Zusammenfassung Markovketten

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Endliche Markovketten

Setting. Sei $E \neq \emptyset$ eine höchstens abzählbare Menge, die *Zustandsmenge*. Eine **stochastische Matrix** Π auf E ist geg. durch eine Abbildung $p : E \times E \to [0,1]$ mit

$$\textstyle\sum_{y \in E} p(x,y) = 1 \quad \forall x \in E.$$

Def. Für einen *Vektor* $\pi : E \to \mathbb{R}$ ist $\pi\Pi : E \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$(\pi\Pi)(x) := \textstyle\sum_{z \in E} \pi(z) \cdot p(z,x).$$

(Annahme dabei: $\sum_{z \in E} |\pi(z)| \cdot p(z,x) < \infty$ für alle $x \in E$.)

Def. Eine Folge von ZVen $\{X_n \in E\}$ heißt **Markovkette** *auf* E mit *Übergangsmatrix* p, falls für alle $n \geq 1$ und $x_0, \ldots, x_{n+1} \in E$ gilt:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \,|\, X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) \\ = \quad & \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \,|\, X_n = x_n) = p(x_{n+1}, x_n) \end{aligned}$$

Interpretation. Bei gegebener Gegenwart $X_n = x_n$ ist die Zukunft X_{n+1} unabhängig von der Vergangenheit.

Bem. Die Verteilung der ganzen Folge $\{X_n\}$ ist durch die Verteilung von X_0 (*Startverteilung*) und durch p eindeutig bestimmt:

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_0 = x_0) \cdot \textstyle\prod_{k=1}^n p(x_{n-1}, x_n)$$

Gibt $\pi_0 : E \to [0,1]$ die Startverteilung an, und π_n die Verteilung nach dem n-ten Schritt für $n \geq 1$, so gilt

$$\pi_n = \pi_0 \Pi^n.$$

Def. Für $n \in \mathbb{N}$ und $x, y \in E$ ist

$$p^{(n)}(x,y) := \mathbb{P}(X_n = y \,|\, X_0 = x)$$

die ***n*-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit** von x nach y.

Lem (**Kolmogorov-Chapman-Gleichung**).
Für $\ell, k \in \mathbb{N}$, $x, y \in E$ gilt

$$p^{(k+\ell)}(x,y) = \textstyle\sum_{z \in E} p^{(k)}(x,z) p^{(\ell)}(z,y).$$

Bem. Bekannte Spezialfälle:

$$\begin{aligned} \textit{Vorwärtsgleichung:} \quad & p^{(k+1)}(x,y) = \textstyle\sum_{z \in E} p^{(k)}(x,z) p(z,y) \\ \textit{Rückwärtsgleichung:} \quad & p^{(k+1)}(x,y) = \textstyle\sum_{z \in E} p(x,z) p^{(k)}(z,y) \end{aligned}$$

Def. Eine Verteilung π heißt **stationär**, falls $\pi = \pi\Pi$.

Satz. Sei $\{X_n\}$ eine Markovkette auf einem endl. Zustandsraum E mit der Übergangsmatrix Π. Dann sind äquivalent:

- Es gibt ein $n_0 \geq 1$ mit $\forall x, y \in E : p^{(n_0)}(x,y) > 0$.
- Es existiert ein $\pi : E \to (0,1]$ mit

$$p^{(n)}(x,y) \xrightarrow{n \to \infty} \pi(y) \quad \forall x, y \in E.$$

In diesem Fall ist π die einzige stationäre Verteilung.
Die Konvergenz ist exponentiell schnell:

$$|p^{(n)}(x,y) - \pi(y)| \leq Ce^{-an} \quad \text{für Konstanten } C, a > 0.$$

Desweiteren gilt unabhängig von der Startverteilung

$$\mathbb{P}(X_n = y) \xrightarrow{n \to \infty} \pi(y) \quad \forall y \in E.$$

Beweisidee. Def. Folgen $\{m_j^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{M_j^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ für $j \in E$ durch

$$m_j^{(n)} := \min\nolimits_{i \in E} p^{(n)}(i,j), \quad M_j^{(n)} := \max\nolimits_{i \in E} p^{(n)}(i,j).$$

Dann ist $\{m_j^{(n)}\}$ monoton steigend und $\{M_j^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend, also konvergent gegen $m_j^{(\infty)}$ bzw. $M_j^{(\infty)}$. Außerdem kann man zeigen:

$$M_j^{(n+n_0)} - m_j^{(n+n_0)} \leq (1 - \epsilon) \cdot (M_j^{(n)} - m_j^{(n)}),$$

wobei $\epsilon := \min_{i,j \in E} p^{(n_0)}(i,j)$. Somit gilt $m_j^{(\infty)} = M_j^{(\infty)}$ und nach dem Sandwichsatz konvergieren alle $p^{(n)}(i,j)$.

Achtung. Stationäre Verteil. können ohne Konvergenz existieren!

Satz. Falls $\forall x, y \in E : p^{(n_0)}(x,y) > 0$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\tfrac{1}{n+1} \cdot \textstyle\sum_{k=0}^n \mathbb{1}\{X_k = x\} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} \pi(x) \quad \forall x \in E.$$

Bem. Eine Übergangsmatrix heißt **doppelt stochastisch**, falls

$$\textstyle\sum_{y \in E} p(x,y) = 1 \ \forall y \in E \quad \text{und} \quad \textstyle\sum_{x \in E} p(x,y) = 1 \ \forall x \in E.$$

Für jede solche Übergangsmatrix auf einem endlichen Raum ist die uniforme Verteilung stationär.

Bem (**Paradox von Parrondo**). Es gibt zwei Glücksspiele, bei denen man fast-sicher irgendwann all sein Geld verliert, dies aber nicht der Fall ist, falls man sie abwechselnd spielt! Diese Glücksspiele kann man als Markovketten modellieren, wobei der aktuelle Zustand durch die Anzahl an Euros im Besitz des Spielers gegeben ist.

Abzählbare Markovketten

Notation. Sei im Folgenden $\{Z_n\}$ eine Markovkette auf einem abzählbaren Zustandsraum E.

Def. Für $x \in E$ und $n \in \mathbb{N}$ def. die ZV $\tau_x^{(n)} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ind. durch

$$\begin{aligned} \tau_x^{(1)} &:= \inf\{n > 0 \,|\, Z_n = x\}, \\ \tau_x^{(k)} &:= \inf\{n > \tau_x^{(k-1)} \,|\, Z_n = x\}, \quad k > 1. \end{aligned}$$

(Beachte: $\tau_x^{(k)}$ ist eine messbare Abbildung.)

Bem. $F(x,y) > 0 \iff \exists n \geq 1 : p^{(n)}(x,y) > 0$

Bem. Ferner gilt $\{\tau_x^{(k)} = n\} \in \sigma(Z_0, Z_1, \ldots, Z_n)$.

Def. Für $x, y \in E$ sei $F(x,y) := P(\tau_y^{(1)} < \infty \mid Z_0 = x)$

Lem. Für alle $x, y \in E$ und $k \geq 1$ gilt

$$P(\tau_y^{(k)} < \infty \mid Z_0 = x) = F(x,y) \cdot F(y,y)^{k-1}.$$

Bem. Mit $\widetilde{\ell}(y) := \sum_{k=1}^\infty \mathbb{1}\{Z_k = y\}$ gilt $\{\tau_y^{(k)} < \infty\} = \{\widetilde{\ell} \geq k\}$.

Def. Ein Zustand $x \in E$ heißt

- **absorbierend**, falls $p(x,x) = 1$,
- **rekurrent**, falls $F(x,x) = 1$ und
- **transient**, falls $F(x,x) < 1$.

Bem. Absorbierende Zustände sind rekurrent.

Bsp. In der Markovkette

$$\begin{tikzcd} (0) \arrow[r, bend left, "1"] & (1) \arrow[l, bend left, "1-p"] \arrow[r, bend left, "p"] & (2) \arrow[l, bend left, "1-p"] \arrow[r, bend left, "p"] & (3) \arrow[l, bend left, "1-p"] \arrow[r, bend left, "p"] & \cdots \arrow[l, bend left, "1-p"] \end{tikzcd}$$

ist (0) genau dann rekurrent, falls $p \leq 1/2$, ansonsten transient.

Def. Die **Anzahl der Besuche** in $y \in E$ ist

$$\ell(y) := \textstyle\sum_{k=0}^\infty \mathbb{1}\{Z_k = y\}.$$

Die **Green'sche Funktion** von $\{Z_n\}$ ist $G : E \times E \to [0, \infty]$ mit

$$G(x,y) := \mathbb{E}(\ell(y) \mid Z_0 = x).$$

Bem.
$$\begin{aligned} G(x,y) &= \mathbb{E}\left(\textstyle\sum_{k=0}^\infty \mathbb{1}\{Z_k = y\} \mid Z_0 = x\right) \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^\infty P(Z_k = y \mid Z_0 = x) \\ &= \delta_{xy} + \textstyle\sum_{k=1}^\infty p^{(k)}(x,y). \end{aligned}$$

Satz. Für alle $x, y \in E$ gilt

$$G(x,y) = \begin{cases} F(x,y)/(1 - F(y,y)) & \text{falls } x \neq y, \\ 1/(1 - F(y,y)) & \text{falls } x = y. \end{cases}$$

Kor. x ist rekurrent $\iff G(x,x) = \infty$

Lem. Ist $F(x,y) \in (0,1)$, so ist x nicht rekurrent.

Satz. Ist $x \in E$ rekurrent und $F(x,y) > 0$, so ist y auch rekurrent und $F(x,y) = F(y,x) = 1$.

Satz. Es sind äquivalent:

- x ist rekurrent
- $F(x,x) = 1$
- $G(x,x) = \infty$
- $\forall y \in E : F(x,y) \in \{0,1\}$
- $\forall y \in E : G(x,y) \in \{0, \infty\}$

Def. $\{Z_n\}$ heißt **irreduzibel**, falls $\forall x, y \in E : F(x,y) > 0$.

Satz. Sei $\{Z_n\}$ irreduzibel. Dann sind entweder alle Zustände rekurrent oder alle Zustände transient.

Satz. Irreduzible Ketten auf endlichen Räumen sind rekurrent.

Rekurrenz und Transienz von Irrfahrten

Situation. $\{Z_n\}$ ist eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$, d. h.

$$p(x,y) = p(0, y-x) =: q(y-x).$$

Mit and. Worten: Die *Zuwächse* $\{Z_n - Z_{n-1}\}_{n\geq 1}$ sind i. i. d. ZVn.

Bsp. Einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$: $p(0,1) = p$, $p(0,-1) = q = 1-p$ In diesem Fall kann man die Green'sche Funktion exakt berechnen:

$$G(x,x) = \ldots = 1/|2p-1|$$

Satz. Sei $\{Z_n\}$ eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit

$$\mathbb{E}|Z_1 - Z_0| = \textstyle\sum_{x\in\mathbb{Z}} |x| p(0,x) < \infty.$$

Dann gilt: $\{Z_n\}$ ist rekurrent $\iff \sum_{x\in\mathbb{Z}} x p(0,x) = 0$.

Def. Die **einfache symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$** ist die translationsinvariante Markovkette mit

$$p(0, \pm e_i) = \tfrac{1}{2d} \quad \text{für } i = 1, \ldots, d.$$

Bem. Für einfache symmetrische Irrfahrten gilt:

$$p^{(2n)}(x,x) = \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_d\in\mathbb{N}\\ k_1+\ldots+k_d=n}} \frac{(2n)!}{(k_1!)^2\cdots(k_d!)^2}(2d)^{-2n}$$

Für $d=2$ gilt $p^{(2n)}(0,0) = [\binom{2n}{n}(\frac{1}{2})^{2n}]^2$. Mit der Stirling'schen Formel folgt $p^{(2n)}(0,0) \approx \frac{1}{\pi n}$. Somit gilt $\sum_{n=0}^\infty p^{(2n)}(0,0) = \infty$.

Fazit. Die zweidimensionale einfache symm. Irrfahrt ist rekurrent.

Resultat. Für einfache symm. Irrfahrten auf $\mathbb{Z}^d$ gilt

$$p^{(2n)}(0,0) \leq C_d / n^{d/2} \quad \text{für eine Konstante } C_d > 0.$$

Somit ist die einfache Irrfahrt transient für alle $d \geq 3$.

Def. $\varphi(t) := \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} e^{i(t\cdot x)} p(0,x) \quad$ für $t \in \mathbb{R}^d$

Bem. Da die Zuwächse $\{Z_n - Z_{n-1}\}$ i. i. d. sind, gilt

$$\textstyle\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} e^{i(t\cdot x)} p^{(n)}(0,x) = \varphi^n(t), \quad n \geq 1$$

Inversionsformel: $\quad p^{(n)}(0,x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi)^d} e^{-i(t\cdot x)} \varphi^n(t)\,\mathrm{d}t$

Satz. Für jede Irrfahrt $\{Z_n\}$ auf $\mathbb{Z}^d$ gilt

$$G(0,0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \lim_{\lambda\uparrow 1} \int_{[-\pi,\pi)^d} Re\left(\tfrac{1}{1-\lambda\varphi(t)}\right)\mathrm{d}t = \infty$$

Bsp. Für die einfache symm. Irrfahrt $\{Z_n\}$ auf $\mathbb{Z}^d$ ist

$$\varphi(t) = \tfrac{1}{d}\textstyle\sum_{k=1}^d \cos(t_k).$$

Mit der Ungleichung $1 - \cos(u) \geq c_0 u^2$ für alle $u \in [-\pi,\pi]$ folgt

$$\begin{aligned} & \varphi(t) && \geq && \tfrac{c_0}{d}|t|^2 \\ \Longrightarrow\ & \tfrac{1}{1-\lambda\varphi(t)} && \leq && \tfrac{d}{\lambda c_0}|t|^{-2} \end{aligned}$$

Die Funktion $|t|^{-2}$ ist $\forall\, d \geq 3$ auf $[-\pi,\pi)^d$ integrierbar. Somit:

Satz. Jede irreduzible Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ mit $d \geq 3$ ist transient.

Bsp. Sei $\{Z_n\}$ eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit $p(0,x) = p(0,-x)$. Gelte

$$x^\alpha p(0,x) \xrightarrow{x\to\infty} c \in (0,\infty)$$

für ein $\alpha > 1$. Dann ist

$$1-\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(1-\cos(nt))p(0,n) \ \text{ und }\ \frac{1-\varphi(t)}{|t|^{\alpha-1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|n|^\alpha p(0,n)|t| f(nt)$$

mit $f(x) = (1-\cos(x))/|x|^\alpha$. Außerdem ist $|n|^\alpha p(0,n) = c + \epsilon_n$, wobei $\epsilon_n \to 0$ für $|n| \to \infty$. Es folgt

$$\frac{1-\varphi(t)}{|t|^{\alpha-1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c|t|f(nt) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon_n |t| f(nt).$$

Für $t \to 0$ hat man

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |t| f(nt) \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \ \text{ und } \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon_n |t| f(nt) \to 0.$$

Es folgt für $\alpha < 3$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\varphi(t)}{|t|^{\alpha-1}} = c\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(x)}{|x|^\alpha}\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Folglich ist $1/(1-\varphi(t))$ für

- $\alpha < 2$ integrierbar und somit $\{Z_n\}$ transient und für
- $\alpha = 2$ in der Umg. von 0 nicht int'bar und damit $\{Z_n\}$ rekurrent.

Für $\alpha > 2$ ist $\sum |x| p(0,x) < \infty$ und somit ist die Irrfahrt rekurrent, da der Erwartungswert der Zuwächse null ist.

Erneuerungstheorie

Situation. Seien $\{X_k\}_{k\geq 1}$ unabhängige ZVn mit Werten in $\mathbb{N}_0$ und $P(X_k \geq 1) > 0$, wobei $\{X_k\}_{k\geq 2}$ identisch vert. sind. Dann definiert

$$Z_n := \textstyle\sum_{k=1}^n X_k$$

eine Irrfahrt $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ mit nicht-negativen Zuwächsen auf $\mathbb{Z}$. Setze $p_k := P(X_2 = k)$ für $k \geq 0$. Wir nehmen an, dass

$$a := \mathbb{E}[X_2] = \textstyle\sum_{k=1}^\infty k p_k \in (0,\infty).$$

Ziel. Untersuche das asympt. Verhalten von $G(0,x)$.

Def. Die **erzeugende Funktion** einer Folge $\{a_n\}$ ist

$$A(s) := \textstyle\sum_{n=0}^\infty a_n s^n.$$

Rechnung. Def. $q_k := \frac{1}{a}\sum_{j=k}^\infty p_j$ für $k \geq 1$. Dann ist $\sum_{k=1}^\infty q_k = 1$. Sei X_1 eine ZV mit $P(X_1 = k) = q_k$, $k \geq 1$. Setze

$$\begin{aligned} f(s) &:= \textstyle\sum_{k=1}^\infty p_k s^k = \mathbb{E}[s^{X_2}], && |s| \leq 1 \\ g(s) &:= \textstyle\sum_{k=1}^\infty q_k s^k = \mathbb{E}[s^{X_1}], && |s| \leq 1 \\ \psi(s) &:= \textstyle\sum_{x=1}^\infty G(0,x) s^x, && |s| < 1 \end{aligned}$$

Dann gilt für $|s| < 1$:

$$\psi(s) = \textstyle\sum_{k=1}^\infty g(s) f(s)^{k-1} = g(s)/(1-f(s))$$

Außerdem gilt:

$$g(s) = \tfrac{1}{a}(1-f(s))\textstyle\sum_{x=1}^\infty s^x = \frac{s}{a(1-s)}(1-f(s))$$

Es folgt $\psi(s) = \sum_{x=1}^\infty \frac{1}{a} s^x$. Somit ist $G(0,x) = \frac{1}{a}$.

Satz. Angenommen, $\mathrm{ggT}\{k \mid p_k > 0\} = 1$. Dann gilt für jede Verteilung von X_1, dass

$$G(0,x) \xrightarrow{x\to\infty} \tfrac{1}{a}.$$

Def. Seien $\{X_k\}_{k\geq 1}$ unabhängige, nichtneg. ZVn und seien $\{X_k\}_{k\geq 2}$ identisch verteilt. Setze $Z_n := \sum_{k=1}^n X_k$. Dann heißt

$$\begin{aligned} \eta(t) &:= \min\{k \geq 1 \mid Z_k > t\} && \textbf{Erneuerungsprozess} \text{ und} \\ H(t) &:= \mathbb{E}[\eta(t)] && \textbf{Erneuerungsfunktion}. \end{aligned}$$

Falls X_k nur Werte aus $\mathbb{N}$ annimmt, so können wir das Verhalten von $H(t) - H(t-1)$ wie folgt beschreiben:

$$\begin{aligned} & H(t) = \mathbb{E}[\eta(t)] = \sum_{k=0}^\infty P(\eta(t) > k) = \sum_{k=0}^\infty P(Z_k \leq t) \\ \rightsquigarrow\ & H(t) - H(t-1) = \sum_{k=0}^\infty P(Z_k = t) \xrightarrow{t\to\infty} 1/\mathbb{E}[X_2]. \end{aligned}$$

Def.

$$\begin{aligned} \gamma(t) &:= t - Z_{\eta(t)-1} \geq 0 && \text{heißt } \textbf{Undershoot}, \\ \chi(t) &:= Z_{\eta(t)} - t > 0 && \text{heißt } \textbf{Overshoot}. \end{aligned}$$

Satz. Sind die Bedingungen des letzten Satzes erfüllt, so gilt

$$P(\gamma(t) = i, \chi(t) = j) \xrightarrow{t\to\infty} \frac{p_{i+j}}{\mathbb{E}[X_2]} \quad \text{für alle } i \geq 0, j \geq 1.$$

Kor.

$$\begin{aligned} P(\gamma(t) = i) &\xrightarrow{t\to\infty} \tfrac{1}{a}\textstyle\sum_{k=i+1}^\infty p_k && \text{für } i \geq 0, \\ P(\chi(t) = j) &\xrightarrow{t\to\infty} \tfrac{1}{a}\textstyle\sum_{k=j}^\infty p_k && \text{für } j \geq 0 \end{aligned}$$

Positive Rekurrenz

Def. $x \in E$ heißt **positiv rekurrent**, falls $\mathbb{E}[\tau_x^{(1)}|Z_0 = x] < \infty$. Ist x rekurrent, aber nicht pos. rekurrent, so heißt x **nullrekurrent**.

Bem. positive Rekurrenz $\implies$ Rekurrenz

Lem. Sei x ein positiv rekurrenter Zustand.
Ist $F(x, y) > 0$, so ist auch y positiv rekurrent.

Kor. Ist $\{Z_n\}$ irreduzibel und $x_0 \in E$ positiv rekurrent, so gilt:

- alle Zustände sind positiv rekurrent
- $m(x, y) := \mathbb{E}[\tau_y^{(1)}|Z_0 = x] < \infty$ für alle $x, y \in E$

Def. Die Zahl $d_x := \mathrm{ggT}\{n \geq 1 \,|\, p^{(n)}(x, x) > 0\}$ heißt **Periode** von x. Falls $d = d_x$ für alle $x \in E$, so heißt d *Periode* der Kette $\{Z_n\}$.

Lem. Ist $\{Z_n\}$ irreduzibel, so gilt $d_x = d_y$ für alle $x, y \in E$.

Satz. Es gibt eine Familie $\{\pi_y \in \mathbb{R}_{>0}\}_{y\in E}$, sodass

$$\forall\, x, y \in E \;:\; p^{(n)}(x, y) \xrightarrow{n\to\infty} \pi_y$$

genau dann, wenn

- $\{Z_n\}$ irreduzibel und
- aperiodisch (d. h. $d = 1$) ist und
- ein x_0 existiert, sodass $m(x_0, x_0) < \infty$.

Die Folge $\{\pi_y\}_{y\in E}$ ist die eindeutige Lösung zu

$$\begin{cases} \sum_{y\in E}|P_y| < \infty \\ \sum_{y\in E}\pi_y = 1 \\ \sum_{x\in E}\pi_x p(x, y) = \pi_y \text{ für alle } y \in E \end{cases}$$

Es gilt $\pi_y = 1/m(y, y)$.

TODO: Beweisidee aufschreiben

Def. Eine Verteilung $\{\mu_x\}_{x\in E}$ auf E heißt **stationär**, falls

$$\mu_x = \textstyle\sum_{y\in E}\mu_y p(y, x) \quad \text{für alle } x \in E \qquad (\text{kurz: } \mu = \mu P).$$

Bem. Für eine stationäre Verteilung $\{\mu_x\}_{x\in E}$ gilt

$$\mu_x = \textstyle\sum_{y\in E}\mu_y p^{(n)}(y, x) \quad \text{für alle } x \in E \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

Lem. Sei x ein positiv rekurrenter Zustand. Dann definiert

$$\mu_y^{(x)} := \frac{1}{m(x, x)} \cdot \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\tau_x^{(1)}-1} \mathbb{1}\{Z_k = y\} \,\middle|\, Z_0 = x\right]$$

für alle $y \in E$ eine stationäre Verteilung $\{\mu_y^{(x)}\}_{y\in E}$.

Satz. Sei $\{Z_n\}$ eine irreduzible Kette. Dann gilt:

$$\{Z_n\} \text{ ist pos. rekurrent} \iff \{Z_n\} \text{ hat eine stationäre Verteilung.}$$

In diesem Fall ist die stationäre Verteilung eindeutig.

Satz. Eine irreduzible Kette auf einem endlichen Zustandsraum ist immer positiv rekurrent. Ferner existieren $C > 0$ und $q \in (0, 1)$ mit

$$P(\tau_y^{(1)} > n \,|\, Z_0 = x) < Cq^n \quad \text{für alle } n \geq 1 \text{ und } x, y \in E.$$

Satz (Ergodizität). Sei $\{Z_n\}$ irreduzibel und positiv rekurrent. Sei $f : E \to \mathbb{R}$ integrierbar bezüglich der stationären Verteilung $\{\pi_x\}$, d. h. $\sum_{x\in E}|f(x)|\pi_x < \infty$. Dann gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(Z_k) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f. s.}} \sum_{x\in E} f(x)\pi_x$$

TODO: Beweisidee

Bsp. Für $f(y) := \mathbb{1}\{y = x_0\}$ für eine $x_0 \in E$ erhalten wir

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}\{Z_k = x_0\} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f. s.}} \pi_{x_0}, \\ \implies &\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} p^{(k)}(x, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi_{x_0}. \end{aligned}$$

Lem. Sei $\{Z_n\}$ eine irreduzible Kette mit der Periode $d \geq 1$. Für jedes $x \in E$ existiert ein $m_x \geq 1$ mit

$$p^{(md)}(x, x) > 0 \quad \text{für alle } m \geq m_x.$$

Prop. Sei $\{Z_n\}$ irreduzibel und periodisch mit $d \geq 1$. Dann existieren paarweise disjunkte $C_0, C_1, \ldots, C_{d-1} \subseteq E$ mit $C_0 \cup \ldots \cup C_{d-1} = E$ und

$$\{y \in E \,|\, x \in C_i, p(x, y) > 0\} = C_{(i+1)\%d}.$$

In anderen Worten: Die Mengen C_i werden zyklisch besucht.

Bem. Die Markovkette $\{Z_{md}\}_{m\geq 0}$ ist nicht irreduzibel (für $d > 1$) aber die Restriktion auf jedes C_i ist irreduzibel und außerdem aperiodisch. Mit dem Ergodensatz erhalten wir

$$p^{(md)}(x, y) \xrightarrow[m\to\infty]{} d/m(y, y) \quad \text{für alle } x, y \in C_i$$

Falls $x \in C_0$ und wir wollen $p^{(md+r)}(x, y)$ berechnen, so reicht es $y \in C_r$ zu betrachten. Definiere

$$F_r(x, y) := \mathbb{P}(\tau_y^{(1)} < \infty,\, \tau_y^{(1)} \equiv r \,(\mathrm{mod}\, d) \,|\, Z_0 = x)$$

Es gilt dann:

$$p^{(md+r)}(x, y) \xrightarrow[m\to\infty]{} F_r(x, y)d/m(y, y)$$

Martingale

Setting. Sei im Folgenden $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Maßraum.

Def. Eine wachsende Folge $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots$ von σ-Algebren heißt **Filtration**. Eine Folge von ZVen $\{M_n\}$ heißt **adaptiert** an die Filtration $\{\mathcal{F}_n\}$, falls M_n $\mathcal{F}_n$-messbar ist für jedes $n \geq 0$.

Def. Sei X eine ZV mit $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Eine ZVe $\widehat{X}$ heißt **bedingte Erwartung** von X bzgl. einer σ-Alg. $\mathcal{A}$, falls sie $\mathcal{A}$-messbar ist u.

$$\mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\widehat{X}\mathbb{1}_A] \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A}.$$

Def. Eine $\{F_n\}$-adapt. Folge $\{M_n\}$ mit $\forall\, n : \mathbb{E}[|M_n|] < \infty$ heißt

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{Martingal} \\ \textit{Submartingal} \\ \textit{Supermartingal} \end{array}\right\} \text{ falls } \mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] \left\{\begin{array}{c} = \\ \geq \\ \leq \end{array}\right\} M_n \quad \forall\, n \geq 0.$$

Bem.

- $\{M_n\}$ ist Submartingal $\iff$ $\{-M_n\}$ ist Supermartingal
- $\{M_n\}$ ist Martingal $\iff$ $\{M_n\}$ ist Super- und Submartingal

Bem. Martingal-Strategie für wdh. Werfen einer fairen Münze:

- 1. Runde: Einsatz $= 1$ Euro, bei Gewinn Ausstieg
- 2. Runde: Einsatz $= 2$ Euro, bei Gewinn Ausstieg, ...
- n. Runde: Einsatz $= 2^{n-1}$ Euro, bei Gewinn Ausstieg

Es gilt: $T = \inf\{n \geq 1 \,|\, n\text{-te Runde ist gewonnen}\} < \infty$ fast sicher, der Gewinn ist 1 Euro.

Bsp. Seien $\{X_i\}$ unabh. ZVen mit $\mathbb{E}[X_i] = 0$ for alle $i \geq 0$. Sei $M_n := X_1 + \ldots + X_n$. Dann ist $\{M_n\}$ ein Martingal bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F}_n\}$ mit $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

Def. Für eine Folge $\{M_n\}$ von ZVen heißt $\{\sigma(M_0, M_1, \ldots, M_n)\}_{n\geq 0}$ **natürliche Filtration**.

Def. $\{M_n\}$ ist Martingal $:\iff$ $\{M_n\}$ ist Martingal bzgl. der natürlichen Filtration

Lem. Ist $\{M_n\}$ ein Submartingal, so gilt $\mathbb{E}[M_{i+1}] \geq \mathbb{E}[M_i]$.

Lem. Sei $\{M_n\}$ ein Martingal bzgl. $\{\mathcal{F}_n\}$. Dann gilt:

$$\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_i] = M_i \quad \text{für alle } i \leq n.$$

Lem. Sei $\{M_n\}$ ein Martingal bzgl. $\{\mathcal{F}_n\}$ und sei φ eine konvexe messbare Funktion. Falls $\mathbb{E}[|\varphi(M_n)|] < \infty$ für alle $n \geq 1$, so ist die Folge $\{\varphi(M_n)\}_{n\geq 0}$ ein Submartingal bzgl. $\{F_n\}$

Bem. Die Aussage des vorh. Lemmas gilt auch, falls $\{M_n\}$ nur ein Submartingal, dafür aber φ zusätzlich monoton wachsend ist.

Bsp. $\{M_n\}$ Martingal $\implies$ M_n^2, M_n^+, $|M_n|$ Submartingale

Bsp. Ein Anleger kauft H_0 Aktien einer Firma. Es sei W_0 der Wert der Aktien beim Kauf, Y_n der Kurs der Aktie n Tage nach dem Kauf und H_n die Anzahl der Aktien n Tage nach dem Kauf. Forderung: H_n soll $\sigma(Y_0, \ldots, Y_{n-1})$-messbar sein. Sei W_n der Wert der Aktien n Tage nach dem Kauf. Es gilt

$$W_n = W_{n-1} + H_n(Y_n - Y_{n-1}) = W_0 + \textstyle\sum_{i=1}^{n} H_i(Y_i - Y_{i-1})$$

Falls $\{Y_n\}$ ein Martingal ist, so gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[W_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\ = \; & \mathbb{E}[W_n + H_{n+1}(Y_{n+1} - Y_n)|\mathcal{F}_n] \\ = \; & W_n + \mathbb{E}[H_{n+1}(Y_{n+1} - Y_n)|\mathcal{F}_n] \\ = \; & W_n + H_{n+1}\mathbb{E}[Y_{n+1} - Y_n|\mathcal{F}_n] \\ = \; & W_n + H_{n+1}(\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] - Y_n) \\ = \; & W_n \;\text{ (bzw. } \geq W_n \text{ für Sub- und } \leq W_n \text{ für Supermartingale).} \end{aligned}$$

Fazit: Mit Handelsstrategie kann man keine Anlage verbessern.

Def. Eine Folge $\{H_n\}_{n\geq 1}$ heißt **prävisibel**, falls H_n $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar ist für alle $n \geq 1$. Definiere $\{H \cdot Y\}_n$ durch

$$(H \cdot Y)_n \coloneqq \textstyle\sum_{i=1}^{n} H_i(Y_i - Y_{i-1})$$

Satz. Sei $\{Y_n\}$ ein Supermartingal und sei $\{H_n\}$ prävisibel jeweils bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F}_n\}$. Falls $H_n \in [0, C_n]$ für Konstanten $\{C_n\}$, so ist $\{(H \cdot Y)_n\}$ auch ein Supermartingal.

Bem. Man kann den Satz für Submartingale und Martingale formulieren. Für Martingale reicht es anzunehmen, dass $|H_n| \leq C_n$.

Def. Eine Abb. $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ heißt **Stoppzeit** bzgl. $\{F_n\}$, falls

$$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

Bsp. Sei $\{M_n\}$ eine Folge von ZVen und sei $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Dann ist $T = \inf\{n \geq 0 \,|\, M_n \in A\}$ eine Stoppzeit bzgl. $\{\sigma(M_0, \ldots, M_n)\}_n$.

Satz (Optional Stopping Theorem 1).
Ist $\{M_n\}$ ein (Sub-/Super-) Martingal und T eine Stoppzeit, so ist $\{M_{\min(T,n)}\}$ auch ein (Sub-/Super-) Martingal.

Sei $\{M_n\}$ eine Folge von ZVen und $a < b$ reelle Zahlen. Definiere

$$\begin{aligned} N_0 &\coloneqq -1, \\ N_{2k-1} &\coloneqq \inf\{n > N_{2k-2} \,|\, M_n \leq a\}, \\ N_{2k} &\coloneqq \inf\{n > N_{2k-1} \,|\, M_n \geq b\}. \end{aligned}$$

Die Anzahl der *Aufkreuzungen* ist dann

$$U_n \coloneqq \max\{k \,|\, N_{2k} \leq n\}.$$

Satz (Doob'sche Aufkreuzungsungleichung).
Ist $\{M_n\}$ ein Submartingal, so gilt für alle $a < b$ und alle $n \geq 1$:

$$\mathbb{E}[U_n] \leq (\mathbb{E}[(M_n - a)^+] - \mathbb{E}[(M_0 - a)^+])/(b - a).$$

Beweisskizze. Def. Submartingal $\{Y_n\}$ durch $Y_n \coloneqq \max\{a, M_n\}$. Sei $\{H_m\}$ Folge mit $H_m \coloneqq \mathbb{1}\{\exists\, k : N_{2k-1} < m \leq N_{2k}\}$. Dann gilt

$$(H \cdot Y)_n \geq U_n \cdot (b - a).$$

Die Aussage folgt nun zusammen mit der Abschätzung

$$\mathbb{E}[(H \cdot Y)_n] = \mathbb{E}[Y_n - Y_0] - \mathbb{E}[((1 - H) \cdot Y)_n] \leq \mathbb{E}[Y_n - Y_0].$$

Satz (Martingalkonvergenzsatz).
Sei $\{M_n\}$ ein Submartingal mit $\sup_{n\geq 0}\mathbb{E}[M_n^+] < \infty$. Dann existiert eine ZV M_∞ mit $\mathbb{E}[|M_\infty|] < \infty$ sodass $M_n \to M_\infty$ fast-sicher.

Beweisskizze. Aus der Aufkreuzungsungleichung folgt, dass $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} U_n < \infty) = 1$. Somit ist

$$\mathbb{P}(\cup_{a,b\in\mathbb{Q}}\{\liminf_{n\to\infty} M_n < a < b < \limsup_{n\to\infty} M_n\}) = 0.$$

Dies ist äquivalent dazu, dass $\{M_n\}$ fast-überall konvergiert.

TODO: Beweisidee?

Bsp (*Polya-Urne*). Urne mit b blauen und r roten Kugeln. In jeder Runde wird eine Kugel gezogen und mit einer weiteren Kugel gleicher Farbe zurückgelegt. Sei R_n die Anzahl von zugefügten roten Kugeln nach n Runden.
Man kann zeigen: $\{M_n \coloneqq (r + R_n)/(r + b + n)\}_{n\geq 0}$ ist ein Martingal. Außerdem gilt $\sup \mathbb{E}[M_n^+] \leq 1$ Nach dem vorherigen Satz gilt also $M_n \to M_\infty$ fast-sicher. Man kann zeigen, dass $M_\infty \sim \text{Beta}(r, b)$,

$$f_{M_\infty}(x) = \frac{1}{B(r, b)} x^{r-1}(1 - x)^{b-1}.$$

Kor. Sei $\{M_n\}$ ein nichtnegatives Supermartingal.
Dann existiert $M_\infty \in L_1$ mit $M_n \to M_\infty$ fast-sicher.

Satz. Sei $\{M_n\}$ ein Submartingal und sei T eine Stoppzeit bzgl. derselben Filtration mit $P(T \leq N) = 1$ für ein $N \geq 1$. Dann gilt:

$$\mathbb{E}[M_0] \leq \mathbb{E}[M_T] \leq \mathbb{E}[M_N].$$

Satz (Doob'sche Ungleichung).
Sei $\{M_n\}$ ein Submartingal. Dann gilt:

$$P(\max_{k\leq n} M_k \geq \lambda) \leq 1/\lambda \cdot \mathbb{E}[M_n \mathbb{1}\{\max_{k\leq n} M_k \geq \lambda\}] \leq 1/\lambda \cdot \mathbb{E}[M_n^+].$$

Bem. Die Doob'sche Ungl. verbessert die Markov-Ungleichung.

Kor (Kolmogorov-Ungleichung). Seien $\{X_i\}$ unabh. ZVen mit $\mathbb{E}[X_i] = 0$ und $\mathbb{E}[X_i^2] < \infty$. Setze $S_k = X_1 + \ldots + X_k$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}(\max_{k\leq n} |S_k| \geq \lambda) \leq \text{Var}(S_n)/\lambda^2.$$

Satz. Ist $\{M_n\}$ ein Submartingal, dann gilt für jedes $p \in (1, \infty)$:

$$\mathbb{E}[(\max_{k\leq n})^p] \leq (p/(p - 1))^p \mathbb{E}[(M_n^+)^p]$$

Kor. Sei $\{M_n\}$ ein Martingal. Dann gilt für jedes $p \in (1, \infty)$:

$$\mathbb{E}[(\max_{k\leq n} |M_k|)^p \leq (p/(p - 1))^p \mathbb{E}[|M_n|^p.]$$

Satz. Sei $\{M_n\}$ ein Martingal mit $\sup_{n\geq 1}\mathbb{E}[|M_n|^p] < \infty$ für ein $p > 1$. Dann konvergiert M_n fast-sicher und in L^p.

Def. Eine Familie $\{X_i\}_{i\in I}$ heißt **gleichgradig integrierbar**, falls

$$\forall\, \epsilon > 0 : \exists\, M > 0 : \forall\, i \in I : \mathbb{E}[|X_i| \mathbb{1}_{\{|X_i| > M\}}] < \epsilon.$$

Lem. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wkts-Raum, $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ eine Famile von σ-Algebren mit $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{F}$ für alle $i \in I$.
Dann ist die Familie $\{\mathbb{E}[X|\mathcal{A}_i]\}_{i\in I}$ gleichgradig integrierbar.

Lem. Sei $\{\mathcal{F}_n\}$ eine Filtration und $X \in L^1$. Dann ist $\{M_n\}$ mit $M_n \coloneqq \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$ ein gleichgradig integrierbares Martingal.

Satz. Für jedes Martingal $\{M_n\}$ (bzgl. $\{\mathcal{F}_n\}$) sind äquivalent:

- $\{M_n\}$ ist gleichgradig integrierbar
- $\{M_n\}$ konvergiert fast sicher und in L^1
- $\{M_n\}$ konvergiert in L^1
- $\{\exists\, M \in L^1 : \forall\, n \geq 0 : M_n = \mathbb{E}[M|\mathcal{F}_n]\}$

Satz. Sei $\{\mathcal{F}_n\}$ eine Filtration. Betrachte $\mathcal{F}_\infty \coloneqq \sigma(\cup_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_n)$

Bsp. Seien $\{X_i\}$ unabhängig und $\tau \coloneqq \cap_{n\geq 1}\sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$ die terminale σ-Algebra. Dann folgt aus dem vorh. Satz, dass $P(A) \in \{0, 1\}$ für alle $A \in \tau$.

Bsp. Betrachte eine Lipschitz-stetige Funktion $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$. Setze

$$\begin{aligned} X_n &\coloneqq \textstyle\sum_{k=1}^{2^n} (k - 1)/2^n \mathbb{1}\left[(k - 1)/2^n, k/2^n\right), \\ M_n &\coloneqq 2^n(f(X_n + 1/2^n) - f(X_n)). \end{aligned}$$

Dies sind ZVen auf $\Omega = [0, 1)$ mit dem Lebesgue-Maß. Dann ist $\{M_n\}$ ein gleichgradig integrierbares Martingal. Somit gibt es ein $M \in L^1$ mit $M_n \xrightarrow{n\to\infty} M$ fast-sicher und in L^1. Es gilt dann

$$f(x) - f(0) = \int_0^x M(t)\, \mathrm{d}t \quad \text{für alle } x \in [0, 1)\,.$$

Satz. Sei T eine Stoppzeit. Falls

- $\{M_n\}$ ein gleichgradig integrierbares Submartingal ist *oder*
- $\mathbb{E}[|M_T|] < \infty$ und $\{M_n \mathbb{1}\{T > n\}\}$ gleichgradig integrierbar sind,

so ist die Folge $\{M_{T\wedge n}\}$ ebenfalls gleichgradig integrierbar.

Satz. Sei $\{M_n\}$ ein gleichgradig integrierbares Submartingal. Dann gilt für jede Stoppzeit T:

$$\mathbb{E}[M_0] \leq \mathbb{E}[M_T] \leq \mathbb{E}[M_\infty].$$

Satz (Optional Stopping Theorem 2).
Seien $S \leq T$ zwei Stoppzeiten. Ist $\{M_{T\wedge n}\}$ ein gleichgradig integrierbares Submartingal, so gilt

$$M_S \leq \mathbb{E}[M_T|\mathcal{F}_S].$$

Rekurrenz/Transienz mit Martingaltheorie

Sei $\{Y_n\}$ eine Folge nichtnegativer ZVen.

Def. $\{Y_n\}$ heißt **(topologisch) rekurrent**, falls

$$\exists\, r > 0 \,:\, P(\liminf_{n\to\infty} Y_n \le r) = 1.$$

$\{Y_n\}$ heißt **(topologisch) transient**, falls $P(\lim_{n\to\infty} Y_n = \infty) = 1$.

Satz. Sei $\{Y_n\}$ eine Folge mit $P(\limsup_{n\to\infty} Y_n = \infty) = 1$. Falls ein $M > 0$ mit $\mathbb{E}[Y_{n+1}|Y_n = x_n, \dots, Y_0 = x_0] \le x_n$ für alle $x_n \ge M$ existiert, so ist $\{Y_n\}$ rekurrent.

Definiere $U_n^{(k)} := Y_{k+n} \cdot \mathbb{1}\{\min(Y_k, Y_{k+1}, \dots, Y_{n+k-1}) \ge M\}$.

Lem. Unter Vor. des Satzes: Sei $\mathcal{F}_n^{(k)} := \sigma(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n+k})$. Dann ist $\{U_n^{(k)}\}$ ein Supermartingal bzgl. $\{F_n^{(k)}\}$.

Satz. Angenommen, es gibt Konstanten $T > M \ge 0$ mit $\forall n \in \mathbb{N} \,:\, P(Y_n \le T) = 1$ und $P(\limsup_{n\to\infty} Y_n = T) = 1$ sowie

$$\mathbb{E}[Y_{n+1}|Y_n = x_n, \dots, Y_0 = x_0] \ge x_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } x_n \ge M.$$

Dann gilt $Y_n \xrightarrow{n\to\infty} T$ fast-sicher.

Im Folgenden sei $\tau := \inf\{n \ge 1 \,|\, Y_n \le r\}$.

Satz. Angenommen, für die Folge $\{\tilde{Y}_n\}$ mit $\tilde{Y}_n := Y_{n\wedge\tau}$ gilt

$$\mathbb{E}[\tilde{Y}_{n+1}|\sigma(Y_0, \dots, Y_n)] \le \tilde{Y}_n - \epsilon \mathbb{1}\{\tau > n\} \quad \text{für ein } \epsilon > 0.$$

Dann gilt für jeden konst. Startwert Y_0 die Ungleichung

$$\mathbb{E}[\tau] \le Y_0/\epsilon < \infty.$$

Satz. Angenommen, $Y_0 > r$, $\mathbb{E}[\tilde{Y}_{n+1}|\sigma(Y_0, \dots, Y_n)] \ge \tilde{Y}_n$ und

$$\exists\, M > 0 \,:\, \mathbb{E}[|\tilde{Y}_{n+1} - \tilde{Y}_n||\sigma(Y_0, \dots, Y_n)] \le M \quad \text{fast sicher.}$$

Dann gilt $\mathbb{E}[\tau] = \infty$.

Sei $\{Z_n\}$ eine Markovkette auf $\mathbb{N}_0$. Definiere

$$\begin{aligned} m_1(x) &:= \mathbb{E}[Z_1 - Z_0 \quad |Z_0 = x] = \textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} k p(x, x+k), \\ m_2(x) &:= \mathbb{E}[(Z_1 - Z_0)^2 \; |Z_0 = x] = \textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 p(x, x+k). \end{aligned}$$

Bem. Falls $m_1(x) \le -\epsilon$ für alle $x \ge x_0$, so können wir direkt den vorletzten Satz verwenden: Die Stoppzeit $\tau_r := \min\{n \ge 0 \,|\, Z_n \le r\}$ hat endlichen Erwartungswert für jedes $r \ge x_0$.

Frage. Was passiert in dem Fall, wenn $m_1(x)$ von Null nicht getrennt ist? Hier hängt vieles von $m_2(x)$ ab.

Satz. Falls es ein $\epsilon > 0$ gibt mit

$$\forall\, x \ge x_0 \,:\, 2xm_1(x) + m_2(x) \le -\epsilon,$$

so ist die Kette $\{Z_n\}$ positiv rekurrent.

Beweisidee. Betrachte $Y_n = Z_n^2$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[Y_{n+1} - Y_n|\sigma(Z_0, \dots, Z_n)] \le -\epsilon \quad \text{auf } \{Y_n \ge x_0^2\}.$$

Somit ist $\{Y_n\}$ und damit auch $\{Z_n\}$ rekurrent.

Bsp. Angenommen, $m_1(x) \sim -c/x$ und $m_2(x) \sim 1$. Dann ist $2xm_1(x) + m_2(x) \sim 1 - 2c$. Für $c > 1/2$ ist die Kette pos. rekurrent.

Satz. Sei $\{Z_n\}$ eine irred. Kette mit $|Z_{n+1} - Z_n| \le B$ fast-sicher für alle n und ein $B > 0$. Außerdem gelte $\inf_x m_2(x) > 0$.

- Falls $\forall\, x \ge x_1 \,:\, 2xm_1(x) \le (1-\epsilon)m_2(x)$, so ist $\{Z_n\}$ rekurrent.
- Falls $\forall\, x \ge x_2 \,:\, 2xm_1(x) \ge (1+\epsilon)m_2(x)$, so ist $\{Z_n\}$ transient.

Bsp. Sei $\{Z_n\}$ eine einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ mit $Z_{n+1} - Z_n \in U_d$ wobei $U_d = \{\pm e_1, \dots, \pm e_d\}$, alle gleich wahrscheinlich. Wir wissen:

$$\{Z_n\} \text{ ist rekurrent} \iff d \le 2.$$

Dies können wir auch wie folgt zeigen: Betrachte $X_n := \|Z_n\|$. Dann:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|Z_n = x] &= \ldots = \tfrac{1/2 - 1/d}{\|x\|} + O(1/\|x\|^2) \\ \mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2|Z_n = x] &= \ldots = 1/d + O(1/\|x\|) \end{aligned}$$

Für $d = 1$ ist also

$$\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|X_n = x] \le (1-\epsilon)\mathbb{E}[(X_1 - X_0)^2|Z_0 = x]/(2\|x\|)$$

Mit Hilfe von $Y_n := \log(1 + X_n)$ erhalten wir, dass $\{X_n\}$ rekurrent ist. Bei $d \ge 3$ gilt

$$\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|Z_n = x] \ge (1+\epsilon)\mathbb{E}[(X_1 - X_0)^2|Z_0 = x]/(2\|x\|)$$

Für $d = 2$ können wir den vorh. Satz leider nicht benutzen. Man kann den Satz aber verbessern, sodass aus

$$2xm_1(x) \le (1 + \tfrac{1-\epsilon}{\log x})m_2(x)$$

schon Rekurrenz folgt.

Charakt. von (pos.) Rekurrenz / Transienz

Lem. Sei $\{Z_n\}$ eine irreduzible abzählbare Markovkette. Falls es eine endliche Menge $A \subseteq E$ mit

$$\mathbb{E}[\tau_A|Z_0 = x] < \infty \quad \forall\, x \in A$$

gibt, so ist $\{Z_n\}$ positiv rekurrent.

Satz (Kriterium von Foster). Sei $\{Z_n\}$ eine irreduzible abzählbare Markovkette. Dann sind äquivalent:

- Die Kette $\{Z_n\}$ ist positiv rekurrent.
- Es gibt eine Abbildung $f : E \to \mathbb{R}_{\ge 0}$, ein $\epsilon > 0$ und eine endliche Teilmenge $A \subseteq E$ mit

$$\begin{aligned} &\forall\, x \in E : &&\mathbb{E}[f(Z_1)|Z_0 = x] < \infty \\ \text{und} \quad &\forall\, x \in E \setminus A : &&\mathbb{E}[f(Z_1) - f(Z_0)|Z_0 = x] \le -\epsilon. \end{aligned}$$

Bem. Man kann sogar immer $\epsilon = 1$ und $|A| = 1$ erreichen.

TODO: Konstruktion aus dem Beweis beschreiben

Satz. Sei $\{Z_n\}$ eine irr. Markovkette auf E, E abzählbar. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \{Z_n\} \text{ ist transient} \iff &\exists\, A \ne \emptyset \subset E : \exists\, f : E \to \mathbb{R}_{\ge 0} : \\ &\inf_{x\in E} f(x) < \inf_{x\in A} f(x), \\ &\forall\, x \in E \setminus A : \mathbb{E}[f(Z_1) - f(Z_0) \,|\, Z_0 = x] \le 0. \end{aligned}$$

Lem. Im Kontext der rechten Seite des Satzes: Sei $y \in E \setminus A$ mit $y < \inf_{x\in A} f(x)$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}(\tau_A < \infty \,|\, Z_0 = y) \le f(y)/\inf_{x\in A} f(x).$$

Kor. Sei $\{Z_n\}$ eine irr. Markovkette auf E, E abzählbar. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \{Z_n\} \text{ ist transient} \iff &\exists\, x_0 \in E : \exists\, h : E \to \mathbb{R} : \\ &h \text{ beschränkt, nicht konstant und} \\ &\forall\, x \ne x_0 : \mathbb{E}[f(Z_1) - f(Z_0) \,|\, Z_0 = x] = 0. \end{aligned}$$

Def. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ (mit $|X| = \infty$) heißt **unbeschränkt**, falls $\sup_{x\in B} f(x) = \infty$ für jede unendliche Teilmenge $B \subseteq X$.

Satz. Sei $\{Z_n\}$ eine irr. Markovkette auf E, E abzählbar. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \{Z_n\} \text{ ist rekurrent} \iff &\exists \text{ endliche Teilmenge } A \subset E : \\ &\exists \text{ unbeschränkte Funktion } f : E \to \mathbb{R}_{\ge 0} : \\ &\forall\, x \in E \setminus A : \mathbb{E}[f(Z_1) - f(Z_0) \,|\, Z_0 = x] \le 0. \end{aligned}$$

Harmonische Fktn für Übergangskerne

Def. $P = (p(x,y))_{x,y\in E}$ heißt **substochast. Übergangskern**, falls

- $p(x,y) \geq 0$ für alle $x, y \in E$ und
- $\sum_{y\in E} p(x,y) \leq 1$ für alle $x \in E$.

Er heißt *strikt substochastisch*, falls $\sum_{y\in E} p(x_0,y) < 1$ für mindestens ein $x_0 \in E$.

Notation. Für $h : E \to \mathbb{R}$ sei $Ph : E \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$(Ph)(x) := \sum_{y\in E} p(x,y)h(y).$$

(Annahme dabei: h ist *integrierbar*, d. h. $\sum_{y\in E} p(x,y)|h(y)| < \infty$.)

Def. Eine integrierbare Funktion $h : E \to \mathbb{R}$ heißt

$$\begin{Bmatrix} \textbf{harmonisch} \\ \textbf{superharmonisch} \end{Bmatrix} \text{ falls } h(x) \begin{Bmatrix} = \\ \geq \end{Bmatrix} (Ph)(x) \;\; \forall x \in E.$$

h heißt *strikt superharmonisch*, falls $h(x_0) > \sum_{y\in E} p(x_0,y)h(y)$ für mindestens ein $x_0 \in E$.

Bsp. Bei Diskretisierung der Laplace-Gleichung auf $\mathbb{R}^2$ mit der Finite-Differenzen-Methode erhält man das Gleichungssystem

$$Ph = h,$$

wobei P der stochastische Übergangskern der einfachen symmetrischen Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^2$ ist.

Bsp. Sei $\{Z_n\}$ eine irreduzible Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$. Setze

$$h(x) := \mathbb{P}(\forall n \geq 0 : Z_n > 0 \,|\, Z_0 = x) \quad \text{für } x \in \mathbb{Z}.$$

Dann ist h harmonisch für den substochastischen Übergangskern

$$P(x,y) := p(x,y)\mathbb{1}\{x \geq 1, y \geq 1\}.$$

Verfahren. Falls P substochastisch ist, so kann man die Gleichung für harmonische Fktn zu einer Gleichung mit einem stochastischen (aber leider nicht irreduziblen) Kern umformulieren: Setze

$$E' := E \sqcup \{\dagger\}$$

und definiere $p' : E' \times E' \to [0,1]$ für $x, y \in E$ durch

$$\begin{aligned} p'(x,y) &:= p(x,y), & p'(x,\dagger) &:= 1 - \sum_{y\in E} p(x,y), \\ p'(\dagger,y) &:= 0, & p'(\dagger,\dagger) &= 1. \end{aligned}$$

Beachte: p' ist stochastisch. Für $h : E \to \mathbb{R}$ sei $h' : E' \to \mathbb{R}$ def. durch

$$h'|_E := h \quad \text{und} \quad h'(\dagger) := 0.$$

Dann gilt für alle $h : E \to \mathbb{R}$:

$$h \text{ ist harmonisch für } p \iff h' \text{ ist harmonisch für } p'.$$

Bem. Ist P stochastisch, so ist jede Konstante harmonisch. Ist P strikt substochastisch, so ist jede Konstante $\neq 0$ strikt superharmonisch.

Bsp. Sei P ein substochastischer Kern und

$$G(x,y) := \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(x,y)$$

die *Green'sche Funktion*. Für festes $y \in E$ betrachte die Funktion

$$h_y(x) := G(x,y).$$

Ist y *transient* (d. h. $G(y,y)$), so ist h_y superharmonisch.
Ist P *irreduzibel* (d. h. $\forall x, y \in E : \exists n \geq 1 : p^{(n)}(x,y) > 0$), so gilt außerdem $h_y(x) > 0$ für alle $x \in E$.

Lem (*Maximumsprinzip*)**.** Sei P irreduzibel, substochastisch und h harmonisch für P. Falls ein Zustand $x_0 \in E$ mit

$$M := h(x_0) = \max_{x\in E} h(x)$$

existiert, so ist $h \equiv M$ konstant.
Ferner gilt: Falls $M \neq 0$, so ist P stochastisch.

Lem. Sei P irreduzibel und $h \geq 0$ superharmonisch. Dann gilt:

- $P^{(n)}h$ ist superharmonisch für alle $n \geq 0$.
- Entweder ist $h \equiv 0$ konstant oder $\forall x \in E : h(x) > 0$.

Lem. Sei $\{h_i\}_{i\in I}$ eine Familie von superharmon. Funktionen.
Ist $h(x) := \inf_{i\in I} h(x)$ integrierbar, so ist auch h superharmonisch.

Satz. Sei $\{Z_n\}$ eine irred. Kette mit Übergangsmatrix P. Dann gilt:

$\{Z_n\}$ ist rekurrent $\iff$ jedes für P superharmon. $f \geq 0$ ist konstant.

Bem. Jeder strikt substochastische, irreduzible Kern ist transient:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(x,y) < \infty \quad \forall x, y \in E$$

Lem/Def. Sei P ein substoch. Kern und $h > 0$ superharmonisch. Die **Doob'sche h-Transformation** von P ist der durch

$$p_h(x,y) := \tfrac{h(y)}{h(x)} \cdot p(x,y), \quad x, y \in E$$

definierte substochastische Übergangskern. Des Weiteren gilt:

$$h \text{ harmonisch} \iff P_h \text{ stochastisch.}$$

Lem. $(P_h)^n = (P^n)_h$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und h substochastisch für P

Bsp. Sei P der strikt substoch. Übergangskern auf $\mathbb{N}_1$ mit

$$p(i,j) = 1/2 \text{ für } i, j \in \mathbb{N}_1 \text{ mit } |i-j| = 1, \quad p(i,j) = 0 \text{ sonst.}$$

Die harmonischen Funktionen sind $\{h_c \,|\, c \in \mathbb{R}\}$ mit $h_c(k) := k \cdot c$.
Die h_c-transformierte für bel. $c > 0$ ist dann

$$\begin{aligned} p_h(i,j) &= \tfrac{j}{2i} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{j-i}{2i} \quad \text{für } i, j \in \mathbb{N}_1 \text{ mit } |i-j| = 1, \\ p_h(i,j) &= 0 \text{ sonst.} \end{aligned}$$

Sei $\{Z_n\}$ die Markovkette auf $\mathbb{N}_1$ mit Übergangsmatrix P_h und $\{\tilde{Z}_n\}$ die einfache symm. Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} p_h^{(n)}(x,y) &= y/x \cdot p^{(n)}(x,y) \\ &= y/x \cdot \mathbb{P}(\tilde{Z}_n = y, \forall 0 \leq k \leq n : \tilde{Z}_k > 0 \,|\, Z_0 = x) \\ &= y/x \cdot 2^{-n} \cdot \left(\binom{n}{1/2 \cdot (n+y-x)} - \binom{n}{1/2 \cdot (n-y-x)} \right). \end{aligned}$$

Potentiale und Ladungen

Sei P im Folgenden transient, d. h.

$$0 < G(x,y) < \infty \quad \forall x, y \in E.$$

Def. Eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ heißt **G-integrierbar**, falls

$$\sum_{y\in E} G(x,y)|f(y)| < \infty \quad \forall x \in E.$$

Das **Potential** $g = Gf$ von einem solchen f ist def. durch

$$g(x) := \sum_{y\in E} G(x,y)f(y) \quad x \in E.$$

Dann heißt f auch **Ladung** von g.

Lem. Für $g = Gf$ gilt:

- $f(x) = g(x) - Pg(x)$
- Ist $f \geq 0$, so ist g superharmonisch auf E und harmonisch auf $\{x \in E \,|\, f(x) = 0\}$.
- $P^n g \to 0$ für $n \to \infty$ punktweise

Satz (**Riesz'sche Zerlegung**)**.** Für jede superharmonische Funktion $u \geq 0$ existiert ein Potential $g = Gf$ und eine harmonische Funktion $h \geq 0$ mit $u = g + h$. Diese Zerlegung ist eindeutig.

Martin-Kompaktifizierung

Bsp. Sei P irreduzibel auf $E = E_0 \sqcup R$, wobei E_0 endlich ist und wir R als den Rand ansehen. Setze $\widetilde{E} \coloneqq E \cup \{\dagger\}$ und betrachte $\widetilde{P}$ mit

$$\widetilde{P}(x,y) \coloneqq P(x,y) \text{ für } x \in E_0, y \in E, \quad \widetilde{P}(x,\dagger) \coloneqq 1 \text{ für } x \in R \cup \{\dagger\}.$$

Für alle $r \in R$ ist dann $\widetilde{G}(-,r)$ harmonisch auf E_0. Man kann zeigen, dass jede harmonische Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ eindeutig durch $f|_R$ festgelegt ist. Somit gilt

$$f = \sum_{s \in R} \widetilde{G}(-,s) f(s),$$

da beide Funktionen harmonisch sind und auf R übereinstimmen.

Situation. Sei E abzählbar, P transient und es existiere $x_0 \in E$ mit $G(x_0, y) > 0$ für alle $y \in E$. Sei $N : E \to \mathbb{N}$ abzählbar.

Def. Der **Martin-Kern** ist dann die Abbildung

$$K(x,y) \coloneqq G(x,y)/G(x_0,y).$$

Lem. $K(x,y) \le F(x_0,x)^{-1}$ für alle $x, y \in E$

Def. Auf E ist eine Metrik ρ definiert durch

$$\rho(y,z) \coloneqq |2^{-N(y)} - 2^{-N(z)}| + \sum_{x \in E} |K(x,y) - K(x,z)| F(x_0,x) 2^{-N(x)}.$$

Def. (E^*, ρ) sei die (Cauchy-)Vervollständigung von (E, ρ).
Der **Martin-Rand** ist $\partial E \coloneqq E^* \setminus E$.

Bem. Der Martin-Rand besteht aus Äquivalenzklassen von Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E mit

- $N(x_n) \to \infty$ für $n \to \infty$ und
- $K(x, x_n)$ ist Cauchyfolge für alle $x \in E$.

Lem. Jede Folge in E hat eine Teilfolge, die eine Cauchy-Folge ist (und somit in E^* konvergiert).

Kor. (E^*, ρ) ist kompakt.

Lem/Def. $K(x,-)$ ist gleichmäßig stetig auf E und lässt sich deswegen eindeutig auf E^* fortsetzen durch

$$K(x,\alpha) \coloneqq \lim_{n\to\infty} K(x,\alpha_n) \quad \text{für } \alpha = [(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}].$$

Lem. Sei $u \ge 0$ superharmonisch. Dann gilt:

- u ist Potential $\iff$ $P^n u \to 0$ punktweise für $n \to \infty$
- $u \le v$, v Potential $\implies$ u Potential
- $K(x,\alpha)$ ist für jedes $\alpha \in \delta E$ superharmonisch in x.

Satz (**Martin-Darstellung**)**.** Für jede harmonische Funktion $h \ge 0$ existiert ein Maß $\mu_h(\mathrm{d}\,\alpha)$ auf ∂E, sodass

$$h(x) = \int_{\partial E} K(x,\alpha) \mu_h(\mathrm{d}\,\alpha).$$

Kor. Jede superharmonische Funktion $u \ge 0$ lässt sich schreiben als

$$u(x) = \int_{E^*} K(x,y) \mu_u(\mathrm{d}\,y)$$

mit einem Maß μ_u auf E^*.

Bem. Man kann zeigen: Die Martin-Darstellung wird eindeutig wenn man den **minimalen Martin-Rand**

$$\partial_m E \coloneqq \{\alpha \in \partial E \,|\, K(-,\alpha) \text{ ist minimal harmonisch}\}$$

anstatt ∂E betrachtet. Dabei heißt eine harmonische Funktion h *minimal harmonisch*, falls alle harmonischen Funktionen $v \le h$ von der Form $v = c \cdot h$ mit $c \in \mathbb{R}$ sind.

Resultat. Für alle $A \subset \mathfrak{B}(\partial_m E)$ gilt

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} Z_n = Z_\infty \in A \,|\, Z_0 = x) = \int_A K(x,\alpha) \mu_1(\mathrm{d}\,\alpha).$$

Bem. Insbesondere $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} Z_n = Z_\infty \in A \,|\, Z_0 = x_0) = \mu_1(A)$

Bem. Sei $h > 0$ harmonisch mit $h(x_0) = 1$. Sei P_h die h-Transformation von P. Für den zugeh. Martin-Kern gilt dann $K_h(x,y) = K(x,y)/h(x)$. Es folgt

$$1 = \int_{\partial E} K_h(x,\alpha) \mu_h(\mathrm{d}\,\alpha) \quad \text{für alle } x \in E.$$

Somit stellt μ_h die konstante Funktion 1 bzgl. K_h dar. Mit dem Resultat folgt für die Markovkette $\{Z_n^h\}$ mit Übergangskern P_h:

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} Z_n^h = Z_\infty^h \in A \,|\, Z_0^h = x) = \int_A K_h(x,\alpha) \mu_h(\mathrm{d}\,\alpha)$$

für alle $A \in \mathfrak{B}(\partial E)$. Für $h = K(-,\beta)$ mit $\beta \in \partial_m E$ kann man zeigen: $\mu_{K(-,\beta)} = \delta_\beta$. Somit ist

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} Z_n^{K(-,\beta)} \in A \,|\, Z_0 = x_0) = \mathbb{1}\{\beta \in A\}.$$

Bsp. Sei $\{Z_n\}$ die Markovkette auf $\mathbb{N}_0^2$ mit

$$p((x,y),(x+1,y)) = \tfrac{1}{2} = p((x,y),(x,y+1)).$$

Startpunkt ist $(x_0, y_0) = (0,0)$. Dann gilt

$$K((x,y),(m,n)) \sim 2^{x+y} \alpha_{m,n}^x (1 - \alpha_{m,n})^y$$

mit $\alpha_{m,n} \coloneqq m/(m+n)$. Die Folge $\{K((x,y),(m_k,n_k))\}$ mit $(m_k, n_k) = Z_k$ konvergiert genau dann, falls $\{\alpha_{m_k,n_k}\}$ konvergiert. Diese Folgen bilden den Martin-Rand.