

Wyznacz masę gromady kulistej znajdującej się w odległości $d = 10\text{kpc}$, dla której z obserwacji określono średni promień kątowy $\langle \alpha \rangle = 5'$, i rozkład prędkości radialnych względem środka gromady, dla którego $\sqrt{\langle V_r^2 \rangle} = 8\text{km/s}$

Zacznijmy od twierdzenia o wirale

$$2\langle E_K \rangle = n\langle E_P \rangle$$

Zastosowane w przypadku „grawitacyjnym” daje zależność

$$2\langle V^2 \rangle \langle r \rangle = GM$$

W zadaniu nie mamy jednak podanej średniej prędkości kwadratowej względem środka gromady $\langle V^2 \rangle$, oraz średniej odległości od środka $\langle r \rangle$.

Z prostych rozważań geometrycznych wynika następująca zależność między promieniem kątowym α odległością d i rzutem promienia na sferę niebieską ρ .

$$\langle \rho \rangle = d \langle \alpha \rangle$$

wiemy również, że:

$$\langle \rho \rangle = \frac{\pi}{4} \langle r \rangle$$

$$\langle V_r^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle V^2 \rangle$$

wrzucając powyższe zależności do twierdzenia o wirale otrzymujemy

$$GM = 3\langle V_r^2 \rangle \frac{4}{\pi} \langle \rho \rangle$$

$$GM = \frac{24}{\pi} \langle V_r^2 \rangle \langle \alpha \rangle d$$

Dzieląc obustronnie przez G dostajemy równanie na masę

$$M = \frac{24d}{\pi G} \langle V_r^2 \rangle \langle \alpha \rangle$$

Przypomnijmy dane:

$$d = 10\text{kpc} = 30,9 \cdot 10^{18} \text{m}$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$$

$$\langle V_r^2 \rangle = 64 \frac{\text{km}^2}{\text{s}^2} = 64 \cdot 10^6 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

$$\langle \alpha \rangle = 5' = \left(\frac{1}{12}\right)^\circ = \frac{\pi}{(12 \cdot 180)}$$

wstawiając liczbowe wartości do równania na masę otrzymujemy:

$$M = \frac{32 \cdot 30,9}{45 \cdot 6,67} 10^{35} \text{kg} = 3,29 \dots \cdot 10^{35} \text{kg} = 1,65 \dots \cdot 10^5 M_\odot$$

Gromady kuliste zawierają zazwyczaj od stu tysięcy do miliona gwiazd. Wiedza ta daje mi podstawę sądzić, że wynik jest poprawny:)