

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL – UEMS**

**CURSO DE ENGENHARIA FÍSICA**

**MATHEUS NUNES ORTLIEB**

**ANÁLISE DA DISTRIBUIÇÃO DA TEMPERATURA EM UMA  
BARRAGEM DE CONCRETO USANDO O MÉTODO DOS  
ELEMENTOS FINITOS (FEM)**

**DOURADOS - MS**

**Novembro, 2023**

**MATHEUS NUNES ORTLIEB**

**ANÁLISE DA DISTRIBUIÇÃO DA TEMPERATURA EM UMA  
BARRAGEM DE CONCRETO USANDO O MÉTODO DOS  
ELEMENTOS FINITOS (FEM)**

**Trabalho de Conclusão do Curso, apresentado  
para obtenção do grau de Engenheiro no Curso  
de Engenharia Física da Universidade  
Estadual do Mato Grosso do Sul, UEMS.**

**Orientador: Prof. Dr. Cosme Eustaquio Rubio  
Mercedes**

**DOURADOS - MS**

**Novembro, 2023**

---

O89a      Ortlieb, Matheus Nunes

Análise da distribuição da temperatura em uma barragem de concreto usando o Método dos Elementos Finitos (FEM) / Matheus Nunes Ortlieb. – Dourados, MS: UEMS, 2023. 75 p.

Monografia (Graduação) – Engenharia Física – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, 2023.

Orientador: Prof. Dr. Cosme Eustáquio Rubio Mercedes

1. Comportamento térmico 2. Concreto massa 3. Geração de calor interno 4. Hidratação do cimento 5. Método dos elementos finitos I. Mercedes, Cosme Eustáquio Rubio II. Título

CDD 23. ed. - 620.1

---

Elaborada pela Bibliotecária Elaine Freire Lessa – CRB-1/0699p

Biblioteca Central da UEMS



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL

COORDENAÇÃO DO CURSO DE ENGENHARIA FÍSICA



GOVERNO  
DO ESTADO  
Mato Grosso do Sul

ATA DE DEFESA DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**MATHEUS NUNES ORTLIEB**

Aos vinte e nove dias do mês de novembro de dois mil e vinte e três, às quatorze horas, Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul (UEMS), Unidade de Dourados, em sessão pública, reuniu-se a Banca Examinadora composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. Cosme Eustáquio Rubio Mercedes, Prof. Dr. Thiago Augusto dos Santos e Profa. Dra. Laís Corrêa para análise do Trabalho de Conclusão de Curso de Engenharia Física, do acadêmico Matheus Nunes Ortley. Iniciado o trabalho o Presidente deu conhecimento aos membros da Banca Examinadora e ao acadêmico sobre a regulamentação do processo de apresentação oral e defesa dos Trabalhos de Conclusão do Curso de Engenharia Física – Unidade de Dourados. A seguir o acadêmico apresentou seu trabalho, intitulado **“Análise da distribuição da temperatura em uma barragem de concreto usando o método dos elementos finitos (FEM)”**. Concluídos os trabalhos de apresentação e arguição, os examinadores reunidos consideraram o acadêmico APROVADO. Nada mais havendo a tratar, lavrou-se a presente ata, que vai assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Dourados, 29 de novembro de 2023.

**Prof. Dr. Cosme Eustáquio Rubio Mercedes – UEMS**  
Presidente da Banca Examinadora

**Prof. Dr. Thiago Augusto dos Santos – UEMS**  
Banca Examinadora

**Profa. Dra. Laís Corrêa – UFGD**  
Banca Examinadora

## **RESUMO**

Este trabalho apresenta uma metodologia para a análise numérica do comportamento térmico em estruturas de concreto massa, com foco em barragens de concreto, considerando variações térmicas que podem resultar em fissuras. Utilizando equações de condução de calor e contemplando a geração de calor interno durante a hidratação do cimento, o estudo aborda o comportamento térmico do concreto, estabelecendo limites para gradientes de temperatura. Apresentamos equações de condução de calor, cálculos para determinar a taxa de geração de calor interno, e a resolução numérica por meio do método dos elementos finitos (FEM). O objetivo é analisar a distribuição da temperatura em barragens, visando prevenir problemas de fissuração causados por variações térmicas.

**Palavras-chave:** Comportamento térmico; barragens; geração de calor interno; hidratação do cimento; método dos elementos finitos.

## **ABSTRACT**

This work presents a methodology for the numerical analysis of thermal behavior in mass concrete structures, with a focus on concrete dams, considering thermal variations that may lead to fissures. Using heat conduction equations and accounting for the internal heat generation during cement hydration, the study addresses the thermal behavior of concrete, establishing limits for temperature gradients. We introduce heat conduction equations, calculations to determine the internal heat generation rate, and numerical resolution through the Finite Element Method (FEM). The goal is to analyze the temperature distribution in dams, aiming to prevent cracking issues caused by thermal variations.

Keywords: thermal behavior; dams; internal heat generation; cement hydration; finite element method.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Condução de calor em um sólido.....	14
Figura 2 : Fluxo de calor em uma geometria 2D .....	15
Figura 3: Entrada e saída do fluxo de calor.....	17
Figura 4: Domínio bidimensional representando uma placa de material isotrópico...	19
Figura 5: Separação do problema em duas partes. ....	20
Figura 6: Transformação do problema dado na Figura 5 usando <b><math>\theta_1</math></b> e <b><math>\theta_2</math></b> .....	21
Figura 7: Distribuição da temperatura obtida pelo método analítico.....	28
Figura 8: Divisão do domínio retangular em elementos. ....	29
Figura 9: Malha com nós locais e globais. ....	30
Figura 10: exemplo de um elemento. ....	31
Figura 11: Elemento triangular linear e o vetor normal as arestas. ....	36
Figura 12: Discretização da coordenada temporal. ....	40
Figura 13: Geometria de uma placa retangular utilizando o Ansys SpaceClaim.....	42
Figura 14: Malha da placa retangular com 16 elementos.....	43
Figura 15: Condições de contorno do problema da placa retangular. ....	44
Figura 16: Campo de temperaturas na geometria com 16 elementos.....	44
Figura 17: Gráfico comparativo entre as soluções analítica e numérica com 16 elementos em $x=0.4$ . ....	45
Figura 18: Gráfico comparativo entre as soluções analítica e numérica com 16 elementos $y=1$ .....	46
Figura 19: Distribuição da temperatura na placa retangular com 2500 elementos....	47
Figura 20: Gráfico comparativo entre as soluções analítica e numérica para um domínio de 2500 elementos. ....	47
Figura 21: Gráfico comparativo entre as soluções numérica e analítica para um domínio de 2500 elementos. ....	48
Figura 22: Geometria de barragem. ....	49
Figura 23: Condição de convecção. ....	51
Figura 24: Condições de contorno Barragem regime estacionário.....	52
Figura 25: Propriedades do material no Ansys.....	53
Figura 26: Campo de temperaturas da barragem no regime estacionário. ....	54
Figura 27: Condições de contorno barragem bloco único. ....	56
Figura 28: Isotermas de temperatura para concretagem em uma camada.....	57

Figura 29: Temperatura máxima e média para barragem de bloco único .....	57
Figura 30: Geometria de estrutura de três camadas feita utilizando o Ansys. ....	58
Figura 31: Condições de contorno do bloco construído em 3 camadas.....	60
Figura 32: Condição de interface. ....	61
Figura 33: Temperaturas do modelo de validação. ....	62
Figura 34: Resultados obtidos por Kavamura. ....	64
Figura 35: Barragem construída em camadas. ....	65
Figura 36:Condições de contorno Barragem construída em camadas.....	65
Figura 37: Isotermas de temperatura de concretagem em 10 camadas. ....	66
Figura 38: Gráfico de temperaturas da barragem construída em camadas. ....	67
Figura 39: comparação de temperatura máxima entre os métodos de construção... <td>68</td>	68
Figura 40: Isotermas de temperatura para concretagem com baixo calor específico. <td>69</td>	69
.....	
Figura 41: Temperatura máxima e média para barragem com baixo calor específico. <td>70</td>	70
.....	
Figura 42: Isotermas de temperatura para concreto com alta condutividade térmica. <td>72</td>	72
.....	
Figura 43: Temperatura máxima e média para concreto com alta condutividade térmica. ....	73

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1: Matriz conectividade.....	29
Tabela 2: Comparação de Resultados do método analítico e numérico. ....	46
Tabela 3: Comparação de Resultados para uma Malha com 2500 Elementos.....	48
Tabela 4: Propriedades termomecânica do concreto. ....	50
Tabela 5: Elevação adiabática da temperatura e calor gerado. ....	55
Tabela 6: Temperatura em diferentes pontos da geometria para $x = 2m$ .....	64
Tabela 7: Valores típicos de condutividade térmica de concreto.....	71

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>OBJETIVOS .....</b>	<b>12</b>
<b>2.1</b>	<b>OBJETIVO GERAL .....</b>	<b>12</b>
<b>2.2</b>	<b>OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....</b>	<b>12</b>
<b>3</b>	<b>MODELAMENTO MATEMÁTICO .....</b>	<b>13</b>
<b>3.1</b>	<b>CONCRETO MASSA .....</b>	<b>13</b>
<b>3.2</b>	<b>EQUAÇÕES DA CONDUÇÃO DE CALOR.....</b>	<b>14</b>
<b>3.3</b>	<b>EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DO FLUXO DE CALOR .....</b>	<b>17</b>
<b>3.4</b>	<b>GERAÇÃO DE CALOR INTERNO .....</b>	<b>18</b>
<b>3.5</b>	<b>MÉTODO ANALÍTICO PARA RESOLVER A EQUAÇÃO (3.8).....</b>	<b>19</b>
<b>4</b>	<b>MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....</b>	<b>28</b>
<b>4.1</b>	<b>MÉTODO DE GALERKIN PARA FORMULAÇÃO .....</b>	<b>33</b>
<b>4.2</b>	<b>MÉTODO EULER REGRESSIVO (TRANSIENTE) .....</b>	<b>39</b>
<b>5</b>	<b>SIMULAÇÕES NUMÉRICAS .....</b>	<b>42</b>
<b>5.1</b>	<b>SOLUÇÃO DE UMA PLACA RETANGULAR UTILIZANDO O ANSYS.....</b>	<b>42</b>
<b>5.1.1</b>	<b>Comparação com o método analítico .....</b>	<b>45</b>
<b>5.2</b>	<b>ANALISE TÉRMICA EM BARRAGENS .....</b>	<b>48</b>
<b>5.2.1</b>	<b>Analise em regime estacionário .....</b>	<b>49</b>
<b>5.2.2</b>	<b>Analise em regime transiente .....</b>	<b>54</b>
<b>5.2.3</b>	<b>Perfil de barragem construído em bloco único.....</b>	<b>55</b>
<b>5.2.4</b>	<b>Bloco de concreto construído em camadas .....</b>	<b>58</b>
<b>5.2.5</b>	<b>Perfil de barragem construído em camas .....</b>	<b>64</b>
<b>5.3</b>	<b>MUDANÇA NAS PROPRIEDADES DO MATERIAL .....</b>	<b>68</b>
<b>5.3.1</b>	<b>Calor específico .....</b>	<b>68</b>
<b>5.3.2</b>	<b>Condutividade termica .....</b>	<b>70</b>
<b>6.</b>	<b>CONCLUSÃO .....</b>	<b>74</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A termodinâmica é a ciência responsável pelo estudo do comportamento térmico em um objeto ou ambiente, tornando-se uma área essencial da física para a análise computacional de problemas envolvendo transferência de calor. É necessário ter conhecimento dos fatores que atuam sobre o objeto de estudo, além de toda formulação matemática e física que cercam o problema de transferência de calor em concreto massa. Portanto, a fim de prever e comprovar a distribuição da energia térmica sobre as geometrias de uma barragem, é necessário formular as condições de contorno e equações de calor para casos transientes no tempo e não transientes.

Uma ferramenta necessária neste trabalho é o Método dos Elementos Finitos (MEF, ou do inglês FEM). Ele é um procedimento numérico para determinar soluções aproximadas de problemas de equações diferenciais sobre o domínio e contorno de uma determinada geometria. Ao aumentar o número de elementos que dividem o domínio, obtêm-se resultados mais precisos para um esquema consistente e convergente. Para aplicar este método em ferramentas computacionais, é necessário comunicar à máquina o formato da geometria, a disposição da malha, o espaço da solução e as equações que regem o comportamento do problema. Dessa forma, o método apresentará resultados em diferentes pontos do domínio.

## 2 OBJETIVOS

### 2.1 Objetivo Geral

Este trabalho tem como objetivo estudar numericamente o comportamento térmico em geometrias bidimensionais do tipo barragem, aplicando conceitos térmicos reais presentes no concreto e verificando sua fidelidade numérica às hipóteses propostas na bibliografia. O trabalho se apoiará em resultados importantes já estabelecidos para comprovar a precisão das simulações.

### 2.2 Objetivos Específicos

Usar uma geometria de uma estrutura de barragem de concreto e fazer sua representação computacional através do software de simulação ANSYS Mechanical.

Realizar uma análise das soluções obtidas utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF) para resolver numericamente as equações de calor em duas dimensões.

Implementar as condições de contorno e a geometria, baseando-se em situações reais.

Comparar os resultados numéricos com os resultados analíticos e experimentais, quando possível.

### 3 MODELAMENTO MATEMÁTICO

#### 3.1 Concreto massa

O concreto massa é um termo utilizado para descrever o uso do concreto em estruturas de dimensões suficientes para que o comportamento térmico possa resultar em fissuração. Portanto, são estudadas e aplicadas medidas preventivas apropriadas para evitar, reduzir e controlar a abertura e o espaçamento das fissuras. Segundo Neville (2016, p. 410), "o aspecto fundamental do concreto massa é seu comportamento térmico, sendo um dos objetivos do projeto evitar - ou reduzir - e controlar a abertura e o espaçamento das fissuras".

Uma mudança na temperatura de uma estrutura resulta em uma mudança de volume, mas mudanças uniformes em uma construção de concreto sem restrições não vão produzir quaisquer tensões. Entretanto, uma parte da estrutura certamente estará restringida externamente de alguma forma, e as mudanças de volume não são uniformes devido à distribuição desigual de temperatura. Essa distribuição não uniforme da temperatura ocorre devido à baixa difusividade térmica do concreto. Dependendo da quantidade de calor de hidratação gerado na estrutura, do tamanho da estrutura, das condições de contorno e da temperatura ambiente, o gradiente de temperatura da parte interna e externa do sólido será muito grande.

O calor de hidratação é gerado durante um processo exotérmico, e assim como em várias reações químicas, a hidratação dos compostos do cimento também é exotérmica, liberando grandes quantidades de energia. Devido às suas propriedades, o cimento possui baixa difusividade térmica, o que o torna um isolante térmico. Dependendo do tamanho do bloco, essa característica pode resultar em aumentos significativos de temperatura em seu interior, enquanto as extremidades podem apresentar temperaturas mais baixas devido aos processos de condução e convecção.

De acordo com Neville (2016) no seu livro intitulado "Propriedades do Concreto", o limite recomendado para o gradiente interno e externo da temperatura é de 20°C. Considerando esse valor e o coeficiente de dilatação térmica do concreto como sendo  $10 \times 10^{-6} /^\circ\text{C}$ , a deformação diferencial é  $200 \times 10^{-6}$ . A deformação diferencial é uma medida importante para avaliar o comportamento térmico e a estabilidade de uma estrutura de concreto, pois a deformação diferencial refere-se à diferença de deformação ou alongamento que ocorre entre diferentes partes de um

material ou estrutura, o que pode resultar em tensões internas e potencialmente levar a fissuras ou outros danos estruturais.

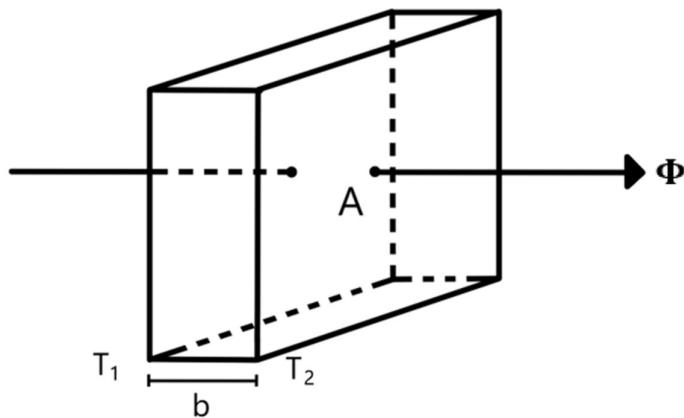
### 3.2 Equações da condução de calor

Como em qualquer problema físico, há modelos que regem o comportamento de um determinado fenômeno, não sendo diferente para o caso de fluxo de energia térmica. Em materiais isotrópicos, a quantidade de calor que flui pela área de uma parede por unidade de tempo devido a uma diferença de temperatura é denominada taxa de fluxo de calor e o esquema pode ser observado na Figura 1, onde para este caso a lei de Fourier, pode ser expressa da seguinte forma: (HUANG e USMANI, 1994, p. 8).

$$\Phi = \frac{k}{b} A \Delta T . \quad (3.1)$$

onde  $\Phi$  [ $\text{W/m}^{-2}$ ] é a taxa de fluxo de calor,  $k$  [ $\text{W/m}^\circ\text{C}$ ] é a condutividade térmica do material,  $b$  é a espessura do material em [m],  $A$  é a área do material em [ $\text{m}^2$ ] e  $\Delta T$  é a diferença de temperatura entre duas superfícies.

Figura 1: Condução de calor em um sólido.



Fonte: Autoria própria.

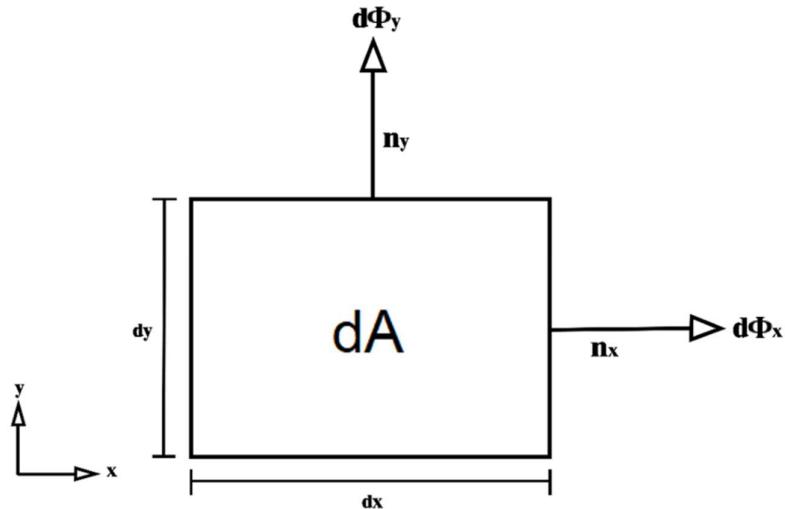
Para o caso de geometrias 2D, não há uma profundidade a ser considerada, portanto podemos substituir a variação de temperatura  $\Delta T$  pela variação infinitesimal de temperatura  $\partial T$  e a espessura  $b$  pelo comprimento do vetor normal à superfície do

elemento  $\partial n$ , onde  $n$  é o vetor normal ao plano da superfície do elemento  $dA$ , como mostrado na Figura 2. Dessa forma, podemos obter a taxa de fluxo de calor  $d\Phi$  sobre uma superfície  $dA$ . (HUANG e USMANI, 1994, p. 8).

$$d\Phi = -k dA \frac{\partial T}{\partial n}. \quad (3.2)$$

Na Figura 2, observamos a taxa de fluxo de calor nas superfícies de um diferencial em um domínio 2D. Na mesma figura podemos ver que o diferencial da sua área é obtido pelo produto da largura  $dx$  e altura  $dy$ , e a variação de temperatura ao longo da extensão da geometria vai ser dada na direção do vetor normal ao plano da superfície do elemento  $dA = dx \times dy$ , que serão paralelos aos eixos  $x$  e  $y$ . O sinal negativo na equação simboliza que o fluxo de calor flui para a direção de menor temperatura

Figura 2 : Fluxo de calor em uma geometria 2D



Fonte: Autoria própria.

A taxa de fluxo de calor atravessando o diferencial da área da geometria vai ser orientado pelo vetor normal ao plano da superfície, para o eixo  $x$  temos  $d\Phi_x$  e para o eixo  $y$  temos  $d\Phi_y$ . De forma análoga, a quantidade de calor que flui penetrando uma unidade de área de uma denominada superfície é chamada de fluxo de calor  $q$  [W/m<sup>2</sup>], e a equação (3.3) é obtida.

$$q_n = -k \frac{\partial T}{\partial n}. \quad (3.3)$$

A equação (3.3) é a expressão matemática para o princípio básico da condução de calor, chamada de lei de Fourier, que indica que o calor é proporcional ao gradiente da temperatura.

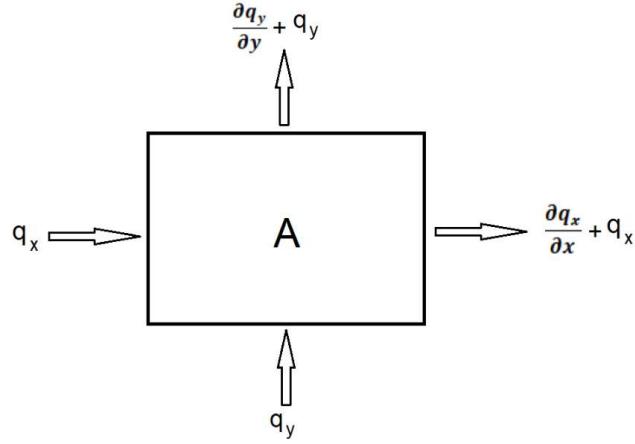
Para um sólido descrito pelo sistema de coordenadas do plano cartesiano, podemos escrever o fluxo de calor nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente como mostrado a seguir.

$$\begin{aligned} q_x &= -k \frac{\partial T}{\partial x}, \\ q_y &= -k \frac{\partial T}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Usando as equações (3.2) e (3.3), que governam a condução de calor sobre um sólido, podemos escrever as equações para a condução térmica. Considerando um material isotrópico em um sistema bidimensional, o calor fluindo por uma área em uma unidade de tempo é denotado por  $q$ , e a diferença entre a saída de fluxo e a entrada de fluxo pode ser observada na Figura 3 e é dado pela equação abaixo. (HUANG e USMANI, 1994, p. 13).

$$\Delta q = dy \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} - q_x \right) + dx \left( q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} - q_y \right). \quad (3.5)$$

Figura 3: Entrada e saída do fluxo de calor.



Fonte: Autoria própria.

Para garantir que o calor seja conservado, precisamos considerar que a mudança total de calor no diferencial seja igual a soma do calor que ele produz internamente, representado por  $Q dxdy$ , e o calor que flui para dentro ou para fora dele devido às variações de temperatura. Podendo ser expresso da seguinte forma:

$$\Delta q = Q dxdy - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx dy, \quad (3.6)$$

onde  $c$  é o calor específico em  $[J/kg^{\circ}C]$  e  $\rho$  é a densidade do material em  $[kg/m^3]$ , podemos usar a equação (3.5) para chegarmos a

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} - Q + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad (3.7)$$

a qual descreve o comportamento térmico em um domínio bidimensional.

### 3.3 Equações diferenciais do fluxo de calor

Na equação (3.7) podemos substituir o valor do fluxo de calor dado pela equação (3.4) para obtermos uma equação diferencial de ordem maior em uma variável dependente.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - Q + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (3.8)$$

A qual é uma equação diferencial parcial linear com uma função escalar  $T(x, y)$ , a temperatura no ponto  $(x, y)$  do campo.

### 3.4 Geração de calor interno

Como mencionado anteriormente, a resolução dos problemas térmicos abordados requer o uso das equações de calor. Portanto, é essencial considerar o calor de hidratação ao lidar com o concreto massa, uma vez que esse fenômeno representa a geração de calor interna.

Segundo Mehta e Monteiro (2008) a geração de calor no concreto massa está associado a elevação adiabática da temperatura  $T_a$ . A equação (3.9) mostra a relação entre a temperatura adiabática e a geração de calor interno  $w$  do concreto.

$$T_a = \frac{\beta}{c\rho} w, \quad (3.9)$$

onde  $\beta$  é o consumo de cimento em  $[kg/m^3]$ . O calor de hidratação é obtido por unidade de massa do cimento, sendo necessário o uso do fator  $\beta/\rho$  para calcular o calor de hidratação por unidade de massa. A taxa de geração de calor interno  $Q_h$   $[W/m^3]$  é relacionada ao calor de hidratação através da seguinte equação

$$Q_h = \beta \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (3.10)$$

e usando a equação (3.9), obtém-se

$$Q_h = \rho c \frac{\partial T_a}{\partial t}. \quad (3.11)$$

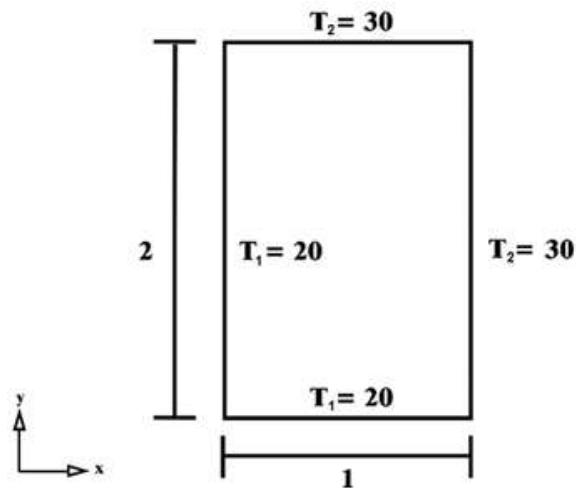
Dessa forma, podemos calcular a taxa de geração de calor utilizando a densidade do concreto e o calor específico, para posteriormente aplicarmos esses valores na Lei de Fourier (3.8).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - Q_h + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (3.12)$$

### 3.5 Método analítico para resolver a equação (3.8)

Para analisarmos a confiabilidade do método dos elementos finitos, propomos um problema simples e comparamos os resultados obtidos pelo método numérico usando o software Ansys com os resultados do método analítico. O problema abordado é o seguinte: considerando uma geometria retangular com dimensões  $0\text{mm} \leq x \leq 1\text{mm}$ , e  $0\text{mm} \leq y \leq 2\text{mm}$ , veja a Figura 4, onde dois lados da placa retangular são mantidos a uma temperatura constante  $T_1 = 20^\circ\text{C}$  e os outros dois lados são mantidos a uma temperatura constante  $T_2 = 30^\circ\text{C}$ . Supomos que a placa seja feita de um material isotrópico e que a transferência de calor por convecção e condução nas bordas da placa seja desprezível.

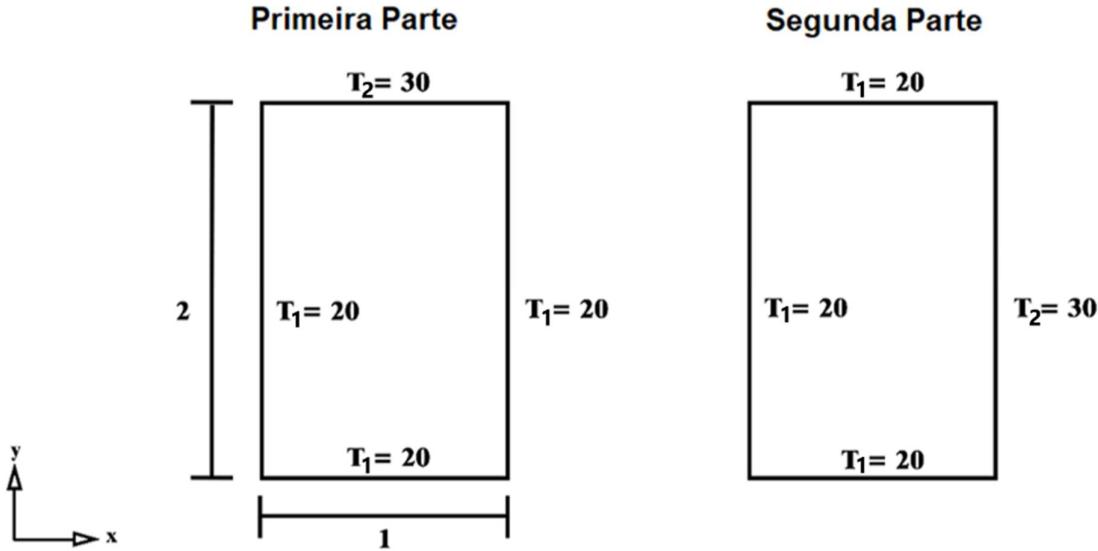
Figura 4: Domínio bidimensional representando uma placa de material isotrópico.



Fonte: adaptado de HICKMANN et. al. (2015).

Para abordar esse problema pelo método analítico usamos o método de separação de variáveis. Realizamos uma separação da solução em duas partes e, no final, combinamos as soluções para obter o resultado desejado,

Figura 5: Separação do problema em duas partes.



Fonte: adaptado de HICKMANN et. al. (2015).

Neste caso, que trata de um problema bidimensional em regime estacionário, sem geração de calor interno e com condutividade térmica constante, podemos simplificar a equação da condução de calor (3.8).

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0. \quad (3.13)$$

Para simplificar os cálculos e melhorar a visualização, vamos utilizar a seguinte transformação. (HICKMANN et al. 2015, p. 3).

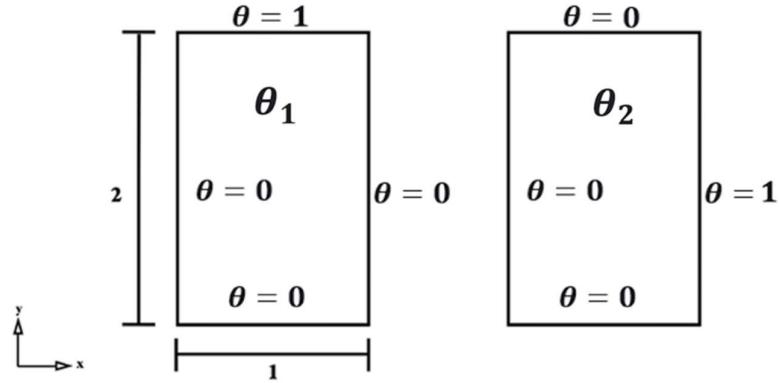
$$\theta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}, \quad (3.14)$$

onde  $T_1$  é a temperatura de  $20^\circ\text{C}$  e  $T_2$  é a temperatura de  $30^\circ\text{C}$ , portanto a função final é dada pela equação:

$$\theta(x, y) = \theta_1(x, y) + \theta_2(x, y). \quad (3.15)$$

Sendo assim nosso problema fica da seguinte forma:

Figura 6: Transformação do problema dado na Figura 5 usando  $\theta_1$  e  $\theta_2$ .



Fonte: adaptado de HICKMANN et. al. (2015).

onde  $\theta$ ,  $\theta_1$  e  $\theta_2$  representam a solução final, a solução da primeira parte e a solução da segunda parte, respectivamente.

### 1º parte da solução:

Aplicamos o método de separação de variáveis na primeira parte do problema:

$$\theta_1(x, y) = X_1(x) Y_1(y). \quad (3.16)$$

onde as funções  $X_1$  e  $Y_1$  dependem de  $x$  e  $y$  respectivamente. Derivando parcialmente em relação a  $x$ , a equação (3.16) duas vezes, temos:

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2} Y_1. \quad (3.17)$$

e fazendo o mesmo para  $y$ :

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 Y_1}{\partial y^2} X_1 . \quad (3.18)$$

Usando (3.17) e (3.18) na equação da condução de calor (3.13), obtemos a seguinte equação:

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2} Y_1 + \frac{\partial^2 Y_1}{\partial y^2} X_1 = 0 , \quad (3.19)$$

onde tanto  $X_1$  quanto  $Y_1$  são diferentes de 0. Dividindo (3.19) por  $X_1$  e  $Y_1$ , obtemos:

$$-\frac{1}{X_1(x)} \frac{\partial^2 X_1(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y_1(y)} \frac{\partial^2 Y_1(y)}{\partial y^2} = \lambda^2 . \quad (3.20)$$

Essa igualdade pode ser aplicada a qualquer x ou y, desde que ambos os lados sejam iguais a uma constante  $\lambda^2$ , chamada de constante de separação. Identificando a constante de separação, temos:

$$\frac{\partial^2 X_1(x)}{\partial x^2} + \lambda^2 X_1(x) = 0 , \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial^2 Y_1(y)}{\partial y^2} - \lambda^2 Y_1(y) = 0 .$$

Nos casos em que a constante de separação é maior ou igual a zero, obtemos soluções que não satisfazem as condições de contorno propostas. No caso em que a constante de separação é menor que zero, temos as seguintes soluções:

$$\begin{aligned} X_1(x) &= C_1 \cos(x\lambda) + C_2 \sin(x\lambda) , \\ Y_1(y) &= C_3 e^{\lambda y} + C_4 e^{-\lambda y} . \end{aligned} \quad (3.22)$$

Uma vez que aplicarmos as condições de contorno, podemos encontrar valores para as constantes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  e para a constante de separação.

Para  $\theta_1(0, y) = 0$ , temos que  $X_1(0) = C_1$ . O que implica que  $C_1$  é igual a 0.

Para  $\theta_1(x, 0) = 0$ , temos que  $Y_1(0) = C_3 + C_4$ . O que indica que  $C_3$  é igual a menos  $C_4$ .

Para a condição  $\theta_1(1, y) = 0$ , temos  $X_1(1) = C_2 \operatorname{sen}(\lambda)$ .

Para satisfazer a condição  $\theta_1(1, y) = 0$ , temos dois casos: o primeiro caso em que  $C_2$  é igual a zero e outro caso em que  $\operatorname{sen}(\lambda)$  seja igual a zero. No entanto, se  $C_2$  for igual a zero, obtemos uma solução trivial que não representa o comportamento da temperatura na placa. Portanto, a única solução possível para esta condição é quando a constante de separação assume valores discretos em que  $\operatorname{sen}(\lambda)$  é igual a zero. Dessa forma, a constante de separação é determinada por:

$$\lambda = \frac{n\pi}{1}, \quad (3.23)$$

onde  $n$  assume valores positivos e inteiros.

Portanto reescrevendo a equação (3.16) substituindo  $X_1$  e  $Y_1$  presentes na equação (3.22) temos a seguinte equação para a solução da primeira parte:

$$\theta_1(x, y) = (C_1 \cos(x\lambda) + C_2 \operatorname{sen}(x\lambda)) (C_3 e^{\lambda y} + C_4 e^{-\lambda y}). \quad (3.24)$$

Trocando os valores das constantes  $C_1$  e  $C_3$  encontradas através das condições de contorno, e sabendo que elas podem depender de  $n$ , a solução geral é dada por

$$\theta_1(x, y) = C_2 C_4 \operatorname{sen}(n\pi x) (e^{n\pi y} - e^{-n\pi y}). \quad (3.25)$$

Observando que a solução é periódica e que a constante  $\lambda$  depende de  $n$ , podemos reescrever a solução  $\theta_1$  de forma mais geral

$$\theta_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{senh}(n\pi y). \quad (3.26)$$

Agora para encontrar as constantes  $C_n$ , vamos aplicar a última condição de contorno desta parte da solução, quando  $\theta_1(x, 2) = 1$ .

$$\theta_1(x, 2) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x) \operatorname{senh}(2n\pi) = 1. \quad (3.27)$$

Utilizando um método de expansão em série infinita em termos das funções ortogonais, podemos encontrar as constantes  $C_n$ , onde para todo  $g_n(x)$  é dito ser ortogonal no domínio  $a \leq x \geq b$  caso:

$$\int_a^b g_m(x) g_n(x) dx = 0 \quad \text{para } n \neq m, \quad (3.28)$$

onde todas as funções são ortogonais, e a utilidade delas reside no fato de que qualquer função  $f(x)$  pode ser expressa em termos de séries infinitas de funções ortogonais como representado abaixo.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n g_n(x). \quad (3.29)$$

Multiplicando ambos os lados por  $g_n(x)$  e integrando-os nos limites de integração entre 0 e 1 obtemos a seguinte equação.

$$\int_0^1 g_n(x) f(x) dx = \int_0^1 g_n(x) \sum_{n=1}^{\infty} A_n g_n(x) dx. \quad (3.30)$$

Sendo  $f(x)$  igual a 1, e a função  $g_n(x)$  igual a  $\sin(n\pi x)$  obtemos:

$$A_n = \frac{\int_0^1 \sin(n\pi x) dx}{\int_0^1 (\sin(n\pi x))^2 dx} = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n}, \quad (3.31)$$

e a partir da equação (3.29) podemos escrever:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \operatorname{sen}(n\pi x) = 1. \quad (3.32)$$

Com as equações (3.27) e (3.32), obtemos valores para  $C_n$ .

$$C_n = \frac{2[(-1)^{n+1} + 1]}{n\pi \operatorname{senh}(2n\pi)}. \quad (3.33)$$

Sendo assim, pela equação (3.26) obtemos a solução para esta primeira parte.

$$\theta_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{senh}(n\pi y) \frac{2[(-1)^{n+1} + 1]}{n\pi \operatorname{senh}(2n\pi)}. \quad (3.34)$$

### 2º parte da solução:

De forma análoga à realizada na primeira parte, foi feito o cálculo para a solução da segunda parte. Partindo da equação (3.20), só será possível satisfazer as condições de contorno com valores positivos para a constante de separação.

$$\begin{aligned} X_2(x) &= C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}, \\ Y_2(y) &= C_3 \cos(y\lambda) + C_4 \operatorname{sen}(y\lambda). \end{aligned} \quad (3.35)$$

E aplicando as condições de contorno para a segunda parte da solução temos:

Para  $\theta_2(0, y) = 0$ , temos que  $X_2(0) = C_1 + C_2$ . O que implica que  $C_1$  é igual a menos  $C_2$ .

Para  $\theta_2(x, 0) = 0$ , temos que  $Y_2(0) = C_3$ . O que indica que  $C_3$  é igual a zero.

Para a condição  $\theta_2(x, 1) = 0$ , temos  $Y_2(1) = C_4 \operatorname{sen}(\lambda) = 0$ .

Para satisfazer a condição  $\theta_2(x, 1) = 0$  a única solução possível é quando a constante de separação assume valores discretos em que  $\operatorname{sen}(\lambda)$  é igual a zero. Dessa forma, a constante de separação é determinada por:

$$\lambda = \frac{n\pi}{2}, \quad (3.36)$$

onde  $n$  assume valores positivos e inteiros.

Portanto, reescrevendo a equação (3.16) substituindo  $X_2$  e  $Y_2$  presentes na equação (3.35), temos a seguinte equação para a solução da segunda parte:

$$\theta_2(x, y) = (C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x})(C_3 \cos(y\lambda) + C_4 \sin(y\lambda)). \quad (3.37)$$

Trocando os valores das constantes  $C_2$  e  $C_3$  encontradas através das condições de contorno e sabendo que elas podem depender de  $n$ , a solução geral é dada por:

$$\theta_2(x, y) = C_1 C_4 \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \left(e^{\frac{n\pi y}{2}} - e^{-\frac{n\pi y}{2}}\right). \quad (3.38)$$

Observando que a solução é periódica e que a constante  $\lambda$  depende de  $n$ , podemos reescrever a solução  $\theta_2$  de forma mais geral

$$\theta_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{2}\right). \quad (3.39)$$

Agora para encontrar as constantes  $C_n$ , vamos aplicar a última condição de contorno desta parte da solução, quando  $\theta_2(1, y) = 1$ .

$$\theta_2(1, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{2}\right) = 1, \quad (3.40)$$

e utilizando um método de expansão em série infinita em termos das funções ortogonais, podemos encontrar as constantes  $C_n$ , em que para todo  $g_n(y)$  é dito ser ortogonal no domínio  $a \leq y \leq b$  caso:

$$\int_a^b g_m(y) g_n(y) dy = 0 \quad \text{para } n \neq m. \quad (3.41)$$

Todas as funções são ortogonais e sua utilidade reside no fato de que qualquer função  $f(y)$  pode ser expressa em termos de séries infinitas de funções ortogonais, como representado abaixo.

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n g_n(y). \quad (3.42)$$

Multiplicando ambos os lados por  $g_n(y)$  e integrando nos limites de integração entre 0 e 2 obtemos a seguinte equação.

$$\int_0^2 g_n(y) f(y) dy = \int_0^2 g_n(y) \sum_{n=1}^{\infty} A_n g_n(y) dy. \quad (3.43)$$

Considerando  $f(y)$  igual a 1 e a função  $g_n(y)$  igual a  $\sin\left(\frac{n\pi y}{2}\right)$  obtemos

$$A_n = \frac{\int_0^2 \sin\left(\frac{n\pi y}{2}\right) dy}{\int_0^2 (\sin\left(\frac{n\pi y}{2}\right))^2 dy} = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n}, \quad (3.44)$$

e a partir da equação (3.42), podemos escrever:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin\left(\frac{n\pi y}{2}\right) = 1 \quad (3.45)$$

Com as equações (3.45) e (3.40), obtemos valores para  $C_n$ .

$$C_n = \frac{2[(-1)^{n+1} + 1]}{n\pi \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}. \quad (3.46)$$

Sendo assim, pela equação (3.39), obtemos a segunda parte da solução.

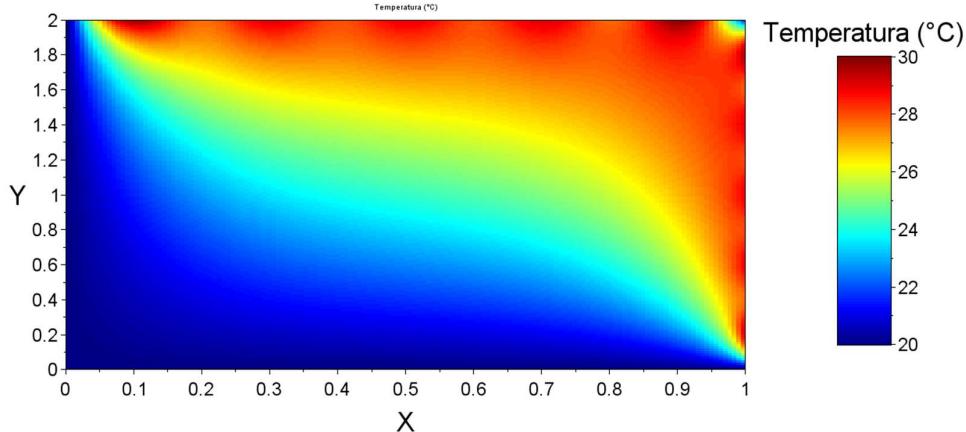
$$\theta_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{2}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \frac{2[(-1)^{n+1} + 1]}{n\pi \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}. \quad (3.47)$$

E como mencionado na equação (3.15), a solução para o problema é dada pela soma das soluções em cada uma das partes.

$$\begin{aligned} \theta(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{senh}(n\pi y) \frac{2[(-1)^{n+1} + 1]}{n\pi \operatorname{senh}(2n\pi)} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{2}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \frac{2[(-1)^{n+1} + 1]}{n\pi \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

O gráfico da solução é apresentado na Figura 7 para 110 termos no somatório.

Figura 7: Distribuição da temperatura obtida pelo método analítico.

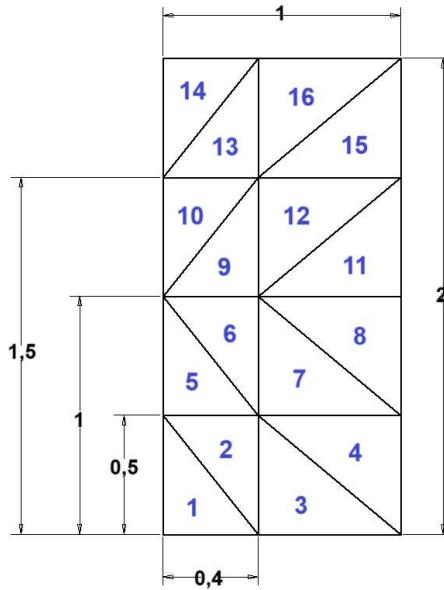


Fonte: Autoria própria.

#### 4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos divide o domínio do problema em elementos, permitindo a representação de soluções aproximadas por meio de funções polinomiais definidas em cada elemento. Iniciamos o processo dividindo o domínio em partes; esses serão os nossos elementos finitos que comporão a nossa malha [JIN, 2002].

Figura 8: Divisão do domínio retangular em elementos.



Fonte: Autoria própria.

Os elementos estão relacionados a 3 ou 6 nós se forem lineares ou quadráticos respectivamente. No nosso caso, temos elementos triangulares compostos por três nós, aos quais são atribuídos números locais que estão relacionados tanto a um elemento específico quanto ao sistema como um todo. Para estabelecer a relação entre o número do nó global, o número do nó local e o número do elemento, é introduzido um arranjo de inteiros (ver Tabela 1). Esse arranjo, denominado de matriz de conectividade, é designado como  $n(i, e)$ , onde “ $i$ ” representa o número do nó local (pertencente ao elemento) e assume valores de  $i = 1, 2, 3$ . O “ $e$ ” representa o elemento, variando de 1 até  $M$ , onde  $M$  é o número total de elementos. Isso permite a associação de cada nó local de um elemento na numeração global do sistema, como ilustrado na Figura 9.

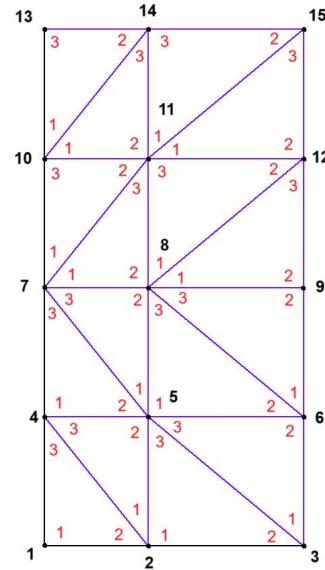
Tabela 1: Matriz conectividade.

$e$	$n(1,e)$	$n(2,e)$	$n(3,e)$
1	1	2	4
2	2	5	4
3	2	3	5
4	3	6	5

5	4	5	7
6	5	8	7
7	5	6	8
8	6	9	8
9	7	8	11
10	7	11	10
11	8	9	12
12	8	12	11
13	10	11	14
14	10	14	13
15	11	12	15
16	11	15	14

Fonte: Autoria própria.

Figura 9: Malha com nós locais e globais.



Fonte: Autoria própria.

Essa numeração local não é única; ela pode ser organizada de qualquer maneira, contando que siga a sequência no sentido anti-horário.

Após a discretização do domínio, é feita uma aproximação da função incógnita em cada elemento. Para o uso de elementos triangulares lineares, a função incógnita em cada elemento é aproximada da seguinte forma:

$$\varphi^e(x, y) = a^e + b^e x + c^e y, \quad (4.1)$$

ou

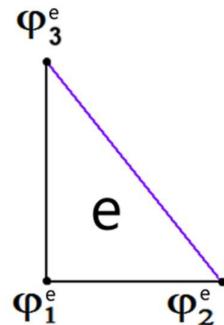
$$\varphi^e(x, y) = X(x, y)\{\beta^e\}, \quad (4.2)$$

para  $X = \langle 1 \ x \ y \rangle$  e  $\beta = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ , em que  $a^e$ ,  $b^e$  e  $c^e$  são constantes a serem determinadas em cada elemento.

Nos elementos triangulares lineares, existem três nós localizados nos vértices de cada triângulo. Assumindo que os nós são numerados no sentido anti-horário como 1, 2 e 3, as respectivas funções incógnitas são denotadas como  $\varphi_1^e$ ,  $\varphi_2^e$  e  $\varphi_3^e$ .

Para facilitar a visualização, vamos usar o seguinte elemento como exemplo.

Figura 10: exemplo de um elemento.



Fonte: JIN (2002).

Para cada nó:

$$\begin{aligned} \varphi_1^e(x_1^e, y_1^e) &= a^e + b^e x_1^e + c^e y_1^e = \varphi_1, \\ \varphi_2^e(x_2^e, y_2^e) &= a^e + b^e x_2^e + c^e y_2^e = \varphi_2, \\ \varphi_3^e(x_3^e, y_3^e) &= a^e + b^e x_3^e + c^e y_3^e = \varphi_3, \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde  $x_j^e$  e  $y_j^e$  ( $j = 1, 2, 3$ ) representam os valores das coordenadas dos nós "j" em cada elemento, e podem ser organizados em uma matriz geral da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^e \\ b^e \\ c^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1^e \\ \varphi_2^e \\ \varphi_3^e \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

ou na forma mais compacta:

$$[B^e]\{\beta^e\} = \{\varphi^e\}, \quad (4.5)$$

possibilitando encontrar " $\{\beta^e\}$ " invertendo a matriz  $[B^e]$ .

$$\{\beta^e\} = [B^{-1^e}]\{\varphi^e\}, \quad (4.6)$$

sendo o valor de  $[B^{-1^e}]$  podendo ser encontrado pelo método de cofatores e será dado seguinte forma: (SOUZA, 2003, p.23)

$$[B^{-1^e}] = \frac{1}{2\Delta^e} \begin{bmatrix} (x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e) & (x_3^e y_1^e - x_1^e y_3^e) & (x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e) \\ (y_2^e - y_3^e) & (y_3^e - y_1^e) & (y_1^e - y_2^e) \\ (x_3^e - x_2^e) & (x_1^e - x_3^e) & (x_2^e - x_1^e) \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

onde  $\Delta^e$  representa o valor da área do elemento.

$$\Delta^e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{vmatrix}. \quad (4.8)$$

Resolvendo a Equação (4.6), que significa encontrar  $a^e$ ,  $b^e$  e  $c^e$  em termos de  $\varphi_1^e$ ,  $\varphi_2^e$  e  $\varphi_3^e$  temos então:

$$\varphi^e(x, y) = N_1^e(x, y)\varphi_1^e + N_2^e(x, y)\varphi_2^e + N_3^e(x, y)\varphi_3^e, \quad (4.9)$$

ou na forma de somatório

$$\varphi^e(x, y) = \sum_{j=1}^3 N_j^e(x, y) \varphi_j^e, \quad (4.10)$$

onde

$$\begin{aligned} N_1^e(x, y) &= \frac{1}{2\Delta^e} (a_1^e + b_1^e + c_1^e), \\ N_2^e(x, y) &= \frac{1}{2\Delta^e} (a_2^e + b_2^e + c_2^e), \\ N_3^e(x, y) &= \frac{1}{2\Delta^e} (a_3^e + b_3^e + c_3^e), \end{aligned} \quad (4.11)$$

e  $a^e$ ,  $b^e$  e  $c^e$  tem os seguintes valores:

$$\begin{aligned} a_1^e &= x_2^e y_3^e - y_2^e x_3^e & b_1^e &= y_2^e - y_3^e & c_1^e &= x_3^e - x_2^e \\ a_2^e &= x_3^e y_1^e - y_3^e x_1^e & b_2^e &= y_3^e - y_1^e & c_2^e &= x_1^e - x_3^e \\ a_3^e &= x_1^e y_2^e - y_1^e x_2^e & b_3^e &= y_1^e - y_2^e & c_3^e &= x_2^e - x_1^e \end{aligned} \quad (4.12)$$

#### 4.1 Método de Galerkin para formulação

Considerando o problema de valor de contorno (PVC) definido pela equação diferencial de segunda ordem

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \alpha_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \beta \varphi = f \quad (4.13)$$

onde  $\varphi$  é a função incógnita,  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  e  $\beta$  são parâmetros conhecidos associados com as propriedades físicas do domínio, e  $f$  é a função fonte ou excitação.

Para o problema de condução de calor sem geração de calor (3.13), temos a equação de Laplace, na qual  $\alpha_x = \alpha_y = 1$ ,  $\beta = 0$  e  $f = 0$ .

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0. \quad (4.14)$$

O método de Galerkin consiste em usar uma função teste para obter uma solução aproximada para a equação. No Método dos Elementos Finitos (MEF), o objetivo é dividir o domínio em elementos e discretizar a solução nesses elementos. O método de Galerkin é usado para obter aproximações da solução dentro desses elementos.

Portanto, assumindo que  $\tilde{T}$  seja uma aproximação da solução da Equação (4.14) e fazendo a substituição, temos:

$$L\tilde{T} \neq f \text{ ou } L\tilde{T} - f \neq 0 . \quad (4.15)$$

Fazendo

$$L\tilde{T} - f = r , \quad (4.16)$$

temos que o residual “ $r$ ” é diferente de zero. A melhor aproximação de  $\tilde{T}$  é aquela que minimiza o valor do residual. Portanto, o método consiste em:

$$R_i = \int_{\Omega} w_i r d\Omega = \int_{\Omega} w_i (L\tilde{T} - f) d\Omega = 0 , \quad (4.17)$$

onde  $R_i$  denota as integrais de pesos residuais, e  $w_i$  são as funções peso. Assim, o residual associado a (4.14) é:

$$r = -\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) , \quad (4.18)$$

e o residual ponderado para o elemento “e”

$$R_i = \iint_{\Omega^e} N_i^e r dx dy \quad i = 1, 2, 3 . \quad (4.19)$$

Substituindo a Equação (4.18) em (4.19), obtém-se:

$$R_i = \iint_{\Omega^e} N_i^e \left( -\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right) dx dy \quad i = 1, 2, 3 , \quad (4.20)$$

e usando as identidades

$$\begin{aligned} k \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} N_i^e \right) &= N_i^e \left[ -\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] , \\ k \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} N_i^e \right) &= N_i^e \left[ -\frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] . \end{aligned} \quad (4.21)$$

Substituindo-os na Equação (4.20):

$$\begin{aligned} R_i &= \iint_{\Omega^e} \left[ k \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} N_i^e \right) + k \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} N_i^e \right) \right] dx dy . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Fazendo a separação da integral, distribuindo os termos presentes no integrando temos:

$$\begin{aligned} R_i &= \iint_{\Omega^e} \left[ k \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right) + k \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) \right] dx dy \\ &\quad - \iint_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} N_i^e \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} N_i^e \right) \right] dx dy . \end{aligned} \quad (4.23)$$

Usando o teorema da divergência chegamos a:

$$\iint_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right] d\Omega = \oint_{\Gamma} (U\hat{x} + V\hat{y}) \hat{n} d\Gamma , \quad (4.24)$$

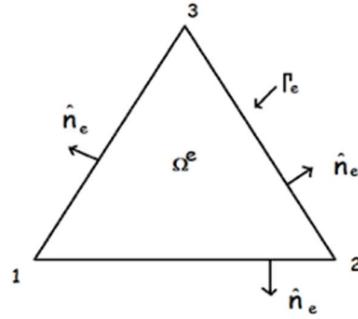
e temos que

$$\begin{aligned}
R_i = & \iint_{\Omega^e} \left[ k \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right) + k \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) \right] dx dy \\
& - \oint_{\Gamma^e} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \hat{x} + k \frac{\partial T}{\partial y} \hat{y} \right) \hat{n} N_i^e d\Gamma .
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Como o fluxo em todo o contorno do domínio global é nulo e as integrais no contorno dos elementos se cancelam, a integral fechada também é nula

$$\oint_{\Gamma^e} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \hat{x} + k \frac{\partial T}{\partial y} \hat{y} \right) \hat{n} N_i^e d\Gamma = 0 . \tag{4.26}$$

Figura 11: Elemento triangular linear e o vetor normal as arestas.



Fonte: JIN (2002).

Substituindo a Equação (4.10) na Equação (4.25) resulta na equação a seguir

$$R_i = \sum_{j=1}^3 \iint_{\Omega^e} \left[ k \left( \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right) + k \left( \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) \right] T_j^e dx dy \tag{4.27}$$

$$i = 1, 2, 3 ,$$

e que pode ser escrita na forma matricial

$$\{R^e\} = [K^e]\{T^e\} , \tag{4.28}$$

com  $[K^e] = \begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e & k_{13}^e \\ k_{21}^e & k_{22}^e & k_{23}^e \\ k_{31}^e & k_{32}^e & k_{33}^e \end{bmatrix}$  e  $\{T^e\} = \begin{Bmatrix} T_1^e \\ T_2^e \\ T_3^e \end{Bmatrix}$  representando o sistema de matriz elementar. Onde os elementos da matriz elementar  $[K^e]$  são definidos como

$$K_{ij}^e = \iint_{\Omega^e} \left[ k \left( \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right) + k \left( \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) \right] T^e dx dy . \quad (4.29)$$

Sendo  $[K^e]$  uma matriz simétrica e assumindo que  $k$  é constante em todo o domínio e igual a  $k^e$ , a Equação (4.29) pode ser calculada de forma explícita. Esse cálculo pode ser realizado utilizando a formula. (SILVESTER, 1990)

$$\iint_{\Omega^e} (N_1^e)^l (N_2^e)^m (N_3^e)^n dx dy = \frac{l! m! n!}{(l+m+n+2)!} 2\Delta^e , \quad (4.30)$$

e a Equação (4.30) resulta em:

$$K_{ij}^e = \frac{1}{4\Delta^e} (k^e b_i^e b_j^e + k^e b_i^e b_j^e) . \quad (4.31)$$

Somando (4.28) para todos os elementos:

$$\{R\} = \sum_{e=1}^m \{\bar{R}^e\} = \sum_{e=1}^m ([\bar{k}^e] \{\bar{T}^e\}) = \{0\} , \quad (4.32)$$

e que pode ser escrito da seguinte forma:

$$\sum_{e=1}^m [\bar{k}^e] \{\bar{T}^e\} = 0 , \quad (4.33)$$

ou

$$[K]\{T\} = 0 , \quad (4.34)$$

para  $[K]$  sendo a soma das matrizes  $[\bar{k}^e]$ .

Portanto, para obter a matriz  $[K]$  do problema representado pela Figura 8, começamos com uma matriz nula  $M \times M$  (sendo  $M$  o número total de nós) e adicionamos gradualmente as matrizes elementares aumentadas  $[\bar{k}^e]$ , correspondendo à inclusão de cada elemento de  $[\bar{k}^e]$  na posição apropriada de  $[K]$ .

Ao considerar o primeiro elemento  $[K^e]$  a partir de (4.34), temos:

$$[K^1]\{T^1\} = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Como cada nó do elemento está associado a um nó do domínio global, como  $T_1^1 = T_1$ ,  $T_2^1 = T_2$  e  $T_3^1 = T_4$  (Figura 9), obtemos:

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (4.36)$$

e expandindo na matriz global.

$$[\bar{k}^1]\{T\} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & K_{13}^1 & 0 & \cdots & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & 0 & K_{23}^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & 0 & K_{33}^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ \vdots \\ T_{15} \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

Para o segundo elemento, os nós 1, 2 e 3 do elemento estão associados a os nós globais 2, 5 e 4 respectivamente, portanto a matriz  $[K^e]$  para o segundo elemento será dado por:

$$\begin{bmatrix} k_{11}^2 & k_{12}^2 & k_{13}^2 \\ k_{21}^2 & k_{22}^2 & k_{23}^2 \\ k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_5 \\ T_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Incluindo cada nó correspondente na posição apropriada na matriz global obtém-se  $[\bar{k}^2]$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_{11}^2 & 0 & K_{13}^2 & K_{12}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_{31}^2 & 0 & K_{33}^2 & K_{32}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_{21}^2 & 0 & K_{23}^2 & K_{22}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ \vdots \\ T_{15} \end{bmatrix} = 0.$$

Somando as matrizes  $[\bar{k}^1]$  e  $[\bar{k}^2]$  temos:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & K_{13}^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & 0 & K_{23}^1 + K_{13}^2 & K_{12}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 + K_{31}^2 & 0 & K_{33}^1 + K_{33}^2 & K_{32}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_{21}^2 & 0 & K_{23}^2 & K_{22}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.38)$$

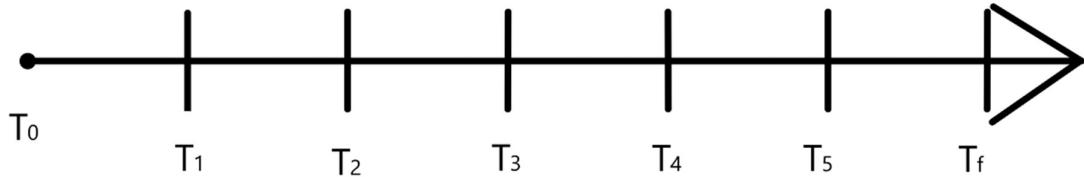
e ao final é obtido um arranjo global contendo todas as informações de cada elemento do domínio.

#### 4.2 Método Euler regressivo (Transiente)

Para problemas que envolvem a evolução no tempo, é necessária uma abordagem diferente para encontrar a solução em um denominado intervalo de tempo especificado. Um dos métodos que pode ser empregado para isso é o método de Euler regressivo. Esta é uma técnica numérica utilizada para resolver equações diferenciais, como a equação da condução de calor, em problemas transientes, e representa uma extensão do Método de Euler.

A resolução por meio deste método requer uma malha na qual o domínio espacial seja discretizado, como ilustrado nas Figuras 8 e 9. Além disso, é necessário discretizar o domínio temporal, dividindo o intervalo de análise em incrementos discretos de tempo ( $\Delta t$ ), conforme mostrado na Figura 12.

Figura 12: Discretização da coordenada temporal.



Fonte: Autoria própria.

Para encontrar a solução em um tempo específico  $[T_F]$ , é necessário avançar por meio de intervalos de tempo, a fim de determinar a solução no tempo desejado. É importante observar que, para intervalos de tempo (passo) maiores, a solução tende a divergir.

Partindo da Equação (3.12) temos

$$-k\nabla^2 T - Q + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (3.39)$$

Para calcular os valores da temperatura nos intervalos de tempo, temos:

$$\rho c \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} - K\nabla^2 T^{n+1} - Q^{n+1} = 0. \quad (4.40)$$

Onde  $T^n$  representa a temperatura no instante atual, e  $T^{n+1}$  é a solução no estágio de tempo avançado.

Integrando (4.40) no domínio espacial, temos:

$$\int \rho c \frac{T^{n+1}}{\Delta t} v d\Omega - \int \rho c \frac{T^n}{\Delta t} v d\Omega - K \int \nabla^2 T^{n+1} v d\Omega - \int Q^{n+1} v d\Omega = 0, \quad (4.41)$$

e integrando por partes o laplaciano temos:

$$\int \rho c \frac{T^{n+1}}{\Delta t} v d\Omega - \int \rho c \frac{T^n}{\Delta t} v d\Omega - K \int \left( \frac{\partial T^{n+1}}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial T^{n+1}}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega \\ - \int Q^{n+1} v d\Omega = 0 . \quad (4.42)$$

Separando os termos, chegamos em:

$$\int \rho c \frac{T^{n+1}}{\Delta t} v d\Omega - K \int \left( \frac{\partial T^{n+1}}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial T^{n+1}}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega \\ = \int \rho c \frac{T^n}{\Delta t} v d\Omega + \int Q^{n+1} v d\Omega . \quad (4.43)$$

Como o domínio está dividido em uma malha com uma quantidade M de elementos, a equação pode ser reescrita de forma a ser solucionada em todos os elementos fazendo as substituições a seguir

$$T^{n+1} = \sum_{m=1}^M N_m(x, y) T_m^{n+1} , \\ v = \sum_{m=1}^M N_m(x, y) v_m , \quad (4.44)$$

substituindo em (4.43):

$$\int \rho c \sum_{m=1}^M \frac{N_m(x, y) (T_m^{n+1} v_m)}{\Delta t} d\Omega - K \int \sum_{m=1}^M N_m(x, y) (T_m^{n+1} v_m) \\ = \int \rho c \sum_{m=1}^M N_m(x, y) v_m \frac{T^n}{\Delta t} + \int \sum_{m=1}^M N_m(x, y) v_m Q^{n+1} d\Omega \quad (4.45)$$

Reescrevendo (4.45) temos:

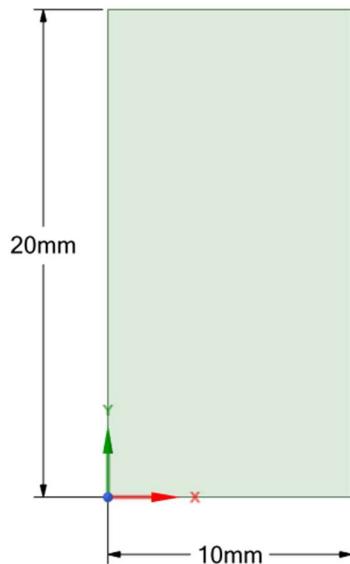
$$[A]\{T^{n+1}\} - [K]\{T^{n+1}\} = [A]\{T^n\} + [F^{n+1}] \quad (4.46)$$

## 5 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

### 5.1 Solução de uma placa retangular utilizando o Ansys

Nesta seção, utilizamos o Ansys Mechanical para resolver o mesmo problema apresentado na seção (3.5). O software emprega o método dos elementos finitos para encontrar a solução. O problema consiste em uma geometria retangular com dimensões  $0\text{mm} \leq x \leq 1\text{mm}$  e  $0\text{mm} \leq y \leq 2\text{mm}$ , conforme ilustrado na Figura 13. Nessa configuração, dois lados da placa retangular são mantidos a uma temperatura constante de 20 graus Celsius, enquanto os outros dois lados são mantidos a uma temperatura constante de 30 graus Celsius, como mostrado na Figura 15. Supomos que a placa seja feita de um material isotrópico e que a transferência de calor nas bordas da placa seja desprezível ( $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ ). Seguindo a metodologia proposta no método dos elementos finitos, definimos o domínio a ser analisado.

Figura 13: Geometria de uma placa retangular utilizando o Ansys SpaceClaim.

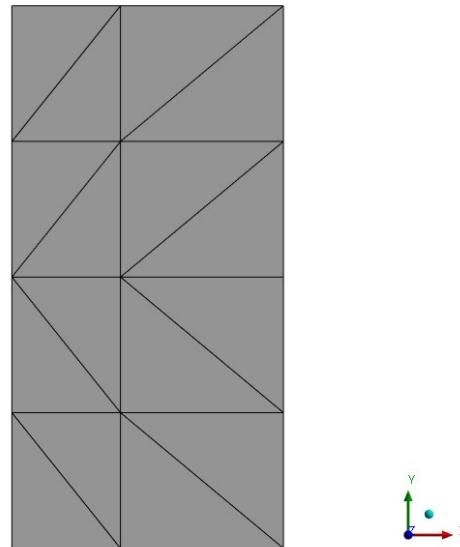


Fonte: adaptado de HICKMANN et. al. (2015).

Para a construção da malha, o domínio foi dividido em 16 elementos triangulares lineares, conforme representado na Figura 14. Ressalta-se que quanto maior a quantidade de elementos que compõem a geometria, mais preciso será o resultado para uma solução que converge. Os elementos podem ter diferentes formatos, cada um com propriedades que os tornam mais adequados para problemas

específicos, nessa e nas próximas soluções, serão utilizados elementos triangulares lineares. Na (sessão 5.2), será feita uma comparação de resultados com diferentes números de elementos, a fim de evidenciar a melhor aproximação com um maior número de elementos.

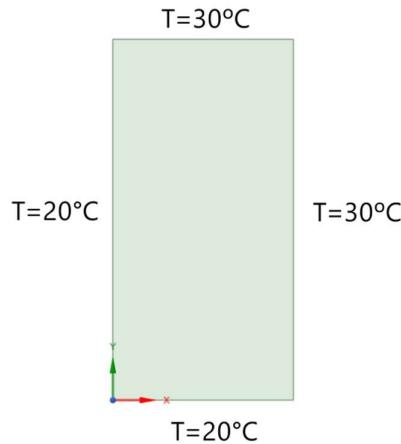
Figura 14: Malha da placa retangular com 16 elementos.



Fonte: Autoria própria.

Procedendo com a aplicação do método dos elementos finitos, a etapa subsequente envolve a definição das condições de contorno, para podermos discretizar o problema com o método dos elementos finitos. No caso em questão, tais condições de contorno referem-se às temperaturas no entorno do domínio, conforme ilustrado na Figura 15.

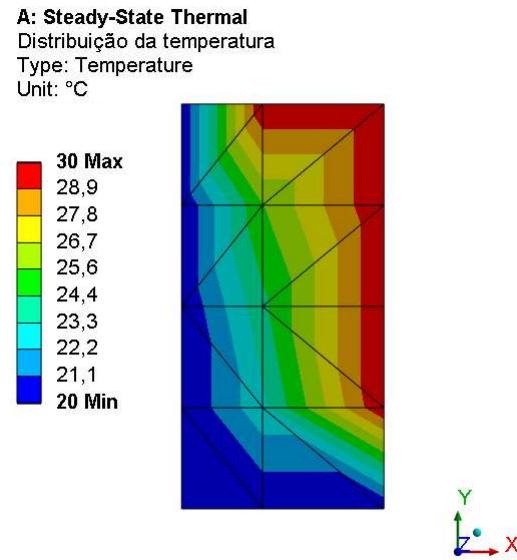
Figura 15: Condições de contorno do problema da placa retangular.



Fonte: adaptado de HICKMANN et. al. (2015).

Usando o método dos elementos finitos, o campo de temperatura para um domínio dividido em 16 elementos é calculado e mostrado na Figura 16:

Figura 16: Campo de temperaturas na geometria com 16 elementos.



Fonte: Autoria própria.

### 5.1.1 Comparação com o método analítico

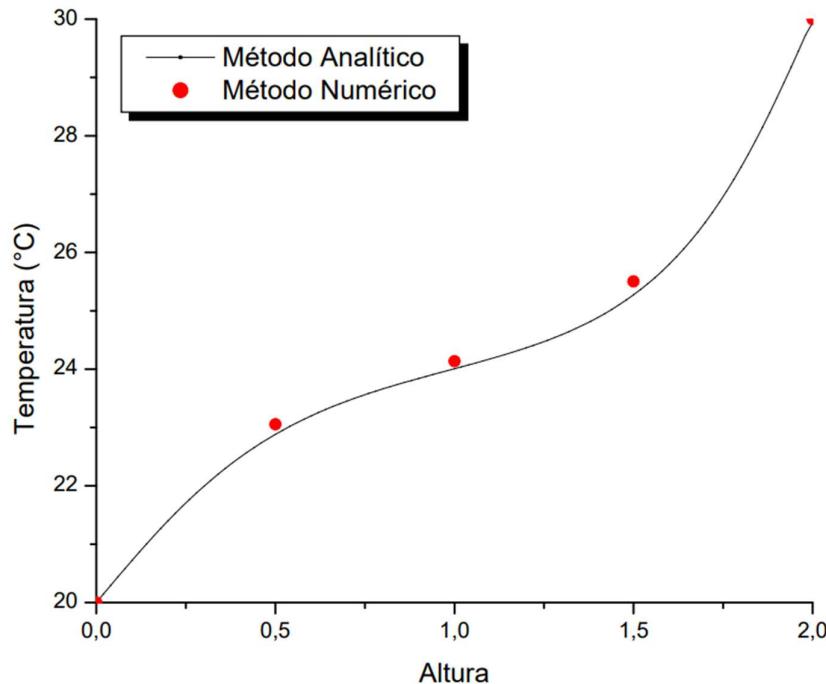
Nessa seção calculamos o erro relativo, que será apresentado nas próximas tabelas para fins de comparação, e ele foi calculado utilizando a Equação (5.1):

$$ER = \frac{|T_{an} - T_{nu}|}{|T_{an}|} \quad (5.1)$$

onde  $T_{an}$  é a temperatura obtida pelo método analítico e  $T_{nu}$  é a temperatura obtida pelo método numérico.

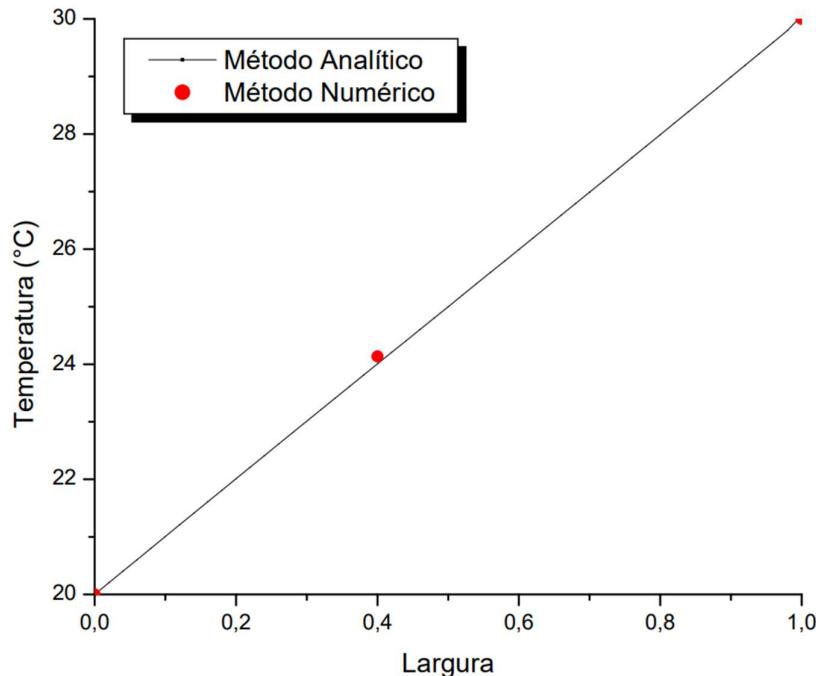
Com a aplicação do método analítico, conforme definido na Equação (3.48) utilizando 110 termos no somatório, e o método dos elementos finitos com 16 elementos, obteve-se o seguinte resultado para as coordenadas  $x = 0,4$  e  $y = 1$ , conforme ilustrado nas Figuras 17 e 18, respectivamente.

Figura 17: Gráfico comparativo entre as soluções analítica e numérica com 16 elementos em  $x=0.4$ .



Fonte: Autoria própria.

Figura 18: Gráfico comparativo entre as soluções analítica e numérica com 16 elementos  $y=1$ .



Fonte: Autoria própria.

A Tabela 2 apresenta uma comparação numérica pontual entre as soluções obtidas analiticamente e numericamente para uma malha com 16 elementos. Os resultados são apresentados em termos de parâmetros específicos, fornecendo uma visão detalhada do desempenho das soluções em pontos específicos do domínio estudado.

Tabela 2: Comparação de Resultados do método analítico e numérico.

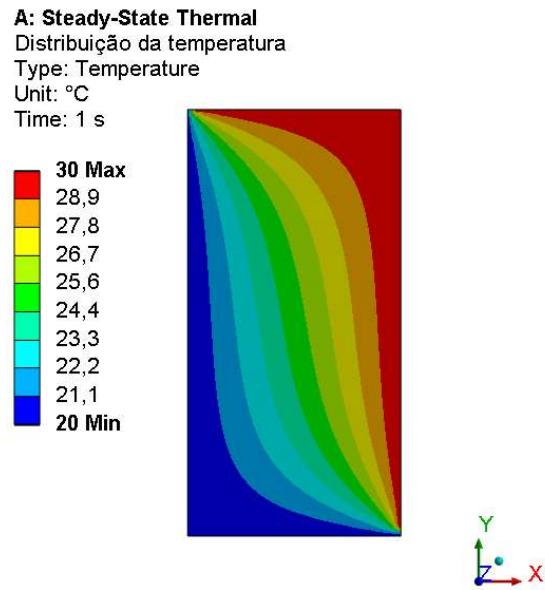
Largura	Altura	Solução Analítica	Malha (nel=16)	Erro Relativo (%)
0,4	0,5	22,88296	23,054	0,756
0,4	1,0	24,00698	24,136	0,537
0,4	1,5	25,27355	25,503	0,908

Fonte: Autoria própria.

Ao observar o resultado na Figura 17, é possível notar algumas discrepâncias entre a solução numérica e os valores encontrados na solução analítica, decorrentes da baixa densidade de malha no domínio. No entanto, ao refinar a malha, a solução

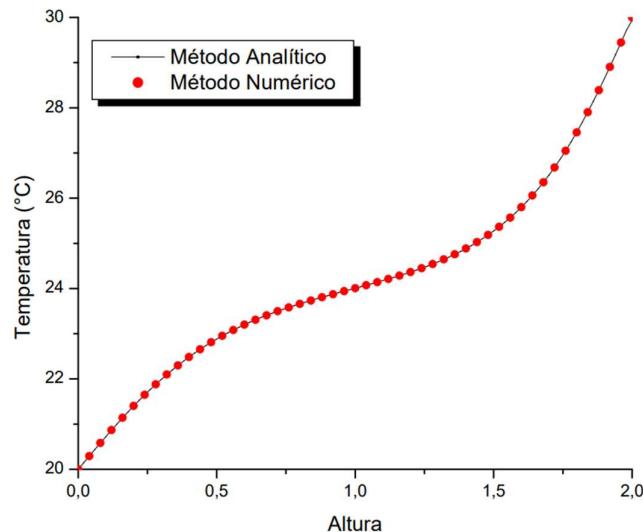
numérica converge para a solução analítica, conforme discutido nas referências [2] e [15]. Na Figura 19, é apresentada a distribuição da temperatura no domínio com uma malha refinada de 2500 elementos, juntamente com a comparação com o método analítico nas Figuras 20 e 21, além da Tabela 2.

Figura 19: Distribuição da temperatura na placa retangular com 2500 elementos.



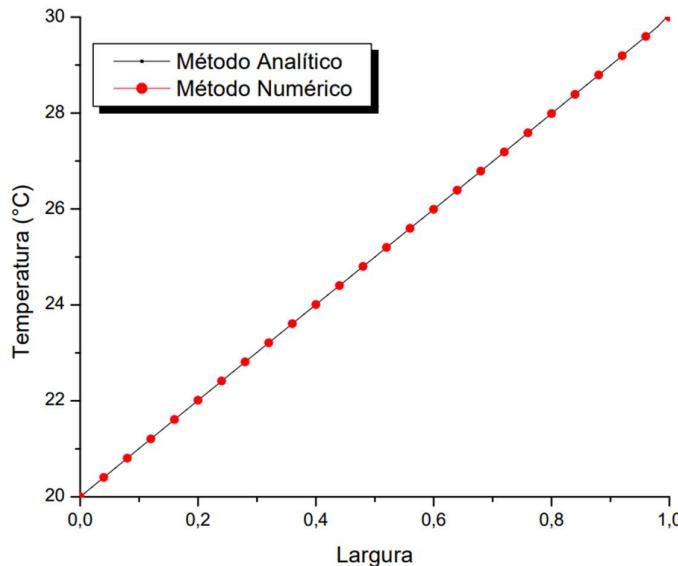
Fonte: Autoria própria.

Figura 20: Gráfico comparativo entre as soluções analítica e numérica para um domínio de 2500 elementos.



Fonte: Autoria própria.

Figura 21: Gráfico comparativo entre as soluções numérica e analítica para um domínio de 2500 elementos.



Fonte: Autoria própria.

Tabela 3: Comparação de Resultados para uma Malha com 2500 Elementos.

Largura	Altura	Solução Analítica	Malha (nel=2500)	Erro Relativo (%)
0,4	0,4	22,48428	22,485	0,0032
0,4	0,8	23,66234	23,662	0,0014
0,4	1,2	24,36407	24,365	0,0038

Fonte: Autoria própria.

## 5.2 Análise térmica em barragens

Nesta seção, avançaremos em nosso estudo sobre a análise térmica bidimensional de barragens de concreto. Até o momento, exploramos as equações 2D do calor, discutimos soluções analíticas e introduzimos o método dos elementos finitos como uma ferramenta poderosa para a análise térmica em estruturas retangulares. A seguir, daremos uma análise de domínios mais complexos encontradas em vigas de barragens de concreto.

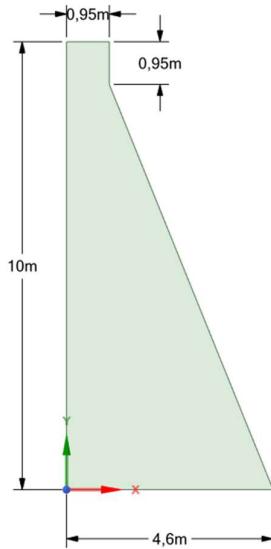
A geometria das barragens de concreto é frequentemente caracterizada por sua complexidade, com formas que podem variar significativamente de projeto para

projeto. Neste capítulo, nos concentraremos em um aspecto particularmente simples, baseada na seção do bloco 8 da barragem de Salto Caxias [KRÜGER (2001)]. Exploraremos como a análise térmica bidimensional pode ser aplicada com sucesso a essas geometrias diferenciadas.

### 5.2.1 ANALISE EM REGIME ESTACIONÁRIO

Nesse tópico, abordaremos o regime estacionário, e a modelagem da construção em camada única, uma simplificação realista para alguns casos práticos. Ao fazer isso, estaremos progredindo em direção a uma compreensão mais abrangente e prática das implicações térmicas em barragens de concreto. A geometria a ser considerada encontra-se na Figura 22.

Figura 22: Geometria de barragem.



Fonte: Autoria Própria.

As propriedades do concreto a serem consideradas nesta seção e nas próximas estão listadas na Tabela 4. De forma geral, as propriedades empregadas para o concreto são as mesmas utilizadas por Krüger (2001), Silva (2003) e Kavamura (2005):

Tabela 4: Propriedades termomecânica do concreto.

Grandeza	Valor	Unidade
Densidade	2388	kg/m <sup>3</sup>
Calor específico	1105	J/kg°C
Condutividade térmica	6445,93	J/mh°C
Coeficiente de dilatação térmica	7,07E-06	1/°C
Coeficiente de convecção	50232	J/m <sup>2</sup> h°C
Coeficiente de Poisson	0,2	
Módulo de elasticidade	6	Gpa
Resistencia característica do concreto (28 dias)	10,2	Mpa

Fonte: LACERDA et al. (2003).

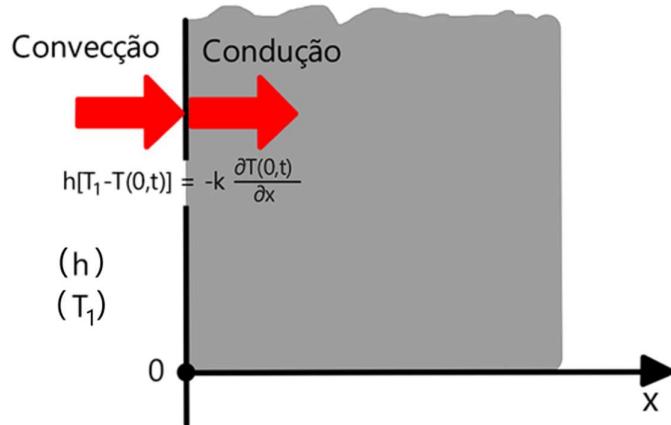
Por se tratarem de análises térmicas, propriedades mecânicas do concreto não serão levadas em consideração nas simulações, como resistência característica do concreto, módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e coeficiente de dilatação térmica.

Para a simulação da transferência de calor em nossa barragem de concreto, é fundamental definir cuidadosamente as condições de contorno que representam a interação térmica entre a estrutura da barragem e o ambiente circundante (observar a Figura 24). Será considerada que a região da base da barragem é perfeitamente isolada. Isso significa que a taxa de transferência de calor na interface entre a barragem e a fundação (ou solo) será nula. Na área esquerda da barragem, onde a estrutura entra em contato direto com a água, a transferência de calor é significativamente influenciada pela convecção. Portanto, nessa região, aplicaremos uma condição de contorno de convecção barragem-água com um coeficiente de 15 [W/m<sup>2</sup> °C], assumindo que a água esteja a uma temperatura de 20°C. A convecção barragem-água envolve a consideração do coeficiente de convecção, que descreve a taxa de troca de calor entre a superfície da barragem e a água. Na área direita da barragem, onde a estrutura está exposta ao ar ambiente, a transferência de calor é dominada pela convecção barragem-ar, assumindo que a temperatura ambiente é de 30°C.

A condição de convecção ocorre quando há transferência de calor por meio da movimentação de um fluido, devido a uma diferença de temperatura entre as partes do fluido, fazendo com que as partes mais quentes se desloquem para cima. Para calcular a transferência de calor por convecção, utilizamos a lei de Newton do resfriamento, que afirma que a taxa de transferência de calor é proporcional à

diferença de temperatura entre o fluido e a superfície com a qual está em contato, como ilustrado na Figura 23.

Figura 23: Condição de convecção.



Fonte: Adaptado de Paragchaware (2016).

Dessa forma, a transferência de calor entre o material e o ambiente dependerá do coeficiente de convecção ( $h$ ) e a diferença de temperatura entre eles naquele momento, onde  $T_1$  é a temperatura ambiente no entorno do sólido. A equação é equivalente a:

$$-k \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = h[T_1 - T(0,t)] \quad (5.2)$$

onde  $h$  é o coeficiente de convecção em  $[W/m^2 \text{ } ^\circ C]$ ,  $T_1$  é a temperatura ambiente e  $T(0,t)$  é a temperatura do material em um determinado momento.

Como nosso problema agora apresenta uma condição de segunda classe, o valor para a função  $f$  na equação (4.13) será diferente de zero, sendo assim, modificando o sistema de matrizes que agora será dado por:

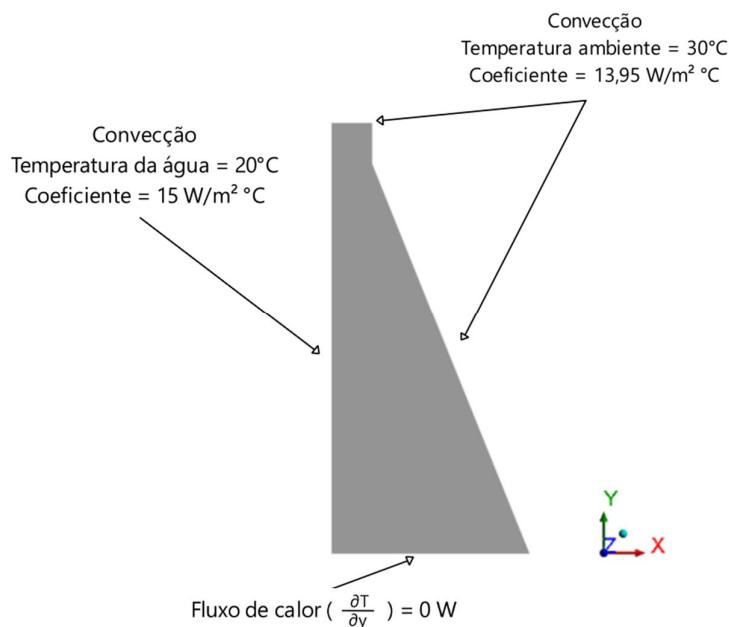
$$[K][T] = [g], \quad (5.3)$$

onde  $[g]$  será a taxa de troca de calor por convecção, sendo aplicado aos nós da fronteira que possuem essa condição, sendo:

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{h}[\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}]. \quad (5.4)$$

Sendo assim, damos sequência ao caso da barragem de concreto.

Figura 24: Condições de contorno Barragem regime estacionário.

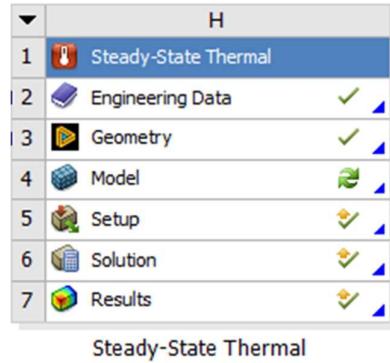


Fonte: Autoria própria.

Conforme demonstrado na Seção 4, os parâmetros conhecidos associados às propriedades físicas do domínio são inseridos na equação diferencial (3.12). No contexto do Ansys, esses parâmetros não são diretamente inseridos na equação pelo usuário. Em vez disso, eles podem ser selecionados a partir de um banco de dados que contém as propriedades de diversos materiais. Caso o material desejado não esteja disponível, é possível criar um novo material e editar suas propriedades físicas, como mostrado na Figura 25.

Figura 25: Propriedades do material no Ansys.

(a) etapas da análise de sistema estacionário.



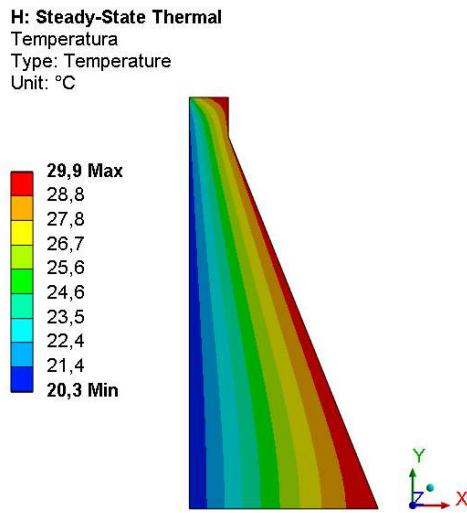
(b) inserção das propriedades do material.

Properties of Outline Row 7: Concreto Massa 2				
	A	B	C	D E
1	Property	Value	Unit	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
2	Material Field Variables	Table		
3	Density	2388	kg m <sup>-3</sup>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
4	Isotropic Thermal Conductivity	1,79	W m <sup>-1</sup> C <sup>-1</sup>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
5	Specific Heat Constant Pressure, C <sub>s</sub>	1105	J kg <sup>-1</sup> C <sup>-1</sup>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

Fonte: Autoria própria.

O campo de temperaturas para uma barragem de concreto em regime estacionário, calculado utilizando o método dos elementos finitos no software Ansys em um domínio dividido em 1320 elementos lineares, cada um com tamanho de 20 centímetros, é apresentado na Figura 26.

Figura 26: Campo de temperaturas da barragem no regime estacionário.



Fonte: Autoria própria.

### 5.2.2 ANALISE EM REGIME TRANSIENTE

Nesta seção, exploraremos a análise bidimensional em barragens de concreto, com foco na modelagem em regime transitório, ou seja, uma análise que considere a evolução temporal. Isso envolve a variação da taxa de geração de calor interno como especificado na Equação (3.12), e conforme detalhado nas seções (5.3.4) e (5.3.5) a inserção de camadas em momentos diferentes da primeira camada.

A importância de realizar uma análise de forma transitória reside na variação das condições do problema ao longo do tempo. É necessário considerar essas mudanças para obter resultados mais precisos. Por exemplo, se a taxa de geração de calor interno for constante ao longo do tempo, uma análise estática pode ser suficiente. No entanto, se a taxa de geração de calor variar no tempo, uma análise transitória será necessária para capturar essas variações. Isso é essencial para compreender como a temperatura muda ao longo do tempo na barragem de concreto, sendo particularmente crítico durante a fase de construção, quando a geração de calor interna é mais significativa.

A inserção de passos na evolução do tempo, como introduzido na seção (4.2), permite que as condições do problema sejam atualizadas a cada etapa da simulação, garantindo que as mudanças temporais sejam levadas em consideração.

A taxa de geração de calor interno e sua variação ao longo do tempo utilizadas nessa seção são valores fixos e característicos do tipo de concreto que estamos utilizando, conforme apresentado na tabela 5 e que serão utilizados na equação (3.12).

Tabela 5: Elevação adiabática da temperatura e calor gerado.

Tempo		T	Q
(Dias)	(Horas)	(°C)	J/(m <sup>3</sup> h)
0	0	0.00	1.125.084
1	24	8.06	647.776
2	48	11.78	170.467
3	72	13.57	150.260
5	120	15.30	64.089
7	168	16.15	34.614
10	240	16.82	17.410
14	336	17.30	8.893
20	480	17.67	4.287
28	672	17.92	2.128

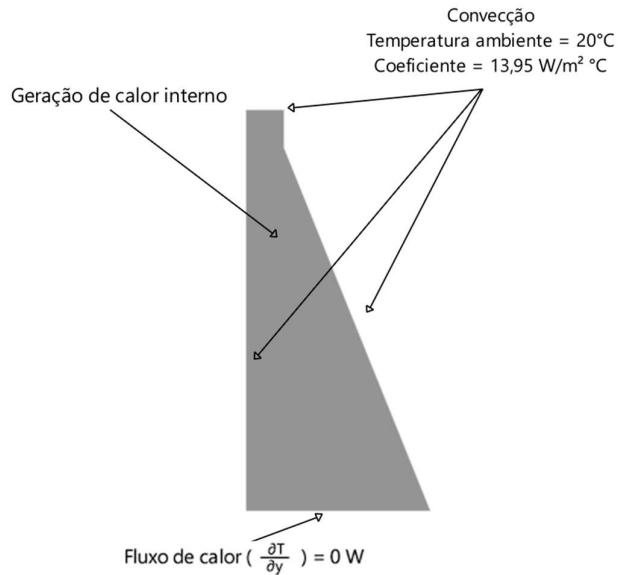
Fonte: LACERDA et al., (2003).

### 5.2.3 PERFIL DE BARRAGEM CONSTRUÍDO EM BLOCO ÚNICO

Primeiro, realizaremos uma análise do comportamento da temperatura em um perfil de barragem construído em bloco único como na Figura 22, durante o estágio de construção. Essa abordagem possibilita uma análise mais precisa dos efeitos térmicos, destacando a possibilidade de trincas e fissuras que podem surgir devido a variações bruscas de temperatura ao longo da estrutura.

A construção em uma única camada ressalta a importância de considerar a suscetibilidade da barragem a essas condições termomecânicas, proporcionando uma visão mais abrangente dos desafios envolvidos e permitindo a adoção de medidas preventivas adequadas. Dessa vez, levando em consideração a geração de calor interna, será definida a condição de contorno de convecção mostrada na Tabela 2, em todo o contorno do domínio, exceto na base da barragem, onde será considerada uma superfície perfeitamente isolada, como mostra a Figura 27.

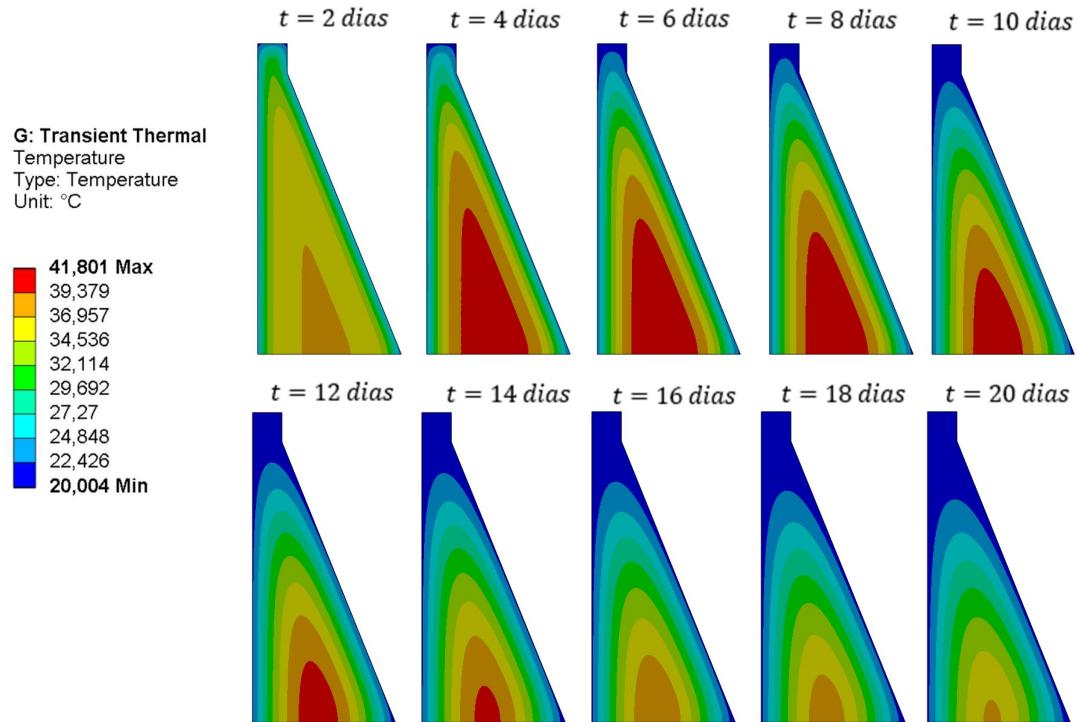
Figura 27: Condições de contorno barragem bloco único.



Fonte: Autoria própria.

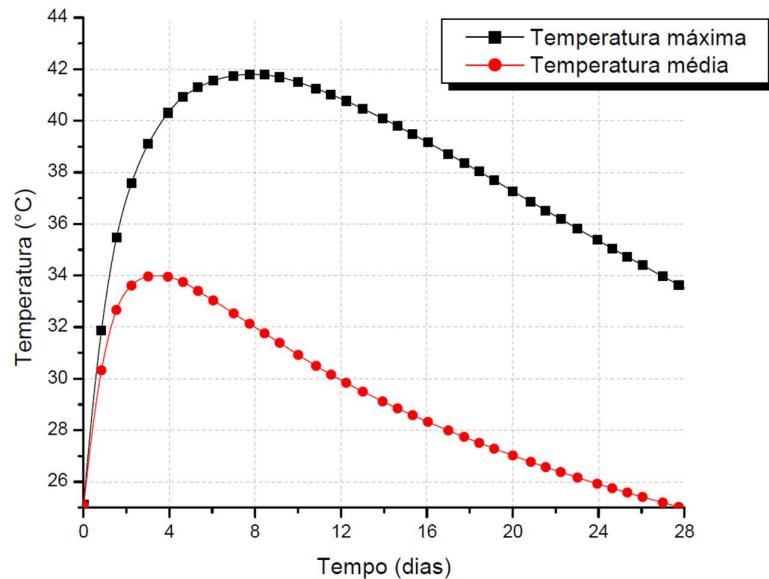
Utilizando as condições de contorno apresentadas na Figura 27 para a construção da barragem em apenas uma camada, com temperatura de lançamento do concreto de 25 graus Celsius, foram obtidos os seguintes resultados para 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 e 20 dias de concretagem apresentado na Figura 28, para a simulação foram utilizados 5448 elementos lineares com tamanho de 0,1 metros, para o avanço temporal, foi adotado um passo de 86,4 segundos.

Figura 28: Isotermas de temperatura para concretagem em uma camada.



Fonte: Autoria própria.

Figura 29: Temperatura máxima e média para barragem de bloco único.



Fonte: Autoria própria.

No gráfico de temperaturas, é evidente que a diferença entre a temperatura máxima e mínima ultrapassa vinte graus Celsius, o que representa um gradiente preocupante para estruturas de barragens, já que essa condição é propícia ao surgimento de trincas.

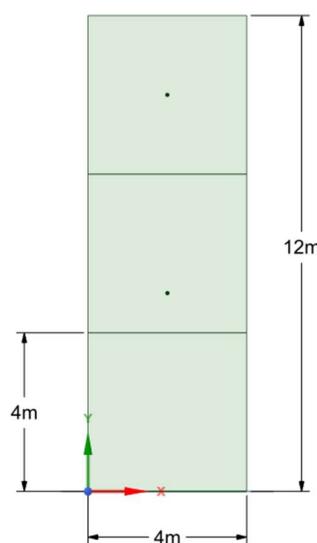
#### 5.2.4 BLOCO DE CONCRETO CONSTRUÍDO EM CAMADAS

Nesta seção apresentamos o uso de condições de contorno e estágios de construção em um bloco de concreto dividido em 3 camadas. O objetivo desta análise é avaliar a influência das condições de contorno de geração de calor interno e da ferramenta de contato na simulação do processo de construção do bloco. Para isso, comparamos os resultados obtidos na simulação com dados experimentais disponíveis na literatura. A partir dessa validação, podemos garantir a confiabilidade e precisão da simulação realizada, permitindo-nos utilizá-la para conduzir outras análises e otimizações no processo de construção da barragem de concreto.

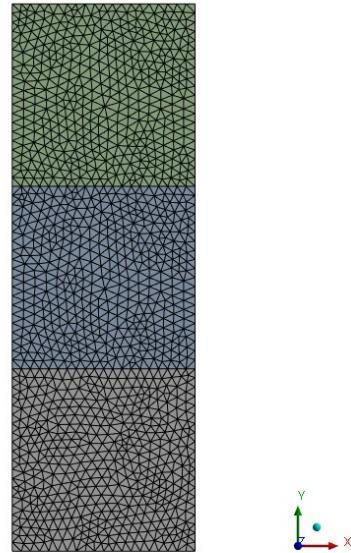
O modelo geométrico escolhido baseia-se no utilizado por KRUGER (2001), o qual descreve o comportamento térmico de uma estrutura de três camadas de concreto como mostrado na Figura 30 (a), com temperatura de lançamento de 45 °C. Para a simulação foram utilizados 2494 elementos triangulares lineares, conforme ilustrado na Figura 30 (b).

Figura 30: Geometria de estrutura de três camadas feita utilizando o Ansys.

(a) Geometria da estrutura.



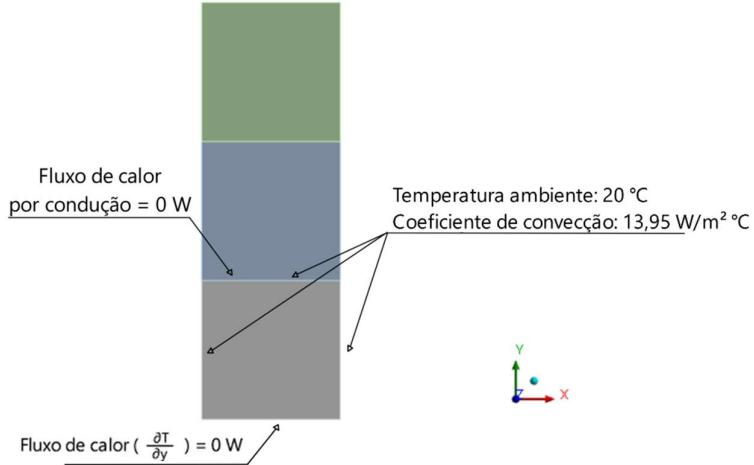
(b) Malha de elementos triangulares.



Fonte: Autoria própria.

Para simular a inserção de camadas, inicialmente, as condições de contorno por convecção e condução nos blocos superiores não serão consideradas, afim de manter a temperatura inicial do lançamento da camada de concreto. Esses blocos superiores manterão a temperatura de 45 °C até o momento do lançamento da camada, pois não haverá troca de calor com o ambiente. Na aresta que conecta as camadas, será inserida uma condição de interface, que estará desativada no início da simulação, indicando que não haverá troca de calor entre as camadas. Além dessa condição, a aresta assumirá a condição de convecção no primeiro estágio de lançamento, como mostra a Figura 31. Conforme houver o avanço no tempo, serão adotadas as devidas condições de contorno de cada bloco, permitindo a troca de calor com o ambiente e entre camadas.

Figura 31: Condições de contorno do bloco construído em 3 camadas.

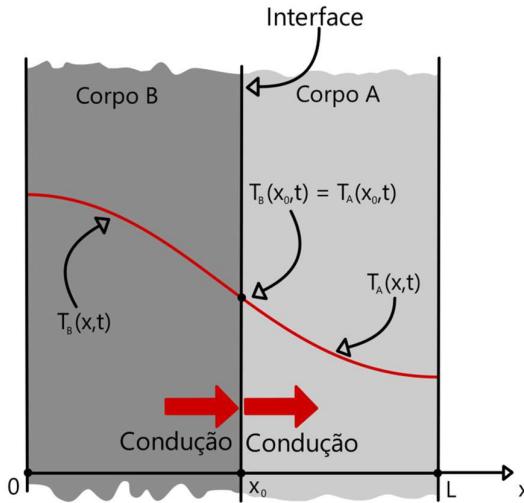


Fonte: Autoria própria.

A condição de interface em problemas térmicos é baseada no princípio de que dois corpos ou regiões (representados como A e B) que estão em contato direto devem possuir a mesma temperatura na interface onde se tocam ( $T_A = T_B$ ). Além disso, a taxa de transferência de calor nas superfícies de contato desses corpos deve ser igual. Isso garante que não haja descontinuidade na transferência de calor entre eles.

Isso pode ser visualizado na Figura 32, onde você pode ver que as temperaturas em A e B são iguais na interface onde eles se tocam na distância  $x_0$  e que o fluxo de calor nas duas superfícies é consistente, mantendo a continuidade da transferência de calor entre os dois corpos.

Figura 32: Condição de interface.



Fonte: Adaptado de Paragchaware (2016).

Portanto a condição é equivalente a:

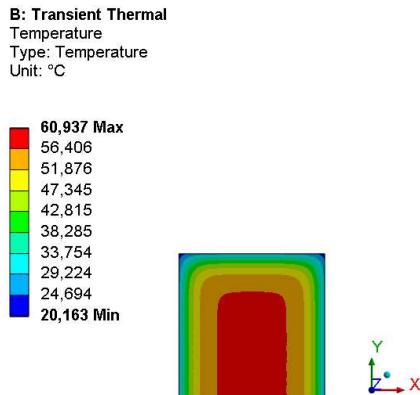
$$-k_A \frac{\partial T_A(x_0, t)}{\partial x} = -k_B \frac{\partial T_B(x_0, t)}{\partial x} \quad (5.5)$$

Sendo  $k_A$  e  $k_B$  a condutividade térmica do material A e B respectivamente,  $T_A$  e  $T_B$  são as temperaturas dos materiais e  $x_0$  é a região em que ocorre o contato entre os materiais.

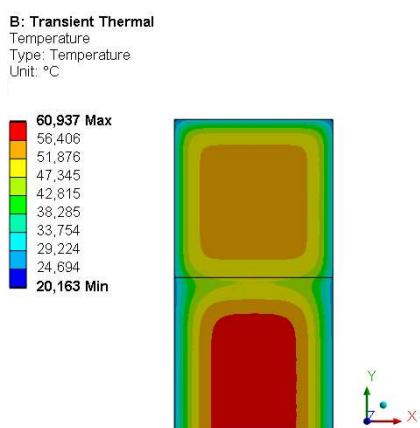
A ausência dessa condição implica que não haverá fluxo de calor entre os corpos. O intervalo de lançamento de cada camada é de 2 dias. Portanto, a condição de contato é ativada no momento do lançamento de cada camada, permitindo a troca de calor. O resultado dessa simulação pode ser observado na Figura 33.

Figura 33: Temperaturas do modelo de validação.

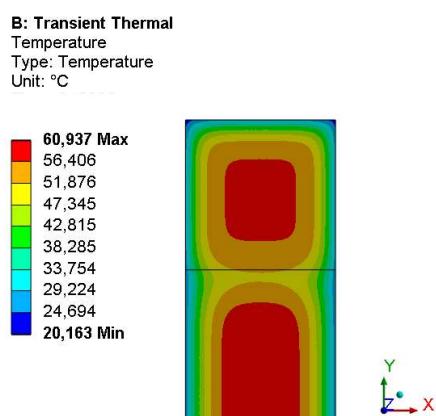
(a) Temperatura após 2 dias.



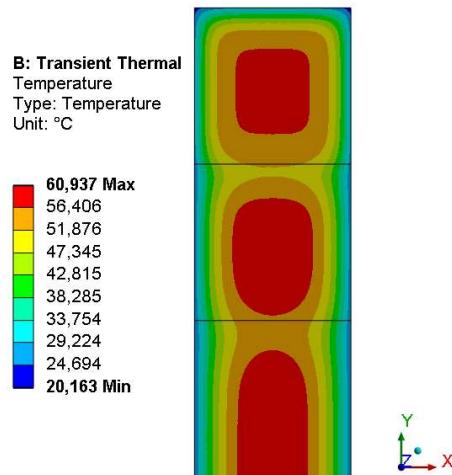
(b) Temperatura após 3 dias.



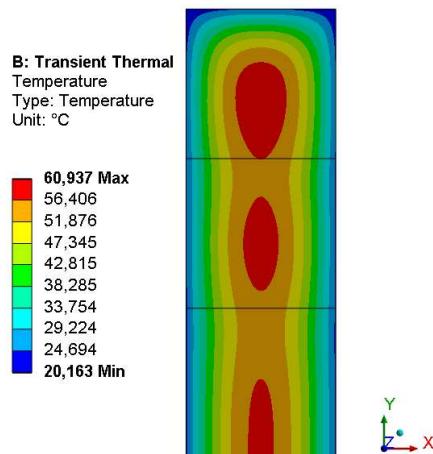
(c) Temperatura após 4 dias.



(d) Temperatura após 6 dias.



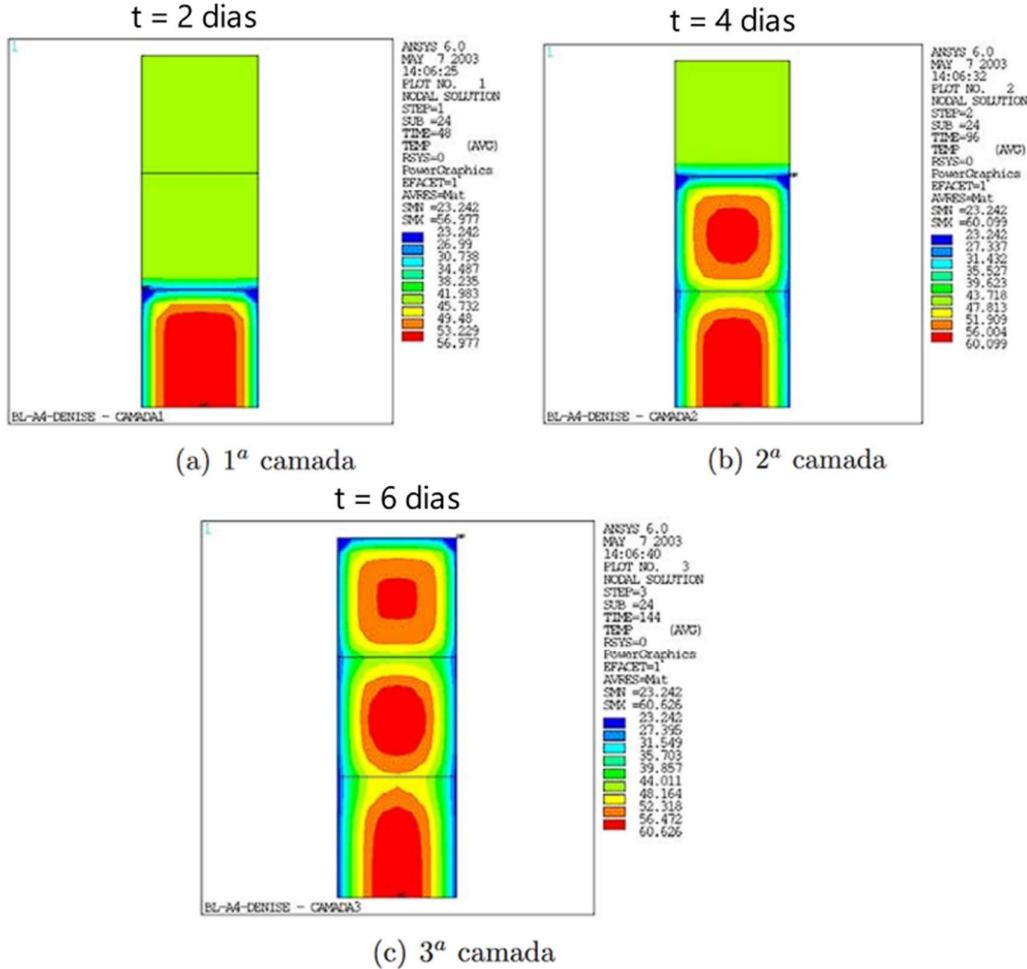
(e) Temperatura após 12 dias.



Fonte: Autoria própria.

Os resultados obtidos foram comparados com os de KAVAMURA (2005), que pode ser observado na Figura 34, e as temperaturas em diferentes pontos da geometria podem ser observados na Tabela 6.

Figura 34: Resultados obtidos por Kavamura.



Fonte: KAVAMURA (2005).

Tabela 6: Temperatura em diferentes pontos da geometria para  $x = 2m$ .

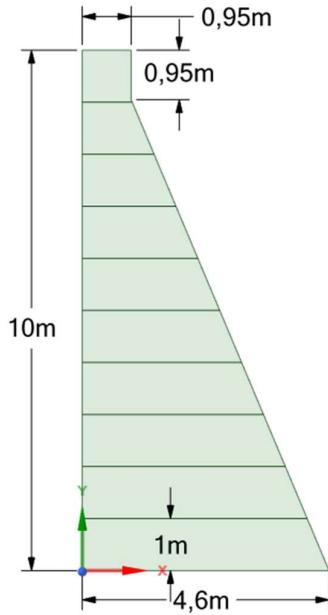
Tempo (h)	Y (m)	Temperatura (°C)
144	5	59,546
144	10	56,981

Fonte: Autoria própria.

### 5.2.5 PERFIL DE BARRAGEM CONSTRUÍDO EM CAMAS

Agora que o modelo de inserção de camadas foi introduzido, realizamos a análise da construção em camadas de uma barragem. O modelo é o mesmo apresentado na Figura (22), diferenciando-se apenas pela construção utilizando camadas de 1 metro de altura, conforme ilustrado na Figura 35.

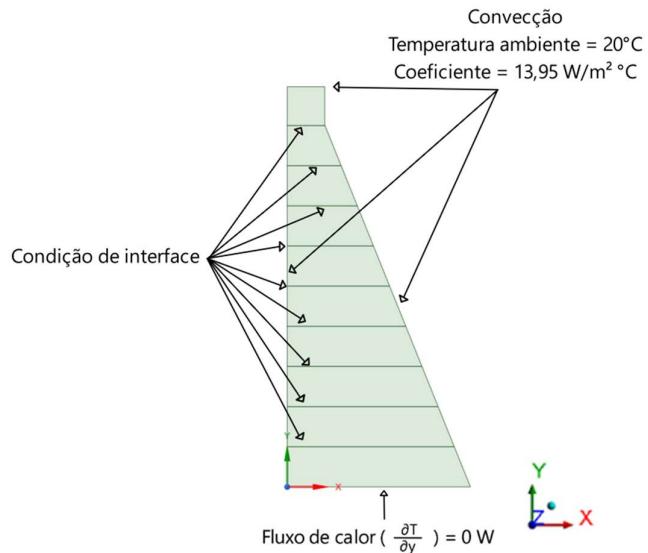
Figura 35: Barragem construída em camadas.



Fonte: Autoria própria.

As condições de contorno do problema são as mesmas apresentadas nas Tabelas (4) e (5), envolvendo a convecção natural no entorno da barragem e a geração de calor interno do concreto. No entanto, para este modelo, serão incluídas as condições de interface para cada camada, como é mostrado na Figura 36.

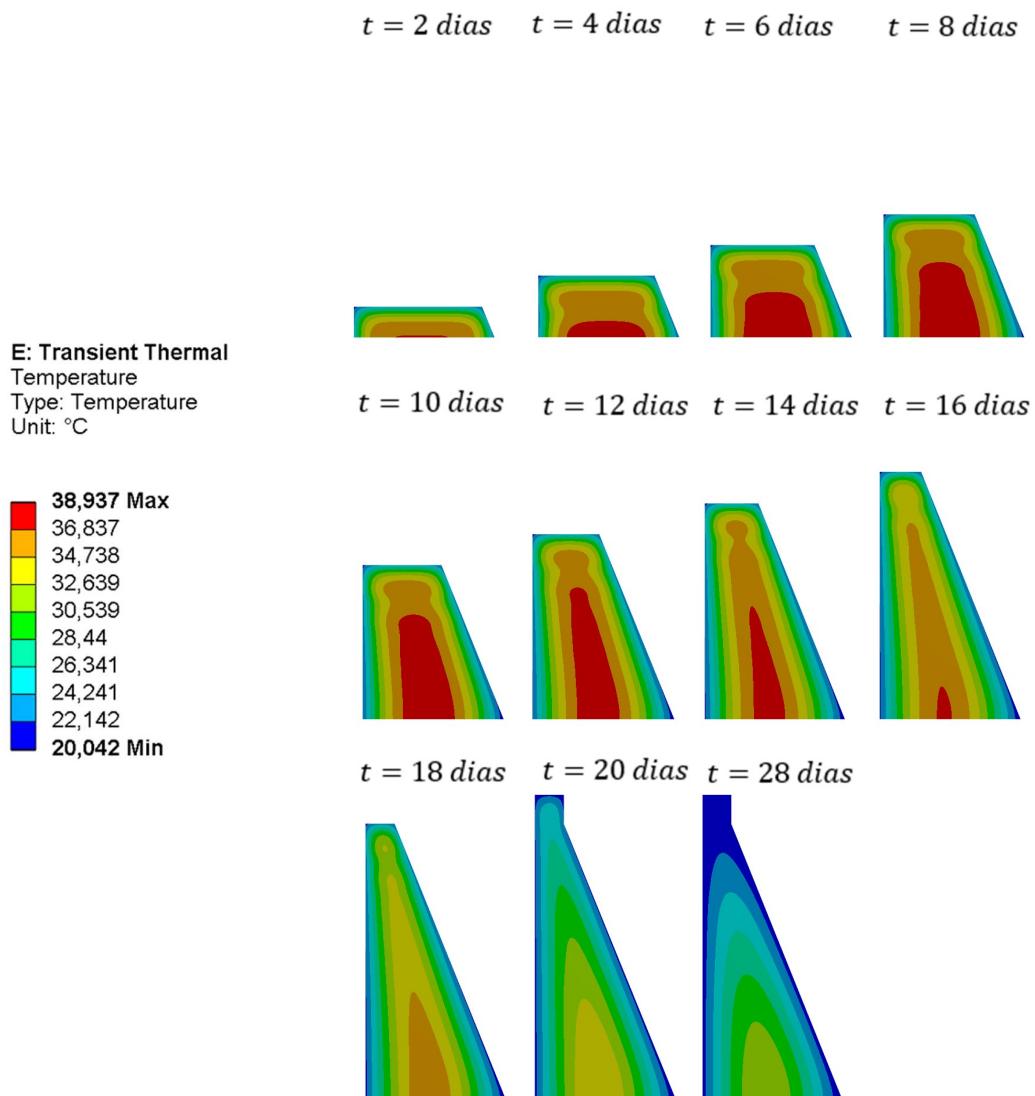
Figura 36: Condições de contorno Barragem construída em camadas.



Fonte: Autoria própria.

O intervalo de concretagem de cada camada foi definido para ser lançado a cada 2 dias, a uma temperatura de 25°C, indicando que o contato entre as camadas será ativado dois dias após o lançamento da camada anterior. Os resultados da simulação com 5805 elementos lineares com tamanho de 0,1 metros, e um passo de 864 segundos podem ser observados na Figura 37, para 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 e 28 dias de concretagem.

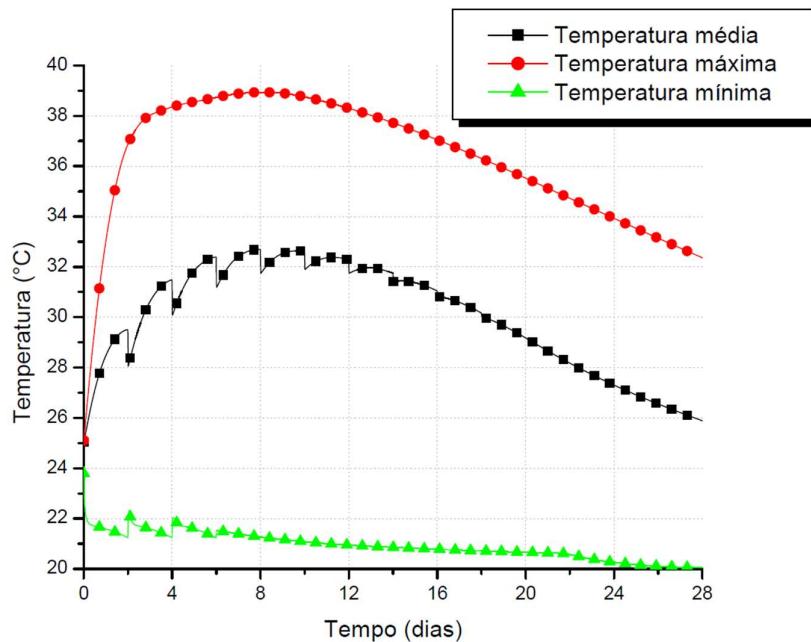
Figura 37: Isotermas de temperatura de concretagem em 10 camadas.



Fonte: Autoria própria.

No gráfico a seguir, são apresentadas as curvas da temperatura máxima, média e mínima ao longo do período de 28 dias de concretagem.

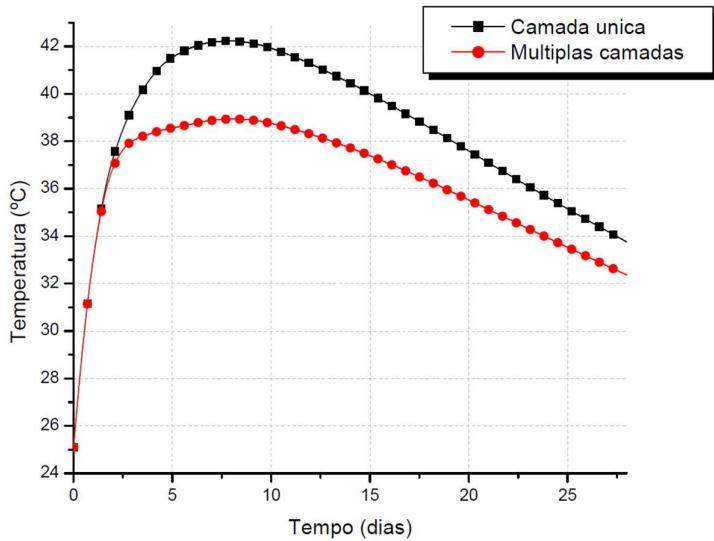
Figura 38: Gráfico de temperaturas da barragem construída em camadas.



Fonte: Autoria própria.

Observando a Figura 38, notamos uma temperatura máxima próxima de 39 °C, além de apresentar uma temperatura mais uniforme no domínio, isso reduz o risco de surgimento de trincas na estrutura. Na comparação feita na Figura 39, é possível notar a diferença entre temperaturas máxima em relação ao modelo construído em camada única

Figura 39: comparação de temperatura máxima entre os métodos de construção.



Fonte: Autoria própria.

### 5.3 Mudança nas propriedades do material

De acordo com Neville (2016, p. 154), "São três as propriedades térmicas que podem ser importantes para o desempenho do concreto: o coeficiente de dilatação térmica, o calor específico e a condutividade. As duas últimas são de interesse para obras em concreto massa ou em situações em que seja necessário isolamento". Como o coeficiente de dilatação térmica influencia apenas nas propriedades mecânicas do material, serão implementadas mudanças apenas no calor específico e na condutividade do concreto.

#### 5.3.1 CALOR ESPECIFICO

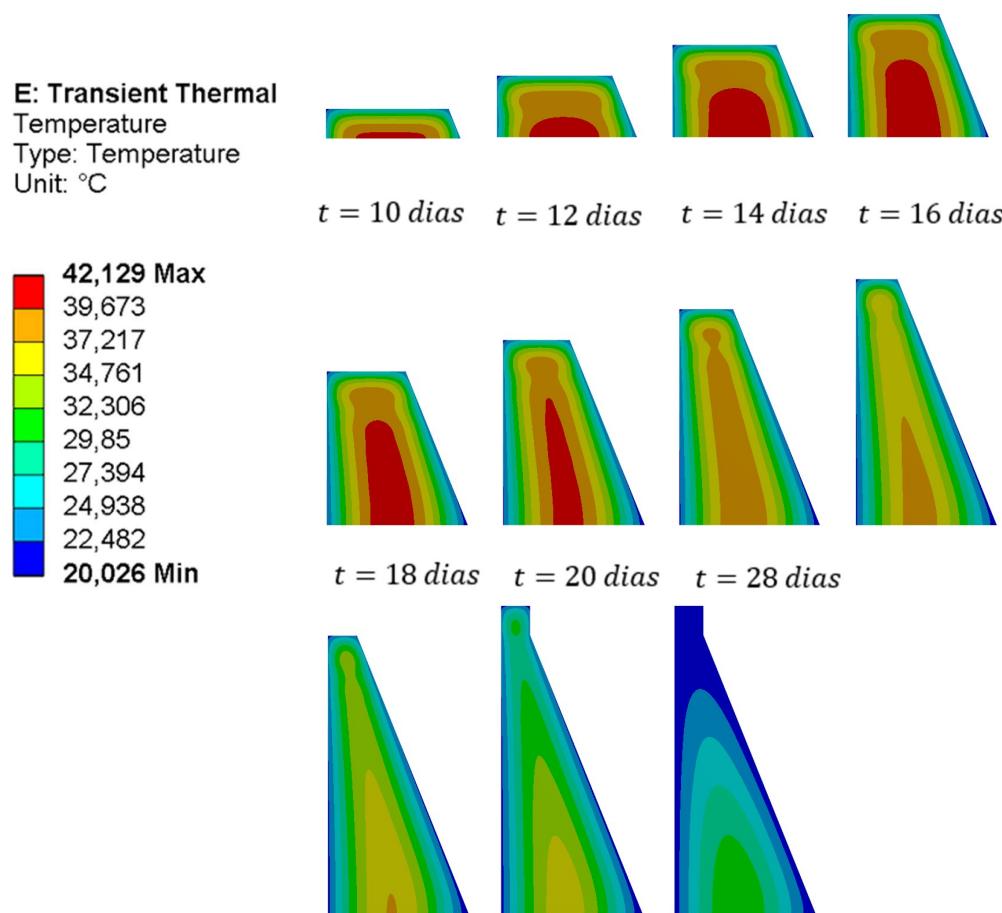
O calor específico, que é pouco afetado pelas características mineralógicas do agregado (materiais granulares que são misturados com o cimento e água para criar o concreto), representa a capacidade térmica do concreto. Seu valor pode variar de acordo com a umidade, temperatura e massa específica do concreto, com um intervalo de valores comuns para o concreto normal situando-se entre 840 e 1170 J/kg °C.

Para a simulação, optou-se por adotar um valor baixo de 840 J/kg °C, a fim de observar mudanças mais evidentes na distribuição de temperatura, enquanto as

outras propriedades foram mantidas. Na figura 40, é mostrado os resultados da simulação com 5805 elementos lineares com tamanho de 0,1 metros, e um passo de 864 segundos, para 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 e 28 dias de concretagem para este experimento.

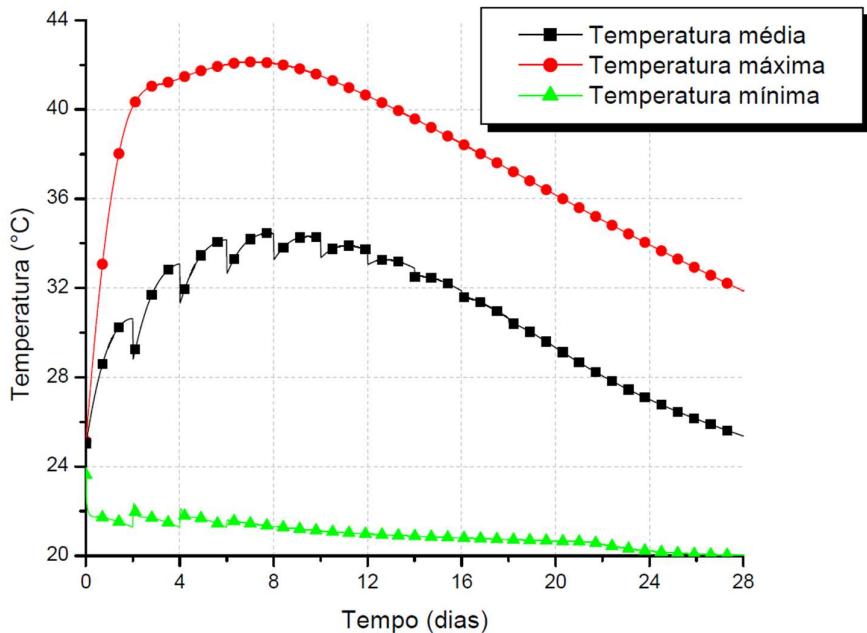
Figura 40: Isotermas de temperatura para concretagem com baixo calor específico.

$t = 2$  dias     $t = 4$  dias     $t = 6$  dias     $t = 8$  dias



Fonte: Autoria própria.

Figura 41: Temperatura máxima e média para barragem com baixo calor específico.



Fonte: Autoria própria.

Em materiais com um valor baixo de calor específico, é necessário menos calor para aumentar sua temperatura, sendo assim, como era de se esperar, o resultado apresenta maiores gradientes de temperatura. Portanto, ao construir grandes estruturas de concreto, é aconselhável evitar o uso de concreto com baixo calor específico, mas sempre considerando manter os valores das outras propriedades.

### 5.3.2 CONDUTIVIDADE TERMICA

A condutividade térmica é uma medida da capacidade de um material conduzir calor e é definida como a relação entre o fluxo de calor e o gradiente de temperatura. No caso do concreto comum, sua condutividade térmica normalmente varia entre 1,4 e 3,6 J/m<sup>2</sup>s °C/m quando está saturado. A massa específica do concreto comum não influencia significativamente na sua condutividade.

A característica mineralógica do agregado exerce uma grande influência na condutividade do concreto. Geralmente, Basalto e Traquito possuem baixa condutividade, Dolomito e Calcário possuem condutividade intermediária, enquanto o Quartzito possui a maior condutividade, que também depende da direção do fluxo de calor em relação à orientação dos cristais. Em geral, a cristalinidade da rocha aumenta a sua condutividade, como pode ser visto na Tabela 7.

Tabela 7: Valores típicos de condutividade térmica de concreto.

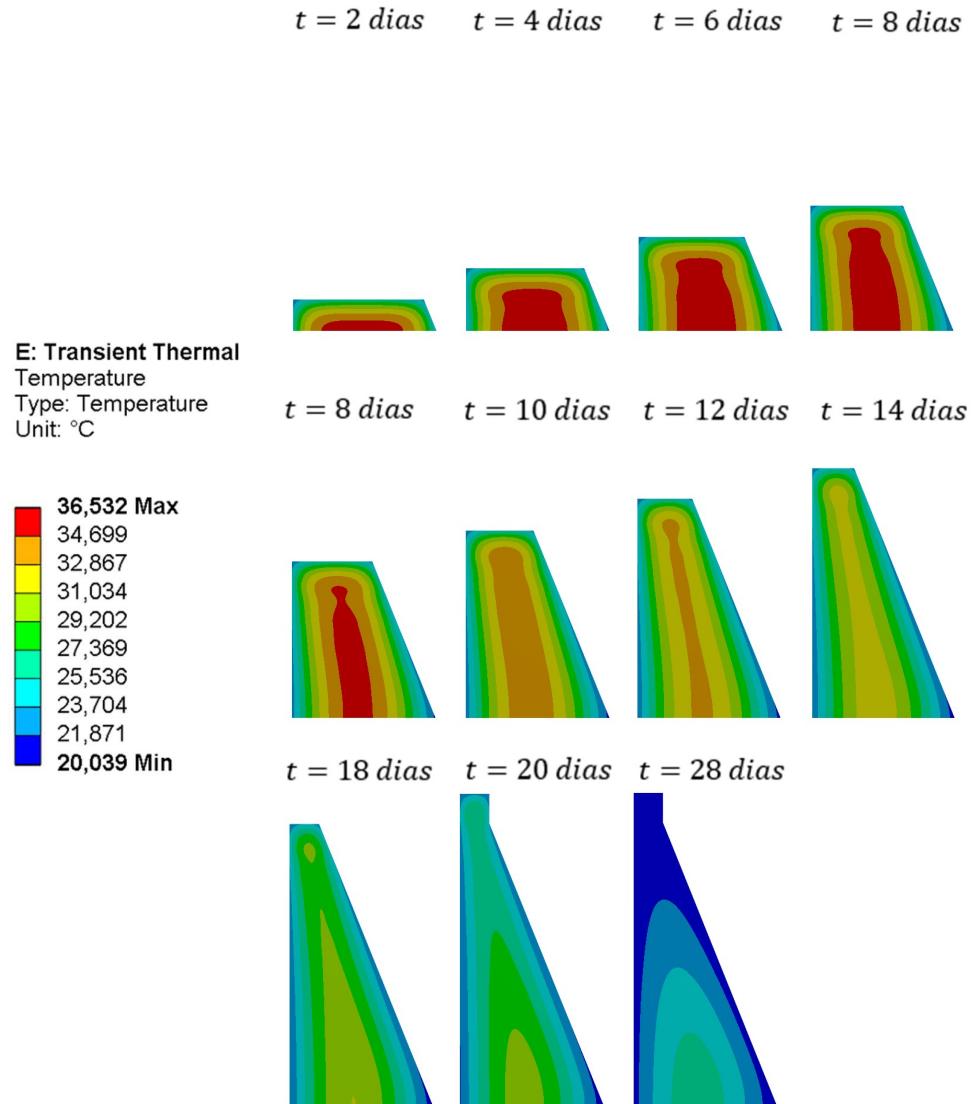
<b>Tipo de agregado</b>	<b>Massa específica úmida do concreto (kg/m<sup>3</sup>)</b>	<b>Condutividade (J/m<sup>2</sup>s°C/m)</b>
Quartzito	2.440	3,5
Dolomito	2.500	3,3
Calcário	2.450	3,2
Arenito	2.400	2,9
Granito	2.420	2,6
Basalto	2.520	2,0
Barita	3.040	2,0
Folheto expandido	1.590	0,85

Fonte: J. M. Scanlon and J. E. McDonald (1994).

O grau de saturação do concreto é um fator importante, já que a condutividade do ar é menor do que a da água. Em concretos leves, um aumento de 10% no teor de umidade resulta em cerca da metade de aumento na condutividade térmica.

Para a simulação, foi adotado um valor de 3,5 J/m<sup>2</sup>s °C/m, a fim de deixar evidenciar mudanças mais expressivas na distribuição de temperatura, enquanto as outras propriedades foram mantidas como no experimento da seção (5.2.5). A Figura 42 apresenta os resultados da simulação para 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 e 28 dias de concretagem.

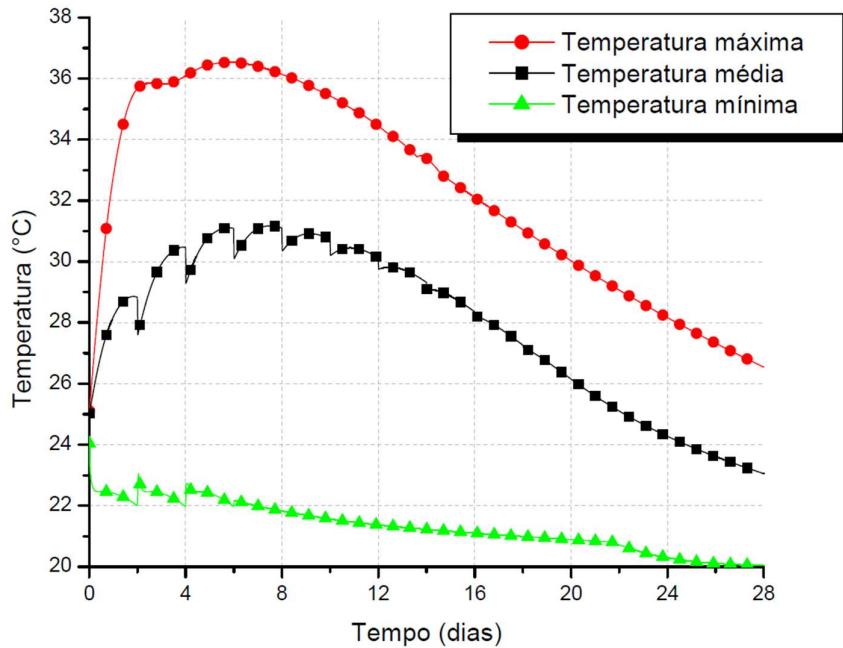
Figura 42: Isotermas de temperatura para concreto com alta condutividade térmica.



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 42, é possível observar um gradiente de temperatura bastante uniforme entre a parte interna e externa da barragem em comparação com os experimentos da seção (5.2.5) e (5.3.1), devido a capacidade do concreto de conduzir o calor de maneira mais eficiente em seu interior.

Figura 43: Temperatura máxima e média para concreto com alta condutividade térmica.



Fonte: Autoria própria.

Conforme mostrado na Figura 43, observamos uma temperatura máxima mais baixa em comparação com os experimentos da seção (5.2.5) e (5.3.1), o que é esperado, uma vez que materiais com maior valor de condutividade térmica permitem uma melhor propagação do calor.

## 6. CONCLUSÃO

Ao longo deste trabalho, exploramos problemas térmicos em estruturas de concreto. Desde a revisão da literatura até a aplicação prática do Método dos Elementos Finitos (MEF), cada seção contribuiu para uma compreensão mais profunda e abrangente do nosso objeto de estudo. No presente capítulo, destacaremos os principais insights obtidos e delinearemos as conclusões fundamentais derivadas dessa jornada acadêmica.

Exploramos a eficácia do método analítico em um exemplo simples e o método computacional na análise térmica de barragens de concreto. Enquanto os métodos analíticos mostraram-se viáveis para problemas simples, confrontamos as limitações evidentes em cenários mais complexos.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) destacou-se como uma solução robusta para análises térmicas complexas. Apesar de sua inicial complexidade conceitual, a implementação prática revelou-se altamente eficaz para uma gama diversificada de problemas, desde térmicos até eletromagnéticos e fluidodinâmicos.

Ao aplicarmos um modelo para análise térmica em barragens de concreto, distinguimos notáveis diferenças nos comportamentos térmicos entre o método tradicional de bloco único e o método de construção em camadas. Observamos que o método de construção em camadas proporciona uma distribuição mais uniforme da temperatura, destacando sua relevância para estruturas de grande escala em concreto.

Além da escolha do método de construção, identificamos outros fatores influentes, como o tipo de cimento, grau de saturação e temperatura de lançamento. As mudanças no calor específico e na condutividade térmica foram analisadas, indicando relações cruciais entre essas propriedades e a distribuição interna de calor.

Essas conclusões consolidam a importância de abordagens computacionais avançadas e análises detalhadas na concepção e construção de barragens de concreto, oferecendo uma visão valiosa para futuros projetos e estudos na área.

## REFERÊNCIAS

- [1] ANDRADE, C. R.; ZAPAROLI, E. L. (1999). **Condução de Calor Bidimensional com Condutividade Térmica Dependente da Temperatura.** Disponível em: <http://www.bibl.ita.br/viiencita/Conducoo%20de%20calor%20bidimensional%20com%20condutividade%20termica%20dependente%20da%20temperatura.pdf>. Acesso em: 25 fevereiro 2021.
- [2] BHATTI, M. A. **Fundamental Finite Element Analysis and applications, with Mathematica and MATLAB computations.** New Jersey: Jhon Wiley & Sons, Ltd, 2005.
- [3] Boundary Conditions. **Paragchaware**, 2016. Welcome to the world of fluids. Disponível em: [https://paragchaware.files.wordpress.com/2016/08/boundary\\_conditions.pdf](https://paragchaware.files.wordpress.com/2016/08/boundary_conditions.pdf).
- [4] CERDA, L. A. de et al. **Aplicação de Métodos Numéricos para o Estudo do Comportamento Termo-estrutural de Barragens de Concreto e Conjulação com Instrumentação.** Relatório final ciclo 2001-2002. Curitiba, PR, 2003.
- [5] COELHO, N. A.; Pedroso, L. J.; Rêgo, J. H. S.; Nepomuceno, A. A.; **Um Estudo Numérico dos Efeitos Térmicos Provocados Pelo Calor de Hidratação do Cimento em Barragens.** Maceió. Dam World – IBRACON: 2012.
- [6] ÇENGEL, Y. A.; GHAJAR, A. J. **Transferência de Calor e Massa.** 4.ed. AMGH Editora Ltda, 2012.
- [7] HICKMANN, T. et al. **Solução analítica e numérica da equação da condução de calor aplicada a barragem de concreto.** Seminário Nacional de Grandes Barragens. Foz do Iguaçu, 2015.
- [8] HUANG, H. C., USMANI, A. S. **Finite Element Analysis for Heat Transfer.** Por Springer-Verlag, 1993, United Kingdom;
- [9] INCROPERA, F. P.; Dewitt, D. P.; Bergman, T. L.; Lavine, A. S. **Fundamentos de Transferência de Calor e Massa.** 6<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- [10] JIN, J. **The finite element method in electromagnetics.** 2.ed. John Wiley & Sons, inc. 2002
- [11] KAVAMURA, E. E. **Estudo do comportamento termo-estrutural bidimensional de barragens de concreto utilizando o Método dos Elementos Finitos.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Paraná - UFPR, Curitiba: 2005.
- [12] KAVAMURA, E. E. et al. **Análise termo-mecânica bidimensional de estruturas executadas em camadas.** congresso de métodos computacionais em engenharia, 2004. In: Lisboa: Anais do CMCE-2004, 2004. p. 1–15.

- [13] KRÜGER, D. A. V.; **Análise térmica transiente de estruturas de concreto executadas por camadas.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Paraná - UFPR, Curitiba, 2001.
- [14] LACERDA, L. A., et al. **Analise termo-mecânica de barragens de concreto compactado com rolo.** II Congresso de inovação tecnológica em energia elétrica. Universidade Federal do Paraná - UFPR, 2003.
- [15] LEWIS, R. W., NITHIARASU, P. e SEETHARAMU, K. N. **Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow.** Livro editado por John Wiley & Sons, Inc., 2004, England;
- [16] LIU, J. et al. **Laboratory Test and Numerical Simulation of Time-Dependent Thermomechanical Behavior of the Three-Gorges Dam.** Journal of materials in civil engineering. 2010.
- [17] METHA, P.; MONTEIRO, P. **Concreto: Estrutura, propriedades e materiais.** São Paulo:Pini, 1994.
- [18] NASCIMENTO, V. M.; SILVA, R. P. (2019). **O Que esperar do Calor em uma Placa Estreita?**. Matemática Universitária no 50/51, IGCE/UNESP.
- [19] NEVILLE, A. M. **Propriedades do concreto.** Tradução: Ruy A. Cremonini. 5. ed. Porto Alegre: Maria E. F. Tabajara, 2016.
- [20] POTTER, M. C.; SOMERTON, C. W. **Termodinâmica para Engenheiros.** 3.ed. Bookman, 2017.
- [21] SCANLON, J. M. and MCDONALD J. E., **Thermal properties in Concrete and Concrete-Making**, Eds P. Klieger and J. F. Lamond, ASTM Sp. Tech. Publ. No. 169C, pp. 299-39 (Philadelphia, Pa, 1994).
- [22] SCREMIN, J. J. **Analise termo-elástica 2D via método dos elementos finitos aplicada a estimativa de falha em barragens de CCR.** Dissertação de mestrado. Universidade Federal do Paraná – UFPR, Curitiba, 2011.
- [23] SILVA, M. T. **Analise térmica transiente e de tensões em estruturas executadas em camadas.** Dissertação de mestrado. Universidade Federal do Paraná – UFPR, Curitiba, 2003.
- [24] SILVESTER, P. P. FERRARI, R. L. **Finite elements for electrical engineers.** 2<sup>a</sup> ed. New York: Cambridge University Press, 1990.
- [25] SOUZA, R. M. **O método dos elementos finitos aplicado ao problema de condução de calor.** Apostila. Universidade Federal do Paraná – UFPR, Belém, 2003.