المحتويات

الفصل الأول: التكامل غير المحدود

1-1	المعكوس التفاضلي (المشتق المقابل)	1
2-1	التكامل غير المحدود	2
3-1	خواص التكامل غير المحدود	8
4-1	التكامل بالتعويض الجبري	14
5-1	رمز التجميع	32
6-1	المساحة تحت منحنى	38
7-1	مفهوم ريمان للتكامل	46
8-1	خواص التكامل المحدود	54
9-1	المبرهنة الأساسية في حساب التفاضل والتكامل	63

الفصل الثاني: تطبيقات التكامل المحدود

1-2	المساحة تحت منحنى	75
2-2	حجوم الأجسام الدورانية	88
3-2	أطوال المنحنيات	106
4-2	المساحة السطحية لمجسم دوراني	112

الفصل الثالث: طرق التكامل

1-3	طريقة التكامل بالتجزئة	118
2-3	طريقة التكامل بالاختزال المتتالي	127
3-3	طريقة تكامل حاصل ضرب الدوال المثلثية	136
4-3	طريقة التكامل بالتعويض المثلثي أو الزائدي	145
5-3	تكامل الدوال النسبية	155
6-3	تكامل الدوال النسبية (تعويضات متنوعة)	169
7-3	التكاملات المعتلة	177

الفصل الرابع: المتتاليات

1-4	المتتاليات	191
2-4	المتتالية المطردة	204
3-4	المتسلسلات اللانهائية	211

المحتويات

4-4	اختبار التقارب	225
5-4	اختبار التكامل	226
6-4	متسلسلات تايلور ومكلورين	232
7-4	مزيداً من اختبارات التقارب	236
8-4	المتسلسلة المتناوبة	249
9-4	التقارب المطلق والتقارب المشروط (أو المقيد)	253
10-4	متسلسلات القوى	259
11-4	تقارب متسلسلات تايلور	269
12-4	متسلسلة ذات الحدين	276
13-4	تفاضل وتكامل متسلسلات القوى	279
14-4	العلاقة بين متسلسلات القوى ومتسلسلات تايلور	288
15-4	العمليات الجبرية على متسلسلات القوى	291

1 التكامل غير المحدود
Indefinite Integral

(1-1) المعكوس التفاضلي (المشتق المقابل) Antiderivative

(1-1-1) **تعريف**: الدالة $F(x)$ تسمى معكوس تفاضلي للدالة $f(x)$ على الفترة I إذا كان $\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x) \quad \forall x \in I$

مثال(1): أوجد المعكوس التفاضلي للدالة $f(x) = 4x^3$

الحل:

نبحث عن دالة $F(x)$ مشتقتها تساوي $4x^3$، وحيث أنّ $\frac{d}{dx}\left[x^4\right] = 4x^3$ فإنّ $F(x) = x^4$ معكوس تفاضلي للدالة $f(x) = 4x^3$ وبما أنّ $\frac{d}{dx}\left[x^4 + c\right] = 4x^3$ حيث c عدد ثابت فإنّ $F(x) = x^4 + c$ معكوس تفاضلي للدالة $f(x) = 4x^3$ أيضاً. أي أنّ المعكوس التفاضلي $F(x)$ للدالة $f(x)$ لا يكونُ وحيداً وبالتالي الدالة $f(x) = 4x^3$ يوجد لها عدد غير محدود من المعكوسات التفاضلية تختلف باختلاف قيمة الثابت c.

مثال(2): الجدول التالي يبين الدالة $f(x)$ وبعض المعكوسات التفاضلية لها

الدالة $f(x)$	المعكوس التفاضلي للدالة $f(x)$ Antiderivative of $f(x)$, $c \in R$
1	$x+c$
x	$\frac{x^2}{2}+c$
x^3	$\frac{x^4}{4}+c$
x^4	$\frac{x^5}{5}+c$
$2x^3$	$\frac{1}{2}x^4+c$
e^x	e^x+c
$\cos x$	$\sin x+c$
$\frac{2}{x}$	$2\ln x+c$

(2-1) التكامل غير المحدود Indefinite Integral

عملية إيجاد المعكوس التفاضلي تسمى تكامل (Integration) غير محدود.

(1-2-1) **تعريف**: الدالة $F(x)+c$ تسمى تكامل غير محدود للدالة $f(x)$ ويكتب على الصورة:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c \quad ..... (1)$$

ملاحظات:

(1) الرمز $\int$ يسمى رمز التكامل، والدالة $f(x)$ تسمى دالة المكاملة (Integrand) والعدد الثابت c يسمى ثابت المكاملة.

(2) التكامل غير المحدود دالة بينما التكامل المحدود عدد

(3) التكامل $\int f(x)\,dx$ يسمى تكامل غير محدود لأنه يساوي عدد غير محدود من المعكوسات التفاضلية $F(x)+c$ تختلف باختلاف قيمة الثابت c.

مثال(3): احسب التكاملات التالية:

(1) $\int x^2\ dx$ (2) $\int 4x^3\ dx$ (3) $\int \sec^2 y\ dy$

(4) $\int \sqrt{x}\ dx$ (5) $\int \frac{1}{x}\ dx$ (6) $\int \sinh x\ dx$

(7) $\int \operatorname{sech} x \tanh x\ dx$ (8) $\int e^{3x}\ dx$ (9) $\int 3^x\ dx$

(10) $\int 7^{2x}\ dx$

الحل:

(1) $\int x^2\ dx = \frac{x^3}{3} + c$

لأنّ: $\frac{d}{dx}\left[\frac{x^3}{3} + c\right] = x^2$

(2) $\int 4x^3\ dx = x^4 + c$

لأنّ: $\frac{d}{dx}\left[x^4 + c\right] = 4x^3$

(3) $\int \sec^2 y\ dy = \tan y + c$

لأنّ: $\frac{d}{dy}\left[\tan y + c\right] = \sec^2 y$

(4) $\int \sqrt{x}\ dx = \int x^{1/2}\ dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + c$

لأنّ: $\frac{d}{dx}\left[\frac{2}{3}x^{3/2} + c\right] = x^{1/2}$

(5) $\int \frac{1}{x}\ dx = \ln x + c$

لأنّ: $\frac{d}{dx}\left[\ln x + c\right] = \frac{1}{x}$

(6) $\int \sinh x\ dx = \cosh x + c$

لأنّ: $\frac{d}{dx}\left[\cosh x + c\right] = \sinh x$

(7) $\int \operatorname{sech} x \tanh x\ dx = -\operatorname{sech} x + c$

لأنّ: $\frac{d}{dx}\left[-\operatorname{sech} x + c\right] = -(-\operatorname{sech} x \tanh x) = \operatorname{sech} x \tanh x$

(8) $\int e^{3x}\ dx = \frac{e^{3x}}{3} + c$

لأنّ: $\frac{d}{dx}\left[\frac{e^{3x}}{3} + c\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{e^{3x}}{3}\right] + \frac{d}{dx}[c] = \frac{e^{3x}}{3} \cdot 3 + 0 = e^{3x}$

(9) $\int 3^{x}\ dx = \frac{3^{x}}{\ln 3} + c$

لأنّ: $\frac{d}{dx}\left[\frac{3^{x}}{\ln 3}\right] = \frac{3^{x}}{\ln 3} \cdot \ln 3 + 0 = 3^{x}$

(10) $\int 7^{2x}\ dx = \frac{7^{2x}}{2 \cdot \ln 7} + c$

لأنّ: $\frac{d}{dx}\left[\frac{7^{2x}}{2 \cdot \ln 7} + c\right] = \frac{7^{2x}}{2 \cdot \ln 7} \cdot 2 \cdot \ln 7 + 0 = 7^{2x}$

جدول (1) تكاملات قياسية (قوانين أساسية للتكامل غير المحدود)

$\frac{d}{dx}[x]=1$	(1) $\int 1\,dx=\int dx=x+c$
$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]=x^n\ ,\ n\neq -1$	(2) $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c,\ n\neq -1$
$\frac{d}{dx}\left[e^x\right]=e^x$	(3) $\int e^x\,dx=e^x+c$
$\frac{d}{dx}\left[\frac{e^{ax}}{a}\right]=\frac{e^{ax}}{a}\cdot a=e^{ax}$	(4) $\int e^{ax}\,dx=\frac{e^{qx}}{a}+c$
$\frac{d}{dx}\left[\frac{A^x}{\ln A}\right]=\frac{A^x}{\ln A}\cdot\ln A=A^x$	(5) $\int A^x\,dx=\frac{A^x}{\ln A}+c$
$\frac{d}{dx}\left[\frac{A^{bx}}{b\cdot\ln A}\right]=\frac{A^{bx}}{b\cdot\ln A}\cdot b\cdot\ln A=A^{bx}$	(6) $\int A^{bx}\,dx=\frac{A^{bx}}{b\cdot\ln A}+c$
$\frac{d}{dx}[\ln x]=\frac{1}{x}$	(7) $\int\frac{1}{x}dx=\ln x+c$

جدول (2): تكاملات قياسية

$\frac{d}{dx}[\sin x]=\cos x$	(1) $\int\cos x\,dx=\sin x+c$
$\frac{d}{dx}[-\cos x]=\sin x$	(2) $\int\sin x\,dx=-\cos x+c$
$\frac{d}{dx}[\tan x]=\sec^2 x$	(3) $\int\sec^2 x\,dx=\tan x+c$
$\frac{d}{dx}[-\cot x]=\csc^2 x$	(4) $\int\csc^2 x\,dx=-\cot x+c$
$\frac{d}{dx}[-\csc x]=\csc x\cot x$	(5) $\int\sec x\tan x\,dx=\sec x+c$
$\frac{d}{dx}[-\csc x]=\csc x\cot x$	(6) $\int\csc x\cot dx=-\csc x+c$

جدول (3): تكاملات قياسية

$$\frac{d}{dx}[\sinh x] = \cosh x \qquad (1)\ \int \sinh x\, dx = \cosh x + c$$

$$\frac{d}{dx}[\cosh x] = \sinh x \qquad (2)\ \int \cosh x\, dx = \sinh x + c$$

$$\frac{d}{dx}[\tanh x] = \operatorname{sech}^2 x \qquad (3)\ \int \operatorname{sech}^2 x\, dx = \tanh x + c$$

$$\frac{d}{dx}[-\coth x] = -(-\operatorname{csch}^2 x) = +\operatorname{csch}^2 x$$

$$(4)\ \int \operatorname{csch}^2 x\, dx = -\coth x + c$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sech} x] = -(-\operatorname{sech} x \tanh x) = +\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$(5)\ \int \operatorname{sech} x \tanh x\, dx = -\operatorname{sech} x + c$$

$$\frac{d}{dx}[-\operatorname{csch} x] = -(-\operatorname{csch} x \coth x) = +\operatorname{csch} x \coth x$$

$$(6)\ \int \operatorname{csch} x \coth x\, dx = -\operatorname{csch} x + c$$

مثال(4): احسب التكاملات التالية:

$$(1)\ \int \frac{1}{x^5}\, dx \qquad (2)\ \int \sqrt[5]{x}\, dx \qquad (3)\ \int \frac{y^3}{\sqrt{y}}\, dy \qquad (4)\ \int e^{7x}\, dx$$

$$(5)\ \int 8^x\, dx \qquad (6)\ \int 9^{-4x}\, dx \qquad (7)\ \int \frac{\tan x}{\sec x}\, dx$$

الحل:

$$(1)\ \int \frac{1}{x^5}\, dx = \int x^{-5}\, dx = \frac{x^{-5+1}}{5+1} + c = \frac{x^{-4}}{-4} + c = \frac{-1}{4x^4} + c$$

$$(2)\ \int \sqrt[5]{x}\, dx = \int x^{1/5}\, dx = \frac{x^{1/5+1}}{1/5+1} + c = \frac{x^{6/5}}{6/5} + c = \frac{5}{6}\, x^{6/5} + c$$

$$(3)\ \int \frac{y^3}{\sqrt{y}}\ dy = \int y^3 \,.\, y^{-1/2}\ dy = \int y^{5/2}\ dy = \frac{y^{5/2+1}}{5/2+1} + c$$

$$= \frac{y^{7/2}}{7/2} + c = \frac{2}{7}\ y^{7/2} + c$$

$$(4)\ \int e^{7x}\ dx = \frac{e^{7x}}{7} + c$$

$$(5)\ \int 8^x\ dx = \frac{8^x}{\ln 8} + c$$

$$(6)\ \int 9^{-4x}\ dx = \frac{9^{-4x}}{-4\,.\,\ln 9} + c = \frac{-1}{4\ln 9\,(9^{4x})} + c$$

$$(7)\ \int \frac{\tan x}{\sec x}\ dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,.\,\cos x\ dx = \int \sin x\ dx = -\cos x + c$$

(2.2.1) مبرهنة

$$(i)\ \frac{d}{dx}\Big[\int f(x)\,dx\Big] = f(x)$$

$$(ii)\ \int \frac{d}{dx}\big[f(x)\big]\,dx = f(x) + c$$

البرهان:

$$(i)\ \int f(x)\,dx = F(x) + c$$

$$\frac{d}{dx}\Big[\int f(x)\,dx\Big] = \frac{d}{dx}\big[F(x) + c\big] = \frac{d}{dx}\big[F(x)\big] + \frac{d}{dx}\big[c\big]$$

$$= f(x) + 0 = f(x)\,.$$

$$(ii)\ \int \frac{d}{dx}\big[f(x)\big]dx = \int f'(x)\,dx = f(x) + c$$

أي أنّ $f(x)+c$ معكوس تفاضلي لـِ $\frac{d}{dx}\big[f(x)\big]$.

(3.2.1) مبرهنة: إذا كان كل من $F(x)$ و $G(x)$ معكوس تفاضلي للدالة $f(x)$ في الفترة I فإنّ الفرق بينهما يساوي عدداً ثابتاً.

البرهان:

$$\frac{d}{dx}\left[F(x)\right]=f(x) \qquad , \quad \forall\, x\in I$$

$$\frac{d}{dx}\left[G(x)\right]=f(x) \qquad , \quad \forall\, x\in I$$

$$\frac{d}{dx}\left[F(x)\right]-\frac{d}{dx}\left[G(x)\right]=0$$

$$\frac{d}{dx}\left[F(x)-G(x)\right]=0$$

$$\therefore F(x)-G(x)=c \ .$$

أو $F(x)=G(x)+c$ لكل قيم x في I . بمعنى أن الفرق بين F و G عدد ثابت.

(3-1) خواص التكامل غير المحدود

(1-3-1) مبرهنة: (1) إذا كان c عدداً ثابتاً فإنّ: $\int c\, f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$

(2) تكامل مجموع دالتين يساوي مجموع تكامليهما أي أنّ:

$$\int\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$$

(3) تكامل الفرق بين دالتين يساوي الفرق بين تكامليهما أي أنّ:

$$\int\left[f(x)-g(x)\right]dx=\int f(x)\,dx-\int g(x)\,dx$$

حيث أنّ كلاً من $f(x)$ و $g(x)$ لها معكوس تفاضلي.

البرهان:

لإثبات المبرهنة (1-3-1) يجب إثبات أنّ الطرف الأيمن في كل من (1) و (2) و (3) هو معكوس تفاضلي (تكامل) لدالة التكامل في الطرف الأيسر.

$$(1)\ \frac{d}{dx}\left[c\int f(x)\,dx\right]=c\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right]=c\,f(x)$$

$$(2)\ \frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx\right]=\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right]+\frac{d}{dx}\left[\int g(x)\,dx\right]$$
$$=f(x)+g(x)$$

$$(3)\ \frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx-\int g(x)\,dx\right]=\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right]-\frac{d}{dx}\left[\int g(x)\,dx\right]$$
$$=f(x)-g(x)$$

مثال(5): احسب كل من التكاملات التالية:

1. $\int 3\sin x\,dx$ 2. $\int\left(\sqrt{x}+\frac{3}{x}\right)^2 dx$ 3. $\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$

4. $\int\frac{2x^3+4x^4}{x^5}dx$ 5. $\int x^2\left(x+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$ 6. $\int\tan^2 t\,dt$

الحل:

1. $\int 3\sin x\,dx = 3\int\sin x\,dx = 3(-\cos x)+c = -3\cos x + c$

2. $\int\left(\sqrt{x}+\frac{3}{x}\right)^2 dx = \int(x+6x^{-1/2}+9x^{-2})\,dx$

$$= \int x\,dx + 6\int x^{-1/2}\,dx + 9\int x^{-2}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 6\frac{x^{1/2}}{1/2} + 9\frac{x^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{x^2}{2} + 12\sqrt{x} - \frac{9}{x} + c$$

3. $\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \int\frac{1.\sin x}{\cos x.\cos x}dx = \int\sec x.\tan x\,dx = \sec x + c$

4. $\int\frac{2x^3+4x^4}{x^5}dx = \int\frac{2x^3}{x^5}dx + \int\frac{4x^4}{x^5}dx = 2\int x^{-2}\,dx + 4\int\frac{1}{x}dx$

$$= 2\frac{x^{-1}}{-1} + 4\ln x + c = \frac{-2}{x} + \ln x^4 + c$$

5. $\int x^2\left(x+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)dx = \int(x^3+2x^{5/3})\,dx = \int x^3\,dx + 2\int x^{5/3}\,dx$

$$= \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^{5/3+1}}{5/3+1} + c$$

$$= \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^{8/3}}{8/3} + c = \frac{x^4}{4} + \frac{3}{4}x^{8/3} + c$$

6. $\int\tan^2 t\,dt = \int(\sec^2 t - 1)\,dt = \int\sec^2 t\,dt - \int dt = \tan t - t + c$

مثال(6): احسب التكامل $\int\left(2x^7-\frac{5}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x}+1\right)dx$

الحل:

$$\int\left(2x^7-\frac{5}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x}+1\right)dx=2\int x^7\,dx-\int\frac{5}{x}dx+\int x^{-1/2}\,dx+\int dx$$

$$=2\frac{x^8}{8}-5\ln x+\frac{x^{1/2}}{1/2}+x+c$$

$$=\frac{1}{4}x^8-5\ln x+2\sqrt{x}+x+c$$

ملاحظة: يمكن تعميم المبرهنة (1-3-1) بحيث تشمل أكثر من دالتين بالصيغة التالية:

$$\int[c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\cdots+c_nf_n(x)]\,dx$$
$$=c_1\int f_1(x)\,dx+c_2\int f_2(x)\,dx+\cdots+c_n\int f_n(x)\,dx$$

حيث $c_1,c_2,\ldots,c_n\in R$

مثال(7): احسب التكامل $\int\frac{dz}{\sin z\,\tan z}$

الحل:

$$\int\frac{dz}{\sin z\,\tan z}=\int\frac{1}{\sin z}\cdot\frac{1}{\tan z}\,dz=\int\csc z\,.\cot z\,dz=-\csc z+c$$

مثال(8): حل المعادلة التفاضلية التالية $f'(x)=3x^2+x+1$ بحيث يكون $f(0)=2$

الحل:

$$f'(x)=3x^2+x+1$$

$$\int f'(x)\,dx=\int(3x^2+x+1)\,dx$$

$$f(x)=3\int x^2\,dx+\int x\,dx+\int 1\,dx$$

$$=3.\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+c=x^3+\frac{x^2}{2}+x+c$$

$$\because f(0)=2$$

$$\therefore 0+0+0+c=2$$

$\therefore c = 2$

$$\therefore f(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} + x + 2$$

مثال(9): حل المعادلة التفاضلية التالية

$$f''(x) = 4x - 1 \quad ; \quad f'(2) = -2 \quad , \quad f(1) = 3$$

الحل:

$$f''(x) = 4x - 1$$

$$\int f''(x)\, dx = \int (4x - 1)\, dx$$

$$f'(x) = 4\int x\, dx - \int 1\, dx = 4 \,.\, \frac{x^2}{2} - x + c = 2x^2 - x + c$$

وباستخدام الشرط $f'(2) = -2$ نجد أن:

$$f'(2) = 2(2)^2 - 2 + c$$

$$-2 = 8 - 2 + c = 6 + c$$

$$\therefore c = -8$$

وبالتالي:

$$f'(x) = 2x^2 - x - 8$$

ثم نستخدم التكامل مرة أخرى:

$$f'(x)\, dx = \int (2x^2 - x - 8)\, dx$$

$$f(x) = 2\int x^2\, dx - \int x\, dx - 8\int dx$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 8x + c$$

وباستخدام الشرط $f(1) = 3$ نجد أنّ:

$$f(1) = \frac{2}{3}(1)^3 - \frac{1}{2}(1)^2 - 8(1) + c$$

$$3 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 8 + c = \frac{-47}{6} + c$$

$$\therefore c = 3 + \frac{47}{6} = \frac{65}{6}$$

$$\therefore f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 8x + \frac{65}{6}$$

تمـــارين (1-1)

احسب التكاملات التالية:

(1) $\int x^7\,dx$

(2) $\int \sqrt[5]{x^3}\,dx$

(3) $\int x^4\sqrt{x}\,dx$

(4) $\int \frac{1}{3x^5}\,dx$

(5) $\int \left(t^3 - \frac{2}{\sqrt{t}} + 10\right)dt$

(6) $\int (y^{-6} + \sqrt[3]{y} - y^{1/5})\,dy$

(7) $\int (3-2\theta^2)^2\,d\theta$

(8) $\int z\left(7 - \frac{1}{z^5}\right)dz$

(9) $\int \sqrt[3]{s}\,(1+s-s^2)\,ds$

(10) $\int \frac{dx}{\csc x}$

(11) $\int \frac{y^5 - 2y^3 + y}{y^4}\,dy$

(12) $\int \frac{dx}{\sec x}$

(13) $\int \frac{\sin 2x}{\cos x}\,dx$

(14) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

(15) $\int \frac{\cos^3 t - 3}{\cos^2 t}\,dt$

(16) $\int \frac{(x^2-4)^3}{x^6}\,dx$

(17) $\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$

(18) $\int \tan^2 t\,dt$

(19) $\int \left(\frac{1}{2}\sec^2 x + 3\csc x\cot x\right)dx$

(20) $\int \sec x(\sec x - \tan x)\,dx$

(21) $\int \sec x(\tan x + \cos x)\,dx$

(22) $\int (x + \frac{1}{x})(x^2 + \frac{1}{x^2})\,dx$

(23) $\int \sqrt{1+\sin 2x}\,dx$

(24) $\int (\tan x + \cot x)^2\,dx$

(25) $\int (e^x - e^{-x})^2\,dx$

(26) $\int \cot^2 y\,dy$

(27) $\int \frac{a^x + b^x}{a^x \cdot b^x}\,dx$

(28) $\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x.\cos^2 x}\,dx$

(29) $\int (e^{a\ln x} - e^{x\ln a})\,dx$

(30) $\int (2^x + x^a - (3b)^x)\,dx$

(31) $\int e^{\sqrt{2}\ln x}\,dx$

(32) $\int e^{\pi\ln x}\,dx$

(33) $\int \operatorname{sech} x(\tanh x+\cosh x)\,dx$

(34) $\int x^{1.56}\,dx$

(35) $\int \frac{1}{\operatorname{sech} x}\,dx$

(36) $\int \frac{dx}{\operatorname{csch} x}$

(37) $\int \frac{\sinh 2x}{\sinh x}\,dx$

(38) أوجد المعكوس التفاضلي $F(x)$ للدالة $f(x)=\sqrt[3]{x}$ التي تحقق الشرط $F(1)=2$.

(39) أوجد دالة $f(x)$ بحيث يكون: $f(0)=2, f'(x)+\sin x=0$.

(40) أوجد دالة $f(x)$ إذا كان: $f''(x)=\sqrt{x}$.

(41) أوجد دالة $f(x)$ بحيث يكون: $f''(x)=x+\cos x\ ,\ f'(0)=2\ ,\ f(0)=1$.

(42) أوجد دالة $f(x)$ إذا كان: $\int f(x)dx=5x^3-3x+c$.

(43) اثبت أنّ كلاً من الدالتين $F(x)=\frac{1}{6}(3x+4)^2$ و $G(x)=\frac{3}{2}x^2+4x$ معكوس تفاضلي لنفس الدالة:

(أ) بطريقة الاشتقاق.

(ب) بإثبات أنّ $F(x)$ و $G(x)$ تختلفان بمقدار ثابت،

أوجد:

(44) $\frac{d}{dx}\int \cos x^2\,dx$

(45) $\frac{d}{dx}\int x^5\sqrt{x^2-3}\,dx$

(46) $\int \frac{d}{dx}(\cos\sqrt{x})\,dx$

(47) $\int \frac{d}{dx}\sqrt{x^2+25}\,dx$

(48) حل المعادلات التفاضلية التالية المقيدة بالشروط المعطاة قرين كل منها:

$(a)\ f'(x)=12x^2-6x+1\ ;\ f(1)=5$

$(b)\ \frac{dy}{dx}=4\sqrt{x}\ ;\ x=4\ ;\ y=21$

$(c)\ f''(x)=4x-1\ ;\ f'(2)=-2\ ;\ f(1)=3$

$(d)\ \frac{d^2y}{dx^2}=3\sin x-4\cos x\ ;\ y=7\ ;\ y'=2\ ;\ x=0$

(4-1) التكامل بالتعويض الجبري Integration by Algebrait Substitution

في هذا القسم سوف نعالج طريقة التعويض الجبري التي بواسطتها يمكن تحويل التكامل المعطى إلى إحدى صور التكامل القياسية في جدول التكاملات، وذلك بتبديل متغير التكامل بمتغير جديد.

مثال(1): احسب التكامل $\int (ax+b)^n\, dx, n \neq -1$ حيث $a, b \in R$

الحل: نفرض أنّ:

$$u = ax+b \Rightarrow du = a\,dx \Rightarrow dx = \frac{1}{a}du$$

$$\therefore \int (ax+b)^n\, dx = \frac{1}{a}\int u^n\, du = \frac{1}{a}\cdot\frac{u^{n+1}}{n+1} + c = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a\cdot(n+1)} + c, n \neq -1$$

$$\boxed{\int (ax+b)^n\, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a.(n+1)} + c, n \neq -1}$$

مثال(2): احسب التكامل $\int \sin(ax+b)\, dx$ حيث $a, b \in R$

الحل: نفرض أنّ:

$$u = ax+b \Rightarrow du = a\,dx \Rightarrow dx = \frac{1}{a}du$$

$$\therefore \int \sin(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}\int \sin u\, du = \frac{1}{a}(-\cos u) + c = \frac{-\cos(ax+b)}{a} + c$$

$$\boxed{\int \sin(ax+b)\, dx = \frac{-\cos(ax+b)}{a} + c}$$

مثال(3): احسب التكامل $\int \sinh(ax+b)\, dx$ حيث $a, b \in R$

الحل: نفرض أنّ:

$$u = ax+b \Rightarrow du = a\,dx \Rightarrow dx = \frac{1}{a}du$$

$$\therefore \int \sinh(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int \sinh u\ du = \frac{1}{a}\cosh u + c = \frac{\cosh(ax+b)}{a} + c$$

$$\boxed{\int \sinh(ax+b)\,dx = \frac{\cosh(ax+b)}{a} + c}$$

مثال(4): احسب التكامل $\int e^{ax+b}\,dx$ حيث $a,b \in R$

الحل: نفرض أنّ:

$$u = ax+b \Rightarrow du = a\,dx \Rightarrow dx = \frac{1}{a}du$$

$$\therefore \int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\int e^{u}\,du = \frac{1}{a}e^{u} + c = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c$$

$$\boxed{\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c}$$

ندون في الجدول التالي صور قياسية للتكامل يمكن استنتاجها كما هو موضح في الأمثلة السابقة.

جدول (4): تكاملات قياسية

1. $\int (ax+b)^n\,dx = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a.(n+1)} + c, n \neq -1$
2. $\int e^{ax+b}\,dx = \dfrac{e^{ax+b}}{a} + c$
3. $\int \dfrac{1}{ax+b}dx = \dfrac{\ln|ax+b|}{a} + c$
4. $\int \sin(ax+b)\,dx = \dfrac{-\cos(ax+b)}{a} + c$
5. $\int \cos(ax+b)\,dx = \dfrac{\sin(ax+b)}{a} + c$
6. $\int \sec^2(ax+b)\,dx = \dfrac{\tan(ax+b)}{a} + c$
7. $\int \csc^2(ax+b)\,dx = \dfrac{-\cot(ax+b)}{a} + c$

8. $\int \sec(ax+b)\tan(ax+b)\,dx = \dfrac{\sec(ax+b)}{a} + c$

9. $\int \csc(ax+b)\cot(ax+b)\,dx = \dfrac{-\csc(ax+b)}{a} + c$

10. $\int \sinh(ax+b)\,dx = \dfrac{\cosh(ax+b)}{a} + c$

11. $\int \cosh(ax+b)\,dx = \dfrac{\sinh(ax+b)}{a} + c$

12. $\int \operatorname{sech}^2(ax+b)\,dx = \dfrac{\tanh(ax+b)}{a} + c$

13. $\int \operatorname{csch}^2(ax+b)\,dx = \dfrac{-\coth(ax+b)}{a} + c$

14. $\int \operatorname{sech}(ax+b)\tanh(ax+b)\,dx = \dfrac{-\operatorname{sech}(ax+b)}{a} + c$

15. $\int \operatorname{csch}(ax+b)\coth(ax+b)\,dx = \dfrac{-\operatorname{csch}(ax+b)}{a} + c$

مثال(5): احسب التكامل $\int\left(3-\frac{2}{5}x\right)^{40} dx$

الحل: نفرض أنّ:

$$u = 3-\frac{2}{5}x \Rightarrow du = -\frac{2}{5}dx \Rightarrow dx = -\frac{5}{2}du$$

$$\therefore \int\left(3-\frac{2}{5}x\right)^{40} dx = -\frac{5}{2}\int u^{40}\,du = -\frac{5}{2}\cdot\frac{u^{41}}{41} + c$$

$$= -\frac{5}{82}\left(3-\frac{2}{5}x\right)^{41} + c$$

مثال(6): احسب التكامل $\int \cos(5-3x)\,dx$

الحل: نفرض أنّ:

$$u = 5-3x \Rightarrow du = -3\,dx \Rightarrow dx = -\frac{1}{3}du$$

$$\therefore \int \cos(5-3x)\,dx = -\frac{1}{3}\int \cos u\,du = -\frac{1}{3}\sin u + c = \frac{-\sin(5-3x)}{3} + c$$

مثال(7): احسب التكامل $\int e^{2x-6}\,dx$

الحل: نفرض أنّ:

$$u = 2x-6 \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

$$\therefore \int e^{2x-6}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{u}\,du = \frac{1}{2}e^{u} + c = \frac{1}{2}e^{2x-6} + c$$

مثال(8): احسب التكامل $\int x^3\sqrt{2-3x^4}\,dx$

الحل: نفرض أنّ:

$$u = 2-3x^4 \Rightarrow du = -12x^3\,dx \Rightarrow x^3dx = -\frac{1}{12}du$$

$$\therefore \int x^3\sqrt{2-3x^4}\,dx = -\frac{1}{12}\int \sqrt{u}\,du = -\frac{1}{12}\int u^{1/2}\,du = -\frac{1}{12}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + c$$

$$= -\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{3}(2-3x^4)^{3/2} + c = -\frac{1}{18}(2-3x^4)^{3/2} + c$$

مثال(9): احسب التكامل $\int t^2\sqrt{t-4}\,dt$

الحل: نفرض أنّ:

$$u = t-4 \Rightarrow du = dt\,, t = u+4$$

$$\therefore \int t^2\sqrt{t-4}\,dt = \int (u+4)^2\sqrt{u}\,du$$

$$= \int (u^2+8u+16)\,u^{1/2}\,du$$

$$= \int (u^{5/2}+8u^{3/2}+16u^{1/2})\,du$$

$$= \frac{u^{7/2}}{7/2} + \frac{8u^{5/2}}{5/2} + \frac{16u^{3/2}}{3/2} + c$$

$$= \frac{2}{7}(t-4)^{7/2} + \frac{16}{5}(t-4)^{5/2} + \frac{32}{3}(t-4)^{3/2} + c$$

مثال(10): احسب التكامل $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

الحل: نفرض أنّ:

$$u=\sqrt{x} \Rightarrow du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow 2\,du=\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$\therefore \int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \cos u\,du = 2\sin u + c = 2\sin\sqrt{x}+c$$

مثال(11): احسب التكامل $\int \frac{1}{5x-1}dx$

الحل: نفرض أنّ:

$$u=5x-1 \Rightarrow du=5\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{5}du$$

$$\therefore \int \frac{1}{5x-1}dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{u}du = \ln|u|+c = \frac{1}{5}\ln|5x-1|+c$$

مثال(12): احسب التكامل $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

الحل: نفرض أنّ:

$$u=\sqrt[3]{x}=x^{1/3} \Rightarrow du=\frac{1}{3}x^{-2/3}\,dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{dx}{x^{2/3}}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow 3\,du=\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\therefore \int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = 3\int \sin u\,du = -3\cos u + c = -3\cos\sqrt[3]{x}+c$$

(1-4-1) تكاملات من الشكل $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$

قاعدة:

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c}$$

البرهان: نفرض أنّ:

$$u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)\,dx$$

$$\therefore \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|f(x)| + c$$

مثال(13): احسب التكامل $\int \tan x\,dx$

الحل:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x| + c$$

مثال(14): احسب التكامل $\int \sec x\,dx$

الحل:

$$\int \sec x\,dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)}dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{(\sec x + \tan x)}dx$$

$$= \ln|\sec x + \tan x| + c$$

مثال(15): احسب التكامل $\int \csc x\,dx$

الحل:

$$\int \csc x\,dx = \int \frac{\csc x(\csc x - \cot x)}{(\csc x - \cot x)}dx$$

$$= \int \frac{\csc^2 x - \csc x \cot x}{(\csc x - \cot x)}dx$$

$$= \ln|\csc x - \cot x| + c$$

مثال(16): أثبت أن $\int \csc x\, dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$

الحل:

$$\int \csc x\, dx = \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} dx$$

$$= \int \frac{1}{2\cdot\frac{\sin x/2}{\cos x/2}\cdot\cos^2 x/2} dx$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}\sec^2 x/2}{\tan x/2} dx$$

$$= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$$

مثال(17): احسب التكامل $\int \frac{4x-8}{x^2-4x+5} dx$

الحل:

$$\int \frac{4x-8}{x^2-4x+5} dx = 2\int \frac{(2x-4)}{x^2-4x+5} dx = 2\cdot\ln\left|x^2-4x+5\right| + c$$

مثال(18): احسب التكامل $\int \frac{\cot x}{\ln\sin x} dx$

الحل: نفرض أنّ:

$$u = \ln\sin x \Rightarrow du = \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x\, dx = \cot x\, dx$$

$$\therefore \int \frac{\cot x}{\ln\sin x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln\left|\ln\sin x\right| + c$$

مثال(19): احسب التكامل $\int \frac{dx}{(1+x^2)\tan^{-1} x}$

الحل: نفرض أنّ:

$$u = \tan^{-1} x \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\therefore \int \frac{1}{(1+x^2)\tan^{-1} x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln\left|\tan^{-1} x\right| + c$$

مثال(20): احسب التكامل $\int \frac{e^{x-1} + x^{e-1}}{e^x + x^e} dx$

الحل: نفرض أنّ:

$$u = e^x + x^e \Rightarrow du = (e^x + ex^{e-1})\, dx$$

$$= e\left(\frac{e^x}{e} + x^{e-1}\right) dx \Rightarrow \frac{du}{e} = (e^{x-1} + x^{e-1})\, dx$$

$$\therefore \int \frac{e^{x-1} + x^{e-1}}{e^x + x^e} dx = \frac{1}{e}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{e}\ln|u| + c = \frac{1}{e}\ln\left|e^x + x^e\right| + c$$

مثال(21): احسب التكامل $\int \frac{3x^2}{(x-1)(x^2+x+1)} dx$

الحل:

$$\because (x-1)(x^2+x+1) = x^3 - 1$$

$$\therefore \int \frac{3x^2}{(x-1)(x^2+x+1)} dx = \int \frac{3x^2}{x^3-1} dx = \ln\left|x^3 - 1\right| + c.$$

(2.4.1) تكاملات من الشكل $\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx$

قاعدة:

$$\boxed{\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = e^{f(x)} + c}$$

البرهان: نفرض أنّ:

$$u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)\, dx$$

$$\therefore \int e^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = \int e^u\, du = e^u + c = e^{f(x)} + c$$

مثال(22): احسب التكامل $\int e^{1+\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$

الحل: نفرض أنّ:

$$u = 1 + \tan x \Rightarrow du = \sec^2 x\, dx = \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$\therefore \int e^{1+\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int e^u\, du = e^u + c = e^{1+\tan x} + c$$

(3-4-1) تكاملات من الشكل $\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\, dx$

قاعدة:

$$\boxed{\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1}$$

البرهان: نفرض أنّ:

$$u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)\, dx$$

$$\therefore \int [f(x)]^n \cdot f'(x)\, dx = \int [u]^n \cdot du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

مثال(23): احسب التكامل $\int \sin^8 x \cdot \cos x\, dx$

الحل: نفرض أنّ:

$$u = \sin x \Rightarrow du = \cos x\, dx$$

$$\therefore \int \sin^8 x \cdot \cos x\, dx = \int u^8\, du = \frac{u^9}{9} + c = \frac{\sin^9 x}{9} + c$$

مثال(24): احسب التكامل $\int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

الحل: نفرض أنَّ:

$$u = \sin^{-1} x \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\therefore \int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int u\, du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{(\sin^{-1} x)^2}{2} + c$$

مثال(25): احسب التكامل $\int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x-1} dx$

الحل:

في هذا المثال كلاً من البسط والمقام كثيرة حدود وفي حالة ما تكون درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام نقسم البسط على المقام ثم ننجز عملية التكامل على النحو التالي:

$$\frac{x^4 + x^2 + 1}{x-1} = x^3 + x^2 + 2x + 2 + \frac{3}{x-1}$$

$$\therefore \int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x-1} dx = \int \left(x^3 + x^2 + 2x + 2 + \frac{3}{x-1} \right) dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x + 3\ln|x-1| + c$$

مثال(26): احسب التكامل $\int \sin^2 x\, dx$

الحل:

$$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 2x \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

مثال(27): احسب التكامل $\int \cos^2 x\,dx$

الحل:

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x + c$$

مثال(28): احسب التكامل $\int \sinh^2 x\,dx$

الحل:

$$\int \sinh^2 x\,dx = \int \frac{\cosh 2x - 1}{2}\,dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{2}\cosh 2x - \frac{1}{2}\right)dx$$
$$= \frac{1}{4}\sinh 2x - \frac{1}{2}x + c$$

مثال(29): احسب التكامل $\int \cosh^2 x\,dx$

الحل:

$$\int \cosh^2 x\,dx = \int \frac{1+\cosh 2x}{2}\,dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cosh 2x\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sinh 2x + c$$

مثال(30): احسب التكامل $\int \sinh^3 x\,dx$

الحل:

$$\begin{aligned}\int \sinh^3 x\,dx &= \int \sinh^2 x \cdot \sinh x\,dx \\ &= \int (\cosh^2 x - 1)\cdot \sinh x\,dx \\ &= \int \cosh^2 x \cdot \sinh x\,dx - \int \sinh x\,dx \\ &= \frac{1}{3}\cosh^3 x - \cosh x + c\end{aligned}$$

مثال(31): احسب التكامل $\int \tanh^2 x\,dx$

الحل:

$$\begin{aligned}\int \tanh^2 x\,dx &= \int (1 - \operatorname{sech}^2 x)\,dx \\ &= x - \tanh x + c\end{aligned}$$

جدول (5): تكاملات قياسية تساوي دوال مثلثية عكسية

$$1.\ \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \begin{cases} \sin^{-1}\dfrac{x}{a} + c \\ -\cos^{-1}\dfrac{x}{a} + c' \end{cases}$$

$$2.\ \int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a} + x \\ -\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a} + c' \end{cases}$$

$$3.\ \int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\sec^{-1}\dfrac{x}{a} + c \\ -\dfrac{1}{a}\csc^{-1}\dfrac{x}{a} + c' \end{cases}$$

مثال(32): باستخدام جدول (5) احسب كلاً من التكاملات التالية:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$
2. $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x^2}}dx$
3. $\int \frac{dx}{5+x^2}$
4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}}$

الحل:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{dx}{(2)^2-x^2} = \sin^{-1}\frac{x}{2}+c$ [حسب (1) من جدول (5)]

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2\left(\frac{3}{2}-x^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2-x^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{\frac{3}{2}}}+c$ [حسب (1) من جدول (5)]

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}+c$

3. $\int \frac{dx}{5+x^2} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{5}\right)^2+x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}}+c$ [حسب (2) من جدول (5)]

4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{4\left(x^2-\frac{9}{4}\right)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}}$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)}\sec^{-1}\frac{x}{\frac{3}{2}}+c$ [حسب (1) من جدول (5)]

$= \frac{1}{3}\sec^{-1}\frac{2x}{3}+c$

جدول (6): تكاملات قياسية تساوي دوال زائدية عكسية

1. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \begin{cases} \sinh^{-1}\frac{x}{a}+c \\ \ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|+c' \end{cases}$$

2. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \begin{cases} \cosh^{-1}\frac{x}{a}+c \\ \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c' \end{cases}$$

3. $$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a}+c\ ,\ |x|<a \\ \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c'\ ,\ |x|<a \end{cases}$$

4. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} -\frac{1}{a}\operatorname{sech}^{-1}\frac{x}{a}+c\ ,\ 0<x<a \\ -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+c' \end{cases}$$

5. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = \begin{cases} -\frac{1}{a}\operatorname{csch}^{-1}\frac{x}{a}+c \\ -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right|+c' \end{cases}$$

مثال(33): باستخدام جدول (6) احسب كلاً من التكاملات التالية:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$ 2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{9-4x^2}}$ 3. $\int \frac{dx}{10-x^2}$

الحل:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(2)^2+x^2}} = \sinh^{-1}\frac{x}{2}+c$ [حسب (1) من جدول (6)]

$$= \ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)+c$$

2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{9-4x^2}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{4\left(\frac{9}{4}-x^2\right)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-x^2}}$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{\frac{3}{2}}\right)\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{x}{\frac{3}{2}}\right)+c$$ [حسب (4) من جدول (6)]

$$= -\frac{1}{3}\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)+c$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\ln\left|\frac{3+\sqrt{9-4x^2}}{2x}\right|+c$$

3. $\int \frac{dx}{10-x^2} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{10}\right)^2-x^2} = \frac{1}{\sqrt{10}}\tanh^{-1}\frac{x}{\sqrt{10}}+c$ [حسب (3) من جدول (6)]

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2+36}} = \int \frac{dx}{\sqrt{25\left(x^2+\frac{36}{25}\right)}} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\left(\frac{6}{5}\right)^2}}$

$$= \frac{1}{5}\cdot\sinh^{-1}\left(\frac{x}{\frac{6}{5}}\right)+c$$ [حسب (1) من جدول (6)]

$$= \frac{1}{5}\cdot\sinh^{-1}\left(\frac{5x}{6}\right)+c$$

تمـــارين (2-1)

أحسب التكاملات التالية:

(1) $\int (4x-3)^7\,dx$

(2) $\int \sin(3-5x)\,dx$

(3) $\int \cos\frac{1}{2}x\,dx$

(4) $\int \sec^2 6x\,dx$

(5) $\int \sqrt[3]{7t-5}\,dt$

(6) $\int \sec\frac{x}{3}\tan\frac{x}{3}\,dx$

(7) $\int \frac{x}{\sqrt[5]{3-2x^2}}\,dx$

(8) $\int \frac{7}{(9+5x)^2}\,dx$

(9) $\int \frac{dx}{x^2-6x+9}$

(10) $\int e^{2-3x}\,dx$

(11) $\int 7^{2x}\,dx$

(12) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}\,dx$

(13) $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

(14) $\int \sec^3 2x\tan 2x\,dx$

(15) $\int \cos^5 3t\sin 3t\,dt$

(16) $\int \frac{\csc^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

(17) $\int \tan^7 2y\sec^2 2y\,dy$

(18) $\int \frac{\sin 2x}{(3+\cos^2 x)^5}\,dx$

(19) $\int \sec^2(\cos 2z)\sin 2z\,dz$

(20) $\int \sin(\sin t)\cos t\,dt$

(21) $\int \sin^n(a+bx)\cos(a+bx)\,dx$, $n>0$, $b\neq 0$

(22) $\int \frac{y\,dy}{\sqrt{y+1}}$

(23) $\int (4x^2-12x+9)^{2/3}\,dx$

(24) $\int x\sqrt{x-3}\,dx$

(25) $\int x^2\sqrt{2-x}\,dx$

(26) $\int \sin^3 2x\,dx$

(27) $\int \sqrt[n]{a+bx}\,dx$, $b\neq 0$

(28) $\int \tan^2 3x\,dx$

(29) $\int \left[\csc^2(\cos x)\right]\sin x\,dx$

(30) $\int \frac{7^{1/x}}{x^2}\,dx$

(31) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

(32) $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}\,dx$

(33) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\cot^{-1} x}$

(34) $\int \frac{\tan x}{\ln \cos x} dx$

(35) $\int \frac{e^{a\sin^{-1} x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(36) $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^2+1}}$

(37) $\int \frac{x^3-1}{x^4-4x+1} dx$

(38) $\int a^{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$

(39) $\int \left[\ln e^{2x} + \ln e^{-2x}\right] dx$

(40) $\int x \sin(1-x^2)\, dx$

(41) $\int 3x^2 \cos^2(x^3+4)\, dx$

(42) $\int \frac{e^{2x}}{e^x+3} dx$

(43) $\int \cos x \cdot \sqrt{1+\cos 2x}\, dx$

(44) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$

(45) $\int \left[x \ln \pi - e^{\pi} \sin 3x\right] dx$

(46) $\int \cosh(5x-7)\, dx$

(47) $\int e^{2x} \cos(3+e^{2x})\, dx$

(48) $\int \sinh(6x+3)\, dx$

(49) $\int \sqrt{\tanh x} \cdot \operatorname{sech}^2 x\, dx$

(50) $\int \cos^2 x\, dx$

(51) $\int \frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}} dx$

(52) $\int \sqrt{1+\sin x}\, dx$

(53) $\int \sin 2x . \cos^2 x\, dx$

(54) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$

(55) $\int \coth x \cdot \operatorname{csch}^2 x\, dx$

(56) $\int \sin^2 x\, dx$

(57) $\int \frac{\sinh 2x}{3+5\cosh 2x} dx$

(58) $\int \frac{\sinh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

(59) $\int \sinh^2 x\, dx$

(60) $\int \operatorname{coh}^2 2x\, dx$

(61) $\int \tanh x\, dx$

(62) $\int \coth x dx$

(63) $\int \cos^4 x \sin x\, dx$

(64) $\int \tan^5 x \sec^2 x\, dx$

(65) $\int \cot^6 2x \csc^2 2x\, dx$

(66) $\int \sin^{10} 5x \cos 5x\, dx$

(67) $\int \sin^2 2x\, dx$

(68) $\int \cos^2 3x\, dx$

(69) $\int \sin^2(1-5x)\, dx$

(70) $\int \cos^2\left(3-\frac{x}{2}\right) dx$

(71) $\int \cosh 3x\, dx$

(72) $\int \sinh\left(\frac{3}{4}x\right) dx$

(73) $\int \cosh^5 x \sinh x\, dx$

(74) $\int \tanh^4 3x \operatorname{sech}^2 3x\, dx$

(75) $\int \operatorname{sech} 2x \tanh 2x\, dx$

(76) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

(77) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{4-x^2}}$

(78) $\int \frac{x\, dx}{4-x^2}$

(79) $\int \frac{dx}{4-x^2}$

(80) $\int \frac{dx}{9+x^2}$

الى هنا

(81) $\int \frac{x\, dx}{9+x^2}$

(82) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{9+x^2}}$

(83) $\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$

(84) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-16}}$

(85) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$

(86) $\int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}}$

(87) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+16}}$

(88) $\int \frac{dx}{\sqrt{36-4x^2}}$

(89) $\int \frac{dx}{4x^2+25}$

(90) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$

(91) $\int \frac{dx}{16x^2-9}$

(92) أوجد دالة $f(x)$ بحيث أن $f'(x) = 6 - 5\sin 2x$ علماً بأن $f(0) = 3$.

(93) احسب التكاملات التالية بدلالة الدالة $f(x)$ علماً بأن $\int f'(u)\, du = f(u) + c$:

(i) $\int f'(5x)\, dx$

(ii) $\int f'(3x+2)\, dx$

(iii) $\int x f'(3x^2)\, dx$

(iv) $\int \frac{1}{x^2} f'\left(\frac{2}{x}\right) dx$

(5-1) رمز التجميع Summation Symbol

لتكن $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ مجموعة أعداد حقيقية فإنّ الرمز $\sum_{i=1}^{n} a_i$ يعني جمع هذه الأعداد

أي أنّ: $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

حيث استخدمنا الحرف الإغريقي Σ (يُقرأ سيجما) ليعني المجموع، والرمز a_i يعني الحد الذي ترتيبه i والحرف (i) هو دليل الجمع وله قيمتان ابتدائية ونهائية هما على الترتيب 1 و n حيث n عدد صحيح موجب.

مثال(1): أوجد المجاميع التالية:

$$(1)\ \sum_{i=1}^{5} i^2 \qquad (2)\ \sum_{i=0}^{3} 2^i \qquad (3)\ \sum_{i=1}^{4} (3+i) \qquad (4)\ \sum_{i=1}^{5} c\ ,\ c \in R$$

الحل:

$$(1)\ \sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$
$$= 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

$$(2)\ \sum_{i=0}^{3} 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3$$
$$= 1 + 2 + 4 + 8 = 15$$

$$(3)\ \sum_{i=1}^{4} (3+i) = (3+1) + (3+2) + (3+3) + (3+4)$$
$$= 4 + 5 + 6 + 7 = 22$$

$$(4)\ \sum_{i=1}^{5} c = c + c + c + c + c$$
$$= 5c\ ,\ c \in R$$

(1-5-1) **مبرهنة:** إذا كانت $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ و $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ مجموعتان من الأعداد حيث n عدد صحيح موجب فإنّ:

$$(1)\ \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \quad ;$$

$$(2)\ \sum_{i=1}^{n} c\, a_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i \quad , \quad c \in R$$

$$(3)\ \sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i \quad ;$$

$$(4)\ \sum_{i=1}^{n} c = nc \quad , \quad c \in R$$

البرهان:

$$(1)\ \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n)$$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$(2)\ \sum_{i=1}^{n} c\, a_i = c\, a_1 + c\, a_2 + c\, a_3 + \cdots + c\, a_n$$

$$= c\left[a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n\right]$$

$$= c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$(3)\ \sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i) = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \cdots + (a_n - b_n)$$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$(4)\ \sum_{i=1}^{n} c = c + c + c + \cdots + c \qquad n \text{ من المرات}$$
$$= nc \ , \ c \in R$$

المبرهنة التالية تعطي بعض القوانين المفيدة في حل الكثير من المسائل التطبيقية ويمكن اثباتها باستخدام الاستنتاج الرياضي.

(2-5-1) مبرهنة:

$$(1)\ \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(2)\ \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(3)\ \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$(4)\ \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$$

مثال(2): احسب كلاً من المجاميع التالية:

$$(a)\ \sum_{i=1}^{50} i \qquad (b)\ \sum_{i=1}^{10} i^2 \qquad (c).\ \sum_{i=1}^{20} i(i+1) \qquad (d)\ \sum_{i=1}^{n} (2+i)^2$$

الحل:

باستخدام (1) و (2) من المبرهنة (1-5-2) نجد أنّ:

$$(a)\ \sum_{i=1}^{50} i = 1 + 2 + \cdots + 50 = \frac{50(51)}{2} = 1275$$

$$(b)\ \sum_{i=1}^{10} i^2 = 1^1 + 2^2 + \cdots + 10^2 = \frac{10(11)(21)}{6} = 385$$

$$(c)\ \sum_{i=1}^{20} i(i+1) = \sum_{i=1}^{20}(i^2+i) = \sum_{i=1}^{20} i^2 + \sum_{i=1}^{20} i$$

$$= \frac{20(21)(41)}{6} + \frac{20(21)}{2}$$

$$= 2870 + 210 = 3080$$

$$(d)\ \sum_{i=1}^{n}(2+i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(4+4i+i^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 4 + 4\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= 4n + 4\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{3}n^3 + \frac{5}{2}n^2 + \frac{37}{6}n$$

تمـــارين (1ـ3)

(1) عبر عما يلي باستخدام الرمز $\sum$:

$(a)\ 1+2+3+\cdots+40$

$(b)\ 5\times1+5\times2+5\times3+\cdots+5\times30$

$(c)\ 1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+69\times70$

$(d)\ 1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7$

$(e)\ 1+3+5+7+\cdots+31$

$(f)\ 2+4+6+8+\cdots+80$

$(g)\ 1-3+5-7+9-11+13-15+17$

$(l)\ 1+\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}$

$(i)\ \sin\frac{\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{5\pi}{8}+\sin\frac{7\pi}{8}+\sin\frac{9\pi}{8}$

$(j)\ 2+4+8+16+32+64+128+256$

$(k)\ \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}+\frac{7}{8}+\frac{8}{9}$

(2) احسب النهايات التالية:

$(a)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$

$(b)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$

$(c)\ \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{5k}{n^2}$

(3) أوجد ناتج المجاميع التالية:

$(a)\ \sum_{i=1}^{5}(3i-10)$ $(b)\ \sum_{i=1}^{6}(9-2i)$ $(c)\ \sum_{j=1}^{4}(j^2+1)$

$(d)\ \sum_{i=10}^{100} i^2$ $(e)\ \sum_{n=1}^{10}\left[1+(-1)^n\right]$ $(f)\ \sum_{k=0}^{5} k(k-1)$

$(g)\ \sum_{k=0}^{4}(k-2)(k-3)$ $(h)\ \sum_{i=1}^{8} 2^i$ $(i)\ \sum_{r=1}^{6}\frac{5}{r}$

$(j)\ \sum_{k=1}^{1000} 2$ $(k)\ \sum_{i=1}^{50} 10$

(4) أثبت أنّ:

$(a)\ \sum_{i=1}^{n} c\,a_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i \quad , n \in R$

$(b)\ \sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

$(c)\ \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i+c_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i + \sum_{i=1}^{n} c_i$

(5) أوجد ناتج ما يأتي:

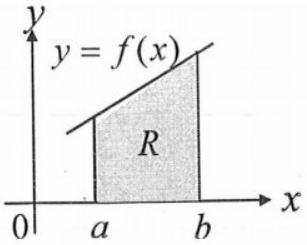
$(a)\ \sum_{i=1}^{n}(i^2+3i+5)$ $(b)\ \sum_{i=1}^{n}(3i^2-2i+1)$

$(c)\ \sum_{k=1}^{n}(2k-3)^2$ $(d)\ \sum_{k=1}^{n}(k^3+2k^2-k+4)$

$(e)\ \sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{j=1}^{5}(i+j)\right)$

(6-1) المساحة تحت منحنى Area under a curve

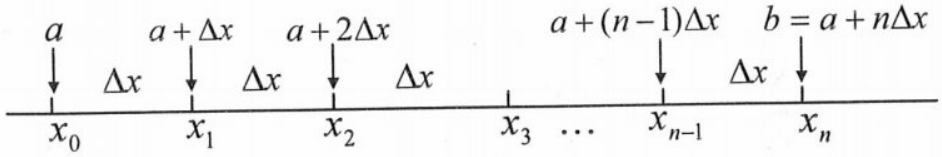
لتكن R منطقة في مستوى الإحداثيات محددة بمنحنى الدالة $y=f(x)$ والمستقيمين $x=a$ و $x=b$ والمحور السيني حيث $f(x)$ دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ و $f(x)\geq 0$ انظر الشكل (1-1).



شكل (1-1)

لإيجاد مساحة المنطقة R نتبع ما يلي:

(1) نقسم الفترة المغلقة $[a,b]$ إلى n من الفترات الجزئية المتساوية في الطول بواسطة النقط $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ حيث $x_0=a$ و $x_n=b$



شكل (1-2)

ونرمز لطول كل فترة جزئية بالرمز Δx فيكون: $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$

ومن الشكل (1-2) نجد أنَّ: $\Delta x = x_i - x_{i-1}$

ومنها نجد أنَّ:

$$\boxed{x_i = x_{i-1} + \Delta x}$$

$$\begin{aligned}
\therefore x_1 &= x_0 + \Delta x = a + \Delta x \\
x_2 &= x_1 + \Delta x = a + 2\Delta x \\
x_3 &= x_2 + \Delta x = a + 3\Delta x \\
&\vdots \\
x_i &= a + i\Delta x \\
&\vdots \\
x_n &= a + n\Delta x = a + n\frac{(b-a)}{n} = b
\end{aligned}$$

(2) نرسم على كل فترة جزئية مستطيلاً بعداه $\Delta x=[x_{i-1},x_i]$ و $f(\lambda_i)$ حيث $\lambda_i \in [x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,3,\cdots,n$

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} e^{a+i\Delta x} \cdot \Delta x$$

$$= \Delta x \sum_{i=1}^{n} e^{a} \cdot e^{i\Delta x}$$

$$= \Delta x \cdot e^{a}\left[e^{\Delta x} + e^{2\Delta x} + \cdots + e^{n\Delta x}\right]$$

$$= \Delta x\, e^{a} \cdot e^{\Delta x}\left[1 + e^{\Delta x} + e^{2\Delta x} + \cdots + e^{(n-1)\Delta x}\right]$$

$$= \Delta x\, e^{a} \cdot e^{\Delta x} \cdot \frac{(e^{\Delta x})^{n} - 1}{e^{\Delta x} - 1}$$

$$= \Delta x\, e^{a} \cdot e^{\Delta x} \cdot \frac{e^{n\Delta x} - 1}{e^{\Delta x} - 1}$$

$$= \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1} \cdot e^{a} \cdot e^{\Delta x}(e^{b-a} - 1)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} R_p = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1} \cdot e^{a} \cdot e^{\Delta x}(e^{b-a} - 1)$$

$$= 1 \cdot e^{a} \cdot e^{0}(e^{b-a} - 1)$$

$$= e^{a}(e^{b-a} - 1)$$

$$= e^{b} - e^{a}$$

$$\therefore \int_{a}^{b} e^{x}\, dx = e^{b} - e^{a}$$

(8-1) خواص التكامل المحدود Properties of the Definite Integral

للتكامل المحدود خواص مهمة تجعله أداة فعالة في حل وتطوير الكثير من القضايا الرياضية وتطبيقاتها المختلفة. ونقدم في هذا البند بعضاً من الخصائص الأساسية للتكامل المحدود.

(1-8-1) **مبرهنة**: إذا كان c عدداً حقيقياً فإنّ: $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$

البرهان:

نفرض أنّ $f(x)=c$ لكل $x\in[a,b]$.

نقسم الفترة $[a,b]$ إلى n من الفترات الجزئية:

ثم نضع

$$\begin{aligned}\lambda_i &= x_i\\ &= a+i\Delta x_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_p &= \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\Delta x_i\\ &= \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_a^b c\,dx &= \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} c\cdot\frac{b-a}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty} nc\cdot\frac{b-a}{n}\\ &= c(b-a)\end{aligned}$$

مثال(5): اثبت مستخدماً التعريف أن: $\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$

الحل: ليكن $f(x)=x$ لكل x ينتمي إلى $[a,b]$ نقسم الفترة $[a,b]$ إلى n من الفترات الجزئية وبالتالي:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

ثم نضع $\lambda_i = x_i$

$$= a + i\,\Delta x_i = a + \frac{b-a}{n} i$$

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \Delta x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(a + \frac{b-a}{n} i\right)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$= \frac{b-a}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} a + \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} i\right]$$

$$= \frac{b-a}{n}\left[an + \frac{b-a}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2}\cdot\frac{n+1}{n}$$

$$\therefore \int_a^b x\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)\right]$$

$$= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} = (b-a)\left[a + \frac{b-a}{2}\right]$$

$$= (b-a)\left[\frac{2a+b-a}{2}\right] = (b-a)\left[\frac{b+a}{2}\right]$$

$$= \frac{b^2-a^2}{2}$$

$$\boxed{\therefore \int_a^b x\,dx = \frac{b-a^2}{2}}$$

وبالاسلوب نفسه يمكن إثبات أن:

$$(1)\ \int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3} \qquad (2)\ \int_a^b x^3\,dx = \frac{b^4-a^4}{4}$$

ويترك ذلك الإثبات للطالب كتمرين.

(1ـ8ـ2) **مبرهنة**: إذا كانت الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ قابلتان للتكامل على الفترة المغلقة $[a,b]$ وكان c عدداً حقيقياً فإنّ كلاً من $c\,f(x)$ و $f(x)+g(x)$ و $f(x)-g(x)$ قابلة للتكامل على الفترة المغلقة $[a,b]$ وإنّ:

$$(a)\ \int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

$$(b)\ \int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$(c)\ \int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

ملاحظة: تبديل المتغير x بالمتغير t في التكامل المحدود لا يغير من قيمته أي أنّ:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$$

(1ـ8ـ3) **مبرهنة**: إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للتكامل على الفترة المغلقة $[a,b]$ وكانت $f(x)\ge 0\ ,\ x\in[a,b]$ فإنّ: $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$

(1ـ8ـ4) **نتيجة**: إذا كانت الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ قابلتان للتكامل على الفترة المغلقة $[a,b]$ وكانت $f(x)\ge g(x)\ ,\ x\in[a,b]$ فإنّ: $\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$

(5-8-1) **مبرهنة**: إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للتكامل على الفترة المغلقة $[a,b]$ وكان $a<c<b$ فإنّ:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

مثال(6): إذا كان $\int_2^6 f(x)\,dx = 10$, $\int_4^6 f(x)\,dx = 15$, $\int_4^6 g(x)\,dx = 8$ فأوجد:

$$(a)\ \int_4^6 [3f(x)-g(x)]dx \qquad (b)\ \int_2^4 f(x)\,dx$$

الحل:

$$(a)\ \int_4^6 [3f(x)-g(x)]dx = 3\int_4^6 f(x)\,dx - \int_4^6 g(x)\,dx$$
$$= 3(15)-8$$
$$= 45-8$$
$$= 37$$

$$(b)\ \int_2^4 f(x)\,dx = \int_2^6 f(x)\,dx - \int_4^6 f(x)\,dx$$
$$= 10-15$$
$$= -5$$

مثال(7): بين أن التكامل $\int_0^1 \frac{\cos x}{3x^5-10}\,dx$ يكون سالباً.

الحل:

حيث أنّ: $0 \le x \le 1$

فإنّ: $0 \le x^5 \le 1$

$$0 \le 3x^5 \le 3$$
$$-10 \le 3x^5 - 10 \le -7$$

أي أنّ المقدار $(3x^5-10)<0$ على الفترة المغلقة $[0,1]$ وبما أنّ $\cos x>0$ على الفترة $[0,1]$ فإنّ:

$$\frac{\cos x}{3x^5-10}<0 \ , \ x\in[0,1]$$

وبالتالي:

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{3x^5-10}\,dx<0$$

(6.8.1) **تعريف**:

(أ) إذا كان العدد a ينتمي إلى مجال الدالة $f(x)$ فإنّ: $\int_a^a f(x)\,dx=0$

(ب) إذا كانت $f(x)$ قابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$ فإنّ:

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$$

(7.8.1) **مبرهنة**: إذا كانت الدالة $f(x)$ فردية وقابلة للتكامل على الفترة $[-a,a]$ فإنّ: $\int_{-a}^a f(x)\,dx=0$

البرهان:

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx=\int_{-a}^0 f(x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx$$

حيث أنّ $f(x)$ فردية فإنّ:

$$f(-x)=-f(x)$$

أو

$$-f(-x)=f(x)$$

وبالتالي يكون

$$\int_{-a}^0 f(x)\,dx=-\int_{-a}^0 f(-x)\,dx$$

إذا وضعنا $u=-x$ فإنّ $-du=dx$ وبالتالي:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx=\int_{a}^{0} f(u)\,du=-\int_{0}^{a} f(u)\,du=-\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

ومن ثم نجد أنّ:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx=-\int_{0}^{a} f(x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx=0$$

(8-8-1) **مبرهنة**: إذا كانت الدالة $f(x)$ زوجية وقابلة للتكامل على $[-a,a]$

فإنّ: $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

البرهان: يترك للطالب.

مثال(8): أثبت أنّ: $$\int_{-1/2}^{1/2} \cos x\cdot\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx=0$$

الحل:

نضع

$$f(x)=\cos x\cdot\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$f(-x)=\cos(-x)\cdot\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\cos x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}$$

$$=-\cos x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=-f(x)$$

$\therefore$ الدالة $f(x)$ فردية وبالتالي فإنّ:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \cos x\cdot\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx=0$$

تمـــارين (1ـ5)

محذوف

(1) في الحالات التالية أوجد $(b)\ \max \Delta x_i = \|P\|$ $\qquad (a)\ \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\Delta x_i$

$(i)\ f(x) = x+1\ ,\ a=0\ ,\ b=4\ ,\ n=3\ ,\ \Delta x_1 = 1\ ,\ \Delta x_2 = 1$

$\Delta x_3 = 2\ ,$

$\lambda_1 = \frac{1}{3}\ ,\ \lambda_2 = \frac{3}{2}\ ,\ \lambda_3 = 3$

$(ii)\ f(x) = \cos x,\ a=0\ ,\ b=2\ ,\ n=4\ ,\ \Delta x_1 = \frac{\pi}{2}\ ,\ \Delta x_2 = \frac{3\pi}{4}$

$\Delta x_3 = \frac{\pi}{2}\ ,\ \Delta x_4 = \frac{\pi}{4}\ ,$

$\lambda_1 = \frac{\pi}{4}\ ,\ \lambda_2 = \pi\ ,\ \lambda_3 = \frac{3\pi}{2}\ ,\ \lambda_4 = \frac{7\pi}{4}$

$(iii)\ f(x) = 4 - x^2,\ a=-3\ ,\ b=4\ ,\ n=4\ ,\ \Delta x_1 = 1\ ,\ \Delta x_2 = 2$

$\Delta x_3 = 1\ ,\ \Delta x_4 = 4\ ,$

$\lambda_1 = \frac{-5}{2}\ ,\ \lambda_2 = -1\ ,\ \lambda_3 = \frac{1}{4}\ ,\ \lambda_4 = 3$

$(iv)\ f(x) = x^3,\ a=-3\ ,\ b=3\ ,\ n=4\ ,\ \Delta x_1 = 2\ ,\ \Delta x_2 = 1$

$\Delta x_3 = 1\ ,\ \Delta x_4 = 2\ ,$

$\lambda_1 = -2\ ,\ \lambda_2 = 0\ ,\ \lambda_3 = 0\ ,\ \lambda_4 = 2$

محذوف

(2) احسب قيم التكاملات التالية (مستخدماً التعريف):

$(a)\ \int_0^3 x\,dx \qquad (b)\ \int_2^3 \left(1 - \frac{1}{2}x\right)dx \qquad (c)\ \int_{-10}^{-5} 6\,dx$

$(d)\ \int_0^3 |x-2|\,dx \qquad (e)\ \int_{-1}^{2} |2x-3|\,dx$

$(f)\ \int_{-2}^{2} f(x)\,dx\ ,\ \text{where}\quad f(x) = \begin{cases} 3 & ,\ x \le 0 \\ x+3 & ,\ x > 0 \end{cases}$

(3) إذا كـــان $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = 5$ و $\int_{-1}^{2} g(x)dx = 2$ فأوجـــد قيمـــة التكامـــل

$$\int_{-1}^{2} [f(x) + 2g(x)]\,dx$$

(4) احسب قيمة التكامل $\int_{1}^{5} f(x)\,dx$ علماً بأن $\int_{0}^{5} f(x)\,dx = 1$ و $\int_{0}^{1} f(x)\,dx = -2$

(5) في التمارين التالية حدد إذا كانت قيمة التكامل موجبة أو سالبة:

$(a)\ \int_{2}^{3} \frac{\sqrt{x}}{1-x}\,dx$ $\quad (b)\ \int_{0}^{4} \frac{x^2}{3-\cos x}\,dx$ $\quad (c)\ \int_{2}^{0} x^2 \sin\sqrt{x}\,dx$

$(d)\ \int_{-2}^{2} \frac{x^3-9}{|x|+1}\,dx$ $\quad (e)\ \int_{0}^{-1} \sqrt{x^2-2}\,dx$

(6) إذا كانت $f(x)$ قابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$ وكان c عدداً ثابتاً فإنّ $c\,f(x)$ قابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$ وإنّ $\int_{a}^{b} cf(x)\,dx = c\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ حيث $f(x)$ متصلة على الفترة $[a,b]$.

(7) إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 1\ , & if\ \ x \text{ is rational} \\ 0\ , & if\ \ x \text{ is irrational} \end{cases}$ بين أنّ $f(x)$ غير قابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$ (كل فترة مغلقة تحتوي عدداً نسبياً وعدداً غير نسبي).

(8) إذا كانت الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ قابلتان للتكامل على الفترة $[a,b]$ وكانت $c_1, c_2, \ldots, c_k$ ثوابت، فأي من التعبيرات التالية يكون صحيحاً دائماً:

$(a)\ \int_{a}^{b} f(x)\ g(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx \int_{a}^{b} g(x)\,dx$

$(b)\ \int_{a}^{b} [c_1 f(x) + c_2 g(x)]\,dx = c_1 \int_{a}^{b} f(x)\,dx + c_2 \int_{a}^{b} g(x)\,dx$

$$(c)\ \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) \right) dx = \sum_{i=1}^{n} \left[c_i \int_a^b f_i(x)\, dx \right]$$

$$(d)\ \int_a^b \left[f(x) \right]^n dx = \left[\int_a^b f(x)\, dx \right]^n$$

$$(e)\ \int_a^b \sqrt{f(x)}\, dx = \sqrt{\int_a^b f(x)\, dx}$$

(9) إذا كان $\forall x \in [4,9]$, $\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} < \frac{1}{x^{3/2}}$ فأثبت أنّ $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} dx < \frac{1}{3}$

(10) إذا كان m و n عددين صحيحين فأثبت أنّ:

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n\, dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m\, dx$$

(11) إذا كان $\int_0^2 \frac{x^4}{\sqrt{x^2+3}} dx = k$ فأوجد قيمة التكامل $\int_{-2}^{2} \frac{x^4}{\sqrt{x^2+3}} dx$ بدلالة k.

(12) إذا كان $\int_{-1}^{1} \frac{\cos x}{x^2+1} dx = k$ فأوجد قيمة التكامل $\int_0^1 \frac{\cos x}{x^2+1} dx$ بدلالة k.

(1-9) المبرهنة الأساسية في حساب التفاضل والتكامل

The Fundamental Theorem of Calculus

نناقش في هذا البند العلاقة بين التكامل المحدود والتكامل غير المحدود وقبل ذلك نقدم مبرهنة القيمة المتوسطة في التكاملات.

(1-9-1) مبرهنة القيمة المتوسطة The mean value theorem

إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة على الفترة $[a,b]$، فإنه يوجد (على الأقل) عدد c ينتمي إلى الفترة $[a,b]$ بحيث يكون: $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

البرهان:

حيث أنّ $f(x)$ متصلة على $[a,b]$

إذن فهي محدودة أي أنه يوجد عددان x_1 و x_2 في الفترة $[a,b]$ بحيث تكون

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$$

والتي يمكن إعادة كتابتها على النحو التالي:

$$m \le f(x) \le M$$

حيث $m = f(x_1)$ القيمة الصغرى المطلقة، $M = f(x_2)$ القيمة العظمى المطلقة

$$\therefore \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

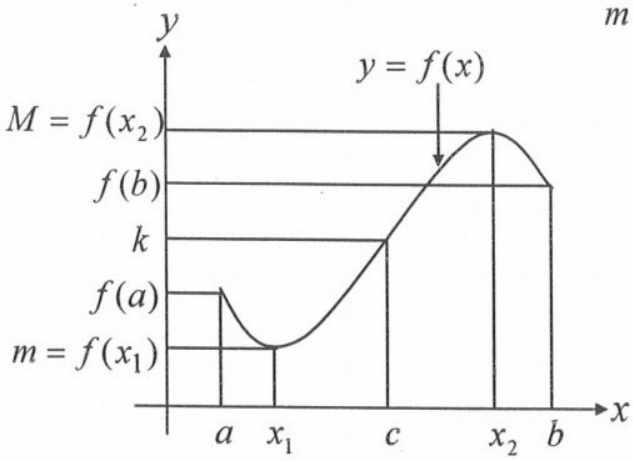
بالقسمة على $b-a$ نحصل على:

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$ ليكن

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = k$$ حيث k

عدد يقع بين القيمتين M و m

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = k(b-a)$$



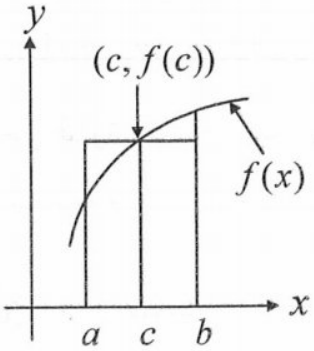
شكل (1-11)

وحيث أنّ $f(x)$ متصلة على $[a,b]$، فإنه يوجد عدد $c \in [a,b]$ بحيث يكون $f(c)=k$ وبالتالي نجد أنّ:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

التفسير الهندسي للمبرهنة:

يوجد عدد $c \in [a,b]$ بحيث أنّ مساحة المستطيل الذي بعداه $f(c), (b-a)$ تساوي مساحة المنطقة تحت منحنى $f(x)$ وفوق الفترة $[a,b]$.



شكل (1-12)

(2.9.1) **تعريف**: لتكن $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ فإنّ القيمة المتوسط (f_{av}) للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ هي $f_{av} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

مثال(1): أوجد قيمة العدد c الذي يحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل $\int_0^3 3x^2\,dx$ ثم أوجد القيمة المتوسطة f_{av} للدالة $f(x)$ على الفترة $[0,3]$.

الحل:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

$$\because \int_0^3 3x^2\,dx = 3\frac{(3)^3-(0)^3}{3} = 27$$

$$\because f(c)(b-a) = 3c^2(3-0) = 9c^2$$

$$\therefore 9c^2 = 27$$

$$c^2 = 3 \Rightarrow c = \pm\sqrt{3}$$

$$c = +\sqrt{3} \quad \in [0,3]$$

وهي القيمة المطلوبة.

بينما $c = -\sqrt{3}$ تهمل لأنها لا تنتمي إلى $[0,3]$

$$f_{av} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{3-0}\int_0^3 3x^2\,dx = \frac{1}{3}\cdot 27 = 9$$

(3_9_1) المبرهنة الأساسية لحساب التفاضل والتكامل

The Fundamental Theorem of Calculus

[I] إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a,b]$ وإذا عرّفنا الدالة $G(x)$ بالشكل

$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ، فإنّ: $G'(x) = f(x) \quad \forall x \in]a,b[$

[II] إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a,b]$ وكان $F(x)$ معكوس تفاضلي للدالة $f(x)$ على $[a,b]$، فإنّ: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

البرهان [I]:

$$\because G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$\therefore G(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

$$= G(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

$$\therefore G(x+\Delta x) - G(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

وباستخدام مبرهنة القيمة الوسطى على التكامل في الطرف الأيمن نجد أنّ:

$$G(x+\Delta x)-G(x)=f(c)(x+\Delta x-x)=f(c)\cdot\Delta x$$

ثم بالقسمة على Δx نجد أنّ:

$$\frac{G(x+\Delta x)-G(x)}{\Delta x}=f(c) \quad , \quad c\in[x,x+\Delta x]$$

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{G(x+\Delta x)-G(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(c)$$

وعندما $\Delta x\to 0$ فإنّ $c\to x$

$$\therefore G'(x)=f(x)$$

أي أنّ:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right]=f(x)}$$

البرهان [II]:

حيث أن $F(x)$ معكوس تفاضلي للدالة $f(x)$ على $[a,b]$ فإنّ $F(x)=\int f(x)\,dx$

$$F'(x)=f(x) \quad .....(1)$$

[حسب الجزء الأول من المبرهنة] ..... $\because G(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

$$\therefore G'(x)=f(x) \quad .....(2)$$

وبالتالي من (1) و (2) نجد أنّ:

$$G'(x)=F'(x)$$

$$\therefore G(x)-F(x)=c$$

$$\therefore G(x)=F(x)+c$$

$$\int_a^x f(t)\,dt=F(x)+c \quad .....(3)$$

إذا وضعنا $x=b$ في (3) فإنّ:

$$\int_a^b f(t)\,dt=F(b)+c$$

وإذا وضعنا $x = a$ في (3) فإنّ:

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + c = 0 \Rightarrow c = -F(a)$$

وبناءً عليه تصبح الصيغة (3) على الشكل:

$$\therefore \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

ثم نستبدل المتغير t بالمتغير x نجد أنّ:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

ملاحظة: بصورة عامة نكتب الفرق $F(b) - F(a)$ بالشكل: $F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$

وبالتالي:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b}$$

إذا كانت $f(x)$ متصلة على $[a,b]$ وكان $F(x)$ معكوساً تفاضلياً للدالة $f(x)$ على $[a,b]$ فإنّ:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b$$

$$= F(b) - F(a)$$

وحيث أنّ $F(x) + c$ أيضاً معكوس تفاضلي للدالة $f(x)$ على $[a,b]$ فإن:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x) + c\right]_a^b \quad \text{.....(4)}$$

$$= \left[F(b) + c\right] - \left[F(a) + c\right]$$

$$= F(b) + c - F(a) - c$$

$$= F(b) - F(a)$$

أي أنّ كلّ المعكوسات التفاضلية $F(x)+c$ على $[a,b]$ تعطي نفس القيمة للتكامل

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

وحيث أنّ $\int f(x)\,dx = F(x)+c$ ، فإنّ العلاقة (4) تصبح على الصورة:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b}$$

وهي العلاقة بين **التكامل المحدود والتكامل غير المحدود**.

مثال(2): احسب التكامل $\int_0^3 (x^3+2x-1)\,dx$

الحل:

$$\int_0^3 (x^3+2x-1)\,dx = \left[\frac{x^4}{4}+x^2-x\right]_0^3$$

$$=\left[\frac{81}{4}+9-3\right]-[0]=\frac{105}{4}$$

مثال(3): احسب التكامل $\int_{-2}^{2} |x|\,dx$

الحل:

$$\int_{-2}^{2} |x|\,dx = \int_{-2}^{0}(-x)\,dx + \int_0^2 x\,dx$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2$$

$$=[0]-[-2]+[2]-[0]=2+2=4$$

مثال(4): احسب التكامل $\int_0^4 f(x)\,dx$ إذا كانت $f(x)=\begin{bmatrix} x^2 & , & x<2 \\ x+2 & , & x\geq 2 \end{bmatrix}$

الحل:

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^2 x^2\,dx + \int_2^4 (x+2)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_2^4 = \frac{8}{3}+10 = \frac{38}{3}$$

مثال(5): احسب التكامل $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}\,dx$

الحل: نفرض أنّ:

$$u = 1+\cos x \Rightarrow du = -\sin x\,dx \Rightarrow -du = \sin x\,dx$$

$$\therefore \int \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}\,dx = -\int \frac{du}{u^2} = -\int u^{-2}\,du$$

$$= \frac{-u^{-1}}{-1} + c = \frac{1}{u} + c = \frac{1}{1+\cos x} + c$$

$$\therefore \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}\,dx = \left[\frac{1}{1+\cos x}\right]_0^{\pi/3}$$

$$= \frac{1}{1+\cos\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{1+\cos 0} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} - \frac{1}{1+1}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

مثال(6): أثبت أنّ $\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)\,dt = f\left[g(x)\right]\cdot g'(x)$ مستخدماً الجزء الأول من المبرهنة الأساسية وقاعدة التسلسل.

الحل:

نضع $u = g(x)$

$$\therefore \int_a^u f(t)\,dt = F(u)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\int_a^u f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\left[F(u)\right]$$

$$= F'(u)\cdot u'$$

$$= f(u)\cdot u'$$

$$= f\left[g(x)\right]\cdot g'(x)$$

مثال(7): أوجد $\frac{d}{dx}\int_1^x \cos\left(\sqrt{t}\right)dt$

الحل:

$$\frac{d}{dx}\int_1^x \cos\left(\sqrt{t}\right)dt = \cos\left(\sqrt{x}\right)\cdot(x)' = \cos\left(\sqrt{x}\right)$$

مثال(8): إذا كانت $F(x) = \int_2^{3x} f(t)\,dt$ فأوجد $F'(x)$

الحل:

$$F'(x) = f(3x)\cdot(3x)'$$

$$= f(3x)\cdot 3 = 3f(3x)$$

مثال(9): أوجد $\frac{d}{dx}\int_{3}^{x^2} f(t)\,dt$

الحل:

$$\frac{d}{dx}\int_{3}^{x^2} f(t)\,dt = f(x^2)\cdot(x^2)'$$

$$= f(x^2)\cdot 2x = 2x\cdot f(x^2)$$

مثال(10): أوجد $\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x} \frac{1}{1+t}\,dt$

الحل:

$$\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x} \frac{1}{1+t}\,dt = \frac{1}{1+x}(x)' - \frac{1}{1+(-x)}\cdot(-x)'$$

$$= \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1-x+1+x}{1-x^2}$$

$$= \frac{2}{1-x^2}$$

تمـــارين (1ـ6)

أوجد قيمة c التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للتكاملات التالية، وأوجد أيضاً القيمة المتوسطة f_{av} للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$:

(1) $\int_0^3 3x^2\,dx$ (2) $\int_{-1}^3 (3x^2-2x+3)\,dx$ (3) $\int_1^4 3\sqrt{x}\,dx$

(4) $\int_{-2}^{-1} 8x^{-3}\,dx$ (5) $\int_1^2 (4x^3-1)\,dx$ (6) $\int_1^4 (2+3\sqrt{x})\,dx$

احسب كلاً من التكاملات التالية:

(7) $\int_0^2 |2x-3|\,dx$ (8) $\int_0^{\ln 2} e^{-3x}\,dx$

(9) $\int_{-\ln 3}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x+4}\,dx$ (10) $\int_0^e \frac{dx}{x+e}$

(11) $\int_1^{\sqrt{2}} x\cdot 4^{-x^2}\,dx$ (12) $\int_1^2 x^4\,dx$

(13) $\int_{-2}^3 x(1-x)\,dx$ (14) $\int_{-2}^0 (x^3+x-3)\,dx$

(15) $\int_1^2 \sqrt{x}\left(2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ (16) $\int_1^4 \left(\frac{5}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[2]{x^3}}\right)dx$

(17) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin x\,dx$ (18) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx$

(19) $\int_0^{\pi/4} \left(x+\frac{2}{\sin^2 x}\right)dx$ (20) $\int_{-1}^2 [2+|x|]\,dx$

(21) $\int_0^3 |2x-1|\,dx$ (22) $\int_0^{\pi} |\cos x|\,dx$

(23) $\int_a^{4a} (\sqrt{a}-\sqrt{x})\,dx \quad , \quad a>0$

(24) $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$, where $f(x)=\begin{cases} -x & , \quad x \ge 0 \\ x^2 & , \quad x < 0 \end{cases}$

(25) $\int_{0}^{2} f(x)\,dx$, where $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & , \quad 0 \le x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & , \quad x \ge 1 \end{cases}$

(26) إذا كان $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx = 3$ فأوجد: $(b)\ \int_{-1}^{5} f(u)\,du$ $\quad (a)\ \int_{-1}^{5} f(t)\,dt$

(27) إذا كانت $F(x) = \int_{2}^{x} \sqrt{3t^2+1}\,dt$ فأوجد:

$(a)\ F(2)$ $\quad (b)\ F'(2)$ $\quad (c)\ F''(2)$

(28) إذا كانت $F(x) = \int_{0}^{x} \dfrac{\cos t}{t^2+3}\,dt$ فأوجد:

$(a)\ F(0)$ $\quad (b)\ F'(0)$ $\quad (c)\ F''(0)$

(29) أوجد:

$(a)\ \dfrac{d}{dx}\int_{0}^{x} \dfrac{dt}{1+\sqrt{t}}$ $\quad (b)\ \dfrac{d}{dx}\int_{0}^{x} \dfrac{t}{\cos t}\,dt$

$(c)\ \dfrac{d}{dx}\int_{0}^{x} |t|\,dt$ $\quad (d)\ \dfrac{d}{dx}\int_{1}^{x} \sin\sqrt{t}\,dt$

(30) اثبت أنّ $\dfrac{d}{dx}\int_{a}^{g(x)} f(t)\,dt = f[g(x)]\cdot g'(x)$ (مستخدماً الجزء الأول من المبرهنة الأساسية وقاعدة التسلسل) ثم استخدم ذلك لإيجاد مايلي:

$(a)\ \dfrac{d}{dx}\int_{1}^{x^4} \dfrac{1}{t}\,dt$ $\quad (b)\ \dfrac{d}{dx}\int_{1}^{\cos 2x} \dfrac{1}{2+\sqrt{t}}\,dt$

(31) أثبت أنّ $\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = f\left[g(x)\right]\cdot g'(x) - f\left[h(x)\right]\cdot h'(x)$ (مستخدماً الجزء الأول من المبرهنة الأساسية والخاصية $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$) ثم استخدم النتيجة التي حصلت عليها لإيجاد مايلي:

$(a)\ \frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{x^2} f(t)\,dt$ $\qquad$ $(b)\ \frac{d}{dx}\int_{-x}^{3x^2} f(t)\,dt$

تمـــارين (5.2)

(1) أوجد المساحة السطحية الناتجة من دوران فرع المنحنى $y=\frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$ حيث $0\le x\le 3$ حول محور y. [Ans. $\frac{99\pi}{2}$]

(2) أوجد المساحة السطحية الناتجة من دوران فرع المنحنى $1\le y\le 2$ و $x=\frac{y^4}{4}+\frac{1}{8y^2}$ حول محور x. [Ans. $\frac{253\pi}{20}$]

(3) أوجد المساحة السطحية الناتجة من دوران فرع المنحنى $0\le t\le 1$ و $y=t$ و $x=t^2$ حول محور x. [Ans. $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$]

(4) أوجد المساحة السطحية الناتجة من دوران فرع المنحنى $y=x^3$ من النقطة $(0,0)$ إلى النقطة $(1,1)$ حول محور x. [Ans. $\frac{\pi}{27}(10\sqrt{10}-1)$]

(5) أوجد المساحة السطحية الناتجة من دوران فرع المنحنى $y=\frac{x^4}{4}+\frac{1}{8}x^{-2}$ من $x=1$ إلى $x=2$ حول محور y.

(6) أوجد المساحة السطحية الناتجة من دوران فرع المنحنى $y=t^2-2$ و $x=t$ من $t=0$ إلى $t=3$ حول محور y.

(7) احسب مساحة سطح كرة نصف قطرها r. [Ans. $4\pi r^2$]

3 طرائق التكامل
Integration Methods

(1-3) طريقة التكامل بالتجزئة Integration by Parts

تصادفنا أحياناً تكاملات من النوع:

$$\int \ln x\,dx \quad , \quad \int xe^x\,dx \quad , \quad \int x^2 \sin x\,dx \quad , \quad \int e^x \cos x\,dx$$

ولايمكننا استخدام طرق التكامل السابقة لإجراء هذه التكاملات، والطريقة الآتية سوف تساعدنا على إجراء هذه التكاملات، وتكاملات أخرى عديدة.

وهذه الطريقة في الواقع ليست إلا الصيغة التكاملية لعملية تفاضل حاصل ضرب دالتين، فكما نعلم أنه إذا كان لدينا الدالتين u,v في المتغير x قابلتين للاشتقاق فإنّ:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

وعليه فإنّ:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

وبتكامل الطرفين نجد أنّ:

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du$$

أي أنّ:

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

هذه الصيغة تسمى "قاعدة التكامل بالتجزئة" وتعبر عن تكامل معين بدلالة تكامل آخر، وتساعد في تبسيط التكامل حيث نقسم دالة التكامل إلى جزأين هما: u و dv ونشير هنا

إلى أن الاختيار المناسب لهذين الجزأين يجعل تطبيق القاعدة سليماً، وبالتالي نستطيع تبسيط التكامل وإيجاد قيمته، كما يتضح ذلك من خلال الأمثلة الآتية:

مثال(1): احسب التكامل $\int xe^{2x}dx$

الحل:

الاختيارات الممكنة للجزء dv هي:

$$dx \quad , \quad x\,dx \quad , \quad e^{2x}dx \quad , \quad xe^{2x}dx$$

ونجد أنّ الأنسب في هذه التعبيرات والذي نستطيع مكاملته هو $e^{2x}dx$ لذلك نختار:

$$u = x \quad , \quad dv = e^{2x}dx$$

وعليه فإنّ:

$$du = dx \quad , \quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

وبتطبيق قاعدة التكامل بالتجزئة نجد أنّ:

$$\int xe^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx$$

$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c\ .$$

مثال(2): احسب التكامل $\int x\sin x\,dx$

الحل:

بنفس الطريقة نجد أنّ الاختيارات الممكنة للجزء dv هي:

$$dx \quad , \quad x\,dx \quad , \quad \sin x\,dx \quad , \quad x\sin x\,dx$$

وعليه فإنّ الأنسب في هذه التعبيرات هو $\sin x\,dx$ لذلك نختار:

$$u = x \quad , \quad dv = \sin x\,dx$$

أي أنّ:

$$du = dx \quad , \quad v = -\cos x$$

وبتطبيق قاعدة التكامل بالتجزئة نجد أنّ:

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + c\ .$$

مثال(3): احسب قيمة التكامل $\int_0^1 xe^x dx$

الحل:

نختار

$$u = x \quad , \quad dv = e^x dx$$

وبناءً عليه فإنّ:

$$du = dx \quad , \quad v = e^x$$

ومن قاعدة التكامل بالتجزئة نجد أنّ:

$$\int_0^1 xe^x dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

$$= \left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1$$

$$= e - (e-1)$$

$$= 1 .$$

مثال(4): احسب التكامل $\int \ln x \, dx$

الحل:

نضع

$$u = \ln x \quad , \quad dv = dx$$

وعليه فإنّ:

$$du = \frac{1}{x} dx \quad , \quad v = x$$

ومن ثمّ:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx$$

$$= x \ln x - x + c .$$

مثال(5): احسب التكامل $\int \tan^{-1} x\, dx$

الحل:

يمكن إيجاد هذا التكامل أيضاً باستخدام طريقة التكامل بالتجزئة حيث نضع:

$$u = \tan^{-1} x \quad , \quad dv = dx$$

وعليه فإنَّ:

$$du = \frac{1}{1+x^2} dx \quad , \quad v = x$$

ومن ثمَّ:

$$\int \tan^{-1} x\, dx = x \tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) + c \, .$$

مثال(6): احسب قيمة التكامل $\int_0^{\pi/4} \sec^3 x\, dx$

الحل: يمكن كتابة التكامل على الصورة:

$$I = \int_0^{\pi/4} \sec x \sec^2 x\, dx$$

وبتطبيق قاعدة التكامل بالتجزئة حيث نختار:

$$u = \sec x \quad , \quad dv = \sec^2 x\, dx$$

وعليه فإنَّ:

$$du = \sec x \tan x\, dx \quad , \quad v = \tan x$$

ومن ثم نجد أنَّ:

$$I = \left[\sec x \tan x\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \sec x \tan^2 x\, dx$$

$$= \left[\sec x \tan x\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \sec x (\sec^2 - 1)\, dx$$

$$= \left[\sec x \tan x\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \sec^3 x\, dx + \int_0^{\pi/4} \sec x\, dx$$

أي أنّ:

$$I = \left[\sec x \tan x\right]_0^{\pi/4} - I + \int_0^{\pi/4} \sec x \, dx$$

وعليه فإنّ:

$$2I = \left[\sec x \tan x\right]_0^{\pi/4} + \left[\ln(\sec x + \tan x)\right]_0^{\pi/4}$$

وبالتالي نجد أنّ:

$$I = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - 0\right) + \frac{1}{2}\left[\ln\left(\sqrt{2} + 1\right) - \ln(1 + 0)\right]$$

وأخيراً فإنّ قيمة التكامل هي:

$$\int_0^{\pi/4} \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})\right]$$

مثال(7): احسب التكامل $I = \int e^x \sin x \, dx$

الحل:

نختار

$$u = \sin x \quad , \quad dv = e^x dx$$

وعليه فإنّ:

$$du = \cos x \, dx \quad , \quad v = e^x$$

وبالتالي نجد أنّ:

$$I = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

ثم نقوم بتطبيق قاعدة التكامل بالتجزئة مرة أخرى حيث نضع:

$$u = \cos x \quad , \quad dv = e^x dx$$

وعليه فإنّ:

$$du = -\sin x \, dx \quad , \quad v = e^x$$

ومن ثم نجد أنّ:

$$I = e^x \sin x - \left[e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx\right]$$

$$I = e^x \sin x - e^x \cos x - I$$

ومنه نجد أنَّ:

$$2I = e^x(\sin x - \cos x)$$

أي أنَّ:

$$I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + c\ .$$

ملاحظة:

في المثال السابق إذا اخترنا:

$$u = e^x \quad , \quad dv = \sin x\, dx$$

ماذا سوف يكون الناتج؟ (هل سنحصل على النتيجة نفسها؟)

مثال(8): احسب ناتج التكامل $\int e^x \cos x\, dx$

الحل: يترك كتمرين للطالب.

مثال(9): احسب التكامل $\int x^3 e^x dx$

الحل: نأخذ:

$$u = x^3 \quad , \quad dv = e^x dx$$

فيكون:

$$du = 3x^2 dx \quad , \quad v = e^x$$

إذاً:

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx \quad \text{.....} \quad (1)$$

ثم نطبق قاعدة التكامل بالتجزئة مرة أخرى على التكامل: $\int x^2 e^x dx$

وذلك بأخذ:

$$u = x^2 \quad , \quad dv = e^x dx$$

فيكون:

$$du = 2x\, dx \quad , \quad v = e^x$$

إذاً:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x dx \quad \text{.....} \quad (2)$$

ثم نكامل بالتجزئة مرة ثالثة التكامل $\int xe^x dx$ وذلك بأخذ:

$$u = x \quad , \quad dv = e^x dx$$

فيكون:

$$du = dx \quad , \quad v = e^x$$

إذاً:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$

$$= xe^x - e^x + c \quad ..... (3)$$

وباستخدام (1) ، (2) ، (3) نجد أن:

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6e^x + c \, .$$

يتضح من الأمثلة السابقة أنّ قاعدة التكامل بالتجزئة تفيد في حساب تكاملات كثيرة، وهذه القاعدة يمكن أن تطبق أكثر من مرة حتى نصل بالتكامل إلى أبسط صورة له، وغالباً ما تكون صورة لقاعدة من القواعد المعروفة في حساب التكامل. المهم هو أن نقسم دالة التكامل إلى جزأين أحدهما يمكن تكامله بسهولة ومع تفاضل الجزء الآخر فإننا نستطيع تطبيق هذه القاعدة.

والجدير ذكره أنه في بعض التكاملات الأخرى قد يلزم تطبيق قاعدة التكامل بالتجزئة مرات كثيرة فينشأ عن ذلك ما يسمى بالتكامل بطريقة الاختزال المتتالي.

تمـــارين (3ـ1)

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int x \sin x \, dx$

(2) $\int x \cos x \, dx$

(3) $\int x \ln x \, dx$

(4) $\int x e^{x} \, dx$

(5) $\int x 4^{x} \, dx$

(6) $\int x^{2} \ln x \, dx$

(7) $\int x^{2} \sin x \, dx$

(8) $\int x^{2} \cos x \, dx$

(9) $\int x^{2} e^{x} \, dx$

(10) $\int x^{2} 10^{x} \, dx$

(11) $\int e^{x} \cos x \, dx$

(12) $\int e^{3x} \sin 3x \, dx$

(13) $\int x \sinh(4x) \, dx$

(14) $\int x^{2} \cosh x \, dx$

(15) $\int \cos(\ln x) \, dx$

(16) $\int x \sin^{-1} x \, dx$

(17) $\int x \sec^{-1} x \, dx$

(18) $\int \cos^{-1} x \, dx$

(19) $\int \sec^{-1} x \, dx$

(20) $\int_{0}^{\pi} x \cos x \, dx$

(21) $\int x \tan^{-1} x \, dx$

(22) $\int \sin^{-1} x \, dx$

(23) $\int_{0}^{1} e^{\sqrt{x}} \, dx$

(24) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx$

(25) $\int \ln(1-x) \, dx$

(26) $\int \sin(\ln x) \, dx$

(27) $\int x e^{-x} \, dx$

(28) $\int_{0}^{1} x^{3} e^{-x^{2}} \, dx$

(29) $\int \csc^{3} x \, dx$

(30) $\int \sec^{5} x \, dx$

(31) $\int_{0}^{1} \frac{x^{3}}{\sqrt{x^{2}+1}} \, dx$

(32) $\int_{0}^{\pi/2} x \sin 2x \, dx$

(33) $\int x(2x+3)^{99} \, dx$

(34) $\int x^{3} \cos(x^{2}) \, dx$

(35) $\int x^3 \sinh x \, dx$

(36) $\int (x+4)\cosh 4x \, dx$

(37) $\int (x+1)^{10}(x+2) \, dx$

(38) $\int \sin x \ln(\cos x) \, dx$

(39) $\int e^{3x} \cos 2x \, dx$

(40) $\int x \sec x \tan x \, dx$

(41) $\int x \sec^2 5x \, dx$

(42) $\int \cos x \ln(\sin x) \, dx$

(43) $\int e^{2x} \cosh 3x \, dx$

(44) $\int \cos \sqrt{x} \, dx$

(45) $\int_2^4 \sec^{-1} \sqrt{x} \, dx$

(46) $\int_1^e x^2 \ln x \, dx$

(47) $\int_0^{\pi/2} x \sin 4x \, dx$

(48) $\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

(49) $\int x \sin x \cos x \, dx$

(50) $\int_{-2}^{2} \ln(x+3) \, dx$

(51) $\int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx$

(52) $\int x^2 e^{3x} \, dx$

(53) $\int (\ln x)^2 \, dx$

(54) $\int \frac{x}{\sin^2 x} \, dx$

(55) $\int \sqrt{x} \ln x \, dx$

(2_3) طريقة التكامل بالاختزال المتتالي Integration by Successive Reduction

التكامل بالاختزال المتتالي هو تكامل نطبق فيه قاعدة التكامل بالتجزئة أكثر من مرة بحيث نختزل التكامل إلى تكامل آخر له شكل التكامل الأصلي بأسٍ أصغر، وهنا نتوصل إلى صيغ اختزاليةٍ (صيغ تكرارية) للتكامل، وهذه الصيغ تساعد على إيجاد قيمة التكامل بسهولة. ولتوضيح ذلك نعطي الأمثلة الآتية:

مثال(1): أوجد صيغةً تكراريةً للتكامل $\int x^n e^x dx$ ثم احسب التكامل عندما $n = 4$.

الحل:

سنرمز للتكامل بالرمز I_n أي أنّ:

$$I_n = \int x^n e^x dx$$

وبتطبيق قاعدة التكامل بالتجزئة بوضع:

$$u = x^n \qquad , \qquad dv = e^x dx$$

فإنّ:

$$du = nx^{n-1} dx \qquad , \qquad v = e^x$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned} I_n &= \int x^n e^x dx \\ &= x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x dx \end{aligned}$$

أي أنّ الصيغة التكرارية (الاختزالية) المطلوبة هي:

$$\boxed{I_n = x^n e^x - nI_{n-1}}$$

ومن هذه الصيغة نحسب التكامل عندما $n = 4$ أي نحسب I_4 بوضع $n = 4$ فنجد أنّ:

$$I_4 = x^4 e^x - 4I_3$$

ومع تكرار استخدام هذه الصيغة نجد أنّ:

$$I_3 = x^3 e^x - 3I_2 \ ,$$
$$I_2 = x^2 e^x - 2I_1 \ ,$$
$$I_1 = xe^x - I_0 \ ,$$
$$I_0 = \int x^0 e^x dx = e^x + c$$

وبناءً عليه نجد أنّ:

$$I_1 = xe^x - e^x + c \ ,$$
$$I_2 = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c \ ,$$
$$I_3 = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6e^x + c \ ,$$
$$I_4 = x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - 24xe^x + 24e^x + c \ ,$$

أي أنّ:

$$\begin{aligned} I_4 &= \int x^4 e^x dx \\ &= (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24)\, e^x + c. \end{aligned}$$

مثال(2): أوجد صيغةً اختزاليةً للتكامل $I_n = \int (\ln x)^n dx$ ثم أوجد I_3.

الحل:

نضع:

$$u = (\ln x)^n \qquad , \qquad dv = dx$$

وعليه فإنّ:

$$du = n(\ln x)^{n-1} \frac{1}{x} dx \qquad , \qquad v = x$$

ومن ثم نجد أنّ:

$$\begin{aligned} I_n &= \int (\ln x)^n dx \\ &= x(\ln x)^n - n\int x(\ln x)^{n-1} \frac{1}{x} dx \\ &= x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1} dx \end{aligned}$$

أي أنّ:

$$\boxed{I_n = x(\ln x)^n - nI_{n-1}}$$

وهذه هي الصيغة الاختزالية المطلوبة، ولإيجاد قيمة I_3 نضع $n=3$ ومع تكرار ذلك نحصل على:

$$I_3 = x(\ln x)^3 - 3I_2 \ ,$$
$$I_2 = x(\ln x)^2 - 2I_1 \ ,$$
$$I_1 = x\ln x - I_0 \ ,$$
$$I_0 = \int (\ln x)^0 dx = \int dx = x + c$$

وبالتالي فإنّ:

$$I_1 = x\ln x - x + c \ ,$$
$$I_2 = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + c \ ,$$
$$I_3 = x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x - 6x + c \ ,$$

أي أنّ:

$$\begin{aligned} I_3 &= \int (\ln x)^3 dx \\ &= x\ln x\left[(\ln x)^2 - 3\ln x + 6\right] - 6x + c. \end{aligned}$$

مثال(3): أوجد صيغةً تكراريةً للتكامل $I_n = \int x^n \cos x\, dx$ ثم استنتج I_4.

الحل:

نطبق قاعدة التكامل بالتجزئة حيث نختار:

$$u = x^n \qquad , \qquad dv = \cos x\, dx$$

وعليه فإنّ:

$$du = nx^{n-1}dx \qquad , \qquad v = \sin x$$

إذاً:

$$I_n = x^n \sin x - n\int x^{n-1} \sin x\, dx$$

وللتكامل الموجود بالطرف الأيمن نطبق أيضاً قاعدة التكامل بالتجزئة حيث نضع:

$$u = x^{n-1} \qquad , \qquad dv = \sin x\, dx$$

وعليه فإنّ:

$$du = (n-1)x^{n-2}dx \qquad , \qquad v = -\cos x$$

ومن ثمّ نجد أنّ:

$$I_n = x^n \sin x - n\left[-x^{n-1}\cos x + (n-1)\int x^{n-2}\cos x\,dx\right]$$

أي أنّ:

$$\boxed{I_n = x^n \sin x + nx^{n-1}\cos x - n(n-1)I_{n-2}}$$

وتلك هي الصيغة التكرارية المطلوبة، ولإيجاد I_4 نضع $n=4$ فنحصل على:

$$I_4 = x^4 \sin x + 4x^3 \cos x - 12I_2 \ ,$$

$$I_2 = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2I_0 \ ,$$

$$I_0 = \int \cos x\,dx = \sin x + c.$$

وبالتعويض عن I_0 و I_2 نحصل على:

$$I_4 = \int x^4 \cos x\,dx$$

$$= (x^4 - 12x^2 + 24)\sin x + (4x^3 - 24x)\cos + c.$$

مثال(4): احسب التكامل $I_n = \int \sin^n x\,dx$

الحل:

في هذه الحالة نكتب التكامل بالصورة:

$$I_n = \int \sin^{n-1} x \sin x\,dx$$

ثم نضع:

$$u = \sin^{n-1} x \qquad , \qquad dv = \sin x\,dx$$

وعليه فإنّ:

$$du = (n-1)\sin^{n-2} x\cos x\,dx \qquad , \qquad v = -\cos x$$

وبتطبيق قاعدة التكامل بالتجزئة، فإنّ التكامل يصبح على الصورة:

$$I_n = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\cos^2 x dx$$

$$= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx$$

$$= -\sin^{n-1} x\cos + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \sin^n x\,dx$$

ونستنتج أنَّ:

$$I_n = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

وعليه فإنَّ:

$$(n-1+1)I_n = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)I_{n-2}$$

وتكون الصيغة التكرارية على الصورة:

$$\boxed{I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}I_{n-2}}$$

وحيث أنَّ:

$$I_0 = \int(\sin x)^0\,dx = \int dx = x + c\ ,$$

$$I_1 = \int \sin x\,dx = -\cos x + c\ ,$$

فإنَّه من الممكن إيجاد قيمة التكامل لأي عدد n وذلك باستخدام الصيغة التكرارية السابقة.

مثال(5): احسب قيمة التكامل $\int \sin^7 x\,dx$

الحل: يُترك كتمرين للطالب.

مثال(6): عيِّن الصيغة التكرارية للتكامل $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ ثمَّ أوجد قيمة I_3.

الحل:

نضع:

$$u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n} \qquad , \qquad dv = dx$$

وعليه فإنَّ:

$$du = -n(x^2+a^2)^{-n-1}(2x)\,dx \quad , \quad v = x$$

أي أنَّ:

$$du = \frac{-2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx \qquad , \qquad v = x$$

ومن ذلك نجد أنّ:

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - 2na^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$$

أي أنّ:

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}$$

وعليه فإنّ:

$$2na^2 I_{n+1} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)I_n$$

أي أنّ الصيغة التكرارية المطلوبة هي:

$$\boxed{I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)I_n\right]}$$

ولإيجاد I_3 فإننا نضع $n=3$ في الصيغة التكرارية فنجد أنّ:

$$I_3 = \frac{1}{4a^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + 3I_2\right]$$

ثم نضع $n=2$ في الصيغة التكرارية فنجد أنّ:

$$I_2 = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{x^2+a^2} + I_1\right]$$

ثم نضع $n=1$ في الصيغة التكرارية فنجد أنّ:

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$$

ومن ثمّ نجد أنّ:

$$I_2 = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right] + c$$

$$I_3 = \frac{1}{4a^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right)\right] + c$$

أي أنّ:

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$$

$$= \frac{x}{4a^2(x^2+a^2)^2} + \frac{3x}{8a^4(x^2+a^2)} + \frac{3}{8a^5}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$$

مثال(7): أوجد صيغة تكرارية للتكامل $\int x^n (\ln x)^m dx$ ثم أوجد قيمة التكامل عندما $n=1\ ,\ m=2$.

الحل:

نفرض أنّ:

$$I_{n,m} = \int x^n (\ln x)^m dx$$

ثم نختار:

$$u = (\ln x)^m \qquad , \qquad dv = x^n dx$$

إذاً:

$$du = m(\ln x)^{m-1}\frac{1}{x}dx \qquad , \qquad v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

ومن ثم نجد أنّ:

$$I_{n,m} = \frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x)^m - \frac{m}{n+1}\int x^{n+1}(\ln x)^{m-1}\frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x)^m - \frac{m}{n+1}\int x^n (\ln x)^{m-1}dx$$

ومنها نستنتج أنّ الصيغة التكرارية هي:

$$\boxed{I_{n,m} = \frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x)^m - \frac{m}{n+1}I_{n,m-1}}$$

ولحساب قيمة التكامل عندما $n=1$ و $m=2$ نعوض في الصيغة التكرارية فنجد أنّ:

$$I_{1,2}=\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2-\frac{2}{2}I_{1,1}\ ,$$

$$I_{1,1}=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}I_{1,0}\ ,$$

$$I_{1,0}=\int x(\ln x)^0\,dx=\frac{x^2}{2}+c\ ,$$

وبالتالي فإنّ:

$$I_{1,1}=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+c\ ,$$

أي أنّ:

$$\begin{aligned}I_{1,2}&=\int x(\ln x)^2\,dx\\&=\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2-\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{4}x^2+c.\end{aligned}$$

تمـــارين (2.3)

احسب التكاملات الآتية:

(1) $\int x^5 e^x \, dx$

(2) $\int (\ln x)^4 \, dx$

(3) $\int x^6 \cos x \, dx$

(4) $\int x^n e^{-x^2} \, dx$

(5) $\int_1^e (\ln x)^3 \, dx$

(6) $\int x^5 e^{-x} \, dx$

استخدم الصيغة المختزلة للتكامل $\int \sin^n x \, dx$ لإثبات أنّ:

(7) $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}$

(8) $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n+1}$

حيث n عدد صحيح موجب.

أوجد صيغةً تكراريةً لكل من التكاملات الآتية ثم احسب قيمة التكامل عندما $n = 4$ في كل حالة:

(9) $\int x^n \sin x \, dx$

(10) $\int \cos^n x \, dx$

(11) $\int x^n e^{-x} \, dx$

(12) $\int \tan^n x \, dx$

(13) $\int \sec^n x \, dx$

(14) $\int (x^2 + a^2)^n \, dx$

(15) أثبت أنّ: $\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$

(3.3) طريقة تكامل حاصل ضرب الدوال المثلثية

يمكن إيجاد تكامل حاصل ضرب الدوال المثلثية المرفوعة بأس باستخدام طريقة التكامل بالتجزئة أو الاستعانة بالمتطابقات المثلثية ثمّ استخدام طريقة التعويض كما يلي:

أولاً: إيجاد تكامل حاصل ضرب دوال مثلثية باستخدام طريقة التكامل بالتجزئة:

يمكن توضيح ذلك في المثال التالي:

مثال(1): أوجد صيغةً تكراريةً للتكامل $\int \sin^n x \sin x \cos^m x\, dx$ ثمّ أوجد قيمة التكامل عندما $m = 3\ ,\ n = 4$

الحل:

نفرض أنّ:

$$I_{n,m} = \int \sin^n x \cos^m x\, dx$$

حيث يمكن كتابته على الصورة:

$$I_{n,m} = \int \sin^{n-1} x \cos^m x\, dx$$

ثم نضع:

$$u = \sin^{n-1} x \qquad , \qquad dv = \cos^m x \sin x\, dx$$

وعليه فإنّ:

$$du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x\, dx \quad , \quad v = -\frac{\cos^{m+1} x}{m+1}$$

وبذلك يصبح التكامل:

$$\begin{aligned} I_{n,m} &= -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{n-2} x \cos^{m+2} x\, dx \\ &= -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{n-2} x \cos^{m} x (1-\sin^2 x)\, dx \\ &= -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\left[I_{n-2,m} - I_{n,m}\right] \end{aligned}$$

ومن ذلك نستنتج أنّ الصيغة التكرارية هي:

$$\boxed{I_{n,m} = -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{n+m} + \frac{n-1}{n+m} I_{n-2,m}}$$

ولحساب $I_{4,3}$ نضع $n=4$ و $m=3$ في الصيغة التكرارية فنحصل على:

$$I_{4,3} = -\frac{1}{7}\sin^3 x\cos^4 x + \frac{3}{7}I_{2,3} \ ,$$

$$I_{2,3} = -\frac{1}{5}\sin x\cos^4 x + \frac{1}{5}I_{0,3} \ ,$$

$$\begin{aligned} I_{0,3} &= \int \cos^3 x\,dx \\ &= \int (1-\sin^2 x)\cos x\,dx \\ &= \int \cos x\,dx - \int \sin^2 x\cos x\,dx \\ &= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c \end{aligned}$$

وبالتالي فإنّ:

$$I_{2,3} = \frac{1}{5}\sin x\cos^4 x + \frac{1}{5}\sin x - \frac{1}{15}\sin^3 x + c$$

أي أنّ:

$$\begin{aligned} I_{4,3} &= \int \sin^4 x\cos^3 x\,dx \\ &= -\frac{1}{7}\sin^3 x\cos^4 x - \frac{3}{35}\sin x\cos^4 x + \frac{3}{35}\sin x - \frac{3}{105}\sin^3 x + c \end{aligned}$$

<u>ثانياً</u>: إيجاد تكامل حاصل ضرب دوال مثلثية باستخدام المتطابقات المثلثية ثمّ التعويض:

(*) في التكاملات التي على الصورة:

$$I_{m,n} = \int \sin^m x\cos^n x\,dx$$

حيث n و m أعداد صحيحة موجبة، نعتبر الحالات الآتية:

(1) إذا كان $m = 2k+1$ (عدداً فردياً) فنضع:

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \int \sin^m x\cos^n x\,dx \\ &= \int \sin^{2k} x\cos^n x\sin x\,dx \\ &= \int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x\sin x\,dx \end{aligned}$$

ومن ثمّ نستخدم التعويض:

$$u = \cos x \quad , \quad du = -\sin x\,dx$$

(2) إذا كان $n = 2k+1$ (عدداً فردياً) فنضع:

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x\, dx$$
$$= \int \sin^m x \cos^{2k} x \cos x\, dx$$
$$= \int \sin^m x (1-\sin^2 x)^k \cos x\, dx$$

ثمَّ نستخدم التعويض:

$$u = \sin x \quad , \quad du = \cos x\, dx$$

(3) إذا كان كل من n و m أعداد زوجية فإنَّ الدوال تحت علامة التكامل في $I_{m,n}$ نجري عليها التحويلات الآتية:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \ ,$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \ ,$$
$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

مثال(2): أوجد $I = \int \sin^{10} x \cos^3 x\, dx$

الحل:

يمكن كتابة التكامل بالصورة الآتية:

$$I = \int \sin^{10} x \cos^2 x \cos x\, dx$$

وباستخدام المتطابقات المثلثية نجد أنَّ:

$$I = \int \sin^{10} x (1-\sin^2 x) \cos x\, dx$$

ثمَّ نستخدم التعويض:

$$u = \sin x \quad , \quad du = \cos x\, dx$$

ومن ثمَّ يصبح التكامل على الصورة:

$$I = \int u^{10}(1-u^2)\, du$$
$$= \frac{1}{11}u^{11} - \frac{1}{13}u^{13} + c$$
$$= \frac{1}{11}\sin^{11} x - \frac{1}{13}\sin^{13} x + c$$

مثال(3): أوجد قيمة التكامل $I = \int \sin^2 x \cos^4 x\, dx$

الحل:

يمكن كتابة التكامل على الصورة:

$$I = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x\, dx$$

وباستخدام المتطابقات المثلثية نحصل على:

$$I = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1+\cos 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x\, dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x\, dx + \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)\, dx$$

$$= \frac{1}{48}\sin^3 2x + \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + c$$

(*) في التكاملات التي على الصورة:

$$I_{m,n} = \int \tan^m x \sec^n x\, dx$$

حيث n و m أعداد صحيحة موجبة نعتبر الحالات الآتية:

(1) إذا كان $m = 2k+1$ (عدداً فردياً) فنضع:

$$I_{m,n} = \int \tan^{2k} x \sec^{n-1} x \tan x \sec x\, dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1)^k \sec^{n-1} x \tan x \sec x\, dx$$

ومن ثم نستخدم التعويض:

$$u = \sec x$$

(2) إذا كان $n = 2k$ (عدداً زوجياً) نكتب التكامل كما يلي:

$$I_{m,n} = \int \tan^n x \sec^{2k-2} x \sec^2 x\, dx$$

ومن ثمَّ نستخدم التعويض:

$$u = \tan x$$

(3) إذا كان m عدد زوجي، n عدد فردي فإنه لا توجد طريقة محددة لحساب التكامل في $I_{m,n}$ (يمكن استخدام التكامل بالتجزئة).

مثال(4): احسب $I = \int \tan^3 x \sec^5 x \, dx$

الحل:

نكتب التكامل على الصورة:

$$I = \int \tan^2 x \sec^4 x (\sec x \tan x) \, dx$$
$$= \int (\sec^2 x - 1) \sec^4 x (\sec x \tan x) \, dx$$

ثمَّ نستخدم التعويض:

$$u = \sec x \quad , \quad du = \sec x \tan x \, dx$$

فنحصل على:

$$I = \int (u^2 - 1) u^4$$
$$= \int (u^6 - u^4) \, du$$
$$= \frac{1}{7} u^7 - \frac{1}{5} u^5 + c$$
$$= \frac{1}{7} \sec^7 x - \frac{1}{5} \sec^5 x + c$$

مثال(5): احسب $I = \int \tan^2 x \sec^4 x \, dx$

الحل:

نكتب التكامل على الصورة:

$$I = \int \tan^2 x \sec^2 x \sec^2 x \, dx$$
$$= \int \tan^2 x (1 + \tan^2 x) \sec^2 x \, dx$$

ثمَّ نستخدم التعويض:

$$u = \tan x \quad , \quad du = \sec^2 x \, dx$$

ومنه نجد أنَّ:

$$I = \int u^2 (1 + u^2) \, du$$
$$= \frac{1}{5} u^5 + \frac{1}{3} u^3 + c$$
$$= \frac{1}{5} \tan^5 x + \frac{1}{3} \tan^3 x + c$$

ملاحظات:

(1) **التكاملات التي على الصورة:**

$$I_{m,n} = \int \cot^m x \operatorname{cosec}^n x \, dx$$

يمكن أن تعالج بنفس الطريقة.

(2) **التكاملات التي على الصورة:**

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

حيث أنّ $m = -\mu \, , \, n = -\gamma$ عددين صحيحين سالبين فرديين أو زوجيين معاً، فإنّ الدالة تحت علامة التكامل في $I_{m,n}$ تصبح:

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \int \frac{dx}{\sin^{\mu} x \cos^{\gamma} x} \\ &= \int \csc^{\mu} x \sec^{\gamma-2} x \; d(\tan x) \\ &= \int \left(1 + \frac{1}{\tan^2 x}\right)^{\frac{\mu}{2}} \left(1 + \tan^2 x\right)^{\frac{\gamma-2}{2}} d(\tan x) \\ &= \int \frac{\left(1 + \tan^2 x\right)^{\frac{\mu+\gamma}{2}-1}}{\tan^2 x} \, d(\tan x) \end{aligned}$$

مثال(6): احسب $I = \int \sin^{-2} x \cos^{-4} x \, dx$

الحل:

نكتب التكامل على الصورة:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} \\ &= \int \csc^2 x \sec^4 x \, dx \end{aligned}$$

وباستخدام المتطابقات المثلثية يصبح التكامل على الصورة:

$$\begin{aligned} I &= \int \left(1 + \frac{1}{\tan^2 x}\right)(1 + \tan^2 x) \sec^2 x \, dx \\ &= \int \frac{(1 + \tan^2 x)^2}{\tan^2 x} \sec^2 x \, dx \end{aligned}$$

نستخدم التعويض:

$$u = \tan x \quad , \quad du = \sec^2 x\, dx$$

$$I = \int \frac{(1+u^2)^2}{u^2}\, du$$

$$= \int \frac{1+2u^2+u^4}{u^2}\, du$$

$$= \int (u^{-2}+2+u^2)\, du$$

$$= -u^{-1}+2u+\frac{1}{3}u^3+c$$

$$= -\frac{1}{\tan x}+2\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x+c$$

$$= -\cot x+2\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x+c$$

وهناك حالاتٌ خاصة مثل:

$$\int \frac{dx}{\sin^{\mu} x} = \frac{1}{2^{\mu-1}} \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^{\mu}\left(\frac{x}{2}\right)\cos^{\mu}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^{\mu} x} = \int \frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^{\mu}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$$

مثال(7): احسب $I = \int \frac{dx}{\cos^4 x}$

الحل:

يمكن كتابة التكامل على الصورة:

$$I = \int \sec^4 x\, dx$$

$$= \int \sec^2 x \sec^2 x\, dx$$

وباستخدام المتطابقات المثلثية نحصل على:

$$I = \int (1+\tan^2 x)\sec^2 x\, dx$$

$$= \int \sec^2 x\, dx + \int \tan^2 x \sec^2 x\, dx$$

والآن نضع:

$$u = \tan x \quad , \quad du = \sec^2 x\, dx$$

وعليه فإنَّ:

$$I = \int du + \int u^2 du$$
$$= u + \frac{1}{3}u^3 + c$$
$$= \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + c$$

تدريب: أوجد $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$

أخيراً هناك تكاملات خاصة على الصورة:

$$\int \sin mx \cos nx\, dx$$

أو

$$\int \sin mx \sin mx\, dx$$

أو

$$\int \cos mx \cos nx\, dx$$

وفي هذه الحالة تُحول الدوال التي تحت علامة التكامل إلى مجموع باستخدام القوانين المثلثية.

مثال(8): احسب $I = \int \cos 5x \sin 3x\, dx$

الحل:

نستخدم صيغة تحويل الضرب إلى جمع لنحصل على:

$$I = \frac{1}{2}\int [\sin(5+3)x + \sin(5-3)x]\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\int (\sin 8x + \sin 2x)\, dx$$
$$= \frac{-1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + c$$

تمـــارين (3.3)

احسب كلاً من التكاملات الآتية:

(1) $\int \sin^5 x\,dx$

(2) $\int \cos^4 x\,dx$

(3) $\int \tan^5 x\,dx$

(4) $\int \cot^4 x\,dx$

(5) $\int \sec^5 x\,dx$

(6) $\int \csc^4 x\,dx$

(7) $\int \tan^5 x \sec x\,dx$

(8) $\int \cos^3 x \csc^3 x\,dx$

(9) $\int \frac{\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}\,dx$

(10) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$

(11) $\int \left(1+\sqrt{\cos x}\right)^2 \sin x\,dx$

(12) $\int \sin^5 x \cos^3 x\,dx$

(13) $\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx$

(14) $\int \sin^4 x \cos^2 x\,dx$

(15) $\int \sin^6 x\,dx$

(16) $\int \csc^4 \cot^4 x\,dx$

(17) $\int \tan^5 x \sec x\,dx$

(18) $\int \tan^3 x \sec^3 x\,dx$

(19) $\int_0^{\pi/4} \cos x \cos 5x\,dx$

(20) $\int \frac{\tan^2 x - 1}{\sec^2 x}\,dx$

(21) $\int \sin 4x \cos 3x\,dx$

(22) $\int \cos^7 x\,dx$

(23) $\int \cot^4 2x\,dx$

(24) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,dx$

(25) $\int \tan^3 3x\,dx$

(26) $\int \sin^7 3x\,dx$

(27) $\int \tan^3 3x \sec 3x\,dx$

(28) $\int_0^{2\pi} \cos x \sin 2x\,dx$

(29) $\int_0^{\pi} \sin 3x \sin 5x\,dx$

(30) $\int \sin x \tan x\,dx$

(31) $\int \sin 3x \cos 3x\,dx$

(32) $\int \sin 4x \sin 6x\,dx$

(33) $\int \cos 3x \cos 5x\,dx$

(34) $\int \cos 2x \cos 4x\,dx$

(4_3) طريقة التكامل بالتعويض المثلثي أو الزائدي

Integration by Trigonometric or Hyperbolic Substitution

لا نستطيع أحياناً إيجاد قيمة التكامل مباشرة إلا باستخدام تعويض مناسب بالدوال المثلثية أو الدوال الزائدية، ويطلق على هذا النوع من التكاملات (التكاملات بإزالة الجذور)، وهناك ثلاث حالات نوضحها فيما يلي:

الحالة الأولى: تكاملات تحتوي على المقدار $\sqrt{a^2-x^2}$:

في هذه الحالة نستخدم التعويض:

$$x = a\sin\theta \quad \text{or} \quad x = a\cos\theta \quad \text{or} \quad x = a\tanh\theta \quad \text{or} \quad x = a\,\text{sech}\theta$$

الحالة الثانية: تكاملات تحتوي على المقدار $\sqrt{a^2+x^2}$:

وفي هذه الحالة نستخدم التعويض:

$$x = a\tan\theta \quad \text{or} \quad x = a\cot\theta \quad \text{or} \quad x = a\sinh\theta \quad \text{or} \quad x = a\,\text{csch}\,\theta$$

الحالة الثالثة: تكاملات تحتوي على المقدار $\sqrt{x^2-a^2}$:

وفي هذه الحالة نستخدم التعويض:

$$x = a\sec\theta \quad \text{or} \quad x = a\csc\theta \quad \text{or} \quad x = a\cosh\theta \quad \text{or} \quad x = a\coth\theta$$

ويتضح استخدام هذه القواعد من خلال الأمثلة الآتية:

مثال(1): أثبت أنّ: $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$

الحل:

نستخدم التعويض:

$$x = \sin\theta$$

وعليه فإنّ:

$$dx = \cos\theta\, d\theta$$

والآن نحسب حدود التكامل الجديدة أي حدود θ (مستخدمين التعويض وحدود x) كالآتي:

عندما $x = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$.

عندما $x = 1 \Rightarrow \sin\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

وبالتالي فإنّ:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}+0\right)-(0+0)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

مثال(2): احسب التكامل $I = \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$

الحل:

نستخدم التعويض:

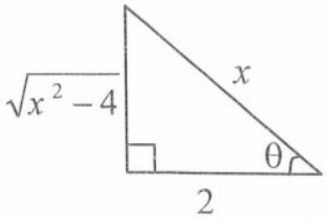
$$x = 2\sec\theta$$

وعليه فإنّ:

$$dx = 2\sec\theta\tan\theta\,d\theta$$

وبالتالي فإنّ:

$$I = \int \frac{\sqrt{4\sec^2\theta - 4}}{2\sec\theta}\, 2\sec\theta\, \tan\theta\, d\theta$$
$$= 2\int \tan^2\theta\, d\theta$$
$$= 2\int (\sec^2\theta - 1)\, d\theta$$
$$= 2(\tan\theta - \theta) + c$$



ومن المثلث القائم الزاوية نجد أنّ:

$$I = 2\left[\frac{\sqrt{x^2-4}}{2} - \sec^{-1}\frac{x}{2}\right] + c$$

أي أنّ:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\, dx = \sqrt{x^2-4} - 2\sec^{-1}\frac{x}{2} + c$$

مثال(3): أوجد قيمة التكامل $\int_0^2 \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$

الحل:

يمكن كتابة التكامل على الصورة:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x^2+4)^{3/2}}$$

وعليه نستخدم التعويض:

$$x = 2\tan\theta$$

إذاً

$$dx = 2\sec^2\theta\, d\theta$$

والآن نحسب حدود التكامل الجديدة بالنسبة إلى θ كالآتي:

عندما $x = 0 \Rightarrow 2\tan\theta = 0 \Rightarrow \tan\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$

عندما $x = 2 \Rightarrow 2\tan\theta = 2 \Rightarrow \tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

ومن ثم نجد أنّ:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x^2+4)^{3/2}} = \int_0^{\pi/4} \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{(4\tan^2\theta+4)^{3/2}} = \int_0^{\pi/4} \frac{2\sec^2\theta}{8\sec^3\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{4}\cos\theta\, d\theta = \frac{1}{4} \quad [\sin\theta]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sin\frac{\pi}{4} - \sin\theta\right] = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 0\right) = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

مثال(4): احسب التكامل $I = \int\sqrt{1+x^2}\,dx$

الحل:

باستخدام التعويض:

$$x = \sinh\theta$$

نجد أنّ:

$$dx = \cosh\theta\, d\theta$$

وعليه فإنّ:

$$I = \int\sqrt{1+\sinh^2\theta}\cosh\theta\, d\theta$$

$$= \int\sqrt{\cosh^2\theta}\cosh\theta\, d\theta$$

$$= \int\cosh^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int(1+\cosh 2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\theta + \frac{\sinh 2\theta}{4} + c$$

$$= \frac{1}{2}\theta + \frac{2\sinh\theta\cosh\theta}{4} + c$$

$$= \frac{1}{2}\sinh^{-1}x + \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + c$$

مثال(5): احسب التكامل $I = \int \sqrt{x^2 - 1}\, dx$

الحل:

باستخدام التعويض:

$$x = \cosh\theta$$

نجد أنّ:

$$dx = \sinh\theta \; d\theta$$

وعليه فإنّ:

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{\cosh^2\theta - 1}\, \sinh\theta \; d\theta \\ &= \int \sinh^2\theta \; d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int (\cosh 2\theta - 1)\, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sinh 2\theta}{2} - \theta\right] + c \\ &= \frac{2}{4}\sinh\theta\cosh\theta - \frac{1}{2}\theta + c \\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}\cosh^{-1} x + c \end{aligned}$$

مثال(6): باستخدام التعويض $x = 2\cosh\theta$ احسب التكامل $I = \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$

الحل:

بما أنّ التعويض

$$x = 2\cosh\theta$$

إذاً:

$$dx = 2\sinh\theta\, d\theta$$

وعليه فإنّ:

$$\begin{aligned}
I = \int \frac{\sqrt{4\cosh^2\theta - 4}}{2\cosh\theta} 2\sinh\theta\, d\theta &= 2\int \frac{\sinh^2\theta}{\cosh\theta} d\theta \\
&= 2\int \frac{\cosh^2\theta - 1}{\cosh\theta} d\theta \\
&= 2\int (\cosh\theta - \operatorname{sech}\theta)\, d\theta \\
&= 2\sinh\theta - 2\int \frac{2}{e^{\theta} + e^{-\theta}} d\theta \\
&= 2\sinh\theta - 4\int \frac{e^{\theta}}{1 + e^{2\theta}} d\theta \\
&= 2\sinh\theta - 4\tan^{-1}(e^{\theta}) + c \\
&= 2\frac{1}{2}\sqrt{x^2-4} - 4\tan^{-1}\left[e^{\cosh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)} \right] + c
\end{aligned}$$

وبما أنّ:

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

إذاً:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx = \sqrt{x^2-4} - 4\tan^{-1}\left[\frac{x + \sqrt{x^2-4}}{2} \right] + c$$

مثال(7): أوجد ناتج التكامل $I = \int \sqrt{x^2 + 2x + 5}\, dx$

الحل:

بإكمال المربع للمقدار تحت الجذر نحصل على:

$$I = \int \sqrt{(x+1)^2 + 4}\, dx$$

وباستخدام التعويض:

$$x + 1 = 2\sinh\theta$$

نجد أنّ:

$$dx = 2\cosh\theta\, d\theta$$

وعليه فإنّ:

$$\begin{aligned} I &= 2\int \sqrt{4\sinh^2\theta + 4}\cosh\theta\, d\theta \\ &= 4\int \cosh^2\theta\, d\theta \\ &= 2\int (1 + \cosh 2\theta)\, d\theta \\ &= 2\left[\theta + \frac{\sinh 2\theta}{2}\right] + c \\ &= 2\sinh^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{(x+1)^2 + 4} + c \end{aligned}$$

تمـــارين (4ـ3)

(1) احسب التكامل $I = \int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx$ مستخدماً التعويض:

$(a)\ x = a\tan\theta$ $(b)\ x = a\sinh\theta$

على أن يكون الناتج نفسه في التعويضين.

(2) احسب التكامل $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ مستخدماً التعويض:

$(a)\ x = a\sec\theta$ $(b)\ x = a\cosh\theta$

على أن يكون الناتج نفسه في التعويضين.

احسب كلاً من التكاملات التالية:

(3) $\int \sqrt{9 - x^2}\, dx$

(4) $\int \sqrt{4 - 9x^2}\, dx$

(5) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

(6) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4 + x^2}} dx$

(7) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 16}} dx$

(8) $\int \frac{dx}{(9 + x^2)^2}$

(9) $\int \frac{dx}{(9 - x^2)^2}$

(10) $\int \frac{dx}{(x^2 - 16)^2}$

(11) $\int \frac{dx}{(4 + x^2)^{3/2}}$

(12) $\int \frac{\sqrt{4 + x^2}}{x} dx$

(13) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} dx$

(14) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 4}}$

(15) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 - x^2}}$

(16) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 4}}$

(17) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9 - x^2}}$

(18) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 16}}$

(19) $\int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$

(20) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}\,dx$

(21) $\int \frac{e^x}{\sqrt{9-e^{2x}}}\,dx$

(22) $\int e^x\sqrt{1-e^{2x}}\,dx$

(25) $\int \frac{1}{\sqrt{16+9x^2}}\,dx$

(26) $\int \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$

(27) $\int \frac{(1-x^2)^{3/2}}{x^6}\,dx$

(28) $\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-25}}\,dx$

(29) $\int \frac{1}{x\sqrt{25x^2+16}}\,dx$

(30) $\int \frac{(4+x^2)^2}{x^3}\,dx$

(31) $\int \frac{1}{(16-x^2)^{5/2}}\,dx$

(32) $\int \frac{x^3}{\sqrt{9x^2+49}}\,dx$

(33) $\int \frac{3x-5}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

(34) $\int x\sqrt{x^2-9}\,dx$

(35) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$

(36) $\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2-3}}\,dx$

احسب كلاً من التكاملات التالية:

(37) $\int \sqrt{x^2-2x-3}\,dx$

(38) $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$

(39) $\int \sqrt{x^2+4x}\,dx$

(40) $\int \sqrt{4x^2-4x+5}\,dx$

(41) $\int \sqrt{12+4x-x^2}\,dx$

(42) $\int \sqrt{x^2-8x}\,dx$

(43) $\int \sqrt{6x-x^2}\,dx$

(44) $\int \frac{dx}{x^2+10x+30}$

(45) $\int \frac{dy}{\sqrt{20+8y-y^2}}$

(46) $\int \frac{dy}{2y^2+2y+5}$

(47) $\int \frac{t+1}{t^2-4t+8}\,dt$

(48) $\int \frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$

(49) $\int \frac{2x+3}{9x^2-12x+8}dx$

(50) $\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$

(51) $\int \frac{dx}{\sqrt{28-12x-x^2}}$

(52) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

(53) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}$

(54) $\int \frac{dt}{\sqrt{9t^2-25}}$

(55) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+9}}dx$

(56) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx$

(57) $\int \frac{e^{2x}\,dx}{(5-e^{2x}+e^{4x})^{1/2}}$

(58) $\int \frac{e^{3x}\,dx}{(e^{6x}+4e^{3x}+3)^{1/2}}$

استخدم التعويضات المثلثية لإثبات صحة الصيغ الآتية:

(59) $\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{a^2+u^2}\right| + c$

(60) $\int \frac{1}{u\sqrt{a^2+u^2}}du = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+u^2}+a}{u}\right| + c$

(61) $\int u^2\sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^4}{8}\sin^{-1}\frac{u}{a} + c$

(62) $\int \frac{1}{u^2\sqrt{a^2-u^2}}du = -\frac{1}{a^2u}\sqrt{a^2-u^2} + c$

(63) $\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}du = \sqrt{u^2-a^2} - a\cos^{-1}\frac{a}{u} + c$

(5.3) تكامل الدوال النسبية Integral of Rational Functions

نبين في هذا البند كيفية إجراء التكامل $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx$ حيث كل من $f(x)$ و $g(x)$ كثيرة حدود.

ولمكاملة الدالة النسبية يعتمد في الدرجة الأولى إلى تحويلها إلى كسور جزئية بسيطة من الشكل:

$$\frac{A}{(ax+b)^n} \quad \text{أو} \quad \frac{mx+n}{(ax^2+bx+c)^m}$$

حيث n و m عددان موجبان صحيحان. ويشترط في المقام الثاني أن يكون من الدرجة الثانية غير قابل للتحليل إلى عوامل خطية.

وقبل الخوض في هذا الموضوع نرغب في معالجة بعض الحالات الخاصة وهي:

الحالة الأولى: التكامل من الشكل: $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ حيث المقام لا يقبل جذور حقيقية $(b^2-4ac<0)$ (تعذّر تحليل المقام) في هذه الحالة نقوم بإجراء عملية إكمال المربع للمقام ثم نحصل على شكل مجموع مربعي حدين ثم نجري عملية التكامل.

مثال(1): احسب قيمة التكامل $I=\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$

الحل:

نكمل المقام إلى مربع كامل كما يلي:

$$I=\int \frac{dx}{x^2-2x+1+(5-1)}=\int \frac{dx}{(x-1)^2+4}$$

نفرض أنّ: $x-1=u$ فيكون $dx=du$

نعوض لنجد أنّ:

$$I=\int \frac{du}{u^2+4}=\frac{1}{2}\int \frac{\frac{du}{2}}{\frac{u^2}{4}+1}$$

$$=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{u}{2}+c=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)+c$$

الحالة الثانية: التكامل من الشكل $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$ حيث المقام لا يقبل جذور حقيقية $(b^2-4ac<0)$ في هذه الحالة نستخرج أولاً من البسط مشتقة المقام أي بوضع التكامل على الصورة:

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{\frac{m}{2a}(2ax+b)+(n-\frac{mb}{2a})}{ax^2+bx+c}dx$$

$$= \frac{m}{2a}\ln\left(ax^2+bx+c\right)+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

والتكامل الأخير في الطرف الأيمن يُحسب بطريقة الحالة الأولى، وبذلك يتم المطلوب.

مثال(2): احسب $I=\int \frac{2x+1}{x^2-2x+5}dx$

الحل:

$$I=\int \frac{(2x-2)+3}{x^2-2x+5}dx$$

$$=\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx+3\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$$

$$=\ln(x^2-2x+5)+\frac{3}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)+c$$

حيث عوضنا عن التكامل الأخير بقيمته من المثال السابق.

ملاحظة:

إذا كان المقام x^2+px+q في الحالتين السابقتين يقبل التحليل إلى عوامل خطية فسنرى أن كلاً من الكسرين يُحلّل إلى مجموع كسرين مقام كل منهما من الدرجة الأولى ويُنجز تكاملها بسهولة.

(1.5.3) التكامل بالتحويل إلى كسور جزئية Integration by Partial Fractions

نحدد الآن الخطوات التي نتبعها في الحالة العامة لإجراء التكامل $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx$ حيث نلجأ إلى كتابة الدالة النسبية $\frac{f(x)}{g(x)}$ على شكل مجموع لكسور جزئية.

أولاً: ننظر إلى تكوين الكسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ فإن كانت درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام فإننا نقسم البسط على المقام ويُكتب الكسر بالشكل:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{p(x)}{g(x)}$$

حيث $q(x)$ حاصل القسمة، $p(x)$ الباقي وتكون درجته أقل من درجة المقام $g(x)$ بدرجة واحدة على الأقل.

ثانياً: إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام نحلل المقام $g(x)$ إلى عوامله ويكون كل منها أما عاملاً خطياً (من الدرجة الأولى) على الصورة $(ax+b)$ أو عاملاً تربيعياً لا يقبل جذور حقيقية على الصورة (cx^2+dx+e) مع احتمال أن يتكرر احدها أو أكثر لعدة مرات. لذلك فإن $g(x)$ سيظهر على شكل حاصل ضرب مقادير من النوع $(ax+b)^n$ أو من النوع $(cx^2+dx+e)^m$ أو كليهما حيث n و m عددان طبيعيان.

ثالثاً: إذا ظهر في الصيغة النهائية التي تعبر عن $g(x)$ عوامل جميعها من الدرجة الأولى وغير مكررة مثل $(ax+b)$ في هذه الحالة كل عامل يوافقه كسر بسيط من الشكل $\frac{A}{ax+b}$ حيث A عدد ثابت يجب تعيينه.

أما إذا كانت عوامل المقام من الدرجة الأولى وبعضها مكرر في هذه الحالة كل عامل من الدرجة الأولى مكرر n من المرات مثل $(ax+b)^n$ يوافقه مجموع n كسراً بسيطاً من الشكل:

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

حيث $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ثوابت حقيقية يجب تعيينها.

رابعاً: إذا ظهر في الصيغة النهائية التي تعبر عن $g(x)$ عوامل جميعها من الدرجة الثانية مثل (cx^2+dx+e) وغير مكررة في هذه الحالة كل عامل يوافقه كسر من الشكل $\frac{Ax+B}{cx^2+dx+e}$ حيث A و B ثوابت حقيقية يجب تعينها. أما إذا كانت عوامل المقام من الدرجة الثانية وبعضها مكرر في هذه الحالة كل عامل من الدرجة الثانية مكرر m من المرات مثل $(cx^2+dx+e)^m$ يوافقه مجموع m كسر من الشكل:

$$\frac{B_1x+C_1}{cx^2+dx+e}+\frac{B_2x+C_2}{(cx^2+dx+e)^2}+\cdots+\frac{B_mx+C_m}{(cx^2+dx+e)^m}$$

حيث $B_1,B_2,\cdots,B_m$ وكذلك $C_1,C_2,\cdots,C_m$ ثوابت يجب تعيينها.

خامساً: بعد الانتهاء من كتابة الدالة النسبية $\frac{f(x)}{g(x)}$ كمجموع لكسور جزئية نقوم بإيجاد قيمة المجاهيل (الثوابت) كالآتي:

نكتب الكسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ مساوياً مجموع الكسور المرافقة لكل عامل من عوامل مقامه ونوحد المقامات ثم نحصل على متطابقة، ولإيجاد قيم المجاهيل في جميع الحالات توجد طريقتان:

الطريقة الأولى: بمقارنة معاملات قوى x في المتطابقة الناتجة، ينتج عدد من المعادلات بعدد المجاهيل، نحل هذه المعادلات فنحصل على القيم العددية للمجاهيل.

الطريقة الثانية: يمكن تعيين المجاهيل بإعطاء قيماً اختيارية في طرفي المتطابقة حتى نحصل على عدد من المعادلات بعدد المجاهيل، نحل هذه المعادلات فنحصل على القيم العددية للمجاهيل.

بعد ذلك نستطيع أن نكتب التكامل $\int\frac{f(x)}{g(x)}dx$ على شكل مجموع تكاملات من النوع:

$$\int\frac{A}{(ax+b)^n} \quad \text{أو} \quad \int\frac{Bx+C}{(cx^2+dx+e)^m}$$

وكلاهما نستطيع أن نضعه في صيغة يمكن إجراء تكاملها بسهولة.

مثال(3): احسب $\int \frac{x+1}{(x-1)(x+2)}dx$

الحل:

$\frac{x+1}{(x-1)(x+2)}$ دالة نسبية مقامها على شكل عاملين خطيين لذلك يمكن كتابتها على أنها جمع كسرين جزئيين على النحو التالي:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$$

ولكي نجد قيمة المجهولين A و B نعود ونجمع الكسرين في الطرف الأيمن لنحصل على:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

ويترتب على ذلك تحقق المتطابقة:

$$x+1\equiv A(x+2)+B(x-1)$$

والآن لإيجاد A و B نتبع إحدى الطريقتين الآتيتين:

الطريقة الأولى:

بمقارنة معاملات x والحد المطلق أي بما أن:

$$x+1\equiv (A+B)x+(2A-B)$$

فإن:

معامل x: $1=A+B$

الحد المطلق: $1=2A-B$

بحل المعادلتين نجد أنّ: $A=\frac{2}{3}$ و $B=\frac{1}{3}$

ومنها نجد أنّ:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x+2)}=\frac{2/3}{x-1}+\frac{1/3}{x+2}$$

الطريقة الثانية: بما أنّ المتطابقة صحيحة لجميع قيم x فإنه عندما نضع $x=1$ (معامل B يساوي صفر) نحصل على $A=\frac{2}{3}$ وعندما نضع $x=-2$ (معامل A يساوي صفر) نحصل على $B=\frac{1}{3}$. والآن نعود إلى حساب التكامل فنجد أن:

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x+2)}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+2}$$

$$= \frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{3}\ln|x+2| + c$$

مثال(4): احسب $\int \frac{x^3}{x^2-x-2}\,dx$

الحل:

نلاحظ أنّ الدالة النسبية $\frac{x^3}{x^2-x-2}$ فيها درجة البسط أكبر من درجة المقام لذلك نجري عملية قسمة مطولة لنحصل على:

$$\frac{x^3}{x^2-x-2} = (x+1) + \frac{3x+2}{x^2-x-2}$$

والكسر الباقي $\frac{3x+2}{x^2-x-2}$ يتحلل مقامه إلى عاملين خطيين وبذلك نستطيع تحليله إلى كسرين جزئيين أي:

$$\frac{3x+2}{x^2-x-2} = \frac{3x+2}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$$

وبعد توحيد المقامات في الطرف الأيمن نحصل على المتطابقة

$$3x+2 \equiv A(x+1) + B(x-2)$$

ولإيجاد A و B:

نضع $x=2$ نحصل على $A = \frac{8}{3}$

نضع $x=-1$ نحصل على $B = \frac{1}{3}$

وبالتالي فإنّ:

$$\frac{3x+2}{x^2-x-2} = \frac{8/3}{x-2} + \frac{1/3}{x+1}$$

كذلك

$$\frac{x^3}{x^2-x-2} = (x+1) + \frac{8/3}{x-2} + \frac{1/3}{x+1}$$

نعود الآن لحساب التكامل لنجد أنّ:

$$\int \frac{x^3}{x^2-x-2}\,dx = \int (x+1)\,dx + \frac{8}{3}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \frac{8}{3}\ln|x-2| + \frac{1}{3}|x+1| + c$$

مثال(5): أوجد $\int \frac{1}{(x^2-1)(x-2)}\,dx$

الحل:

نلاحظ أنّ مقام الدالة النسبية $\frac{1}{(x^2-1)(x-2)}$ يتحلل إلى ثلاثة عوامل خطية لا يتكرر أي منها. هذا يعني أن المكامل يظهر بشكل مجموع ثلاثة كسور جزئية على النحو التالي:

$$\frac{1}{(x^2-1)(x-2)} = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

وبعد توحيد المقامات في الطرف الأيمن نحصل على:

$$\frac{A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x-2)}$$

ومنه نحصل على المتطابقة:

$$1 \equiv A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

ولإيجاد الثوابت

نضع $x=1$ في (1) لنحصل على $A = -\frac{1}{2}$

نضع $x=-1$ في (1) لنحصل على $B = \frac{1}{6}$

نضع $x=2$ في (1) لنحصل على $C = \frac{1}{3}$

نعود الآن إلى حساب التكامل فنجد أنّ:

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-2}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{6}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\ln|x-2| + c$$

مثال(6): احسب $\int \frac{x^2+1}{(x+2)(x-1)^3}\,dx$

الحل:

الدالة النسبية في التكامل مقامها على شكل عوامل خطية أحدهما $(x-1)^3$ يتكرر ثلاث مرات لذلك نحلل الكسر إلى كسور جزئية كما يلي:

$$\frac{x^2+1}{(x+2)(x-1)^3}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}$$

نعود ونجمع الكسور الجزئية في الطرف الأيمن (بتوحيد المقامات) وتساوي بسط الكسر الناتج مع بسط الدالة النسبية فنحصل على المتطابقة:

$$x^2+1=A(x-1)^3+B(x+2)(x-1)^2+C(x+2)(x-1)+D(x+2)$$

ولإيجاد المجاهيل:

نضع $x=1$ نحصل على $D=\frac{2}{3}$

نضع $x=-2$ نحصل على $A=-\frac{5}{27}$

نضع $x=-1$ نحصل على المعادلة: $2=\frac{40}{27}+4B-2C+\frac{2}{3}$

ومنه نحصل على:

$$4B-2C=-\frac{4}{27} \quad \text{.....} \quad (1)$$

وأخيراً نضع $x=0$ نحصل على المعادلة:

$$1=\frac{5}{27}+2B-2C+\frac{4}{3}$$

$$2B-2C=-\frac{14}{27} \quad \text{.....} \quad (2)$$

بحل المعادلتين (1) ، (2) نحصل على $B=\frac{5}{27}$ وبالتعويض عن B في (2) نجد أن:

$$C=\frac{4}{9}$$

والآن نجري التكامل:

$$\int \frac{x^2+1}{(x+2)(x-1)^3}dx = -\frac{5}{27}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{5}{27}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{4}{9}\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{(x-1)^3}$$

$$= -\frac{5}{27}\ln|x+2| + \frac{5}{27}\ln|x-1| + \frac{4}{9}\frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)^2} + c$$

مثال(7): أوجد $\int \frac{dx}{x^3-1}$

الحل:

المكامل دالة نسبية يحلل مقامها إلى عامل خطي وآخر غير خطي لا يمكن تحليله إلى عوامل خطية. نحلل الكسر $\frac{1}{x^3-1}$ إلى كسور جزئية كما يلي:

$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$ بتوحيد المقامات في الطرف الأيمن

ومساواة بسط الكسر الناتج مع بسط الدالة النسبية $\frac{1}{x^3-1}$ نحصل على المتطابقة:

$$1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$$

نضع $x=1$ لنجد أنّ $A = \frac{1}{3}$

نضع $x=0$ لنجد أنّ $C = -\frac{2}{3}$

نضع $x=-1$ لنجد أنّ $1 = \frac{1}{3} - 2\left(-B - \frac{2}{3}\right)$

ومنها $B = -\frac{1}{3}$

إذن:

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}}{x^2+x+1}$$

نعود الآن إلى حساب التكامل لنجد أنّ:

$$\int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}dx$$

وباستخدام التعويض $u = x + \frac{1}{2}$ نجد أنّ:

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$$

مثال(8): احسب $\int \frac{4x+3}{x^4+3x^2+2}\,dx$

الحل:

الدالة النسبية $\frac{4x+3}{x^4+3x^2+2}$ يتحلل مقامها إلى عاملين تربيعيين غير قابلتين للتحليل لذلك نستطيع أن نكتب:

$$\frac{4x+3}{x^4+3x^2+2} = \frac{4x+3}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{x^2+2}$$

نجمع الكسرين الجزئيين في الطرف الأيمن ونساوي بسط الكسر الناتج مع بسط الدالة النسبية لنحصل على المتطابقة:

$$4x+3 = (Bx+C)(x^2+2) + (Dx+E)(x^2+2)$$

ولإيجاد الثوابت نقارن معاملات قوى x

معامل x^3: $0 = B + D$

معامل x^2: $0 = C + E$

معامل x: $4 = 2B + D$

الحد المطلق: $3 = 2C + E$

بحل المعادلات الأربع نحصل على قيم المجاهيل وهي كما يلي:

$$C = 3 \quad , \quad B = 4 \quad , \quad D = -4 \quad , \quad E = -3$$

نعود الآن لحساب التكامل لنجد أنّ:

$$\int \frac{4x+3}{x^4+3x^2+2}\,dx = \int \frac{4x+3}{x^2+1}\,dx + \int \frac{-4x-3}{x^2+2}\,dx$$

$$= 4\int \frac{x}{x^2+1}\,dx + 3\int \frac{1}{x^2+1}\,dx - 4\int \frac{x}{x^2+2}\,dx - 3\int \frac{1}{x^2+2}\,dx$$

$$= 2\ln(x^2+1) + 3\tan^{-1}x - 2\ln(x^2+2) - \frac{3}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}} + c$$

مثال(9): احسب $\int \frac{2x^3+10x}{(x^2+1)^2}\,dx$

الحل:

المقدار المكامل عبارة عن دالة نسبية مقامها عبارة عن عامل من الدرجة الثانية غير قابل للتحليل ويتكرر مرتين لذلك نستطيع تحليله إلى كسور جزئية على النحو التالي:

$$\frac{2x^3+10x}{(x^2+1)^2}=\frac{Bx+C}{(x^2+1)}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

وبعد توحيد المقامات في الطرف الأيمن نحصل على المتطابقة:

$$2x^3+10x=(Bx+C)(x^2+1)+(Dx+E)$$

ولإيجاد المجاهيل نقوم بمقارنة معاملات قوى x لنحصل على

معامل x^3: $B=2 \Leftarrow 2=B$

معامل x^2: $C=0 \Leftarrow 0=C$

معامل x: $D=8 \Leftarrow 10=B+D$

الحد المطلق: $E=0 \Leftarrow 0=C+E$

نعود الآن لحساب التكامل

$$\int \frac{2x^3+10x}{(x^2+1)^2}\,dx=\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx+\int \frac{8x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$=\ln(x^2+1)-\frac{4}{x^2+1}+c$$

مثال(10): احسب $\int \frac{dx}{x^4+4}$

الحل: نحلل المقام على النحو التالي:

$$x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-4x^2$$

$$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$$

وبالتالي نجد أنّ:

$$\frac{1}{x^4+4}=\frac{1}{(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)}$$

$$=\frac{Bx+C}{x^2-2x+2}+\frac{Dx+E}{x^2+2x+2}$$

بعد ذلك نحصل على المتطابقة:

$$1=(Bx+C)(x^2+2x+2)+(Dx+E)(x^2-2x+2)$$

نقارن معاملات قوى x لنحصل على:

معامل x^3 : $0=B+D$

معامل x^2 : $0=2B+C-2D+E$

معامل x : $0=2B+2C+2D-2E$

الحد المطلق: $2C+2E=1$

وبحل المعادلات الناتجة نحصل على:

$$D=\frac{1}{8}\ ,\ C=\frac{1}{4}\ ,\ B=-\frac{1}{8}\ ,\ E=\frac{1}{4}$$

والآن نحسب التكامل

$$\int\frac{dx}{x^4+4}=\int\frac{-\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}}{x^2-2x+2}dx+\int\frac{\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}}{x^2+2x+2}dx$$

$$=-\frac{1}{8}\int\frac{x-2}{x^2-2x+2}dx+\frac{1}{8}\int\frac{x+2}{x^2+2x+2}dx$$

$$=-\frac{1}{8}\int\frac{x-2}{(x-1)^2+1}dx+\frac{1}{8}\int\frac{x+2}{(x+1)^2+1}dx$$

وبوضع $u=x-1$ في التكامل الأول و $v=x+1$ في التكامل الثاني نحصل على:

$$\int\frac{dx}{x^4+4}=-\frac{1}{8}\int\frac{u-1}{u^2+1}du+\frac{1}{8}\int\frac{v+1}{v^2+1}dv$$

$$=-\frac{1}{16}\ln(u^2+1)+\frac{1}{8}\tan^{-1}u+\frac{1}{16}\ln(v^2+1)+\frac{1}{8}\tan^{-1}v+c$$

$$=-\frac{1}{16}\ln\left(\frac{1}{(x-1)^2}+1\right)+\frac{1}{8}\tan^{-1}(x-1)+\frac{1}{16}\ln\left(\frac{1}{(x+1)^2}+1\right)$$

$$+\frac{1}{8}\tan^{-1}(x+1)+c$$

$$=\frac{1}{16}\ln\left(\frac{\frac{1}{(x+1)^2}+1}{\frac{1}{(x-1)^2}+1}\right)+\frac{1}{8}\tan^{-1}(x-1)+\frac{1}{8}\tan^{-1}(x+1)+c$$

$$=\frac{1}{16}\ln\left(\frac{(x^2+2x+2)(x-1)^2}{(x^2-2x+2)(x+1)^2}\right)+\frac{1}{8}\tan^{-1}(x-1)+\frac{1}{8}\tan^{-1}(x+1)+c$$

تمـــارين (5_3)

احسب كلاً من التكاملات التالية:

(1) $\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x+4)}$

(2) $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)}$

(3) $\int \frac{dx}{(x-a)(b-x)}$

(4) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

(5) $\int \frac{2x}{x^2-5x+6}dx$

(6) $\int \frac{x+1}{(x+2)(x^2+4)}dx$

(7) $\int \frac{(x+2)}{(x+3)(x^2+1)}dx$

(8) $\int \frac{dx}{(x^2-4)(x^2-9)}$

(9) $\int \frac{x}{(x^2-4)(x^2-9)}dx$

(10) $\int \frac{dx}{x^4-16}$

(11) $\int \frac{x}{x^4-81}dx$

(12) $\int \frac{2x-1}{x^2-6x+13}dx$

(13) $\int \frac{1}{(x+1)^2+4}dx$

(14) $\int \frac{1}{x^2-4x+8}dx$

(15) $\int \frac{x+5}{9x^2+6x+17}dx$

(16) $\int \frac{1}{2x^2-3x+9}dx$

(17) $\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+x+1}dx$

(18) $\int \frac{4x^2+13x+9}{x^3+2x^2-3x}dx$

(19) $\int \frac{3x^3-18x^2+29x-4}{(x+1)(x-2)^3}dx$

(20) $\int \frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}dx$

(21) $\int \frac{5x^3-3x^2+7x-3}{(x^2+1)^2}dx$

(22) $\int \frac{37-11x}{(x+1)(x-2)(x-3)}dx$

(23) $\int \frac{x^3+3x-2}{x^2-x}dx$

(24) $\int \frac{x^3+6x^2+3x+16}{x^3+4x}dx$

(25) $\int \frac{2x^2+7x}{x^2+6x+9}dx$

(26) $\int \frac{x^4+2x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}dx$

(27) $\int \frac{x^3+3x^2+3x+63}{(x^2-9)^2}dx$

(28) $\int \frac{10x^2+9x+1}{2x^3+3x^2+x}dx$

(29) $\int \frac{x^3}{x^2+2x+1}dx$

(30) $\int \frac{2x^2+3}{x^3-2x^2+x}dx$

(31) $\int \frac{4x}{(x-1)(x^2+1)}dx$

(32) $\int \frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}dx$

(33) $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$

(34) $\int \frac{4}{x(x^2+4)}dx$

(35) $\int \frac{dx}{x^4-1}$

(36) $\int \frac{x^4}{(x+1)^3}dx$

(37) $\int \frac{1+x^4}{x(x^2-1)}dx$