Theoretische Physik I - Übungsblatt 2

A. Kanz, R. Müller, M. Nietschmann, M. Böhl

1 Flussintegral bei radialer Strömung

2 Kurvenintegral bei Scherströmung

Gegeben ist das Vektorfeld $v(r) = (0, x, 0)$ für $r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Seien nun $k \in (0, \infty)$ und $Q(k) = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid \max\{|x|, |y|\} \leq \frac{k}{2}\}$ das Quadrat mit Seitenlänge k und dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt. Um den den Rand des Quadrats zu parametrisieren, definieren wir zunächst $\gamma_i : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ für $i \in \{1, \dots, 4\}$ durch

$$\gamma_1(t) = (1, 2t - 1, 0), \quad \gamma_2(t) = (1 - 2t, 1, 0), \quad \gamma_3(t) = (-1, 1 - 2t, 0), \quad \gamma_4(t) = (2t - 1, -1, 0).$$

Dann parametrisiert

$$\gamma_k : [0, 4] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ t \longmapsto \begin{cases} \frac{k}{2}\gamma_1(t) & , t \in [0, 1) \\ \frac{k}{2}\gamma_2(t - 1) & , t \in [1, 2) \\ \frac{k}{2}\gamma_3(t - 2) & , t \in [2, 3) \\ \frac{k}{2}\gamma_4(t - 3) & , t \in [3, 4] \end{cases}$$

den Rand des Quadrates $Q(k)$. Nun können wir das Kurvenintegral berechnen:

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_k} v(r) \cdot dr &= \int_0^4 \langle v(\gamma_k(t)), \dot{\gamma}_k(t) \rangle dt \\ &= \frac{k^2}{4} \left(\int_0^1 \langle (0, 1, 0), (0, 2, 0) \rangle dt + \int_0^1 \langle (0, 1 - 2t, 0), (-2, 0, 0) \rangle dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \langle (0, -1, 0), (0, -2, 0) \rangle dt + \int_0^1 \langle (0, 2t - 1, 0), (2, 0, 0) \rangle dt \right) \\ &= 2 \cdot \frac{k^2}{4} \int_0^1 2dt = k^2. \end{aligned}$$

Die Rotation berechnet sich als $\operatorname{rot} v(r) = (0, 0, 1)$.

3 Kurvenintegral eines azimutalen Geschwindigkeitsfeldes

Gegeben ist das Vektorfelt $v(r) = (-y, x, 0)$ für $r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Sei $R \in (0, \infty)$ und $K(R)$ der konzentrische Kreis mit Radius R in der Ebene $z = 0$. Der Rand von $K(R)$ wird von der Kurve

$$\gamma_R : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ \varphi \longmapsto R(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$$

“gegen den Urzeigersinn umfahren”. Es gilt

$$\oint_{\gamma_R} v(r) \cdot dr = R^2 \int_0^{2\pi} (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \cdot (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) d\varphi = R^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi + \cos^2\varphi d\varphi = 2\pi R^2$$

und $\operatorname{rot} v(r) = (0, 0, 2)$.

4 Linienintegral

Gegeben ist das Vektorfeld $f(x, y, z) = xyz(1, 1, 1)$. Wir berechnen nun das Integral $\int_\gamma f(r)dr$ für verschiedene Kurven γ.

a) Definiere zunächst $\gamma_i : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ für $i \in \{1, \ldots, 3\}$ durch

$$\gamma_1(t) = (t, 0, 0), \qquad \gamma_2(t) = (1, t, 0), \qquad \gamma_3(t) = (1, 1, t).$$

Sei nun

$$\gamma : [0, 3) \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \gamma_i(t) \text{ falls } t \in [i-1, i) \text{ für } i \in \{1, 2, 3\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(r) \cdot dr &= \int_0^1 (0, 0, 0) \cdot \dot\gamma_1(t)dt + \int_0^1 (0, 0, 0) \cdot \dot\gamma_2(t)dt + \int_0^1 t(1, 1, 1) \cdot (0, 0, 1)dt \\ &= \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}t\Big|_0^1 = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

b) Sei $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto (t, t, t)$. Dann

$$\int_\gamma f(r) \cdot dr = \int_0^1 t^3(1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1)dt = \int_0^1 3t^3 dt = \frac{3}{4}t^4\Big|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

c) Sei $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto (t^2, t^3, t^4)$. Dann

$$\int_\gamma f(r) \cdot dr = \int_0^1 t^9(1, 1, 1) \cdot (2t, 3t^2, 4t^3)dt = \int_0^1 2t^{10} + 3t^{11} + 4t^{12}dt = \frac{2}{11} + \frac{3}{12} + \frac{4}{13} = \frac{423}{572}.$$

Außerdem gilt $\operatorname{div}\operatorname{rot} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} xz - xy \\ xy - yz \\ yz - xz \end{pmatrix}$.