Theoretische Physik - Übungsblatt 2

A. Kanz, R. Müller, M. Nietschmann, M. Böhl

1 Flussintegral bei radialer Strömung

2 Kurvenintegral bei Scherströmung

Gegeben ist das Vektorfeld $v(r) = (0, x, 0)$ für $r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Sei nun $k \in (0, \infty)$ und $Q(k) = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid \max\{x, y\} \leq \frac{k}{2}\}$ das Quadrat mit Seitenlänge k und dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt. Um den den Rand des Quadrats zu parametrisieren, definieren wir zunächst $\gamma_i : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= (1, 2t - 1, 0) \\
\gamma_2(t) &= (1 - 2t, 1, 0) \\
\gamma_3(t) &= (-1, 1 - 2t, 0) \\
\gamma_4(t) &= (2t - 1, -1, 0).
\end{aligned}$$

Dann parametrisiert

$$\gamma_k : [0, 4] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \begin{cases} \frac{k}{2}\gamma_1(t) & , t \in [0, 1) \\ \frac{k}{2}\gamma_2(t - 1) & , t \in [1, 2) \\ \frac{k}{2}\gamma_3(t - 2) & , t \in [2, 3) \\ \frac{k}{2}\gamma_4(t - 3) & , t \in [3, 4] \end{cases}$$

den Rand des Quadrates $Q(k)$. Nun können wir das Kurvenintegral berechnen:

$$\begin{aligned}
\oint_{\gamma_k} v(r) \cdot dr &= \int_0^4 \langle v(\gamma_k(t)), \dot{\gamma}_k(t) \rangle dt \\
&= \frac{k^2}{4} \left(\int_0^1 \langle (0, 1, 0), (0, 2, 0) \rangle dt + \int_0^1 \langle (0, 1 - 2t, 0), (-2, 0, 0) \rangle dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 \langle (0, -1, 0), (0, -2, 0) \rangle dt + \int_0^1 \langle (0, 2t - 1, 0), (2, 0, 0) \rangle dt \right) \\
&= 2 \cdot \frac{k^2}{4} \int_0^1 2dt = k^2.
\end{aligned}$$

Die Rotation berechnet sich als $\operatorname{rot} v(r) = (0, 0, 1)$.

3 Kurvenintegral eines azimutalen Geschwindigkeitsfeldes

Gegeben ist das Vektorfelt $v(r) = (-y, x, 0)$ für $r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Sei $R \in (0, \infty)$ und $K(R)$ der konzentrische Kreis mit Radius R in der Ebene $z = 0$. Der Rand von $K(R)$ wird von der Kurve

$$\gamma_R : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \varphi \longmapsto R(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$$

"gegen den Urzeigersinn umfahren". Es gilt

$$\oint_{\gamma_R} v(r) \cdot dr = R^2 \int_0^{2\pi} (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \cdot (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) d\varphi = R^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi + \cos^2\varphi d\varphi = 2\pi R^2$$

und $\operatorname{rot} v(r) = (0, 0, 2)$.