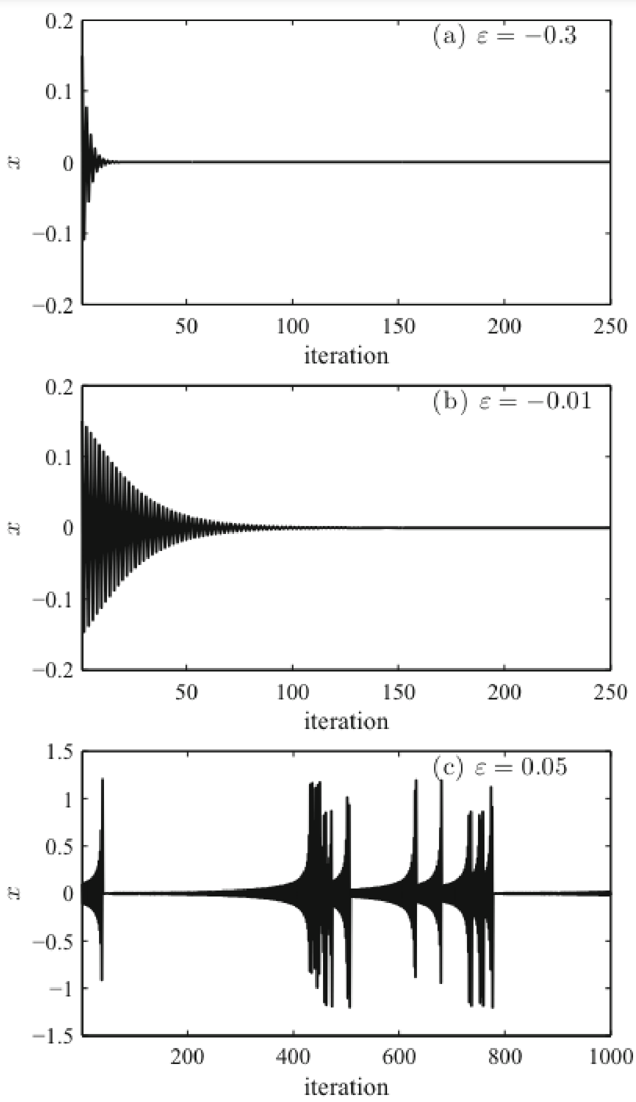
مثال ۴-۲ *تابع زیر را در نظر بگیرید.*

$$F(x) = -(۱+\epsilon)x - ax^۳ + bx^۶ \sin(x)$$

که ϵ پارامتر کنترل است. رفتار مدارهای سیستم را برای پارامترهای مختلف در شکل (۴-۷) می‌توانید مشاهده کنید.

برای این نگاشت، مبدا همواره نقطه ثابت است. برای هنگامی که $-۲ < \epsilon < ۰$ مبدا نقطه ثابت پایدار است و هنگامی که پارامتر کنترل از صفر عبور کند، مبدا پایداری خود را از دست می‌دهد. در شکل (۴-۷) نیز قابل مشاهده است که اگر پارامتر کنترل مثبت شود، نوسانات ناگهانی‌ای در سیستم رخ می‌دهد و در هر رخ‌داد، دوباره سیستم به حالت پایدار میل می‌کند.

برای اینکه در یک سیستم نوسانات ناگهانی شاهد باشیم، حتما باید در نظر گیریم که بازسکون‌ها



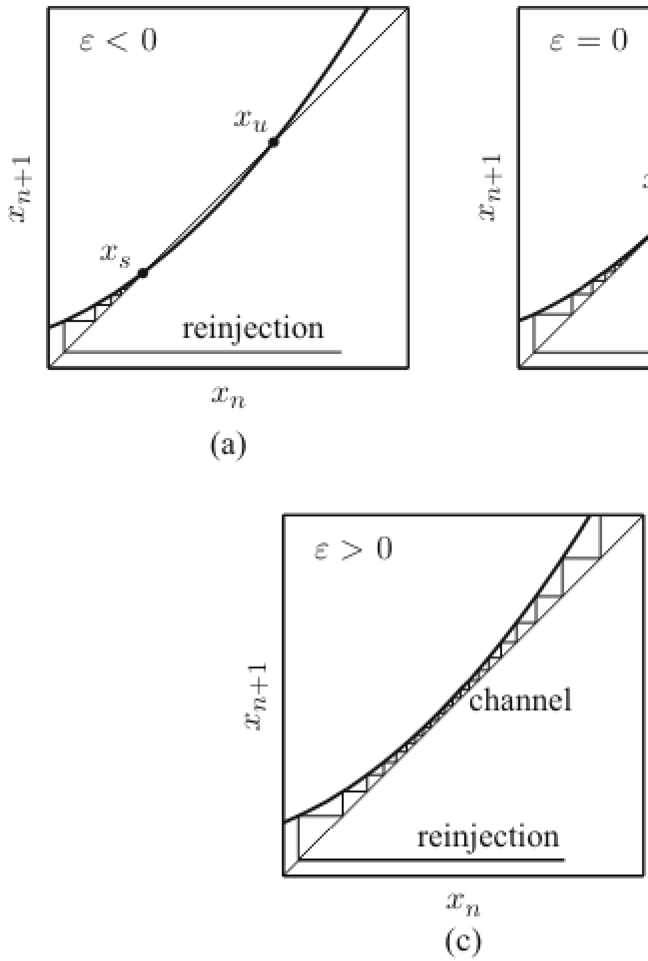
شکل ۴-۷: ایجاد نوسانات ناگهانی

[21] نباید با طول بازه‌ی یکسانی رخ‌دهند. این بازسکون‌ها همان یاد و خاطره‌ای هستند که سیستم از هنگامی که پایدار بود، در ذهن دارد و سیستم را به طور موضعی به همان هنگام بر می‌گردانند. بعلاوه در کنار این بازسکون‌ها عامل دیگری نیز باید حاضر باشد: یک تابع موضعی که سیستم را به حالت سکون خود در آورد! مثلا برای مثال بالا، تابع

$$-(۱+\epsilon)x - ax^۳$$

نگاشت موضعی مورد بحث است.

[21] reinjection or relaminarization



شکل ۴-۸: نوع I نوسانات ناگهانی

می‌توان از یک تابع احتمال برای بیان احتمال اینکه مدارها به حالت سکون قبلی خود، ،که نزدیک به جاذبِ محذوف است بازگردند استفاده کرد به این تابع چگالی احتمال، تابع چگالی احتمال بازسکون [۲۲] گوییم. این تابع، به قسمت غیرخطی دینامیک وابسته است و می‌تواند رفتارهای متفاوتی را نشان دهد.

۴-۳-۱ نوع I

در این نوع نوسان هنگامی که پارامتر سیستم از یک حدی عبود کند (اسم این حد را پارامتر بحرانی می‌گذاریم) نقطه ثابت نگاشت پوآنکاری از بین می‌رود. در دو نوع دیگر، نقطه ثابت پایداری خود را

[۲۲] Reinjection Probability Density (RPD)

از دست می‌دهد اما محو نمی‌شود!

برای مطالعه‌ی بیشتر این نوع نوسان سیستم

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \epsilon) \tag{۴-۴}$$

را در نظر بگیرید. در این سیستم پارامتر کنترل ϵ عددی حقیقی است. هنگامی که این پارامتر به حد بحرانی برسد، یک ضریب فلوکه مرتبط به مدار تناوبی (۴-۴)، از عدد ۱ از دایره‌ی واحد خارج می‌شود. باید توجه کنیم که این ضریب حقیقی مقدار است. پس انشعابی از هم‌بعد [۲۳] یک داریم. که در این حالت انشعاب زینی_ گره‌ای است. در این حالت، خمینه‌ی مرکزی تک بعدی متناظر با این ضریب فلوکه، اهمیت می‌یابد. با تقلیل سیستم (۴-۴) روی این خمینه‌ی تک‌بعدی، [۵۶] سیستمی تک بعدی خواهیم داشت. این سیستم را به شکل $x_{n+1} = F(x_n, \epsilon)$ نشان می‌دهیم. برای نوع I نوسانات ناگهانی، می‌توان نگاشت موضعی را به فرم زیر نوشت:

$$x_{n+1} = \epsilon + x_n + a x_n^2 \tag{۵-۴}$$

تعداد نقاط ثابت و نوع پایداری آن‌ها، به ϵ وابسته است. هنگامی که $\epsilon < 0$ این نگاشت دو نقطه ثابت خواهد داشت؛ یکی پایدار و دیگری ناپایدار. هنگامی که $\epsilon = 0$ دو نقطه ثابت قبل، در یک نقطه به هم برخورد می‌کنند و این نقطه، تنها نقطه ثابت سیستم خواهد بود. و در هنگامی که $\epsilon > 0$ سیستم دیگر نقطه ثابتی نخواهد داشت. برای ϵهای کوچک، یک نوار باریک ایجاد خواهد شد که باعث می‌شود نقاط خیلی خیلی به نقطه ثابت محذوف نزدیک شوند اما چون نقطه ثابتی وجود ندارد، از آن عبور کنند و دور شوند. به این محدوده‌ای از نقطه ثابت محذوف که مدارها مدت طولانی‌ای در آن سیر می‌کنند، محدوده شبه‌سکون [۲۴] می‌گویند. در محدوده شبه‌سکون مدارها بسیار به نقطه ثابت محذوف نزدیک هستند و زمان نسبتا طولانی‌ای نیز در این محدوده سپری می‌کنند و البته هیچ‌گاه هم به آن نقطه ثابت محذوف نمی‌رسند. شکل (۴-۸) به خوبی این رفتار را نشان می‌دهد.

برای اینکه نوسان ناگهانی داشته باشیم، دو چیز لازم است، یکی نگاشت موضعی‌ای است که انشعاب مماسی معکوس در آن رخ دهد همانند شکل (۴-۸)، و دیگری مکانیزمی غیرخطی که مسئول

---
[۲۳] Codimension
[۲۴] Laminar Zone

بازسکون سیستم باشد. در این نوع نوسانات، خارج ناحیه‌ی شبه‌سکون، مدارها رفتار آشوبناک دارند، اما مکانیزم غیرخطی یادشده، آن‌ها را دوباره به ناحیه‌ی شبه‌سکون نزدیک می‌کند. تابع چگالی احتمال بازسکون، که در اینجا آن‌را با $\phi(x)$ نشان می‌دهیم، هسته [۲۵] رفتار آماری نوسانات ناگهانی را نشان می‌دهد. $\phi(x)$ احتمال اینکه مدارها در نقطه‌ی x بازسکون یابند را نشان می‌دهد. این مقدار هرچه بیشتر باشه، تعداد مدارهایی که به نقطه‌ی x می‌رسند و بازسکون می‌یابند نیز بیشتر خواهد بود.

در بعضی بررسی‌ها، فرآیند بازسکون را به این صورت در نظر می‌گیرند که وقتی x از یک حدی (که آن را حد بازسکون نامگذاری کردیم) عبور می‌کند، فرآیند بازسکون آغاز می‌شود؛ یعنی $\phi(x) = 0$ for $x < \hat{x}$ که $\hat{x}$ همان حد بازسکون است. در ادبیات نوسانات ناگهانی این حد را حد پایینی بازسکون [۲۶] گویند.

در ادبیات کلاسیک نوسانات ناگهانی، تابع چگالی بازسکون را تابعی ثابت می‌گرفتند. این تابع به هر نقطه‌ای که درون ناحیه شبه‌سکون باشد، احتمال بازسکون یکسانی را نظیر می‌کند. در این حالت گوییم بازسکون یکنواخت داریم: $x, \hat{x} \quad \phi(x) = k$.

شکل (۴-۹) نمونه‌ی مناسبی از این نوع رفتار است.

آشوب و نوسانات ناگهانی نوع I

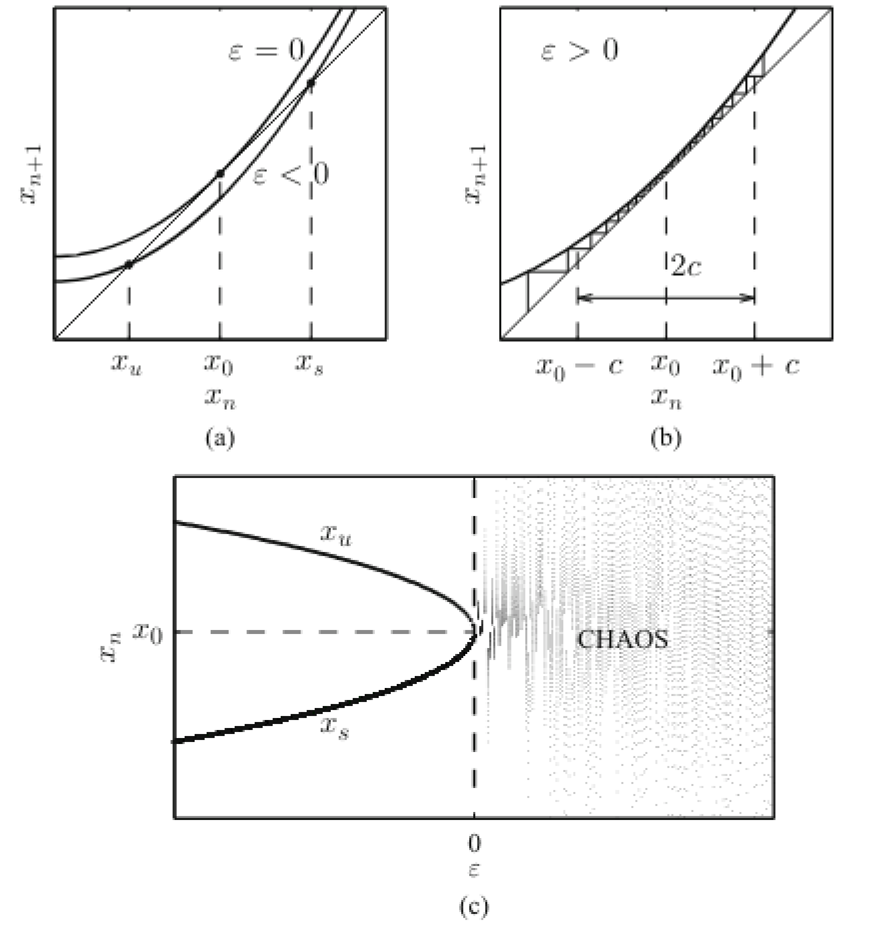
برای مشاهده‌ی ارتباط بین نوسانات ناگهانی و آشوب، سعی می‌کنیم نشان دهیم نمای لیاپانوف سیستم در این حالت، مثبت خواهد شد. ،برای این منظور قصد داریم با محاسبه‌ی مدت زمانی که مدارها به طور میانگین در نوار شبه‌سکون به‌سر می‌برند، از رابطه‌ی (۳-۶) استفاده کنیم.

توجه می‌کنیم که نگاشت پوآنکاره (۴-۵) را برای $1 >> \epsilon > 0$ می‌توانیم به فرم

$$\frac{dx}{dl} = \epsilon + ax^2$$

[۲۵] Kernel

[۲۶] Lower Boundary Reinjection (LBR)



شکل ۴-۹: نوسانات نوع I

تقریب بزنیم که در آن $\frac{dx}{dl} \simeq \frac{x_{n+۱}-x_n}{(n+۱)-n}$.

برای محاسبه‌ی $l = l(x)$ داریم:

$$\int_x^c \frac{dx}{\epsilon + ax^۲} = \int_۰^۱ dl$$
$$\Rightarrow l(x,c) = \frac{۱}{\sqrt{a\epsilon}}\Big[\arctan\big(\frac{c}{\sqrt{\epsilon/a}}\big) - \arctan\big(\frac{x}{\sqrt{\epsilon/a}}\big)\Big]$$

که c کران بالای ناحیه‌ی شبه‌سکون است.

همچنین وارون این تابع را نیز می‌توانیم محاسبه کنیم که برابر خواهد بود با:

$$X(l,c) = \sqrt{\frac{\epsilon}{a}}\tan\Big[\tan^{-۱}\big(\sqrt{\frac{a}{\epsilon}}c\big) - \sqrt{a\epsilon}l\Big]$$

برای ادامه کار باید تابع چگالی طول سکون [۲۷] را معرفی کنیم. این تابع را با $\psi(l,c)$ نمایش می‌دهیم و به ما نشان می‌دهد احتمال اینکه ناحیه‌ی شبه‌سکونی با طولی در بازه‌ی $[l, l+dl]$ داشته باشیم چه قدر است. این تابع توسط فرمول زیر داده می‌شود:

$$\psi(l,c) = \phi[X(l,c)]\Big|\frac{dX(l,c)}{dl}\Big|$$

حال که این تابع را معرفی کردیم می‌توانیم میزان متوسط طول ناحیه شبه سکون را معرفی کنیم:

$$\bar{l} = \int_۰^{l_m} \psi(l,c) l(x,c)$$

در اینجا l_m بیشترین طول ناحیه‌ی شبه‌سکون است که همان $l(-c,c)$ است. برای نوسانات ناگهانی نوع I تابع $\phi(x)$ را تابعی ثابت اختیار کردیم. پس

$$\bar{l} = \int_{-c}^{c} \phi(x) l(x,c) dx = \frac{۱}{\sqrt{a\epsilon}}\arctan\big(c\sqrt{\frac{a}{\epsilon}}\big)$$

اگر $c\sqrt{\frac{a}{\epsilon}} >> ۱$ آنگاه

$$\bar{l} \propto \epsilon^{-\frac{۱}{۲}}$$

[۲۷] Probability density of the laminar lengths

که طبق (۳-۶) خواهیم داشت [۲۰] [۶۲] [۳۰]

$$\sigma_1 \propto \frac{1}{l} \propto \epsilon^{\frac{1}{2}} \qquad (۴-۶)$$

۴-۳-۲ نوع II

نوع دوم نوسانات ناگهانی برای نگاشت‌های از بعد حداقل دو ممکن است رخ دهد؛ چرا که لازمه‌ی آن عبور یک ضریب فلوکه و مزدوج مختلط آن از دایره‌ی واحد است. در این هنگام بقیه‌ی ضرایب فلوکه، کمتر از یک هستند. به این زوج می‌توان یک خمینه نسبت داد و این نوع رفتار را برای نگاشت متناسب با این خمینه بررسی کرد.

در این حالت، برای نقطه ثابت سیستم، انشعاب هاپف رخ می‌دهد.

آن دو ضریب فلوکه را می‌توان به صورت $\nu = (1+\epsilon)e^{i\theta}$ نوشت.

به طور موضعی دینامیک را می‌توان به صورت

$$r_{n+1} = (1+\epsilon)r_n + ar_n^3 \qquad (۴-۷)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + b + qr_n^2 \qquad (۴-۸)$$

نوشت که a, b, q ضرائب ثابت هستند و ϵ پارامتر کنترل. در این حالت، هنگامی که $\epsilon > 0$ نوسان ناگهانی ممکن است رخ دهد.

مثال ۴-۳ *نگاشت زیر را در نظر بگیرید:*

$$y = G(x) = \begin{cases} G_1(x) := (1+\epsilon)x + ax^3 & 0 \leqslant x < x_r \\ G_2(x) := \frac{(x-x_r)}{1-x_r} & x_r \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

که $G_1(x_r) = 1$. این نگاشت در $x_0 = 0$ یک نقطه ثابت دارد که به ازای $\epsilon > 0$ این نقطه، نقطه‌ای ناپایدار است. نگاشت $G_2(x)$ فرآیند بازسکون را ممکن می‌سازد. برای $\epsilon > 0$ نوع دوم نوسانات ناگهانی را شاهد خواهیم بود.

مانند توضیحاتی که در قسمت (؟؟) دادیم، می‌توان معادله‌ی (۴-۷) را برای ϵهای کوچک و مثبت به فرم زیر نوشت:

$$\frac{dr}{dl} = \epsilon r + ar^{3} \tag{۴-۹}$$

با این کار خواهیم داشت:

$$l(x,c) = \int_{x}^{c} \frac{dr}{\epsilon r + ar^{3}}$$

که c کران بالای بازه‌ی شبه‌سکون است. در حقیقت بازه‌ی شبه‌سکون برابر است با $[0,c]$. پس خواهیم داشت:

$$l(x,c) = \frac{1}{2\epsilon} \ln\left(\frac{a+\epsilon/x^{2}}{a+\epsilon/c^{2}}\right)$$

بعلاوه، تابع چگالی طول ناحیه‌ی شبه‌سکون برابر است با:

$$\psi(l) = \left[\frac{\epsilon}{(\epsilon/c^{2}+a)e^{2\epsilon l}-a}\right]^{3/2}\left(\frac{\epsilon}{c^{2}}+a\right)\frac{e^{2\epsilon l}}{c}$$

که در نتیجه‌ی آن

$$\bar{l} = \int_{0}^{c} \phi(x) l(x) dx = \frac{1}{c\sqrt{a\epsilon}} \arctan\left(c\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\epsilon}}\right)$$

پس

$$\bar{l} \propto \epsilon^{-\frac{1}{2}}$$

و در نتیجه

$$\sigma_{1} \propto \epsilon^{\frac{1}{2}}$$

۴-۳-۳ نوع III

لازمه‌ی مشاهده‌ی این نوع از نوسان، انشعاب دوشاخه‌ای است که با ایجاد مدار ۲ ـ تناوبی غیرپایدار، پایداری مدار ۱ ـ تناوبی از بین می‌رود. این نوع نوسانات، با افزایش تدریجی‌شان در مدت شبه‌بازسکون

شناخته می‌شوند.

برای این نوع نوسانات، ضریب فلوکه دایره‌ی واحد را در -1 ترک می‌کند و در همان لحظه اندازه تمامی ضرایب فلوکه دیگر، کمتر از یک است. بنابراین اطلاعاتی که نیاز داریم تا این نوع نوسانات را بشناسیم، در خمینه‌ی مرکزی متناظر با ضریب فلوکه ناپایدار قرار دارد. پس نگاشتی متناظر با این خمینه وجود دارد که آن را $F(x,\epsilon)$ نامیم و این نوع نوسانات را از طریق این نگاشت می‌توان مطالعه کرد. نگاشت موضعی را برای این نوع نوسانات می‌توان به شرح زیر نوشت:

$$x_{n+1} = F(x_n) = -(1+\epsilon)x_n + a_2 x_n^2 + a_3 x_n^3 + \dots \qquad (۴-۱۰)$$

در اینجا ϵ پارامتر کنترل است. برای این نگاشت $x_0 = 0$ یک نقطه ثابت است. این نقطه ثابت هنگامی که $\epsilon < 0$ پایدار است و هنگامی که $\epsilon > 0$ ناپایدار. برای مطالعه‌ی این نوع از نوسان، و به طور خاص مدار ۲ـ تناوبی آن، باید به F^2 نگاه کنیم:

$$\begin{aligned} x_{n+2} = F^2(x_n) =& -(1+\epsilon)\Big[-(1+\epsilon)x_n + a_1 x_n^2 + a_2 x_n^3\Big] \\ &+ a_2\Big[-(1+\epsilon)x_n + a_1 x_n^2 + a_2 x_n^3\Big] \\ &+ a_3\Big[-(1+\epsilon)x_n + a_1 x_n^2 + a_2 x_n^3\Big] \\ &+ \dots \end{aligned}$$

قصد داریم نگاشت موضعی را حول $x_0 = 0$ بررسی کنیم؛ پس $|x|$ و $\epsilon > 0$ را کوچک در نظر می‌گیریم. پس طبیعی است که از توان‌های بزرگ x و ϵ در عبارت بالا، صرف نظر کنیم. با صرف نظر از توان‌های بزرگتر از ۲ برای ϵ، توان‌های بزرگ‌تر از ۴ برای x و توان‌های بزرگ‌تر از ۲ x در عبارات ϵx خواهیم داشت:

$$x_{n+2} = F^2(x_n) = (1+2\epsilon)x_n + a x_n^3 + \dots \qquad (۴-۱۱)$$

که $a = -2(a_3 + a_2^2)$.

هنگامی که $\epsilon > 0$ می‌توان دو سناریو را متصور شد:

- $a < 0$: در این حالت علاوه بر $x_0 = 0$ سیستم دو نقطه ثابت دیگر نیز دارد: $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2\epsilon}{|a|}}$. هنگامی که x_0 پایداری خود را از دست می‌دهد، این دو نقطه همچنان پایدار باقی می‌مانند و مدارها را به خود جذب می‌کنند. این رفتار نوسانات ناگهانی‌ای را شامل نمی‌شود.

- $a > 0$: در این حالت، تنها نقطه ثابت سیستم $x_0 = 0$ است که هنگام عبور ϵ از صفر، پایداری خود را از دست می‌دهد. در این حالت اگر فرآیند بازسکون رخ دهد، شاهد نوسان نوع III خواهیم بود. باید توجه داشته باشیم که لازمه این نوسان این است که $a_3 < -a_2^2$.

آشوب و نوسانات ناگهانی نوع III

به مانند قبل معادله‌ی (۴-۱۱) را برای مقادیر کوچک و مثبت ϵ می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\frac{dx}{dl} = 2\epsilon x + ax^3$$

پس حال خواهیم داشت:

$$l(x,c) = \int_0^1 dl = \int_x^c \frac{d\tau}{\tau(2\epsilon + a\tau^2)} = \frac{1}{2\epsilon}\ln\left(\frac{a+\epsilon/x^2}{a+\epsilon/c^2}\right)$$

که در اینجا $l(x,c)$ طول ناحیه‌ی شبه‌سکون تابع $F^2(x)$ است و به وضوح مدت زمان لازم برای تابع F که بتواند از ناحیه‌ی شبه‌سکون خارج شود، (طول ناحیه‌ی شبه‌سکون) برابر است با $2l(x,c)$.
و بعلاوه داریم:

$$X(l,c) = \left[\frac{\epsilon}{(a+\epsilon/c^2)e^{2\epsilon l} - a}\right]^{\frac{1}{2}}$$

از اینجا داریم:

$$\psi(l) = \left[\frac{\epsilon}{(\epsilon/c^2 + a)e^{2\epsilon l} - a}\right]^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\epsilon}{c^2} + a\right)\frac{e^{2\epsilon l}}{2c}$$

حال می‌توانیم میانگین زمان لازم برای عبور از ناحیه‌ی شبه‌سکون را بدست آوریم:

$$\begin{aligned}\bar{l} &= \frac{۱}{۲c\epsilon}\int_{۰}^{c} \ln\frac{a+\epsilon/x^{۲}}{a+\epsilon/c^{۲}}dx \\ &= \frac{۱}{c\sqrt{a\epsilon}}\arctan\left(c\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\epsilon}}\right) \\ &\propto \epsilon^{-\frac{۱}{۲}}\end{aligned}$$

تناظر آخر در حالی درست است که $c\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\epsilon}} \gg ۱$. و در نتیجه

$$\sigma_{۱} \propto \epsilon^{\frac{۱}{۲}}$$

به جز این سه نوع نوسان ناگهانی کلاسیک، انواع دیگری از نوسان نیز وجود دارند که به آن‌ها نیز می‌پردازیم.

۴-۳-۴ نوع V

این نوع از نوسانات ناگهانی، هنگامی رخ می‌دهند که نگاشتی غیرمشتق‌پذیر حتی در موارد غیرپیوسته داشته باشیم. به طور دقیق‌تر هنگامی رخ می‌دهند که نقطه ثابت پایدار سیستم غیرمشتق‌پذیر یا غیرپیوسته، در جایگاه نقطه‌ی نامشتق‌پذیری، یا ناپیوستگی قرار گیرد.
نوع I و نوع III نوسانات ناگهانی، تنها برای نگاشت‌های کاملا مشتق‌پذیر رخ می‌دهند و در حالتی رخ می‌دهند که ضریب فلوکه از ۱+ یا ۱− عبور می‌کند. اما در حالتی که تابع پیوسته یا مشتق‌پذیر نباشد، حالت دیگری نیز ممکن است رخ دهد. هنگامی که با تغییر پارامتر یکی از نقاط غیرپیوسته یا غیرمشتق‌پذیر، با نقطه ثابت پایدار سیستم تلاقی کند، ناحیه‌ی شبه‌سکون را شاهد هستیم (۴−۱۰).

۵-۳-۴ نوع X

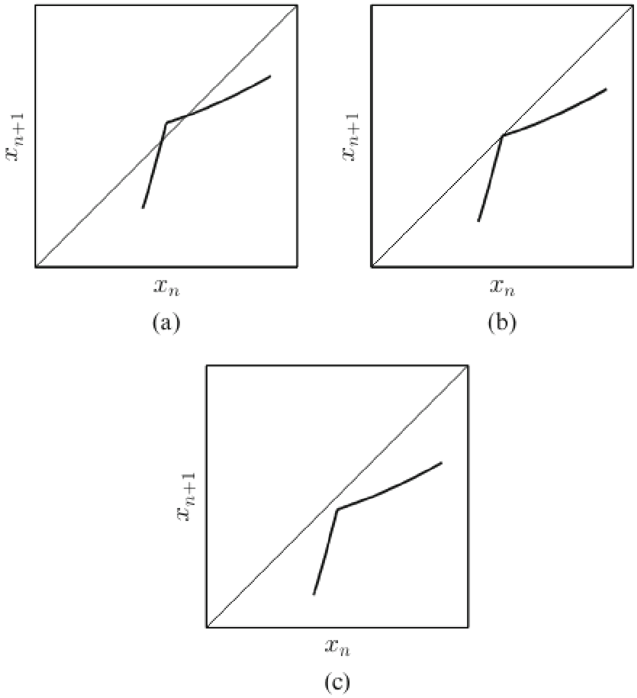
این نوع از نوسانات شباهت زیادی به نوسانات نوع I دارد. نگاشت موضعی هر دو این نوسانات یکی است:

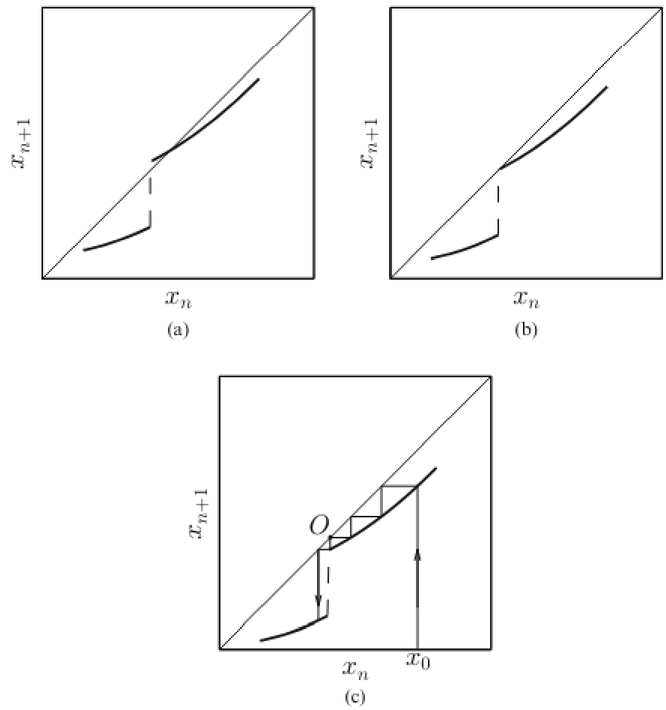
$$x_{n+1} = \epsilon + x_n + x_n^2$$

که ϵ پارامتر کنترل است و $x_0 = 0$ نقطه ثابت ناپایدار آن. مشخصه‌ی این نوع از نوسانات، رفتار گذشته‌گرایانه [۲۸] آن‌ها و فرآیند بازسکون منظم‌شان است که نقطه‌ی بازسکون آن‌ها همواره یکسان است و دور از نقطه ثابت محذوف قرار می‌گیرد. منظورمان از فرآیند بازسکون منظم این است که هر دفعه که مدارها از حد بازسکون مشخصی عبور می‌کنند، بازگردانده می‌شوند [۶۳].

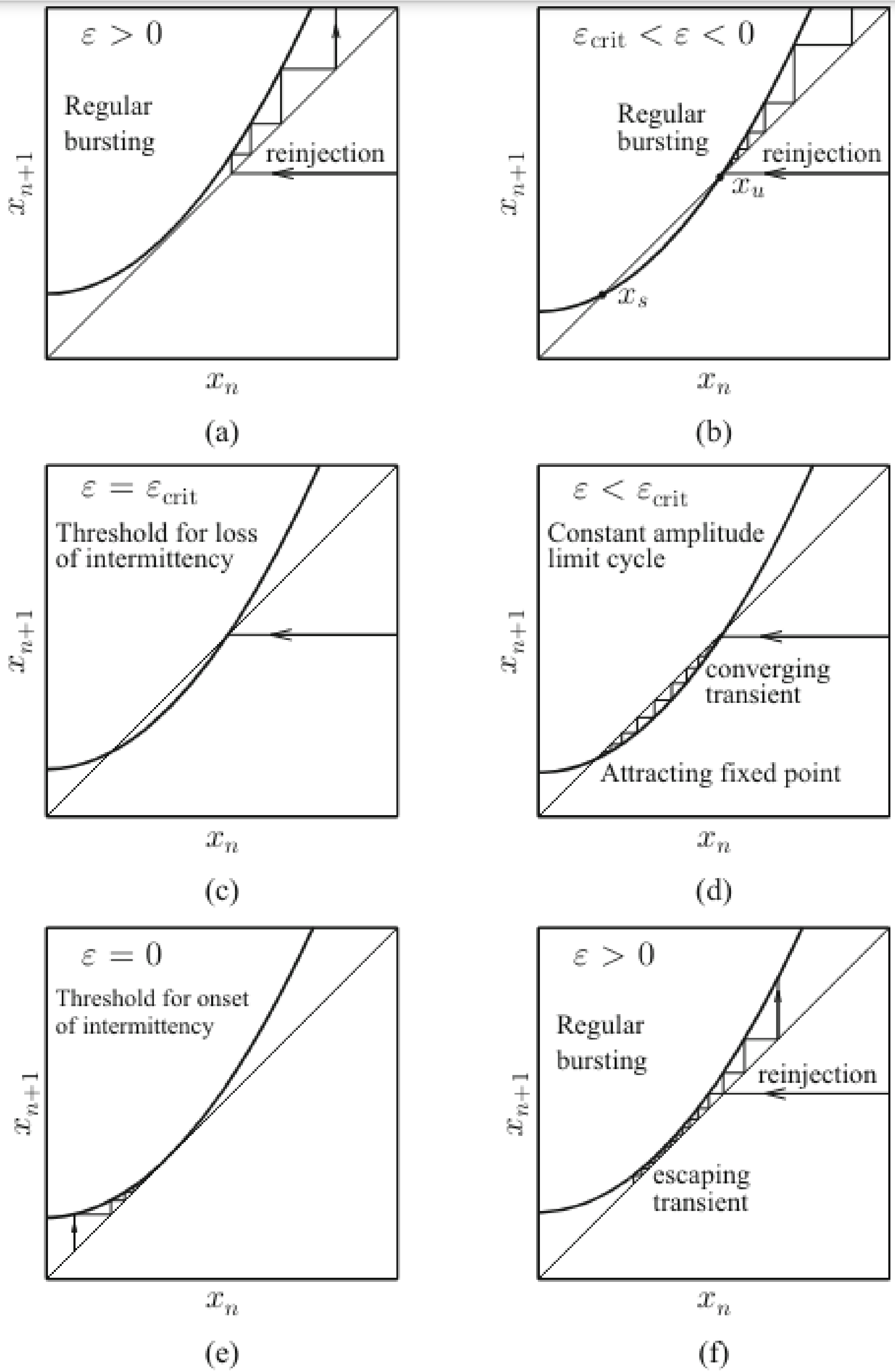
این نوع نوسانات می‌توانند برای هنگامی که $\epsilon < 0$ نیز رخ دهند. و ما همچنان رفتار آشوب‌ناک را شاهد باشیم. در شکل (۴−۱۱) مشاهده کنید.

[۲۸] Hysteresis





شکل ۴-۱۰: نوع V نوسانات ناگهانی



شکل ۴-۱۱: نوع X نوسانات ناگهانی

۴-۳-۶ آرام_ ناآرام

نوسانات آرام_ ناآرام [۲۹] به نوساناتی گفته می‌شود که رفتار سیستم بین دو نوع رفتار آرام و ناآرام تغییر می‌کند.

- **رفتارهای آرام:** سیستم در زمان‌هایی تقریبا رفتار آرامی دارد و تقریبا در حالت سکون است و از خود رفتار آشوب‌ناک یا نوسانات شدیدی نشان نمی‌دهد. تغییرات سیستم در این حالت تغییرات شدیدی نیست و گاهی به چشم نمی‌آید حتی.

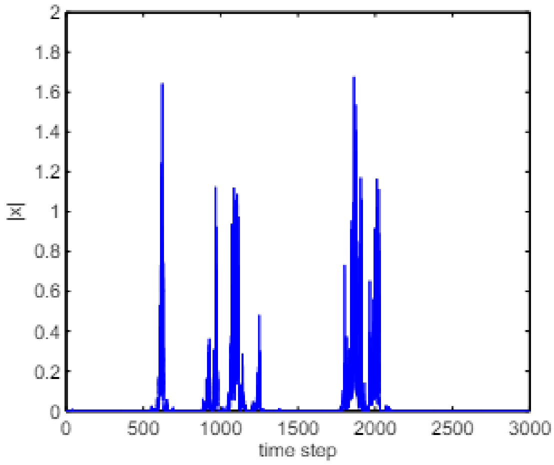
- **رفتارهای ناآرام:** این رفتارها، رفتارهای آشوب‌ناک سیستم هستند. در این حالت‌ها، سیستم نوسانات شدیدی را تجربه می‌کند.

سیستم به سرعت می‌تواند حالتش را از آرام به ناآرام و بالعکس تغییر دهد بدون اینکه این تغییرات به طور تدریجی اتفاق بیفتد. همچنین در حالت ناآرام، نوسانات سیستم منظم نیستند. نوسانات نوع I، II و III مرتبط به تغییرات نقطه ثابت غیرپایدار سیستم بودند. اما این نوع از نوسانات، می‌تواند در حالت کلی‌تری رخ دهد. سیستم به جای اینکه مدت زمان طولانی‌ای حول نقطه ثابت محذوف سپری کند، می‌تواند حول مجموعه‌های ناوردا یا شبه‌ناوردا [۳۰] زمانش را سپری کند.

برای اینکه ساده‌ترین نوع نوسان آرام_ ناآرام را مشاهده کنیم لازم است حداقل دو شرط مهیا باشند: اول وجود یک مجموعه ناوردا است و دومین شرط این است که مدارها به هر همسایگی موجود ناوردامان وارد شوند و از آن خارج شوند. می‌توان این‌گونه تصور کرد که در فضا باید موجود ناوردای غیرپایداری داشته باشیم که درون آن، یک مجموعه جاذب داشته باشیم.

---

[۲۹] On-Off intermittency
[۳۰] Quasi-invariant



شکل ۴-۱۲: نوسان ناگهانی آرام_ناآرام

سیستم که این دو شرط را بخواهد برآورده سازد، باید فرمی به شکل

$$\frac{dX(t)}{dt} = f_1\big(X(t), \nu(Y(t))\big)$$
$$\frac{dY(t)}{dt} = f_2\big(Y(t)\big)$$

که در اینجا فضا یک فضای $\infty \leqslant S$ بعدی است و فرض این است که موجود ناوردامان روی ابر صفحه $S \leqslant N$ بعدی $x_1 = x_2 = \cdots = x_N$ قرار دارد. در معادله $X(t) = (x_1 \ldots, x_N)$ و $Y(t) = (x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots, x_s)$ و همچنین از معادله فوق مشخص است که تکامل $Y(t)$ به $X(t)$ مرتبط نیست؛ همچنین پارامتر سیستم $\nu(Y(t))$ است که فرض می کنیم اولا $X(t) = 0$ ابرصفحه ناوردا است و هنگامی که پارامتر کنترل از ν_c عبور می‌کند، این ابرصفحه ناپایدار خواهد شد. حال اگر رفتار $Y(t)$ به‌گونه‌ای باشد که $\nu(Y(t))$ مقادیر کمتر و بیشتر ν_c را اتخاذ کند و همچنین زمانی که در هر دو ناحیه می‌گذراند مناسب باشد، شاهد نوسانات ناگهانی آرام_ناآرام خواهیم بود.

این نوع از نوسانات را در شکل (۴-۱۲) ببینید [۵۴].

فصل ۵

چالش‌های عددی

به بیان لورنز، در سیستم‌های آشوب‌ناک پدیده‌ای به اسم اثر پروانه‌ای دیده می‌شود. در فصل‌های گذشته این پدیده را تحت عنوان «حساسیت به شرط اولیه» بیان کردیم و با استفاده از کمیتی به نام «نمای لیاپانوف» توانستیم این پدیده را مطالعه کنیم. اگر در سیستمی این پدیده مشاهده شود، کوچکترین خطایی نیز رشد می‌کند و در زمانی به حد کافی بزرگ، بر محاسبات غالب می‌شود. غالبا با به کارگیری الگوریتم‌های کلاسیک روی سیستم‌های آشوب‌ناک، نتایج ما درهم‌آمیخته‌ای از نتایج صحیح و رشد خطاهایی مانند خطای برشی [۱] خواهد بود؛ خطاهایی که در کار با کامپیوتر اجتناب‌ناپذیر هستند.

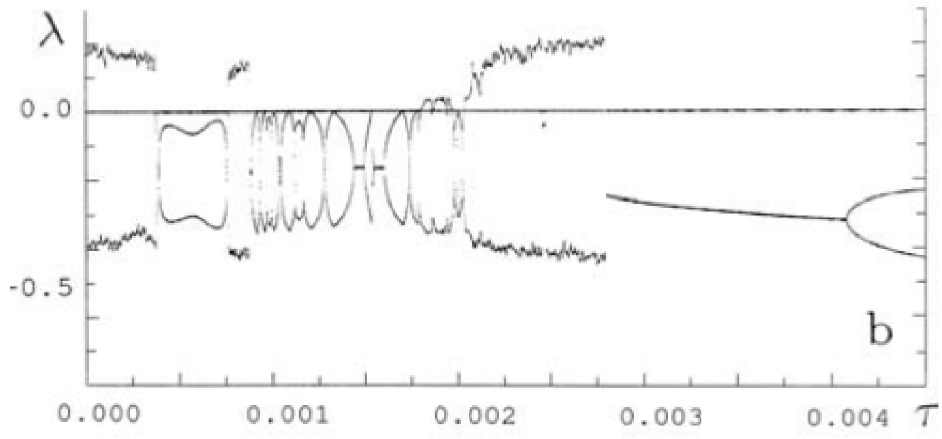
پوآنکاره [۶۱] به این موضوع در سال ۱۸۹۰ پی می‌برد و در سال ۱۹۶۳ لورنز [۴۹] این موضوع را در محاسبات کامپیوتری بازکشف می‌کند و اسم‌اش را «اثر پروانه‌ای» [۲] می‌گذارد.

شاید فکر کنید با بهینه انتخاب کردن گام‌های زمانی و مکانی مسئله گسسته‌سازی‌شده [۳]، می‌توانیم نتایج را بهتر و بهتر کنیم؛ این روش شاید در اکثر معادلات غیرخطی غیرآشوب‌ناک باعث بهبود نتایج شود، اما در سیستم‌های آشوب‌ناک هیچ تضمینی وجود ندارد! همان‌گونه که لورنز در [۵۰] بیان می‌کند، سیستم‌های آشوب‌ناک نه تنها حساس به شرط اولیه هستند، بلکه به گام‌های زمانی و

[۱] Truncation Error and Round-off Error

[۲] The Butterfly-Effect

[۳] Temporal and Spatial Discretizations of the Problem



شکل ۵-۱: نمای لیاپانوف به ازای گام‌های زمانی متفاوت

مکانی و به الگوریتم‌های عددی نیز حساس است!

در مقاله [۵۰] همچنین نشان‌داده شده که بزرگ‌ترین نمای لیاپانوف به ازای گام‌های زمانی متفاوت، حول صفر در نوسان است!

لورنز سه نمای لیاپانوف سیستم

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y^{۲} - Z^{۲} - aX + aF \\ \dot{Y} = XY - bXZ - Y + G \\ \dot{Z} = bXY + XZ - Z \end{cases}$$

را در پارامترهای $a = \frac{۱}{۴},\ b = ۴,\ F = ۸,\ G = ۱$ با گام‌های زمانی متفاوت محاسبه کرد (۵-۱). به کارگیری این‌چنین الگوریتم‌ها باعث می‌شود حتی نتوانیم تشخیص دهیم سیستم آشوب‌ناک است یا خیر [۴۲]. به طور مشابه در مقاله [۷۳] حساسیت به گام‌های زمانی در مدل‌های جوی آشوب‌ناک مطالعه شده است. همچنین در مقاله [۲۹] نیز اشاره شده است که سیستم‌های هذلولوی یکنواخت [۴] به خاطر خاصیتی که بوئن [۵] و آناسوف [۶] به آن پی‌بردند (در سایه قرار گرفتن [۷]) [۴] و [۱۰]، مدارهای

[۴] Uniformly Hyperbolic
[۵] Bowen
[۶] Anosov
[۷] Shadowing Property

عددی و مدارهای اصلی سیستم نزدیک هم قرار می‌گیرند. اما این خاصیت در سیستم‌های آشوب‌ناک وجود ندارد؛ ولی برای بازه‌ی زمانی طولانی‌ای مدارهای عددی و مدارهای اصلی نزدیک هم هستند و بعد از آن زمان دیگر تضمینی بر نزدیکی جواب عددی و جواب اصلی وجود ندارد.
همچنین در [۳۱] نیز به آن اشاره شده است که دقت الگوریتم‌های عددی به کارگرفته شده برای سیستم‌های همیلتونی آشوب‌ناک پس از مدتی دیگر کارآمد نیست. در [۳۲] نیز نتایج مشابهی برای روش‌های عددی متعدد (رانگ‌کوتا - اویلر - آدام‌بشفورد ـ و...) به دست آمده است.

این کارهای عددی شبهه‌های متعددی در ارتباط با سیستم‌های آشوب به وجود آوردند. آیا واقعا می‌توان به خواصی از یک سیستم آشوب‌ناک پی‌برد؟! آیا مقالاتی که برپایه‌ی کارهای عددی روی سیستم‌های آشوب‌ناک نوشته شدند، از دقت علمی برخوردار هستند؟ آیا اصلا راهی برای تشخیص وجود آشوب داریم؟ آیا می‌توانیم الگوریتمی عددی بیابیم که برای بازه‌ی زمانی طولانی‌ای قابل اعتماد باشد؟

این تردیدها باعث شد کارهایی جدی در مورد قابل اعتماد بودن الگوریتم‌های عددی روی سیستم‌های آشوب‌ناک انجام شود [۴۳]، [۴۴]، [۴۵]، [۴۷]، [۴۶]، [۴۸] و [۴۱]. این کارها موجب نمایان شدن شبیه‌سازی‌های عددی قابل اعتماد [8] شد. با استفاده از این الگوریتم‌ها، خطاهای کوچک، نسبت به متغییرها، به مرور قابل صرف‌نظر می‌شوند؛ حتی در بازه‌های زمانی بسیار زیاد اما متناهی! به طور مثال در [۴۷] برای اولین‌بار جواب‌های نسبتا دقیقی از سیستم لورنز در بازه‌ی زمانی $[0, 10000]$ ثبت شد. در [۴۱] با استفاده از این‌گونه الگوریتم‌ها توانستند صدها مدار تناوبی جدید برای مسئله‌ی سه‌جسم بیابند.

ایده‌ی پشت این نوع شبیه‌سازی‌ها ساده است. ابتدا بسط تیلور تابع را در نظر می‌گیریم:

[8] Clean Numerical Simulation (CNS)

$$f(x_\circ + \Delta t) = f(x_\circ) + \sum_{n=۱}^{M} \frac{f^{(n)}(x_\circ)}{n!}(\Delta t)^n + R_T$$

که Δt گام زمانی است و R_T خطای برشی. زمانی که گام زمانی در شعاع همگرایی قرار گیرد، هرچه M بزرگ‌تر باشد، خطای برشی R_T کوچک‌تر خواهد بود. خطای ناشی از رند کردن اعداد نیز خطای دیگری است که باید در نظر بگیریم. هر دو این خطاها اجتناب‌ناپذیرند. با تکنولوژی امروزه و استفاده از کامپیوترهای با عملکرد بالا [۹] خطای برشی را به توان به هر حد دلخواه، با افزایش M، کاهش داد. و با استفاده از داده‌های با دقت بالا [۱۰] [۶۰] می‌توان دقت محاسبات را بالا برد (از این پکیج‌ها استفاده شده است تا π را با دقت میلیون‌ها رقم اعشار محاسبه کنیم.)

این نوع شبیه‌سازی برپایه‌ی بسط تیلور است و به استراتژی جدیدی برای کار با سیستم‌های آشوب‌ناک تبدیل شده است. در کنار بالا بردن دقت ارقام و کاهش خطای برشی، در هر مرحله قابل اعتماد بودن الگوریتم هم چک می‌شود. پس به طور کلی شبیه‌سازی‌های عددی قابل اعتماد سه مرحله را طی می‌کنند:

۱. کاهش خطای برشی به حد کافی با استفاده از سری تیلور با M به حد کافی بزرگ برای تمامی توابعی که نیاز به محاسبه دارند.

۲. کاهش خطای رند کردن با بیان داده‌ها با دقت بالا و استفاده از تعداد کافی رقم اعشار.

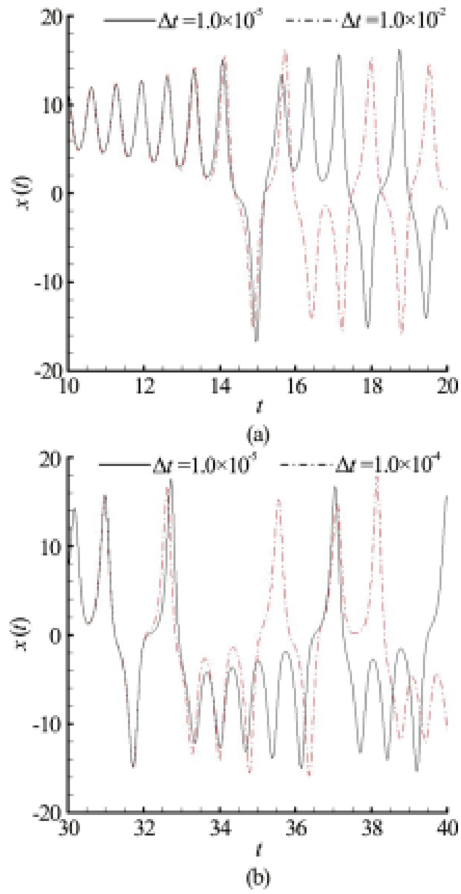
۳. بازبینی همگرایی (قابل اعتماد بودن) روش عددی با مقایسه دو شبیه‌سازی با استفاده از بسط تیلور با مراتب متفاوت یا دقت‌های ارقامی متفاوت و یا استفاده از طول گام‌های زمانی و مکانی متفاوت.

این استراتژی روی کاغذ و از منظر ریاضی، استراتژی نسبتا ساده‌ای است اما به کارگیری آن نیازمند تکنولوژی‌های نوین و نسبتا سطح بالایی است. این استراتژی خطاها را آن قدر کوچک می‌کند که

---

[۹] High Performance Computer

[۱۰] Multiple-Precision (MP)

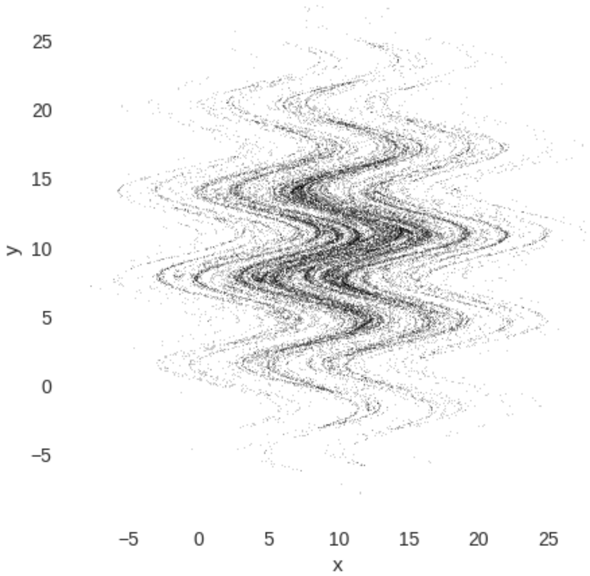


شکل ۵-۲: حساسیت به طول گام زمانی سیستم لورنز در پارامترهای آشوب‌ناک با استفاده از روش رانگ- کوتای مرتبه ۴

در مقایسه با متغییرهایی که با آن‌ها سر و کار داریم، در بازه‌ی زمانی نسبتا طولانی ولی متناهی، قابل صرف‌نظر باشند. مرحله‌ی آخر این نوع شبیه‌سازی، بازبینی متعارفی است که در کمی‌کردن عدم قطعیت نیز اتفاق می‌افتد [۵۷].

در مقاله [۴۲]، لیائو [11] این شبیه‌سازی را برای سیستم لورنز به کار می‌برد. او توضیح می‌ده که سیستم لورنز سیستمی شناخته‌شده است که با روش رانگ- کوتای مرتبه ۴ به گام‌های زمانی حساس است (۵-۲) و روش شبیه‌سازی عددی قابل اعتماد ، چگونه این را بهبود می‌دهد همچنین نیاز به تاکید دارد که صرفا بازه‌ی زمانی‌ای که محاسبات قابل اعتماد هستند افزایش می‌یابد و هیچ‌گاه تا ابد

[11] Shi-jun Liao



شکل ۵-۳: جاذب پیچیده‌ی معرفی‌شده‌ی سیستم هنون بهبودیافته

نمی‌توان دقت خوبی را حفظ کرد [۷۳].

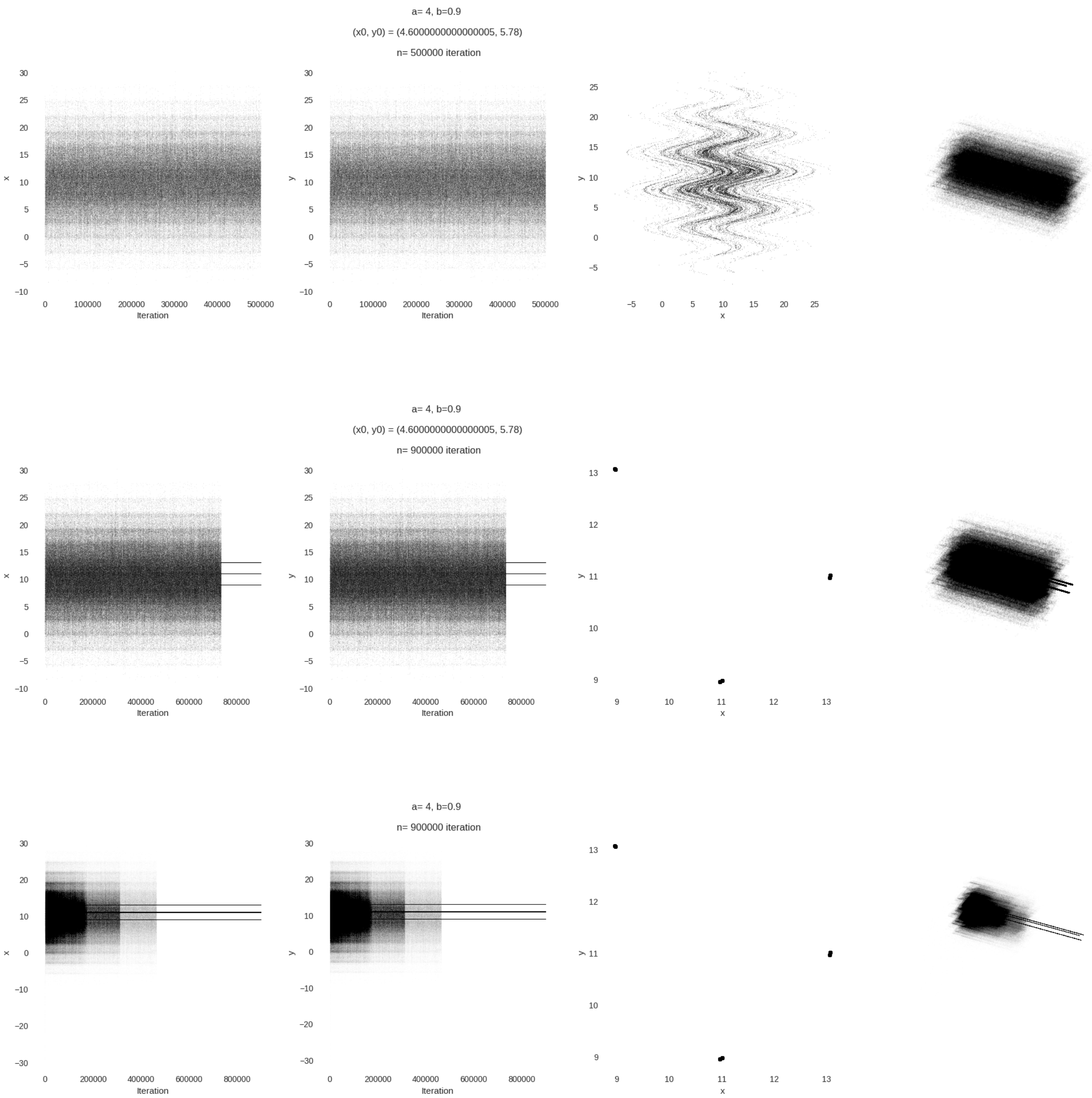
برای مطالعه بیشتر می‌توان به [۵۵] [۷۹] [۵۱] مراجعه کرد.

از دیگر چالش‌های عددی سیستم‌هایی هستند که دیر به مدارهای تناوبی همگرا می‌شوند. مثالی جالبی از این دست سیستم هنون بهبودیافته است که در مقاله‌ی [۲۱] به آن اشاره شده است:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - a\sin(x_n) + by_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases}$$

در این مقاله اثبات شده است که اگر $|b| < 1$ به ازای هر $a \in \mathbb{R}$ و هر شرط اولیه‌ای مدارهای سیستم کراندارند و در پارامتر $a = 4$ و $b = 0.9$ جاذب پیچیده‌ی سیستم را به شکل (۵-۳) معرفی کردند. در (۵-۳) جاذب پیچیده‌ی سیستم با ۵۰۰۰۰ تکرار رسم شده است.

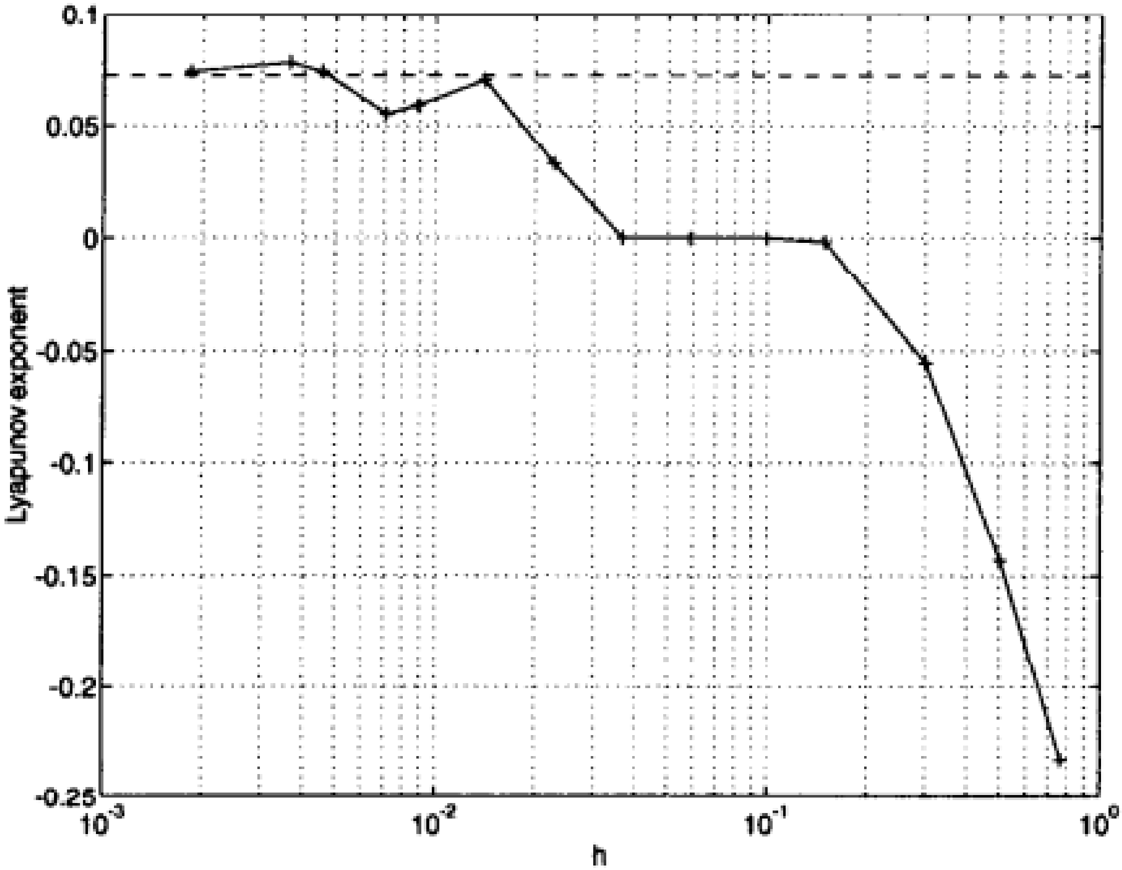
حال اگر تعداد تکرارها را به ۹۰۰۰۰۰ افزایش دهیم و سیستم را برای مدت طولانی‌تری بررسی کنیم می‌بینیم که در حقیقت جاذبِ سیستم یک چرخه حدی با تناوب ۶ است (۵-۴) و بعلاوه



شکل ۵-۴: سیستم هنون بهبود یافته: جاذب پیچیده یا مدار تناوبی؟

بزرگ‌ترین نمای لیاپانوف سیستم نیز با ۹۰۰۰۰۰ تکرار، برابر −۳۹٫۵۶۷۹۶۷۹ می‌شود! به این موضوع در [۵۱] نیز اشاره شده‌است.

این مشکلات در محاسبه‌ی کمیت‌های آشوب نیز به چشم می‌خورد (۵-۵) [۱۸].



شکل ۵-۵: نمای لیاپانوف بر حسب طول گام

Bibliography

[1] Roy L Adler, Alan G Konheim, and M Harry McAndrew. Topological entropy. *Transactions of the American Mathematical Society*, 114(2):309–319, 1965.

[2] Ethan Akin, Joseph Auslander, and Anima Nagar. Variations on the concept of topological transitivity. *arXiv preprint arXiv:1601.05614*, 2016.

[3] K.T. Alligood, T.D. Sauer, and J.A. Yorke. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. Textbooks in Mathematical Sciences. Springer New York, 2000.

[4] Dmitry Victorovich Anosov. Geodesic flows on closed riemannian manifolds of negative curvature. *Trudy Matematicheskogo Instituta Imeni VA Steklova*, 90:3–210, 1967.

[5] John H Argyris, Gunter Faust, Maria Haase, and Rudolf Friedrich. *An exploration of dynamical systems and chaos: completely revised and enlarged second edition*. Springer, 2015.

[6] Ludwig Arnold and Ludwig Arnold. The multiplicative ergodic theorem in euclidean space. *Random Dynamical Systems*, pages 111–162, 1998.

[7] Vladimir Igorevich Arnold, VS Afrajmovich, Yu S Il'yashenko, and LP Shil'nikov. *Dynamical systems V: bifurcation theory and catastrophe theory*, volume 5. Springer Science & Business Media, 2013.

[8] John Banks, Jeffrey Brooks, Grant Cairns, Gary Davis, and Peter Stacey. On devaney's definition of chaos. *The American mathematical monthly*, 99(4):332–334, 1992.

[9] Rufus Bowen. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 153:401–414, 1971.

[10] Rufus Bowen. ω-limit sets for axiom a diffeomorphisms. *Journal of differential equations*, 18(2):333–339, 1975.

[11] Michael Brin and Garrett Stuck. *Introduction to dynamical systems.* Cambridge university press, 2002.

[12] Shijian Cang, Aiguo Wu, Zenghui Wang, and Zengqiang Chen. On a 3-d generalized hamiltonian model with conservative and dissipative chaotic flows. *Chaos, Solitons & Fractals*, 99:45–51, 2017.

[13] JS Cánovas and JM Rodríguez. Topological entropy of maps on the real line. *Topology and its Applications*, 153(5-6):735–746, 2005.

[14] Alexandre Carvalho, José A Langa, and James Robinson. *Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems*, volume 182. Springer Science & Business Media, 2012.

[15] Thiago Catalan. A link between topological entropy and lyapunov exponents. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 39(3):620–637, 2019.

[16] Thiago Catalan and Ali Tahzibi. A lower bound for topological entropy of generic non-anosov symplectic diffeomorphisms. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 34(5):1503–1524, 2014.

[17] David N Cheban. *Global attractors of non-autonomous dynamical and control systems*, volume 18. World Scientific, 2014.

[18] Robert M Corless. What good are numerical simulations of chaotic dynamical systems? *Computers & Mathematics with Applications*, 28(10-12):107–121, 1994.

[19] Nedim Değirmenci and Şahin Koçak. Existence of a dense orbit and topological transitivity: when are they equivalent? *Acta Mathematica Hungarica*, 99(3):185–187, 2003.

[20] Sergio Elaskar and Ezequiel Del Río. *New advances on chaotic intermittency and its applications.* Springer, 2017.

[21] Zeraoulia Elhadj and JC Sprott. A two-dimensional discrete mapping with c∞ multifold chaotic attractors. *Electronic journal of theoretical physics*, 5(17):111–124, 2008.

[22] David Ellerman. *New foundations for information theory: logical entropy and Shannon entropy.* Springer Nature, 2021.

[23] J Doyne Farmer, Edward Ott, and James A Yorke. The dimension of chaotic attractors. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 7(1-3):153–180, 1983.

[24] Mitchell J Feigenbaum. Universal behavior in nonlinear systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 7(1-3):16–39, 1983.

[25] Paul Frederickson, James L Kaplan, Ellen D Yorke, and James A Yorke. The liapunov dimension of strange attractors. *Journal of differential equations*, 49(2):185–207, 1983.

[26] Eli Glasner and Benjamin Weiss. Sensitive dependence on initial conditions. *Nonlinearity*, 6(6):1067, 1993.

[27] John Guckenheimer and Philip Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, volume 42. Springer Science & Business Media, 1983.

[28] H Haken. At least one lyapunov exponent vanishes if the trajectory of an attractor does not contain a fixed point. *Physics Letters A*, 94(2):71–72, 1983.

[29] Stephen M Hammel, James A Yorke, and Celso Grebogi. Do numerical orbits of chaotic dynamical processes represent true orbits? *Journal of Complexity*, 3(2):136–145, 1987.

[30] James Hanssen and Walter Wilcox. Lyapunov exponents for the intermittent transition to chaos. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 9(04):657–670, 1999.

[31] William Graham Hoover and Carol Griswold Hoover. Comparison of very smooth cell-model trajectories using five symplectic and two runge-kutta integrators. *arXiv preprint arXiv:1504.00620*, 2015.

[32] Li Jianping, Zeng Qingcun, and Chou Jifan. Computational uncertainty principle in nonlinear ordinary differential equations (i). *Science in China*, 43:449–460, 2000.

[33] James L Kaplan and James A Yorke. Chaotic behavior of multidimensional difference equations. In *Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points: Proceedings, Bonn, July 1978*, pages 204–227. Springer, 2006.

[34] Anatole Katok. Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 51:137–173, 1980.

[35] Christoph Kawan. Exponential state estimation, entropy and lyapunov exponents. *Systems & Control Letters*, 113:78–85, 2018.

[36] Andrei Nikolaevich Kolmogorov. A new metric invariant of transitive dynamical systems and automorphisms of lebesgue spaces. *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni VA Steklova*, 169:94–98, 1985.

[37] A Kolomogorov. A new metric invariant of transient dynamical systems and automorphisms of lebesgue spaces. *Dokl Akad Soc SSSR*, 119:861–864, 1958.

[38] Yuri A Kuznetsov, Iu A Kuznetsov, and Y Kuznetsov. *Elements of applied bifurcation theory*, volume 112. Springer, 1998.

[39] François Ledrappier and L-S Young. The metric entropy of diffeomorphisms. 1984.

[40] Dequan Li. A three-scroll chaotic attractor. *Physics Letters A*, 372(4):387–393, 2008.

[41] XiaoMing Li and ShiJun Liao. More than six hundred new families of newtonian periodic planar collisionless three-body orbits. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, 60:1–7, 2017.

[42] Shi-jun Liao. On the clean numerical simulation (cns) of chaotic dynamic systems. *Journal of Hydrodynamics, Ser. B*, 29(5):729–747, 2017.

[43] Shijun Liao. On the reliability of computed chaotic solutions of non-linear differential equations. *Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography*, 61(4):550–564, 2008.

[44] Shijun Liao. On the numerical simulation of propagation of micro-level inherent uncertainty for chaotic dynamic systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 47:1–12, 2013.

[45] Shijun Liao. Physical limit of prediction for chaotic motion of three-body problem. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19(3):601–616, 2014.

[46] Shijun Liao and Xiaoming Li. On the inherent self-excited macroscopic randomness of chaotic three-body systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 25(09):1530023, 2015.

[47] ShiJun Liao and PengFei Wang. On the mathematically reliable long-term simulation of chaotic solutions of lorenz equation in the interval [0, 10000]. *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, 57:330–335, 2014.

[48] ZhiLiang Lin, LiPo Wang, and ShiJun Liao. On the origin of intrinsic randomness of rayleigh-bénard turbulence. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, 60:1–13, 2017.

[49] Edward N Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of atmospheric sciences*, 20(2):130–141, 1963.

[50] Edward N Lorenz. Computational periodicity as observed in a simple system. *Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography*, 58(5):549–557, 2006.

[51] René Lozi. Can we trust in numerical computations of chaotic solutions of dynamical systems? In *Topology and dynamics of Chaos: In celebration of Robert Gilmore's 70th birthday*, pages 63–98. World Scientific, 2013.

[52] Nikolai Aleksandrovich Magnitskii and Sergey Vasilevich Sidorov. *New methods for chaotic dynamics*, volume 58. World Scientific, 2006.

[53] Francis C Moon. *Chaotic and fractal dynamics: introduction for applied scientists and engineers.* John Wiley & Sons, 2008.

[54] Woosok Moon. On-off intermittency in locally coupled maps. *Woods Hole Oceanographic Institution: Falmouth, MA, USA*, 2010.

[55] Marian Mrozek. Rigorous numerics of chaotic dynamical systems. In *Chaos—The Interplay Between Stochastic and Deterministic Behaviour: Proceedings of the XXXIst Winter School of Theoretical Physics Held in Karpacz, Poland 13–24 February 1995*, pages 283–296. Springer, 1995.

[56] Ali H Nayfeh and Balakumar Balachandran. *Applied nonlinear dynamics: analytical, computational, and experimental methods.* John Wiley & Sons, 2008.

[57] William L Oberkampf and Christopher J Roy. *Verification and validation in scientific computing.* Cambridge university press, 2010.

[58] Valery Iustinovich Oseledec. A multiplicative ergodic theorem, lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, 19:197–231, 1968.

[59] Edward Ott. *Chaos in dynamical systems.* Cambridge university press, 2002.

[60] P Oyanarte. Mp-a multiple precision package. *Comput. Phys. Commun*, 59(2):345–358, 1990.

[61] Henri Poincaré. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta mathematica*, 13(1):A3–A270, 1890.

[62] Yves Pomeau and Paul Manneville. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. *Communications in Mathematical Physics*, 74:189–197, 1980.

[63] TJ Price and T Mullin. An experimental observation of a new type of intermittency. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 48(1):29–52, 1991.

[64] David Ruelle. An inequality for the entropy of differentiable maps. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática-Bulletin/Brazilian Mathematical Society*, 9(1):83–87, 1978.

[65] David Ruelle. *Chaotic evolution and strange attractors*, volume 1. Cambridge University Press, 1989.

[66] AN Sharkovskii. Cycles coexistence of continuous transformation of line in itself. *Ukr. Math. Journal*, 26(1):61–71, 1964.

[67] Robert Shaw. Strange attractors, chaotic behavior, and information flow. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 36(1):80–112, 1981.

[68] Bhimsen K Shivamoggi. *Nonlinear dynamics and chaotic phenomena: An introduction*, volume 103. Springer, 2014.

[69] Yaha G Sinai. On the concept of entropy of a dynamical system. In *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, volume 124, pages 768–771, 1959.

[70] Stephen Smale. Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American mathematical Society*, 73(6):747–817, 1967.

[71] JC Sprott. A dynamical system with a strange attractor and invariant tori. *Physics Letters A*, 378(20):1361–1363, 2014.

[72] Wenxiang Sun and Edson Vargas. Entropy of flows, revisited. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática-Bulletin/Brazilian Mathematical Society*, 30(3):315–333, 1999.

[73] Joao Teixeira, Carolyn A Reynolds, and Kevin Judd. Time step sensitivity of nonlinear atmospheric models: numerical convergence, truncation error growth, and ensemble design. *Journal of the atmospheric sciences*, 64(1):175–189, 2007.

[74] Michel Vellekoop and Raoul Berglund. On intervals, transitivity= chaos. *The American Mathematical Monthly*, 101(4):353–355, 1994.

[75] Peter Walters. *An introduction to ergodic theory*, volume 79. Springer Science & Business Media, 2000.

[76] Thomas Ward. Entropy of compact group automorphisms. *Dept. Math., Univ. East Anglia, UK.[Online]. Available: www. mth. uea. ac. uk/~ h720/lecture_notes*, 1994.

[77] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2003.

[78] Stephen Wiggins. *Global bifurcations and chaos: analytical methods*, volume 73. Springer Science & Business Media, 2013.

[79] Zuheng Xu and Trevor Campbell. Embracing the chaos: analysis and diagnosis of numerical instability in variational flows. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 36, 2024.

[80] B Ya. Pesin characteristic lyapunov exponents and smooth ergodic theory. *Russian Mathematical Surveys*, 32(4):55–114, 1977.

[81] Lun-Shin Yao. Computed chaos or numerical errors. *arXiv preprint nlin/0506045*, 2005.

[82] Lai-Sang Young. Dimension, entropy and lyapunov exponents. *Ergodic theory and dynamical systems*, 2(1):109–124, 1982.

[83] Lai-Sang Young. Mathematical theory of lyapunov exponents. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46(25):254001, 2013.

Abstract

Chaos in dynamical systems refers to the presence of extreme sensitivity to initial conditions in the system's behavior, which renders the long-term prediction of the system's behavior either impossible or highly challenging. This chaotic behavior is also present in deterministic systems. The observation of this concept, besides philosophical changes it has brought about, has been scrutinized in various domains and has provided an explanation for many observed physical, chemical, and biological phenomena. This phenomenon has been studied in diverse sectors such as fluid dynamics, neuronal dynamics, and chemical reactions.

In this research, we intend to analyze chaotic dynamical systems using metrics such as topological entropy, Lyapunov exponents, and Hausdorff dimension, and we will introduce criteria for identifying these systems. To comprehend these metrics, we will initially explore the foundations of chaos theory and the concept of entropy, followed by the introduction and analysis of several recognized dynamical models across different fields. In this section, through the examination of methodologies employed in scholarly articles, we will analyze the estimation of chaos in each model and endeavor to review the results of each through numerical algorithms, subsequently comparing the outcomes. Finally, we will discuss processes that induce chaos in systems and examine the applications of these processes.

Keywords: Dynamical systems, Chaos, Entropy, Lyapunov exponent, Hausdorff dimension

Sharif University of Technology

Department of Mathematical Sciences

M.Sc. Thesis

Chaos Quantities and Computational Challenges

By:

Mohammad Nourbakhsh Marvast

Supervisor:

Dr. MohammadReza Razvan

Summer 2024