

Matemática de Portafolios según H. Markowitz

La teoría de portafolios

- Pionera en formalizar matemáticamente el concepto de diversificación de inversiones.
- Rendimiento esperado de un portafolio y su riesgo.
- Minimizar el riesgo para un nivel de rendimiento dado, o maximizar el rendimiento para un nivel de riesgo aceptado.

Conceptos fundamentales:

1. Riesgo
2. Rendimiento

Rendimiento esperado de un activo y de un portafolio

Rendimiento:

- Activo individual: Cambio en su valor, respecto a su valor inicial.
- Rendimiento esperado de portafolio:

$$E(R_p) = \sum_i w_i E(R_i)$$

Forma Matricial:

$$E(R_p) = w' E(r)$$

Riesgo (Varianza o Volatilidad) de un portafolio

Medido comunmente como la varianza

$$\sigma^2$$

o la desviación estándar

$$\sigma$$

de sus rendimientos.

Covarianza y Correlación

$$\sigma_{ij}$$

Mide la forma en que 2 activos diferentes se mueven juntos.

- (+) = Misma dirección, mayor riesgo
- (-) = Distinta dirección, menor riesgo total

$$\rho_{ij}$$

Estandariza la covarianza. Valor entre:

- -1: No beneficio.
- 1: En teoría, crear un portafolio sin riesgo.

Formulación Matemática

$$\sigma_p^2 = w'Vw$$

Varianza de un portafolio con n activos en notación matricial.

$$\sigma_p^2 = w'Vw \quad \text{Varianza del portafolio}$$

w	Vector columna de ponderaciones de los activos
w'	Vector traspuesto de las ponderaciones
V	Matriz de varianza-covarianza de rendimientos de activos

El Problema de Markowitz y la Frontera Eficiente

Minimizar

$$w'Vw \text{ subject to } w'\Sigma w_i = 1$$

Un inversor racional y averso al riesgo elegirá un portafolio que se encuentre sobre la Frontera Eficiente.



Valor en Riesgo (VaR)

Medida estadística que cuantifica la pérdida máxima esperada en periodo de tiempo específico con nivel de confianza determinado.

Formalmente:

$$P(P_t - P_0 \leq -VAR) = 1 - c$$

Donde:

P_0

valor inicial del portafolio

P_t

valor al tiempo t

c

nivel de confianza

Metodología para el cálculo de VaR

Los 3 métodos para el cálculo de VaR:

- Modelo Paramétrico
- Modelo Histórico
- Simulaciones

Modelo Paramétrico

Método derivado directamente del modelo de Markowitz. Se asume un modelo normal, por lo tanto:

Sea w el vector de pesos relativos de una cartera:

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$$

Sea r el vector de rendimientos:

$$r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$$

Sea V la matriz simétrica de $n \times n$ de varianzas y covarianzas de rendimientos.

Sea x la cantidad invertida en cada activo:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Y W la cantidad total invertida:

$$W = \sum_{i=1}^n x_i$$

De modo que:

$$w_i = \frac{x_i}{W}$$

Dada la definición anterior, la varianza por unidad:

$$\sigma_p^2 = w^t V w$$

Por lo tanto, en términos de la inversión total W:

$$\sigma_p^2 W^2 = x^t V x$$

Al asumir que el rendimiento es normal $r \sim N(\mu, V)$, la distribución de la cartera es:

$$r_c \sim N(\mu_c, \sigma_c^2), \mu_c = w^T \mu$$

Definimos la pérdida como:

$$L = W - W(1 + r_c) = -Wr_c$$

La transformación lineal de una variable normal $Y=aX+b$ es otra variable aleatoria normalmente distribuida de la forma $Y \sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$. Podemos definir la distribución de L como:

$$L \sim N(-W\mu_c, W^2\sigma_c^2)$$

Esto permite definir VaR a nivel de significancia p como cuartil superior de L con probabilidad p :

$$VaR_p = F_L^{-1}(1 - p)$$

Donde:

$$F_p^{-1}$$

es función inversa de distribución acumulada de pérdidas. Aplicada a un valor de probabilidad, devuelve valor de pérdida para dicha probabilidad de la FDA.

Ahora, para una normal de la forma

$$Y \sim N(m, s^2)$$

se tiene que:

$$F_Y^{-1}(1 - p) = m + s \cdot z_{1-p}$$

\Rightarrow

$$VaR_p = -W\mu_c + z_{1-p}W\sigma_c$$

Pero

$$\mu_c = W^T \mu$$

y

$$\sigma_c = \sqrt{w^t V w}$$

Por lo tanto, usando la suposición habitual (tiempo ≤ 1 día, media=0):

$\mu=0$. Reescribimos:

$$\begin{aligned} VaR_p &= z_{1-p}W\sqrt{w^t V w} \\ &= z_{1-p}\sqrt{x^t V x} \end{aligned}$$

EJEMPLO TEORIA DE PORTAFOLIO DE MARKOWITZ

Riesgo y retorno esperado

El cálculo del rendimiento esperado de una acción esta dado por su esperanza matemática de acuerdo con el modelo de Markowitz.

Simulando posibles escenarios futuros para la acción de Qualitas (Q.MX):

Qualitas Controladora, SAB De CV (Q.MX)

Economía	Precio	Probabilidad	Rendimiento
Auge	\$230.00	25%	41.59%
Esperado	\$191.90	50%	18.14%
Recesión	\$156.00	25%	-3.95%

Retorno esperado

El rendimiento esperado para Qualitas es entonces:

$$E(R_Q) = \sum_{i=0}^n p * X_i$$

$$E(R_Q) = (0.25) * (0.4159) + (0.50) * (0.1814) + (0.25) * (-0.0395)$$

$$E(R_Q) = 0.1848$$

Riesgo esperado

La desviación estándar vista bajo este modelo, es el riesgo del título a evaluar.

$$d_Q = \sigma_Q = 0.1610$$

Para una cartera de dos activos:

Para efectos de este ejemplo agregaremos los siguientes datos de la acción del Banco del Bajío (BBAJIOO.MX):

- $E(R_B) = 0.2611$
- $\sigma_B^2 = 0.0806$
- $\sigma_B = 0.2839$
- $Cov(Q, B) = 0.02057$

Fórmula de Markowitz (% optimo)

Utilizando la formula de markowitz se puede llegar al porcentaje(peso) exacto a invertir en cada activo para que el riesgo de la cartera de dos títulos sea el mínimo:

$$w_Q = \frac{\sigma_B^2 - \text{Cov}(Q, B)}{\sigma_Q^2 + \sigma_B^2 - 2 \cdot \text{Cov}(Q, B)}$$

Sustituyendo nuestros valores tenemos que:

$$w_Q = 0.918115$$

$$w_B = 1 - w_Q = 0.081843$$

Por lo tanto, para esta cartera, debemos invertir mas del 90% de nuestro capital en acciones de Qualitas.

Ahora, para los demás valores esperados de nuestra cartera de dos activos:

- $E(R_p) = w_Q * E(R_Q) + w_B * E(R_B)$

$$E(R_p) = (0.918115) * (0.1848) + (0.081843) * (0.2611)$$

$$E(R_p) = 0.191036$$

$$\sigma_p^2 = w_Q^2 \sigma_Q^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2w_Q w_B \text{Cov}(Q, B)$$

$$\sigma_p^2 = (0.842935) * (0.025921) + (0.006698) * (0.0806) + 2 * (0.918115) * (0.08184)$$

$$\sigma_p^2 = 0.02547$$

$$\sigma_p = \sqrt{0.02547} = 0.159593$$

Esto es que el riesgo de esta cartera es de 15.95% aproximadamente, valor que cimple con la hipotesis de Markowitz de que diversificar con dos activos de diferente correlación nos lleva a un menor riesgo de cartera que si invirtieramos en cada acción de forma independiente.

$$\sigma_p < \sigma_Q < \sigma_B$$

Ejemplos del cálculo del VaR de un portafolio

- A fines de ilustración, se calculara el VaR parametrico de un portafolio comupuesto por las acciones de Grupo México, Televisa, CEMEX y Kimberly-Clark.

Resumen estadistico de cada acción							
Infomración del 2024-10-01 al 2025-10-01							
Acción	Media	Mediana	Desviación Estándar	Percentil 5%	Percentil 95%	Máximo	
GMEXICOB.MX	0.13	0.22	1.79	-2.54	2.88	6.23	
TLEVISACPO.MX	0.00	0.00	2.94	-4.81	4.31	13.37	
CEMEXCPO.MX	0.15	0.19	2.16	-3.33	3.29	12.20	
KIMBERA.MX	0.07	0.07	1.47	-2.54	2.39	5.16	
Cifras en porcentaje(%)							

Cálculo del portafolio de mínima varianza

```
```\r}\n\n# Enfoque de programación cuadrática\n\n# mu = colMeans(Datos$tablaRendimientosCont[, -1])\n# sigma = cov(Datos$tablaRendimientosCont[, -1])\n#\n#\n# Dmat <- 2*sigma\n# dvec <- rep(0, ncol(sigma))\n#\n# Amat <- cbind(rep(1, ncol(sigma)), diag(ncol(sigma)))\n# bvec <- c(1, rep(0, ncol(sigma)))\n#\n# res <- solve.QP(Dmat, dvec, Amat, bvec, meq=1)\n#\n# w = res$solution\n#\n#\n# r_port = sum(w * mu)\n# sigma_port = sqrt(t(w) %*% sigma %*% w)\n# sigma_port = sigma_port[1,1]\n|
```

## Resultados

- De aquí, los pesos que el modelo arroja los pesos adecuados que minimizan la varianza son:  
 $w = (0.2628, 0.0751, 0.1658, 0.4962)$
- Que desenvoca en un rendimiento esperado de  $r_{port} = \sum w_i * E[r_i] = 0.0922$  y una desviación estándar de  $\sigma_{port} = \sqrt{w' \Sigma w} = 1.1399$ , siendo  $\Sigma$  la matriz de covarianza.

## Cálculo del VaR paramétrico del portafolio

- Con estos elementos procederemos al calculo del VaR paramétrico a un nivel de confianza del 95% y un horizonte de 10 días, de una suma invertida de \$ 15,000.

$$VaR_{parametrico} = -(q_{1-\alpha} * \sigma_{port} * \sqrt{h}) * Valor\ invertido$$

$$VaR_{parametrico} = -(1.645 * 0.0114 * \sqrt{10}) * 15,000 = 889.3968$$

Speaker notes