Marcin Nasiłowski

OBLICZANIE WARTOŚCI ŚREDNIEJ PROMIENIA WODZĄCEGO WAŻONEGO ANOMALIĄ PRAWDZIWĄ

Promień w ruchu keplerowskim wynosi

$$r=\frac{p}{1+e\cos v}$$

gdzie

$p=a\left(1-e^2\right)$

v	anomalia prawdziwa
e	mimośród
a	wielka półoś

Wartość średniej ważonej wynosi

$$<r_v>=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r(v)\,dv$$

wstawiając podane powyżej wyrażenie na promień

$$<r_v>=\frac{p}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dv}{1+e\cos v}$$

zastosujmy podstawienie

$$t=tg\left(v/2\right) \qquad v=2\,arctg\left(t\right) \qquad dv=2\frac{dt}{1+t^2} \qquad cosv=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

zatem

$$<r_v>=\frac{p}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{1+e\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

Upraszczając

$$<r_v>=\frac{2\mathrm{p}}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2+e-e\,t^2}$$

$$<r_v>=\frac{2\mathrm{p}}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{dt}{\left(1+e\right)+\left(1-e\right)t^2}$$

$$<r_v>=\frac{2\mathrm{p}}{\pi\left(1+e\right)}\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+\frac{1-e}{1+e}t^2}$$

Dokonując kolejnego podstawienia

$$x=\sqrt{\frac{1-e}{1+t}}\,t$$

$$\sqrt{\frac{1+e}{1-t}}\,dx=dt$$

otrzymujemy

$$<r_v>=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\frac{2\mathrm{p}}{\pi\left(1+e\right)}\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

obliczając całkę i trochę przekształcając

$$<r_v>=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}=a\sqrt{1-e^2}$$