Marcin Nasiłowski

Rozpraszanie Rayleigha

Załóżmy że elektron jest jednowymiarowym oscylatorem harmonicznym. Równanie Newtona dla niego ma zatem postać

$$m\ddot{x}=-m\omega_0^2 x-qE_0\sin(\omega t)$$

Jego rozwiązaniem jest

$$x=A\sin(\omega t)$$

wstawiając to do równania różniczkowego otrzymujemy

$$-mA\omega^{2\sin}(\omega t)=-mA\omega_0^{2\sin}(\omega t)-qE_0\sin(\omega t)$$

Dzieląc przez msin(ωt) dostajemy

$$A(\omega^2-\omega_0^2)=qE_0$$

$$A=\frac{qE}{m(\omega^2-\omega_0^2)}$$

zatem

$$x=\frac{qE_0}{m(\omega^2-\omega_0^2)}\sin(\omega t)$$

moment dipolowy

$$p=qx=\frac{q^2E_0}{m(\omega^2-\omega_0^2)}\sin(\omega t)=p_0\sin(\omega t)$$

czyli

$$p_0=\frac{q^2E_0}{m(\omega^2-\omega_0^2)}$$

Policzmy teraz wektor Pointinga

$$S=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$$

$$S=\frac{1}{c\,\mu_0}E_0^2$$

$$S=\varepsilon_0 cE_0^2$$

Jego średnia wartość

$$\langle s\rangle=\frac{1}{2}\varepsilon_0 cE_0^2$$

Moc promieniowania dipola jest opisana wzorem

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{\omega^4p_0^2}{32\pi^2\varepsilon_0c^3}\sin^2(\theta)$$

wstawiając wyznaczone wcześniej p_0

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{\omega^4\dfrac{q^4E_0^2}{m^2(\omega^2-\omega_0^2)^2}}{32\pi^2\varepsilon_0c^3}\sin^2(\theta)$$

i trochę uładniając dostajemy

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{\omega^4q^4E_0^2\sin^2(\theta)}{(\omega^2-\omega_0^2)^2\,32\pi^2\varepsilon_0c^3}$$

Różniczkowy przekrój czynny wynosi

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{dP}{d\Omega}\frac{1}{\langle S\rangle}$$

wyrażając przez bardziej znane wartości

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\omega^4 q^4 E_0^2 \sin^2(\theta)}{m^2(\omega^2-\omega_0^2)^2 32\pi^2 \varepsilon_0 c^3}\frac{2}{\varepsilon_0 c E_0^2}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\omega^4 q^4 \sin^2(\theta)}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 16\pi^2 \varepsilon_0^2 m^2 c^4}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\omega^4 \sin^2(\theta)}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}\frac{q^4}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 m^2 c^4}$$

„Zauważamy", że drugi człon po prawej stronie jest dokładnie równy kwadratowi klasycznego promienia elektronu

$$\frac{q^4}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 m^2 c^4}=r^2=kwadrat\ klasycznego\ promienia\ elektronu$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\omega^4 r^2 \sin^2(\theta)}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}$$

$$d\sigma=\frac{\omega^4 r^2 \sin^2(\theta)}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}d\Omega$$

$$\sigma=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{\omega^4 r^2 \sin^3(\theta)}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}d\theta$$

$$\sigma=2\pi\frac{\omega^4 r^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}\int_0^{\pi}\sin^3(\theta)\,d\theta$$

rozważmy teraz tylko powyższą całkę

$$I=\int_0^{\pi}\sin^3(\theta)\,d\theta$$

$$I=\int_0^{\pi}\sin(\theta)(1-\cos^2(\theta))\,d\theta$$

$$I=\int_0^{\pi}\sin(\theta)\,d\theta-\int_0^{\pi}\sin(\theta)\cos^2(\theta)\,d\theta$$

$$I=-(-1-1)-\frac{1}{3}(-1-1)=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$$

wracając do przekroju czynnego

$$\sigma=\frac{16\pi}{3}\frac{\omega^4 r^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}$$

Dla $\omega\gg\omega_0$

$$\sigma=\frac{16\pi}{3}r^2$$

Dla częstości fotonu znacznie większych od częstości drgań elektronu rozpraszanie jest stałe

Dla $\omega\ll\omega_0$

$$\sigma=\frac{16\pi}{3}\frac{\omega^4 r^2}{\omega_0^4}=C\,\omega^4\propto\frac{1}{\lambda^4}$$

Dla częstości fotonu znacznie mniejszych od częstości drgań elektronu rozpraszanie jest proporcjonalne do λ^{-4} .Co jest zgodne z tym co skądinąd wiemy na temat rozpraszania Rayleigha.