Marcin Nasiłowski
Całki ruchu dla N ciał
na podstawie „Celestial Mechanik” W. Smart

Energia potencjalna układu mas wynosi

$$U = G m_i \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{\Delta_{ij}}$$

Gdzie:
Δ_ij odległość między ciałem i a ciałem j na przykład dla i=1 i j=2

$$\Delta_{12}^2 = (\xi_2^2 - \xi_1^2)^2 + (\eta_2^2 - \eta_1^2)^2 + (\zeta_2^2 - \zeta_1^2)^2$$

m masa ciała
G stała grawitacji
Policzmy pochodną potencjału po jednej ze współrzędnej ciała i

$$\frac{dU}{d\xi_i} = G m_i \sum_{j=1}^{n} m_j \frac{\xi_j - \xi_i}{\Delta_{ij}^3}$$

Sumując teraz powyższy wynik dla wszystkich ciał otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{dU}{d\xi_i} = G \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_i m_j \frac{\xi_j - \xi_i}{\Delta_{ij}^3}$$

Z symetrii widać, że powyższa podwójna suma musi być równa zeru. Skądinąd wiemy, że powyższa suma powinna być co do znaku równa sumie sił w kierunku ξ. Zatem możemy napisać

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\xi} = 0$$

Całkując

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\xi} = \alpha_1$$

I jeszcze raz całkując

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \xi = \alpha_1 t + a_2$$

Niech X, Y, Z będą odpowiednimi współrzędnymi centrum masy a M całkowitą masą układu wtedy z przedostatniego równania dostajemy

$$M \dot{X} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\xi} = \alpha_1$$

Wykonując analogiczne obliczenia dla η ι ζ otrzymujemy 6 całek ruchu związanych z ruchem c.m.

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \xi = \alpha_1 t + a_2$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \eta = \beta_1 t + \beta_2$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \zeta = \gamma_1 t + \gamma_2$$

$$M \dot{X} = \alpha_1$$

$$M \dot{Y} = \alpha_1$$

$$M \dot{Z} = \alpha_1$$

Policzmy teraz następujące wyrażenie

$$\xi_i \frac{\delta U}{\delta \eta_i} - \eta_i \frac{\delta U}{\delta \xi_i} = G m_i \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{\Delta_{ij}^3} (\eta_i \xi_j - \xi_i \eta_j)$$

zsumujmy po wszystkich i

$$\sum_{i=1}^{n}(\xi_i \frac{\delta U}{\delta \eta_i} - \eta_i \frac{\delta U}{\delta \xi_i}) = G \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_j \frac{m_i}{\Delta_{ij}^3} (\eta_i \xi_j - \xi_i \eta_j)$$

Kolejny raz z symetrii widać, że prawa strona tego równania jest równa zero.

$$\sum_{i=1}^{n}(\xi_i m_i \ddot{\eta}_i - \eta_i m_i \ddot{\xi}_i) = 0$$

Całkując

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (\xi_i \dot{\eta}_i - \eta_i \dot{\xi}_i) = c$$

Podobnie możemy otrzymać kolejne dwie całki

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (\eta_i \dot{\zeta}_i - \eta_i \dot{\zeta}_i) = c$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (\zeta_i \dot{\xi}_i - \xi_i \dot{\zeta}_i) = c$$

Są to tak zwane całki powierzchniowe:)

Ostatnią, dziesiątą jest całka Energii:

$$T - U = const.$$