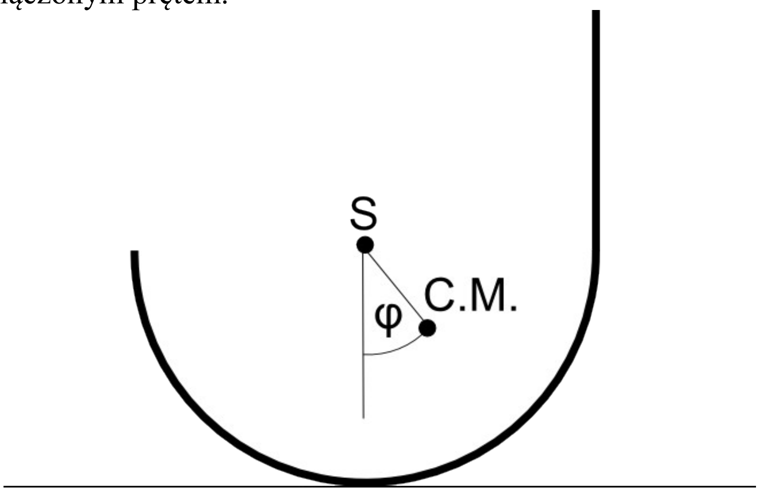
Marcin Nasiłowski

Zad. 18 Półrura z dołączonym prętem.



Początek układu znajduje się w środku walca.

Środek masy dołączonego prostokąta

$$C.M._p=(0\,;R\,;0{,}5\,R)$$

Środek masy półrury:

$$X_{C.M.R.}=0$$
$$Y_{C.M.R.}=0$$
$$Z_{C.M.R.}=\frac{-\int\limits_{-0{,}5l}^{0{,}5l}\rho dx\int\limits_{-0{,}5\pi}^{0{,}5\pi}R^2 cos\varphi\, d\varphi}{\int\limits_{-0{,}5l}^{0{,}5l}\rho dx\int\limits_{-0{,}5\pi}^{0{,}5\pi}R d\varphi}$$
$$Z_{C.M.R.}=\frac{-R}{\pi}\int\limits_{-0{,}5\pi}^{0{,}5\pi}cos\varphi\, d\varphi$$
$$Z_{C.M.R.}=\frac{-2\mathrm{R}}{\pi}$$
$$C.M._R=(0\,;0\,;\frac{2\mathrm{R}}{\pi})$$

Środek masy całości:

$$X_{C.M.}=0$$
$$Y_{C.M.}=\frac{R\cdot\rho lR}{\rho lR\pi+\rho lR}=\frac{R}{\pi+1}$$
$$Z_{C.M.}=\frac{0{,}5\,R\cdot\rho lR-\frac{2\mathrm{R}}{\pi}\cdot\rho lR\pi}{\rho lR+\rho lR\pi}=\frac{0{,}5\,R-2\mathrm{R}}{1+\pi}$$
$$Z_{C.M.}=\frac{-3\mathrm{R}}{2(1+\pi)}$$
$$C.M.=(0\,;\frac{R}{1+\pi}\,;-\frac{3\mathrm{R}}{2(1+\pi)})$$

Moment bezwładności prostokąta

$$I_P=\int\limits_{-0{,}5l}^{0{,}5l}dx\int\limits_{0}^{R}\rho(R^2+z^2)dz$$
$$I_P=l\rho(R^3+\frac{1}{3}R^3)$$
$$I_P=l\rho\frac{4}{3}R^3$$

Moment bezwładności półrury

$$I_P = \int_{-0,5l}^{0,5l} dx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho R^3 d\varphi$$

$$I_P = lR^3 \rho\pi$$

Moment bezwładności całości

$$I = l\rho R^3 (\pi + \frac{4}{3})$$

Energia Kinetyczna

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2$$

$$T = \frac{1}{2} l\rho R^3 (\pi + \frac{4}{3}) \dot{\varphi}^2$$

Energia potencjalna

$$V = Mg(R - R_{C.M.} cos\varphi)$$

$$V = Mg(R - \frac{R}{1+\pi}\sqrt{\frac{13}{4}} cos\varphi)$$

Lagrangian

$$L = \frac{1}{2} l\rho R^3 (\pi + \frac{4}{3}) \dot{\varphi}^2 - Mg(R - \frac{R}{1+\pi}\sqrt{\frac{13}{4}} cos\varphi)$$

Kılka pochodnych

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}} = I \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}} = I \ddot{\varphi}^2$$

$$\frac{\delta L}{\delta \varphi} = -MgR_{C.M.} sin\varphi$$

Równanie ruchu

$$I \ddot{\varphi}^2 + MgR_{C.M.} Sin\varphi = 0$$

Położenie równowagi trwałej

$$\varphi = 0$$

Równanie ruchu w przybliżeniu małych drgań ma postać

$$I \ddot{\varphi}^2 + MgR_{C.M.} \Phi = 0$$

I jest to równanie oscylatora harmonicznego drgającego z częstotliwością

$$\omega = \sqrt{\frac{MgR_{C.M.}}{I}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{l\rho R(\pi+1)\frac{gR}{1+\pi}\sqrt{\frac{13}{4}}}{l\rho R^3 (\pi + \frac{4}{3})}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g\sqrt{\frac{13}{4}}}{R(\pi + \frac{4}{3})}}$$