

OBLICZANIE WARTOŚCI ŚREDNIEJ PROMIENIA WODZĄCEGO WAŻONEGO CZASEM

Promień wodzący w ruchu keplerowskim wyraża się wzorem

$$r = a(1 - e \cos E)$$

gdzie

r	promień wodzący
a	wielka półoś
e	mimośród
E	anomalja mimośrodowa

Natomiast zależność między anomalją mimośradową a czasem

$$\frac{2\pi}{T}t = E - e \sin E$$

gdzie

T	okres
t	czas

Zróżniczkujemy obustronnie powyższe (może się przyda:)

$$\frac{2\pi}{T}dt = (1 - e \cos E) dE$$

Zatem

$$\frac{dt}{dE} = (1 - e \cos E) \frac{T}{2\pi}$$

Wróćmy do liczenia średniej ważonej wzór znany „zkądinond”

$$\langle r_t \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} r(E(t)) \frac{dt}{dE} dE$$

wstawiamy do całki dwa pierwsze równania

$$\langle r_t \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} a(1 - e \cos E)(1 - e \cos E) \frac{T}{2\pi} dE$$

$$\langle r_t \rangle = \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - e \cos E)^2 dE$$

$$\langle r_t \rangle = \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 - 2e \cos E + e^2 \cos^2 E dE$$

$$\langle r_t \rangle = \frac{a}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} dE - 2e \int_0^{2\pi} \cos E dE + e^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 E dE \right)$$

Wartości kolejnych całek (są trywialne więc nie będę ich rozpisywał)

$$I_1 = 2\pi$$

$$I_2 = 0$$

$$I_3 = \pi$$

wstawiając powyższe wartości do równania na średnią

$$\langle r_t \rangle = \frac{a}{2\pi} (2\pi + e^2 \pi)$$

$$\langle r_t \rangle = a \left(1 + \frac{e^2}{2} \right)$$