GRAU-CN | Pràctica 1 (Enunciat A)

Miguel Moreno Gómez

Grup 11 | Primavera 2018

Contents

NOTA: S'ha tractat de que els scripts siguin tant compatibles en Matlab com en GNU Octave, versió 4.2.2 (No és la versió dels laboratoris de la FIB, sino la més recent que es pot descarregar!).

1 Algorismes

1.1 Construïu un programa en `Matlab` per calcular el termes la successió π_n.

```
function [retval] = PiFunction (n)
    i = 0;
    m4 = 0;
    a = -1;
    b = +1;
    while (i < n)
        x = (b-a) .* rand(1) + a;
        y = (b-a) .* rand(1) + a;
        circ = (x .^ 2) + (y .^ 2);
        if ( circ <= 1 ) % Unit circle
            m4 = m4 + 4;
        end
        i = i+1;
    end
    retval = (m4 / n);
end
```

1.2 Feu un joc de proves per a valors de $n = 5^k$, per exemple $1 \leq k \leq 12$

n	Valor π_n	Error abs.	Error rel.
5^1	3.200000	9.817477e-01	3.125000e-01
5^2	3.040000	1.033419	3.289474e-01
5^3	3.232000	9.720274e-01	3.094059e-01
5^4	3.129600	1.003832	3.195297e-01
5^5	3.173120	9.900642e-01	3.151472e-01
5^6	3.164416	9.927875e-01	3.160141e-01
5^7	3.136922	1.001489	3.187839e-01
5^8	3.142400	9.997431e-01	3.182281e-01
5^9	3.142814	9.996115e-01	3.181862e-01
5^{10}	3.141541	1.000016	3.183151e-01
5^{11}	3.142057	9.998521e-01	3.182628e-01
5^{12}	3.141715	9.999610e-01	3.182975e-01

Possible taula dels resultats de l'execució de la funció anterior. S'ha fet fins a

$k = 12$, i no $k = 15$ per la lentitud dels càlculs.

La estratègia d'aquest exercici és mostrar per iteracions si es redueix/augmenten els diferents errors i, desitjablement, si el valor de π_n s'aproxima al valor real.

1.3 A partir dels valors de la taula, l'exactitud creix o decreix en funció de n? Quants decimals iguals obteniu? Quantes xifres significatives obteniu? Els resultats del teu càlcul es corresponen amb el concepte *límit d'una successió*? Raona totes les teves respostes.

L'exactitud va fluctuant sense tenir en compte la n; diverses execucions del programa poden donar errors absoluts i relatius diferents: en alguns *pot* decreixer (i quan ho fa, és pràcticament negligible), en altres no.

Els resultats no els correspondria amb la definició de límit per la seva variabilitat als càlculs.

2 Errors de cancel.lació

2.1 Cerca documentació sobre l'us de la regla de Horner per avaluar polinomis. Escriu un breu resum del que has entès (màxim 1/2 full). Dóna les teves fonts bibliogràfiques.

La regla de Horner és un algorisme que s'empra per a simplificar (des del punt de vista d'un computador) les avaluacions de polinomis, partint els polinomis en monomis (és a dir, polinomis de grau 1); cada monomi obtingut s'afegeix al resultat del següent monomi de major grau, de forma que queda la mateixa expressió però composada amb monomis.

Per exemple, si tenim un polinomi de la forma:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 - cx + d$$

Aplicar la regla de Horner obtindrà el següent polinomi:

$$f(x) = (((a)x + b)x - c)x + d$$

Aquesta taula defineix una seqüència de constants que es van executant a cada pas, la qual formen el polinomi final:

b_n	**Polinomi**
0	a
1	$b_0x + b$
2	$b_1x - c$
3	$b_2x + d$

Fonts bibliogràfiques:

- https://rosettacode.org/wiki/Horner's_rule_for_polynomial_evaluation
- https://eli.thegreenplace.net/2010/03/30/horners-rule-efficient-evaluation-of-polynomials
- http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/mn11b/temas/horner.pdf
- https://www.math10.com/en/algebra/horner.html

2.2 Escriure una funció de Matlab que avalui el polinomi $p(x) = x^7 + 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1$ per a valors equiespaiats a l'interval [0.988, 1.012], prenent Δx = 0.00005. Representa gràficament el polinomi.

```
function [Res] = p(X)
    P = @(x) (x .^ 7) - 7.*(x.^6) + 21.*(x.^5) - 35.*(x.^4)      \
              + 35.*(x.^3) - 21.*(x.^2) + (7*x) - 1;
    T =  0.988 :  0.0001: 1.012;
    Res = P(X);
end
```

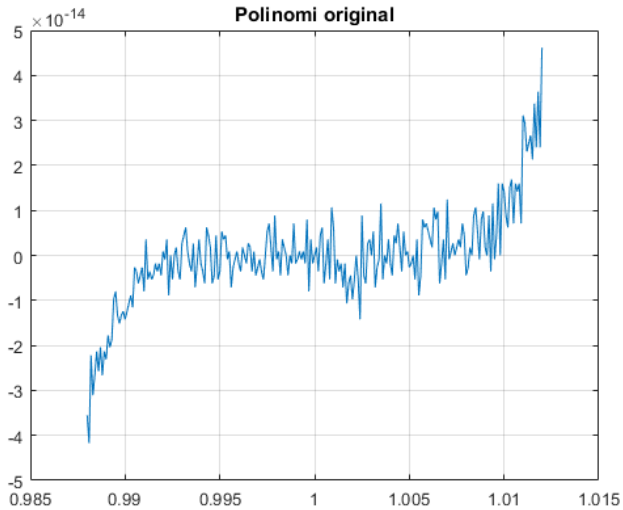

Figure 1: Gràfica que representa la funció $p(x)$.

2.3 Escriure una funció de Matlab que avalui el polinomi $p(x)$ fent ús de la regla de Horner. Per a valors equiespaiats a l'interval [0.988, 1.012], prenent Δx = 0.00005. Representa gràficament el polinomi.

```
function [Res] = pHorner(X)
    P0 = @(x) x - 7
    P1 = @(x) P0(x).*x + 21;
```

```
    P2 = @(x) P1(x).*x - 35;
    P3 = @(x) P2(x).*x + 35;
    P4 = @(x) P3(x).*x - 21;
    P5 = @(x) P4(x).*x - 7;
    PFinal = @(x) P5(x).*x - 1;
    T = 0.988 :  0.0001: 1.012;
    Res = PFinal(X);
end
```

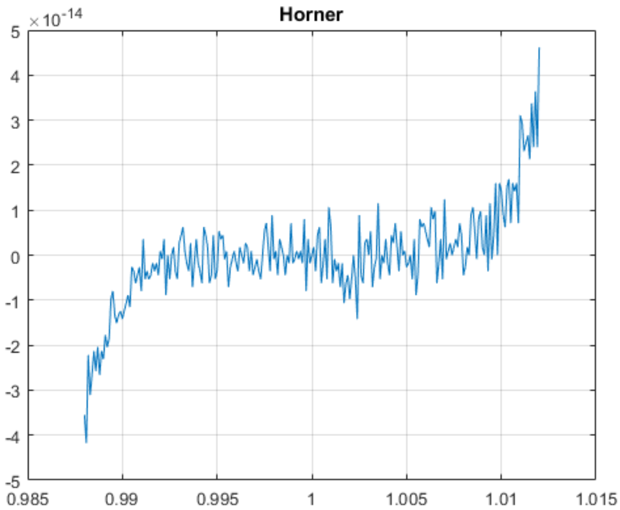

Figure 2: Gràfica que representa la funció $p(x)$ de Horner.

2.4 Compareu les gràfiques obtingudes en els dos apartats anteriors amb la gràfica del polinomi $(x-1)^7$ en el mateix domini. Quines semblances i quines diferències observeu? Raona totes les teves respostes

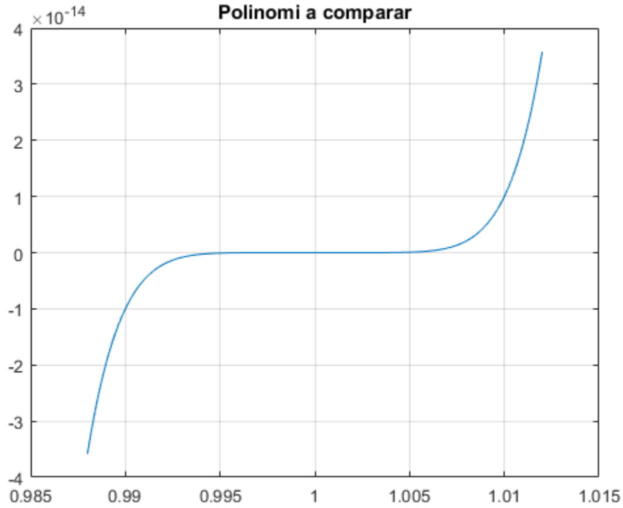

Figure 3: Gràfica que representa la funció $(x-1)^7$.

Comparat amb els polinomis calculats, els valors d'aquests pateixen bastant soroll comparat amb la funció de la qual es vol obtenir el seu valor. Tot i que la forma de les corbes de les equacions és similar, no son exactament les mateixes. La cota del error absolut no ajuda, perquè en alguns casos aquest Δx s'apropa a la unitat.

Tot i que els dos polinomis (l'original i el de Horner) es calculen de forma diferent, acaben proporcionant els mateixos resultats. Cal dir, però, que Horner s'ofereix en un format més compacte, cosa la qual facilita la seva lectura.

3 Errors de truncament

3.1 Escriure una function MATLAB per a calcular les sumes parcials finites.

```
function [retval] = InfinitePartialSums( N )
    n = 0;
    retval = 0;
    while (n < N)
        Pow16 = 16 .^ (-n);
        Div1 = 4/((8.*n) + 1);
        Div2 = 2/((8.*n) + 4);
        Div3 = 1/((8.*n) + 5);
        Div4 = 1/((8.*n) + 6);
        DivSubs = (Div1 - Div2 - Div3 - Div4);
        Si = Pow16 * DivSubs;
        retval = retval + Si
        n = n+1;
    end
    %return retval;
end
```

3.2 Realitzeu un joc de proves que mostri $\pi = \lim_{N\to\infty} S_N$. Tabuleu els resultats obtinguts.

Representem els valors del joc de proves com una taula:

$\boldsymbol{n}$	**Valor** π_n
1	3.1333333333333333
2	3.1414224664224664
3	3.1415873903465816
4	3.1415924575674357
5	3.1415926454603365
6	3.1415926532280878
7	3.1415926535728809
8	3.1415926535889729
9	3.1415926535897523
10	3.1415926535897913
11	**3.1415926535897931**
12	3.1415926535897931

3.3 Per a quin valor de N s'obté el valor de π amb la precisió de MATLAB.

Com es pot veure inficat a la taula anterior, al valor 11 s'obté el mateix valor que π en `format long`[1], el qual és igual a `3.1415926535897931`.

4 Solucions d'equacions no lineals

4.1 Digueu quantes arrels reals té $f(x) = 0$ per $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ i justifiqueu-ho. Utilitzeu el teorema de Bolzano per a determinar intervals que separin les arrels.

Aplicant el metode de la bisecció i de la secant veiem que només té una arrel i és 1.3652. Pel teorema de Bolzano podem trobar dos punts, en aquest cas el 1 i el 2, on $f(1)$ i $f(2)$ tenen signes diferents (és a dir, $f(1)f(2) > 0$). Al ser una funció continua en aquest punt, existeix un altre punt c entre 1 i 2 tal que $f(c) = 0$.

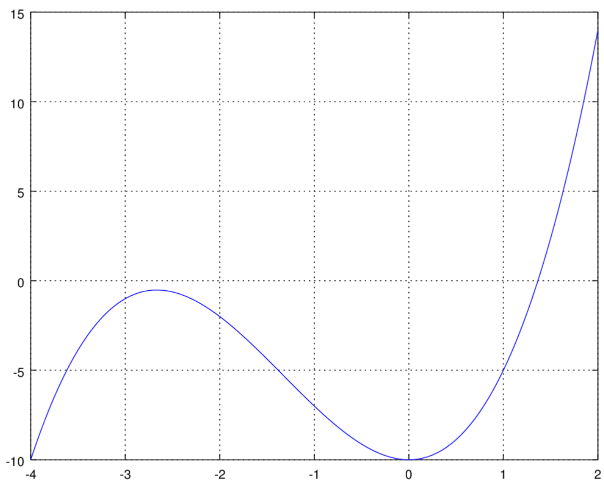

Figure 4: Gràfica que representa $f(x)$. Nota que entre els punts [-3, -2] sembla que hi han més punts on hi han arrels reals, pero mai arriben a tocar el 0.

[1]El `format long` es representa amb 15 xifres decimals després del punt.

4.2 Calculeu la arrel real (com a mínim 6 decimals correctes) per cadascun dels següents mètodes. Per cada mètode, doneu els punts inicials i el criteri d'aturada (Veure els formats de les taules de resultats al final del document):

4.2.1 (a) Mètode de la bisecció. Presenteu els resultats en una taula.

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$(b_n - a_n) / 2$
1	1.000000000000000	2.000000000000000	1.000000000000000	-5.000000000000000	0.500000000000000
2	1.000000000000000	1.500000000000000	1.500000000000000	2.375000000000000	0.250000000000000
3	1.250000000000000	1.500000000000000	1.250000000000000	-1.796875000000000	0.125000000000000
4	1.250000000000000	1.375000000000000	1.375000000000000	0.162109375000000	0.062500000000000
5	1.312500000000000	1.375000000000000	1.312500000000000	-0.848388671875000	0.031250000000000
6	1.343750000000000	1.375000000000000	1.343750000000000	-0.350982666015625	0.015625000000000
7	1.359375000000000	1.375000000000000	1.359375000000000	-0.096408843994141	0.007812500000000
8	1.359375000000000	1.367187500000000	1.367187500000000	0.032355785369873	0.003906250000000
9	1.363281250000000	1.367187500000000	1.363281250000000	-0.032149970531464	0.001953125000000
10	1.363281250000000	1.365234375000000	1.365234375000000	0.000072024762630	0.000976562500000
11	1.364257812500000	1.365234375000000	1.364257812500000	-0.016046690754592	0.000488281250000
12	1.364746093750000	1.365234375000000	1.364746093750000	-0.007989262812771	0.000244140625000
13	1.364990234375000	1.365234375000000	1.364990234375000	-0.003959101522923	0.000122070312500
14	1.365112304687500	1.365234375000000	1.365112304687500	-0.001943659010067	0.000061035156250
15	1.365173339843750	1.365234375000000	1.365173339843750	-0.000935847281880	0.000030517578125
16	1.365203857421875	1.365234375000000	1.365203857421875	-0.000431918799251	0.000015258789063
17	1.365219116210938	1.365234375000000	1.365219116210938	-0.000179948903227	0.000007629394531
18	1.365226745605469	1.365234375000000	1.365226745605469	-0.000053962541529	0.000003814697266
19	1.365226745605469	1.365230560302734	1.365230560302734	0.000009030992743	0.000001907348633
20	1.365228652954102	1.365230560302734	1.365228652954102	-0.000022465803845	0.000000953674316
21	1.365229606628418	1.365230560302734	1.365229606628418	-0.000006717412914	0.000000476837158
22	1.365229606628418	1.365230083465576	1.365230083465576	0.000001156788073	0.000000238418579
23	1.365229845046997	1.365230083465576	1.365229845046997	-0.000002780312879	0.000000119209290
24	1.365229964256287	1.365230083465576	1.365229964256287	-0.000000811762519	0.000000059604645
25	1.365229964256287	1.365230023860931	1.365230023860931	0.000000172512749	0.000000029802322
26	1.365229994058609	1.365230023860931	1.365229994058609	-0.000000319624892	0.000000014901161
27	1.365230008959770	1.365230023860931	1.365230008959770	-0.000000073556073	0.000000007450581
28	1.365230008959770	1.365230016410351	1.365230016410351	0.000000049478338	0.000000003725290
29	1.365230012685061	1.365230016410351	1.365230012685061	-0.000000012038868	0.000000001862645
30	1.365230012685061	1.365230014547706	1.365230014547706	0.000000018719735	0.000000000931323
31	1.365230012685061	1.365230013616383	1.365230013616383	0.000000003340434	0.000000000465661
32	1.365230013150722	1.365230013616383	1.365230013150722	-0.000000004349218	0.000000000232831
33	1.365230013383552	1.365230013616383	1.365230013383552	-0.000000000504393	0.000000000116415
34	1.365230013383552	1.365230013499968	1.365230013499968	0.000000001418021	0.000000000058208
35	1.365230013383552	1.365230013441760	1.365230013441760	0.000000000456815	0.000000000029104
36	1.365230013412656	1.365230013441760	1.365230013412656	-0.000000000023789	0.000000000014552
37	1.365230013412656	1.365230013427208	1.365230013427208	0.000000000216513	0.000000000007276
38	1.365230013412656	1.365230013419932	1.365230013419932	0.000000000096362	0.000000000003638
39	1.365230013412656	1.365230013416294	1.365230013416294	0.000000000036287	0.000000000001819

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	(b_n - a_n) / 2
40	1.365230013412656	1.365230013414475	1.365230013414475	0.000000000006249	0.000000000000909
41	1.365230013413566	1.365230013414475	1.365230013413566	-0.000000000008770	0.000000000000455
42	1.365230013414021	1.365230013414475	1.365230013414021	-0.000000000001261	0.000000000000227
43	1.365230013414021	1.365230013414248	1.365230013414248	0.000000000002494	0.000000000000114
44	1.365230013414021	1.365230013414134	1.365230013414134	0.000000000000616	0.000000000000057
45	1.365230013414077	1.365230013414134	1.365230013414077	-0.000000000000322	0.000000000000028
46	1.365230013414077	1.365230013414106	1.365230013414106	0.000000000000147	0.000000000000014
47	1.365230013414092	1.365230013414106	1.365230013414092	-0.000000000000087	0.000000000000007
48	1.365230013414092	1.365230013414099	1.365230013414099	0.000000000000030	0.000000000000004
49	1.365230013414095	1.365230013414099	1.365230013414095	-0.000000000000028	0.000000000000002
50	1.365230013414097	1.365230013414099	1.365230013414097	0.000000000000000	0.000000000000001
51	1.365230013414097	1.365230013414098	1.365230013414098	0.000000000000014	0.000000000000000
52	1.365230013414097	1.365230013414097	1.365230013414097	0.000000000000009	0.000000000000000
53	1.365230013414097	1.365230013414097	1.365230013414097	0.000000000000004	0.000000000000000

4.2.2 (b) Mètode de la secant. Presenteu els resultats en una taula.

n	x_n	$f(x_n)$	$x_n - x_{n-1}$
1	1.321705426356589	-0.703484936569758	-0.678294573643411
2	1.354158277988270	-0.181840946153478	0.032452851631680
3	1.365471083952686	0.003981364504236	0.011312805964416
4	1.365228699688113	-0.000021694067478	-0.000242384264573
5	1.365230013258848	-0.000000002563683	0.000001313570735

4.2.3 (c) Mètode de Newton. Presenteu els resultats en una taula.

n	x_n	$f(x_n)$	$x_n - x_{n-1}$
1	1.380459770114943	0.253376341489712	0.180459770114943
2	1.365342468463248	0.001857117485372	-0.015117301651694
3	1.365230019613352	0.000000102370771	-0.000112448849896
4	1.365230013414097	0.000000000000000	-0.000000006199255

4.3 Considereu els mètodes iteratius següents:

$$i) \quad x_{n+1} = x_n - x_n^3 - 4x_n^2 + 10$$

$$ii) \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x_n^3}$$

$$iii) \quad x_{n+1} = x_n - \Big(\frac{x_n^3 + 4x_n^2 - 10}{3x_n^2 - 8x_n}\Big)$$

4.3.1 Per cada mètode, demostreu la seva convergència/divergència del mètode a l'arrel positiva de l'equació $x^3 + 4x^2 - 10$. Busqueu un interval que asseguri la convergència del mètode analitzat.

- Mètode *i*): Mètode divergent. En molt poques iteracions (aproximadament 5) el valor de x_n es fa tan gran que no és representable.
- Mètode *ii*): Mètode convergent. En més o menys 50 iteracions arriba al valor del punt fix.
- Mètode *iii*): Mètode convergent. En més o menys 20 iteracions arriba al valor del punt fix.

Un interval que asseguri la convergència és l'interval (0, 2].

4.3.2 Per cada mètode, obteniu el punt fix amb el punt inicial del mètode de Newton. Doneu els punts inicials i el criteri d'aturada (fins a 15 decimals correctes).

En els dos mètodes he emprat els mateixos paràmetres (a més de les funcions respectives) per a la funció de Newton:

- **punt fix** = 1
- **tolerancia** = 0.0005
- **Nombre d'iteracions** = 200000

Dit això:

- Pel mètode *ii* tenim d'arrel = 2.157388584177565
- Pel mètode *iii* tenim d'arrel = -2.690646704272158

4.3.3 Per al mètode $x_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x_n^3}$, apliqueu el mètode d'acceleració d'Aitken a la successió $\{x_n\}$ i obteniu el punt fix prenent el mateix x_0 (fins a 15 decimals correctes). Quantes iteracions calen?

iteracions	x_{n+1}
1	1.426637991621936
2	1.331950586592610
3	1.381755824449737
4	1.356639585064321
5	1.369593391795259
6	1.362987143132540
7	1.366375909806074
8	1.364642740004837
9	1.365530512259333
10	1.365076127110441
11	1.365308786086649
12	1.365189681935091
13	1.365250660802594
14	1.365219442550375
15	1.365235425234125
16	1.365227242758129
17	1.365231431878988
18	1.365229287214083
19	1.365230385200119
20	1.365229823073993
21	1.365230110860838
22	1.365229963525136
23	1.365230038955310
24	1.365230000337985
25	1.365230020108560
26	1.365230009986791
27	1.365230015168744
28	1.365230012515785
29	1.365230013873998
30	1.365230013178645
31	1.365230013534639
32	1.365230013352384

iteracions	x_{n+1}
33	1.365230013445691
34	1.365230013397922
35	1.365230013422378
36	1.365230013409857
37	1.365230013416267
38	1.365230013412986
39	1.365230013414666
40	1.365230013413806
41	1.365230013414246
42	1.365230013414021
43	1.365230013414136
44	1.365230013414077
45	1.365230013414107
46	1.365230013414092
47	1.365230013414100
48	1.365230013414096
49	1.365230013414098
50	1.365230013414096

Cal fer 50 iteracions per arribar al punt fix amb 15 decimals correctes.

4.3.4 Per al mètode $x_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x_n^3}$, apliqueu el mètode de Steffensen i obteniu el punt fix prenent el mateix x_0 (fins a 15 decimals correctes). Quantes iteracions calen?

iteracions	x_{n+1}
1	1.2935073246858670
2	1.3644685312797538
3	1.3652299210114864
4	1.3652300134140956
5	1.3652300134140956
6	1.3652300134140956
7	1.3652300134140956
8	1.3652300134140956
9	1.3652300134140956
10	1.3652300134140956

Com podem observar, amb 4 iteracions podem arribar al punt fix.

4.4 Representeu en un gràfic els *logaritmes dels valors absoluts* dels errors relatius aproximats:

$$r^{n+1} = \frac{x^{n+1} - x^n}{x^{n+1}}$$

per als mètodes convergents. Cada mètode un color diferent. A partir dels valors de les taules i les gràfiques dels errors, quin seria el millor procediment per obtenir l'arrel real de $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$. Raona les teves respostes.

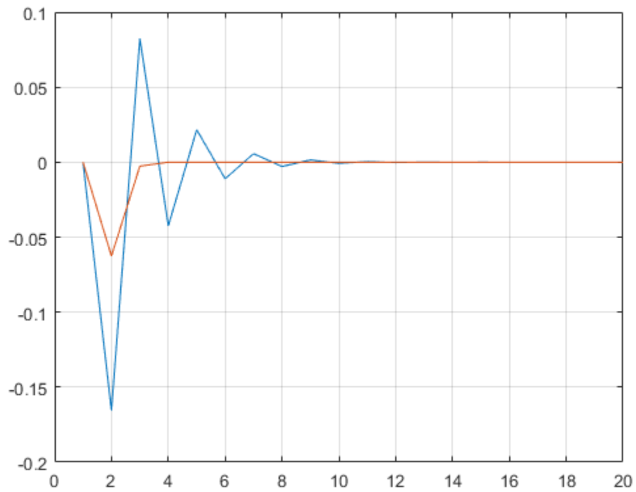

Figure 5: Gràfica que representa els logs. dels valors absoluts dels errors relatius aproximats per als mètodes convergents; En blau el *ii*, i en taronja el *iii*.

A priori sembla que no hi ha molta diferència entre agafar qualsevol dels dos mètodes iteratius. Ara bé, la diferència d'errors és major al mètode *ii*, de forma que el mètode *iii* és el més estable contra els errors, i per tant el millor procediment per obtenir les seves arrels reals.