دانشگاه صنعتی شریف

عنوان:

علوم اعصاب، حافظه، یادگیری، شناخت
تمارین سری سوم

نام و نام خانوادگی

محمد نوربخش مروست

آبان ۱۴۰۲

۱ سوال ۱

۱. مدل نورونی Nagumo-FitzHugh فعالسازی و غیرفعال‌شدن اسپایک‌زدن نورون را شرح می‌دهد. این مدل در حقیقت مدل تقلیل‌یافته‌ی مدل Hodgkin-Huxley است. این مدل عبارت است از:

$$\begin{cases} \dot{V} &= V - V^3 - W + I \\ \dot{W} &= 0.08(V + 0.7 - 0.8W) \end{cases}$$

که در آن

- V پتانسیل غشا است.
- W متغییری است که موجب بازگشت V به حالت استراحت خود می‌شود و به آن recovery variable گویند.
- I جریان اولیه است.

۲. کافیت سمت راست معادلات را برابر صفر در نظر بگیریم و دستگاه را حل کنیم:

$$\begin{pmatrix} \dot{V} \\ \dot{W} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V - V^3 - W + I \\ 0.08(V + 0.7 - 0.8W) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

با استفاده از روش نیوتون برای بدست آوردن جواب معادله‌ی غیر خطی فوق، به ازای $I = 0.3$ خواهیم داشت:

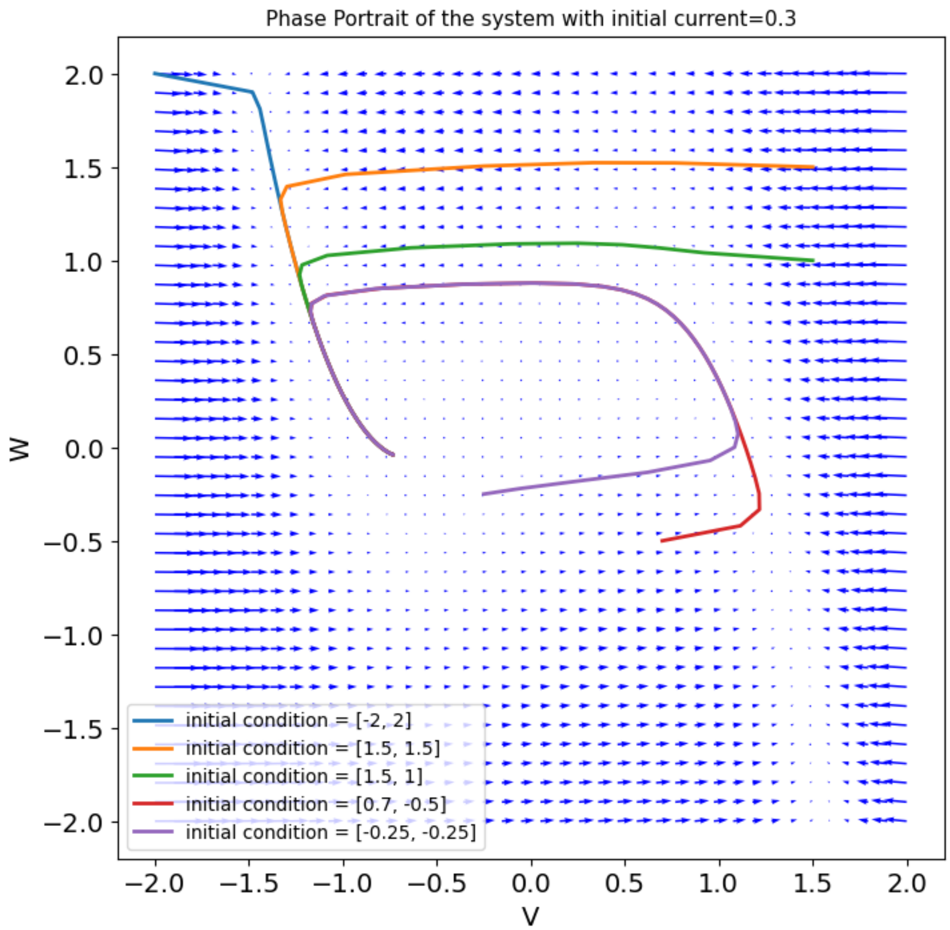
$$\begin{cases} V_{ss} = -0.73187 \\ W_{ss} = -0.03984 \end{cases}$$

ماتریس ژاکوبی دستگاه فوق:

$$J(V, W) = \begin{pmatrix} 1 - 3V^2 & -1 \\ 0.08 & -0.064 \end{pmatrix}$$

ژاکوبین در نقطه تعادل:

$$J(V_{ss}, W_{ss}) = \begin{pmatrix} -0.60694 & -1 \\ 0.08 & -0.064 \end{pmatrix}$$



شکل ۱: فضای فاز با جریان ۳.۰= I

مقادیر ویژه‌ی این ماتریس از فرمول $\frac{\mathrm{tr}(J)\pm\sqrt{\mathrm{tr}(J)^2-4\det(J)}}{2}$ قابل محاسبه است و بدست می‌آید:

$$\lambda_1, \lambda_2 = -0.33547 \pm 0.07939j$$

چون قسمت حقیقی مقادیر ویژه از صفر کمتر است، نقطه تعادل، پایدار است. فضای فاز این معادله در شکل (۱) آمده.

۳. انشعاب سیستم به صورت دست‌نویس در زیر آمده. و نمودارهای دقیق‌تر در کد پایتون ضمیمه شده آمده است. (۲)، (۳)، (۴)

۴. برای $I = 0.3$ چرخه‌ی حدی نداریم زیرا که تنها یک نقطه تعادل داریم که آن هم پایدار است. اما برای هنگامی که جریان عبوری، نقطه تعادل را ناپایدار می‌کند، چرخه‌ی حدی خواهیم داشت. (۵)

۵. خیر.
اگر $a >> 1$ آنگاه ماتریس ژاکوبی مورد نظر برابر خواهد بود با

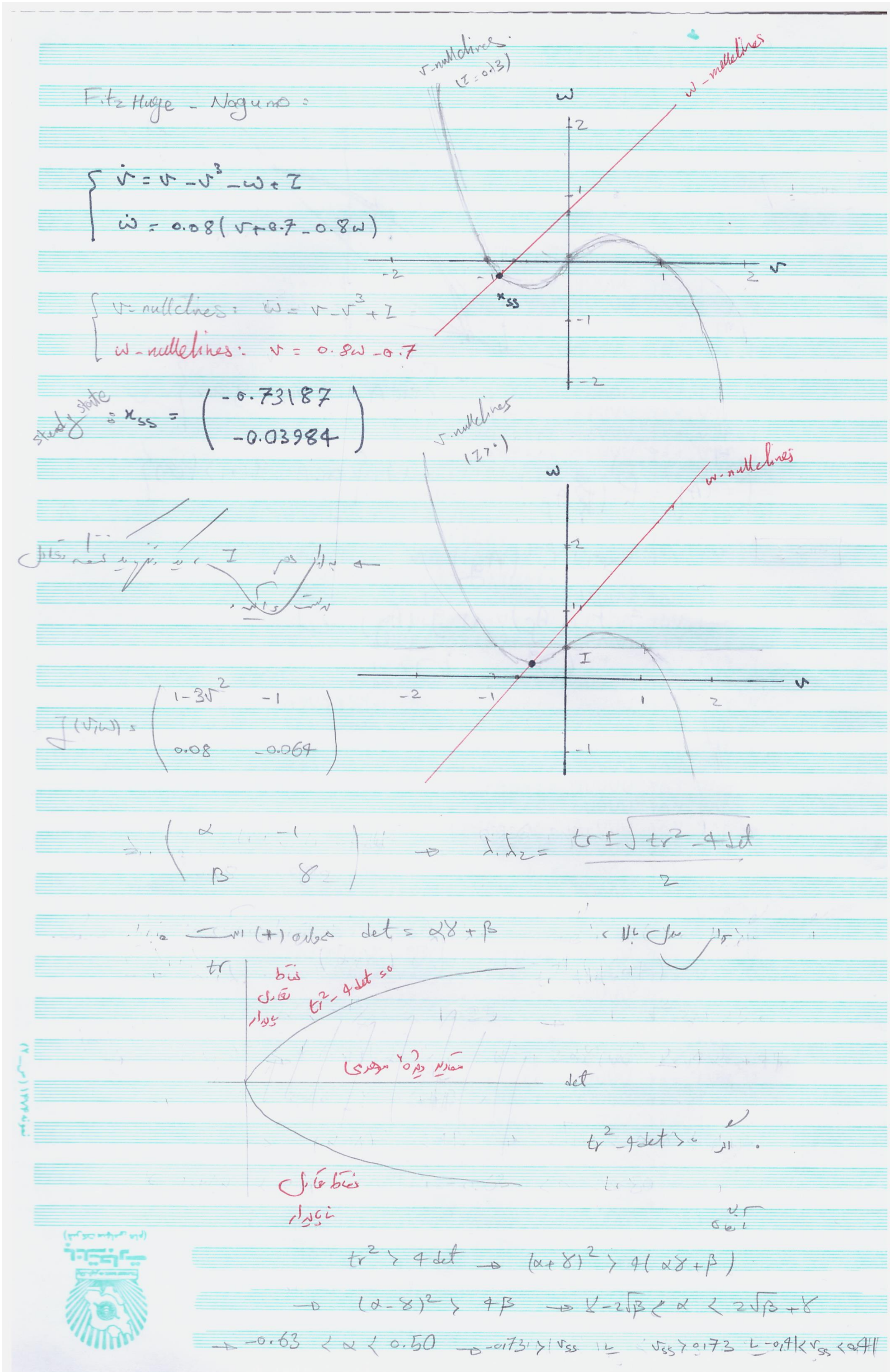
$$J = \begin{pmatrix} \alpha := 1 - 3v^2 & -1 \\ a & -b := -0.08a \end{pmatrix}$$

در این صورت $tr(J) << 0$ و $det(J) >> 0$ پس نقطه تعادل یا از نوع stable node است یا stable focus در هر دو حالت پایدار است و در تمامی موارد، نمی‌توان چرخه حدی ایجاد کرد.

۲ سوال ۲

۱. نمودار انشعاب: (۶)

۲. فرض کنیم برای سیستم $\dot{x} = f(x, r)$ در نقطه‌ی (x_{sn}, r_{sn}) انشعاب زینی‌ـ گره‌ای رخ دهد. این به این معنا است که بازه‌ی بازی مانند $I_{sn} = (r_{sn} - \epsilon, r_{sn} + \epsilon)$ وجود دارد که به ازای هر $r \in (r_{sn} - \epsilon, r_{sn})$ شاهد حداکثر یک نقطه تعادل خواهیم بود و به ازای هر $r \in (r_{sn}, r_{sn} + \epsilon)$ شاهد حداقل دو نقطه تعادل خواهیم بود. این به این معنا است که به تغییر r در I_{sn} تابع $f(x, r)$ ابتدا حداکثر یک بار خط $y = 0$ را قطع کرده ، در x_{sn} یک‌بار خط $y = 0$ را قطع می‌کند و پس از آن، در حداقل دو نقطه باید خط $y = 0$ را قطع کند. این یعنی تابع $f(x, r)$ باید در x_{sn} بر خط $y = 0$ مماس شود و این حکم را نتیجه می‌دهد.



Fitz Hugh - Nagumo :

$$\begin{cases} \dot{v} = v - v^3 - w + I \\ \dot{w} = 0.08(v + 0.7 - 0.8w) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v\text{-nullclines}: \ w = v - v^3 + I \\ w\text{-nullclines}: \ v = 0.8w - 0.7 \end{cases}$$

study state : $x_{ss} = \begin{pmatrix} -0.73187 \\ -0.03984 \end{pmatrix}$

$$J(v,w) = \begin{pmatrix} 1-3v^2 & -1 \\ 0.08 & -0.064 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = \frac{tr \pm \sqrt{tr^2 - 4\,det}}{2}$$

$det = \alpha\gamma + \beta$

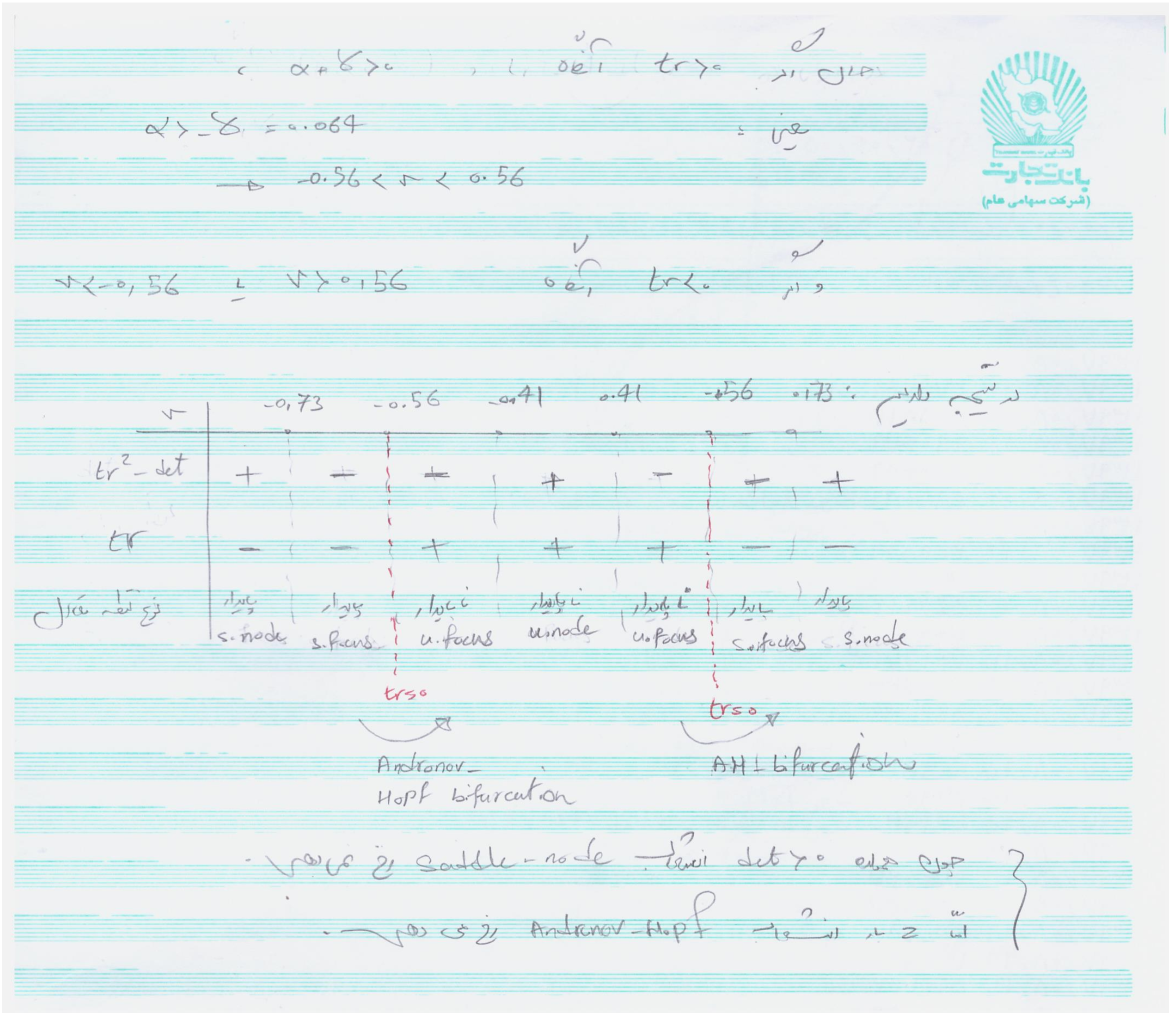
$tr^2 - 4\,det > 0$

$tr^2 > 4\,det \rightarrow (\alpha+\gamma)^2 > 4(\alpha\gamma+\beta)$

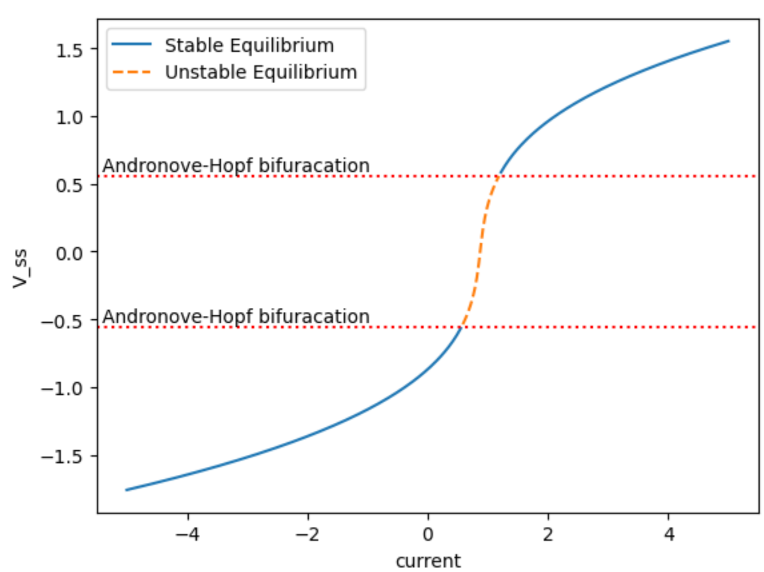
$\rightarrow (\alpha-\gamma)^2 > 4\beta \rightarrow \gamma - 2\sqrt{\beta} < \alpha < 2\sqrt{\beta} + \gamma$

$\rightarrow -0.63 < \alpha < 0.50 \rightarrow -0.173 > v_{ss}$ یا $v_{ss} > 0.173$ یا $-0.41 < v_{ss} < 0.41$

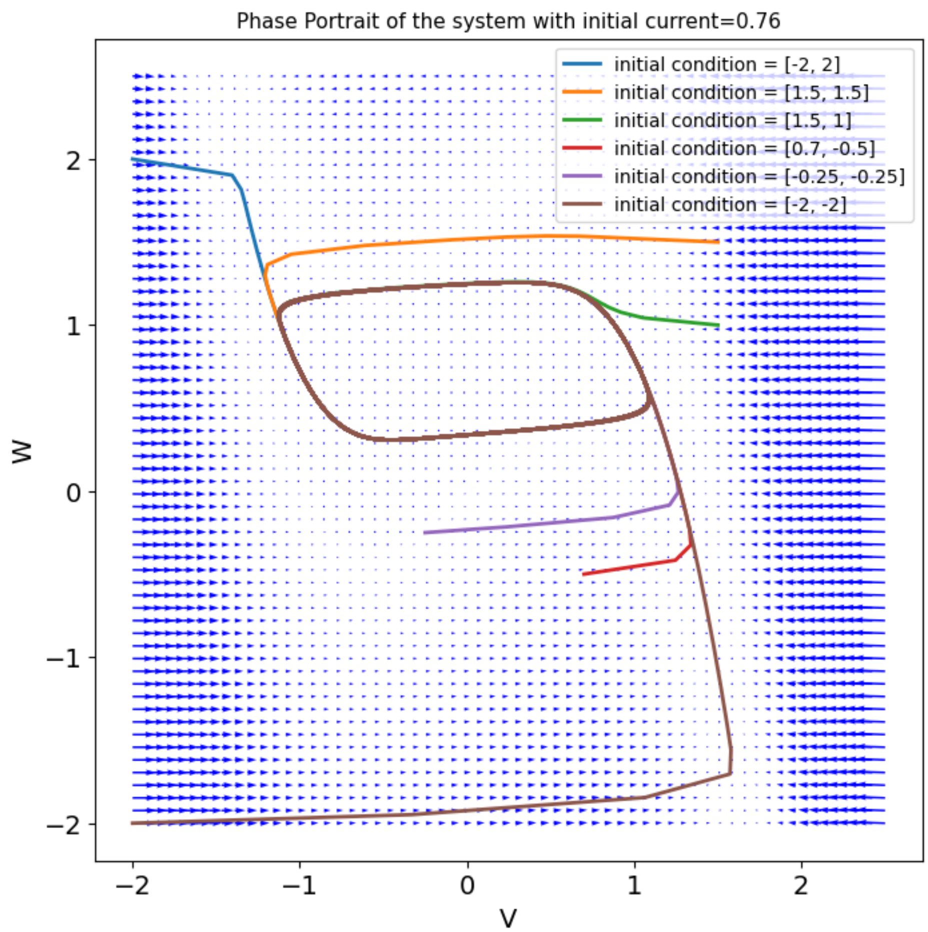
شکل ۲


α > -δ = 0.064
-0.56 < v < 0.56
v < -0.56 یا v > 0.56
-0.73 -0.56 -0.41 0.41 0.56 0.73
v
tr² - det
tr
s.node
s.focus
u.focus
u.node
u.focus
s.focus
s.node
tr=0
tr=0
Andronov-Hopf bifurcation
AH bifurcation
saddle-node
Andronov-Hopf

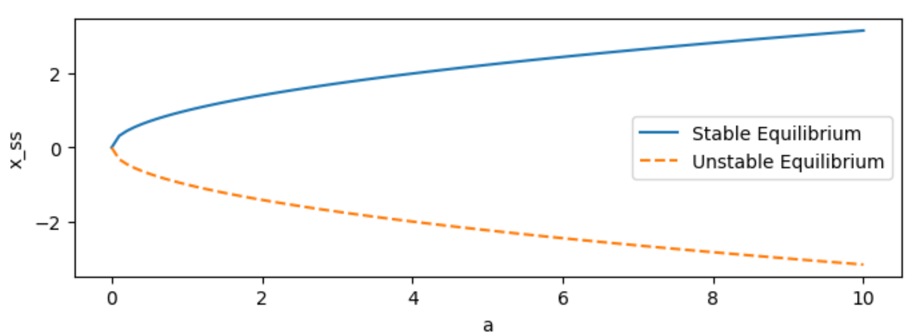
شکل ۳


Stable Equilibrium
Unstable Equilibrium
Andronove-Hopf bifuracation
Andronove-Hopf bifuracation
V_ss
current
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−4
−2
0
2
4

شکل ۴



شکل ۵: چرخه حدی



شکل ۶: نمودار انشعاب

۳ سوال ۳

۱. کافیست قرار دهیم $w_1 = 0.5$، $w_2 = 0.5$ و $\theta = 1$. در این صورت:

- $x_1 = x_2 = 1$ آنگاه، $x_1w_1 + x_2w_2 = 1 \geq 1$ و نورون اسپایک می‌زند.
- $\min(x_1, x_2) = 0$ آنگاه $x_1w_1 + x_2w_2 \leq 0.5 \leq 1$ و در نتیجه نورون اسپایک نمی‌زند.

۲. قرار دهیم: $w_1 = 0.5$، $w_2 = 0.5$ و $\theta = 0.5$.

- $x_1 = x_2 = 0$ آنگاه، $x_1w_1 + x_2w_2 = 0 \leq 1$ و نورون اسپایک نمی‌زند.
- $\max(x_1, x_2) = 1$ آنگاه $x_1w_1 + x_2w_2 \geq 0.5$ و در نتیجه نورون اسپایک می‌زند.

۳. طراحی XOR با شبکه‌ی معرفی شده، ممکن نیست؛ زیرا باید موارد زیر را داشته باشیم:

- $0 < \theta$
- $w_1 + w_2 < \theta$
- $w_1 \geq \theta$
- $w_2 \geq \theta$

یعنی باید داشته باشیم $2\theta \leq w_1 + w_2 < \theta$ که برای $\theta > 0$ این ممکن نیست.

حال y را به این‌گونه تغییر دهیم:

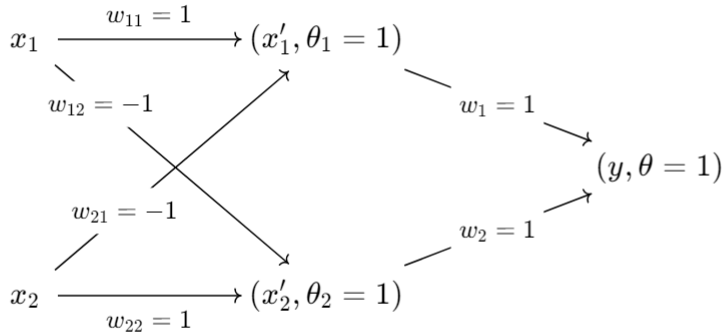
$$y = \begin{cases} 1 & f(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i) \geq \theta \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

که در آن

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0.5 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

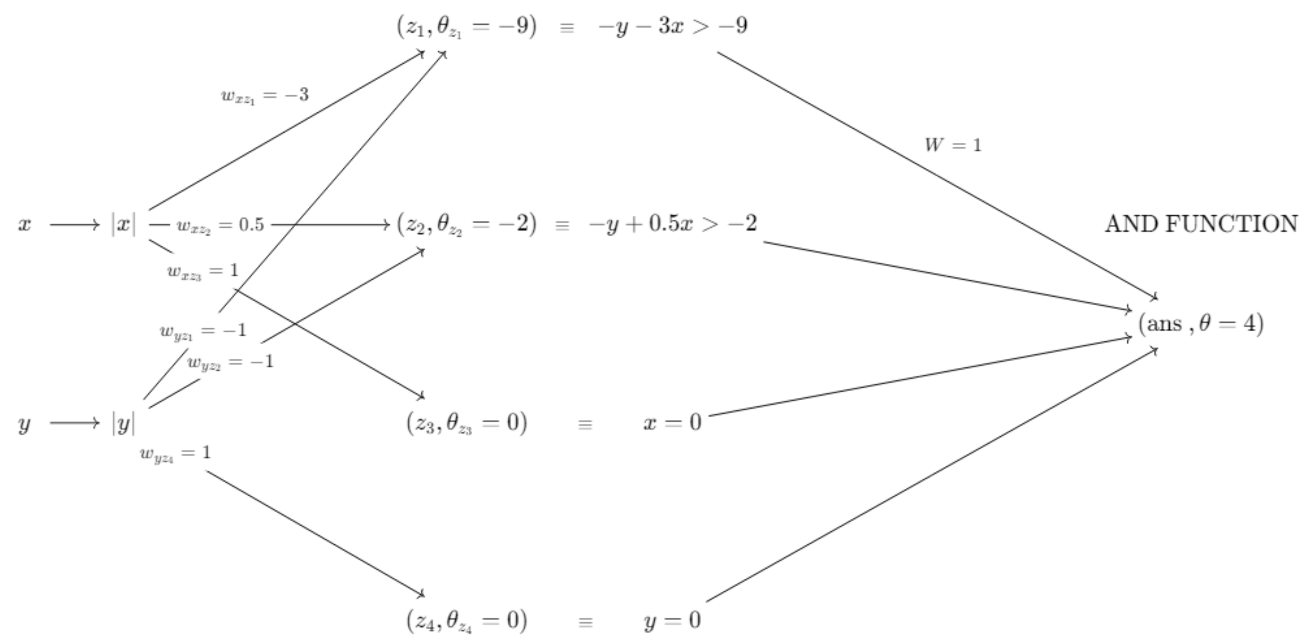
با این شبکه قرار دهیم: $w_1 = 0.75$، $w_2 = 0.75$ و $\theta = 1$.

- $x_1 = x_2 = 0$ آنگاه، $f(x_1w_1 + x_2w_2) = 0 \leq 1$ و نورون اسپایک نمی‌زند.
- $\max(x_1, x_2) = 1, \min(x_1, x_2) = 0$ آنگاه $f(x_1w_1 + x_2w_2) = 1 \geq 1$ و در نتیجه نورون اسپایک می‌زند.
- $x_1 = x_2 = 1$ آنگاه $f(x_1w_1 + x_2w_2) = f(1.5) = 0$ و در نتیجه نورون اسپایک نمی‌زند.



شکل ۷: شبکه‌ای برای نشان‌دادن XOR

اگر بدون تغییر ضابطه تابع بخواهیم سیستم را طراحی کنیم دو لایه میانی اضافه می‌کنیم. مانند (۷)



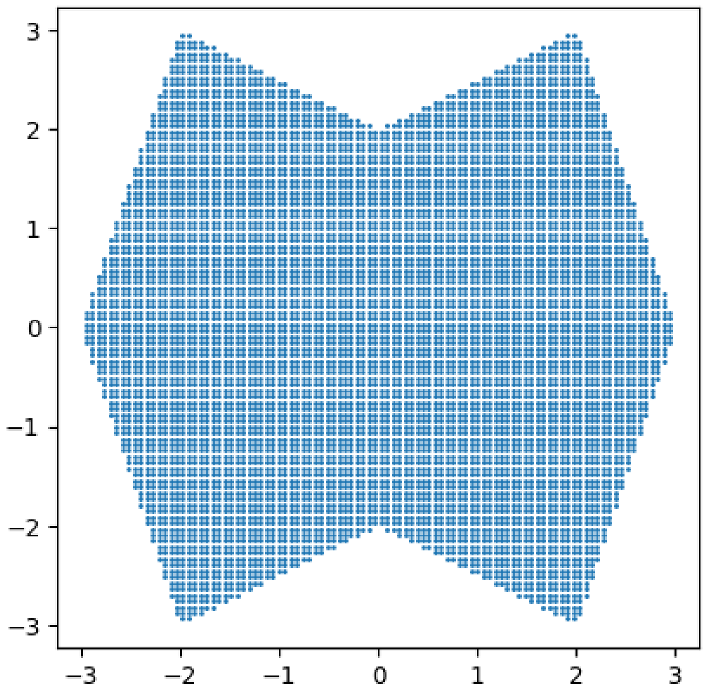
شکل ۸: سوال ۴ قسمت ۱

۴ سوال ۴

۱. شبکه‌ی (۸) را در نظر بگیریم. در این شبکه تمامی activation function ها تابع پله‌ای با آستانه‌ی θ هستند. و وزن‌ها روی شکل مشخص شده. وزن‌های کشیده نشده‌ی w_{xz_4} و w_{yz_3} برابر صفر هستند.
هر کدام از نورون‌های $z_1, \ldots, z_4$ مشخص می‌کنند که نقطه‌ی داده‌شده در کدام طرف خط مشخص شده هستند. و در انتها اگر نقطه‌ی داده‌شده در سوی درستی قرار بگیرد، خروجی مقدار ۱ خواهد بود. در غیر این صورت خروجی صفر است.
اگر نخواهیم قدر مطلق هر کدام از دو مختصات نقطه را در نظر بگیریم، باید متناظر با هر کدام از خطوط کشیده‌شده در شکل، یک نورون در نظر بگیریم.

۲. این شبکه را روی ۱۰۰۰۰ نقطه اعمال کردیم و شکل (۹) پدید آمد [۱].

[۱] کدهای این قسمت در لینک notebook Jupiter قرار داده شده‌اند.



شکل ۹: طراحی شبکه