# Computació Numèrica

# Laboratori 13. Integració numèrica amb `Matlab`

M. Àngela Grau Gotés

Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya · BarcelonaTech.

22 de maig de 2018

# drets d’autor

“Donat el caràcter i la finalitat exclusivament docent i eminentment il·lustrativa de les explicacions a classe d’aquesta presentació, l’autor s’acull a l’article 32 de la Llei de propietat intel·lectual vigent respecte de l’ús parcial d’obres alienes com ara imatges, gràfics o altre material contingudes en les diferents diapositives”

# Índex


1. Integració Adaptativa
2. Mètode de Romberg
3. Integració Gaussiana
4. Referències

# Integració Adaptativa

# Joc de proves

Joc de proves per als programes d'integració numèrica.

$$\text{a) } I = \int_1^2 \ln(x)\,dx \;= 2\ln(2) - 1$$

$$\text{b) } I = \int_0^{\pi/4} \cos^2(x)\,dx \;= \left[\frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2}\right]_0^{\pi/4}$$

$$\text{c) } I = \int_{\frac{2}{7\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{3}{2}\;\, dx$$

Feu ús de la rutina `quadgui` de C. Moler

# Mètode de Romberg

# Mètode de Romberg

Per $h = (b-a)/n$, $x_k = a + kh$ i $k = 0 \div n$ calculem

$$T(h),\ T\left(\frac{h}{2}\right),\ T\left(\frac{h}{4}\right),\ \cdots, T\left(\frac{h}{2^p}\right)$$

llavors, l'esquema d'extrapolació de Richardson per $\mathrm{L} \geq 1$, és:

$$T_{\mathrm{L}+1}(h) = T_{\mathrm{L}}(h) + \frac{T_{\mathrm{L}}(h) - T_{\mathrm{L}}(2h)}{4^{\mathrm{L}} - 1}$$

$$T_1(h) = T(h)\,.$$

# Joc de proves

Mitjançant el mètode de Romberg, calculeu:

$$\text{a)}\ \int_0^1 \sqrt{x}\sin(x)dx\,, \qquad \text{b)}\ \int_0^1 \frac{2}{1+x^2}\,dx\ =\frac{\pi}{2}\,,$$

$$\text{c)}\ \int_1^\infty e^{-x^2}dx\,, \qquad \text{b)}\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dx\,.$$

# Exercici 1

(I) Escriure una funció (`ROMBERG8`) per avaluar $I = \int_a^b f(x)dx$, les dades d'entrada han de ser els límits d'integració $a$ i $b$, l'integrand $f(x)$. La fórmula d'integració és:

$$I \approx \frac{h}{5670}\Bigg[217\Big(f(a)+f(b)\Big)+1024\Big(f(a+\frac{h}{8})+f(a+\frac{3h}{8})+f(a+\frac{5h}{8})+f(a+\frac{7h}{8})\Big) + 352\Big(f(a+\frac{h}{4})+f(a+\frac{3h}{4})\Big)+436f(a+\frac{h}{2})\Bigg]+O(h^8)\,.$$

(II) Escriure un `script` (`ROMBERG8COMPOST`) per avaluar integrals mitjançant la fórmula composta de `ROMBERG8`.

Feu un joc de proves prenent $f(x) = 1,\ x,\ \sin(x)\,.$

# Exercici 2

Calculeu la integral $I = \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx$

a) Fent ús del mètode dels trapezis per $h = \dfrac{b-a}{2^k}, \quad 0 \le k \le 5.$

b) Fent ús del mètode de Simpson per $h = \dfrac{b-a}{2^k}, \quad 0 \le k \le 5.$

c) Fent ús del mètode de `ROMBERG8COMPOST` prenent $n = 1, 2, \ldots, 6$ subintervals.

d) Doneu els decimals exactes i les xifres significatives del les vostres aproximacions, sabent que $\int_0^t e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\, erf\,(t)\,.$

Consulteu l'ajuda de Matlab per la funció `erf`

# Integració Gaussiana

# Exercici 3

Fent ús d'una fórmula d'integració gaussiana de dos punts ($m = 2$), calculeu:

$$\text{a)} \int_{-1}^{1} e^x \, dx \,, \quad \text{b)} \int_{0}^{1} \left(7 + 14x^6\right) \, dx \,, \quad \text{c)} \int_{0}^{1} e^{x^2} \, dx \,.$$

# Exercici 4

Integreu pel mètode de Gauss-Legendre de quatre punts $(m = 4)$,

$$\text{a)} \int_{-1}^{1} \cos(x), dx\,, \qquad \text{c)} \int_{0}^{1} \ln(x)\sin^2(x)\,dx\,,$$

$$\text{b)} \int_{-1}^{1} e^x\,dx\,, \qquad \text{d)} \int_{0}^{\pi/3} \ln\left(1+\cos(x)\right)\,dx\,.$$

# Exercici 5

Calculeu les integrals següents per Gauss-Txebixev, amb punts $m = 2, 3, 4$ i 5.

$$\text{a)}\ \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx\,, \quad \text{b)}\ \int_{-1}^{1} \frac{\cos(\pi x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx\,, \quad \text{c)}\ \int_{0}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx\,.$$

# Guies de MATLAB

- MathWorks Documentation Center,
  Matlab Users's Guide online
- MathWorks Documentation Center,
  Matlab Functions's Guide online
- MathWorks Documentation Center,
  Matlab Users's Guide in pdf
- MathWorks Documentation Center,
  Tutorials