Zusammenfassung Petrinetze

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Def. Ein **Netzgraph** ist ein Tripel (S, T, W), wobei S und T disjunkte, endliche Mengen sind und $W : S \times T \cup T \times S \to \mathbb{N}$. Dadurch ist ein gerichteter, gewichteter, bipartiter Graph mit Kantenmenge $F = \{(x, y) \mid W(x, y) \neq 0\}$ gegeben.

Notation	Bezeichnung	Symbol
$t \in T$	Transition	$\square$
$s \in S$	Stelle, Platz	$\bigcirc$
$(x, y) \in F$	Kante	$\longrightarrow$ falls $W(x, y) = 1$
		$\xrightarrow{w}$ falls $w \coloneqq W(x, y) > 1$

Def. Sei $x \in S \cup T$.

- ${}^\bullet x \coloneqq \{y \mid (y, x) \in F\}$ heißt **Vorbereich** von x und
- $x^\bullet \coloneqq \{y \mid (x, y) \in F\}$ heißt **Nachbereich** von x.
- x heißt **isoliert**, falls ${}^\bullet x \cup x^\bullet = \emptyset$.
- x heißt **vorwärts-verzweigt**, falls $|x^\bullet| \geq 2$
- x heißt **rückwärts-verzweigt**, falls $|{}^\bullet x| \geq 2$

Def. $(x, y) \in S \times T \cup T \times S$ bilden eine **Schlinge** falls $(x, y) \in F$ und $(y, x) \in F$.

Def. Eine **Markierung** ist eine Abbildung $M : S \to \mathbb{N}$. Eine Teilmenge $S' \subseteq S$ heißt **markiert** unter M, falls $\exists\, s \in S' : M(s') > 0$, andernfalls *unmarkiert*. Ein Element $s \in S$ heißt *(un-)markiert*, falls $\{s\} \subseteq S$ es ist.

Notation. $\mathfrak{M}(S) \coloneqq \{M : S \to \mathbb{N}\}$

Def. Ein **Petrinetz** $N = (S, T, W, M_N)$ besteht aus

- einem Netzgraphen (S, T, W) und
- einer *Anfangsmarkierung* $M_N : S \to \mathbb{N}$.

Notation. Für eine feste Transition $t \in T$ ist

$$t^- : S \to \mathbb{N},\ \ s \mapsto W(s, t), \qquad t^+ : S \to \mathbb{N},\ \ s \mapsto W(t, s)$$

Def. Eine Transition $t \in T$ heißt **aktiviert** unter einer Markierung M, notiert $M[t\rangle$, falls

$$\forall\, s \in S : W(s, t) \leq M(s) \iff t^- \leq M.$$

Ist t aktiviert, so kann t *schalten* und es entsteht die *Folgemarkierung* $M' \coloneqq M + \Delta t$, wobei

$$\Delta t : S \to \mathbb{Z},\ \ s \mapsto W(t, s) - W(s, t).$$

Notation. $M[t\rangle M'$

Def. Für $w = t_1 \cdots t_n \in T^*$ und Markierungen M und M' gilt

$$M[w\rangle M' \ \ :\iff \ M[t_1\rangle M_1[t_2\rangle \cdots [t_{n-1}\rangle M_{n-1}[t_n\rangle M'$$

für (eindeutig bestimmte) Markierungen $M_1, \ldots, M_{n-1}$. Ein Wort $w \in T^*$ heißt **Schaltfolge** (*firing sequence*) von N, notiert $M_N[w\rangle$, falls $\exists\, M' : M_N[w\rangle M'$.

Notation. $[M\rangle \coloneqq \{M' \mid \exists\, w \in T^* : M[w\rangle M'\}$
$\mathrm{FS}(N) \coloneqq \{w \in T^* \mid M_N[w\rangle\}$ für ein Petrinetz N

Def. M' heißt **erreichbar** von M, falls $M' \in [M\rangle$.

Def. $w \in T^\omega$ heißt **unendliche Schaltfolge** von N, falls alle endlichen Präfixe von w Schaltfolgen von N sind.

Def. Der **Erreichbarkeitsgraph** $\mathfrak{R}(N)$ zu N besitzt die Knoten $[M_N\rangle$ und die Kanten $\{(M, M') \mid \exists\, t : M[t\rangle M'\}$.

Def. Für $w = a_1 \cdots a_n \in A^*$ ist $\mathrm{Parikh}(w) : A \to \mathbb{N},\ \ a \mapsto |i| a_i = a$.

Lem. In $M[w\rangle M'$ hängt M' nur von M und $\mathrm{Parikh}(w)$ ab, genauer

$$M' = M + \textstyle\sum_{t \in T} \mathrm{Parikh}(w)(t) \cdot \Delta t.$$

Lem. $M_1[w\rangle M_2 \implies M + M_1[w\rangle M + M_2$

TODO: Satz 2.8

Lem. Sei N ein Petri-Netz. Dann gilt:

- $\mathrm{FS}(N)$ ist *präfix-abg.*, d. h. $w = vu \in \mathrm{FS}(N) \implies v \in \mathrm{FS}(N)$.
- Ist $[M_N\rangle$ endlich, so ist $\mathrm{FS}(N)$ regulär.

Def. Ein **beschriftetes Petrinetz** $N = (S, T, W, M_N, \ell)$ best. aus

- einem Petrinetz (S, T, W, M_N) und
- einer Transitionsbeschriftung (*labelling*) $\ell : T \to \Sigma \cup \{\lambda\}$, wobei Σ eine Menge von *Aktionen* ist.

Sprechweise. $t \in T$ mit $\ell(t) = \lambda$ heißt *intern* oder *unsichtbar*.

Notation. Für $t \in T^*$ ist $\ell(w) \coloneqq \ell(t_1) \cdots \ell(t_n) \in \Sigma^*$.
Dabei wird λ als das leere Wort in Σ^* aufgefasst.

Def. Mit $t \in T$, $w \in T^*$ und Markierungen M, M' ist definiert:

$$\frac{M[t\rangle M'}{M[\ell(t)\rangle M'} \qquad \frac{M[t\rangle}{M[\ell(t)\rangle} \qquad \frac{M[w\rangle M'}{M[\ell(w)\rangle M'} \qquad \frac{M[w\rangle}{M[\ell(w)\rangle}$$

Def. Die **Sprache** eines beschrifteten Netzes N ist

$$L(N) \coloneqq \{v \in \Sigma^* \mid M_n[v\rangle\}.$$

Def. Ein **beschriftetes Netz mit Endmarkierung** ist ein Tupel $N = (S, T, W, M_N, \ell, \mathrm{Fin})$ wobei

- (S, T, W, M_N, ℓ) ein beschriftetes Netz und
- $\mathrm{Fin} \subseteq \mathfrak{M}(S)$ eine endliche Menge ist.

Die entspr. Sprache ist $L_{\mathrm{fin}}(N) \coloneqq \{v \in \Sigma^* \mid \exists\, M \in \mathrm{Fin} : M_N[v\rangle M\}$.

Notation. $\mathfrak{L}^\lambda \coloneqq \{L_{\mathrm{fin}}(N) \mid N$ beschr. Netz mit Endmarkierung$\}$
$\mathfrak{L} \coloneqq \{L_{\mathrm{fin}}(N) \mid N$ beschr. Netz mit Endmark. ohne interne Trans.$\}$

Satz. $\{$ reguläre Sprachen $\} \subseteq \mathfrak{L}$

Nebenläufigkeit I

Def. Eine Multimenge über X ist eine Funktion $\mu : X \to \mathbb{N}$.

Notation. $\mathfrak{M}(X) \coloneqq \{\mu : X \to \mathbb{N}\}$
$\mu_Y \in \mathfrak{M}(X), x \mapsto |\{\star \mid x \in Y\}|$ für $Y \subset X$,
$\emptyset \coloneqq \mu_\emptyset \in \mathfrak{M}(X), \quad \mu_x \coloneqq \mu_{\{x\}} \in \mathfrak{M}(X)$ für $x \in X$

Def. Ein **Schritt** μ ist eine Multimenge $\mu \neq \emptyset \in \mathfrak{M}(T)$. Der Schritt μ ist **aktiviert** unter M, notiert $M[\mu\rangle$, falls

$$\forall\, s \in S : \mu^-(s) \coloneqq \textstyle\sum_{t \in T} \mu(t) W(s, t) \leq M(s).$$

Durch *Schalten* von μ entsteht die Folgemarkierung $M' \in \mathfrak{M}(S)$ mit

$$M'(s) = M(s) + \textstyle\sum_{t \in T} \mu(t) \cdot (W(t, s) - W(s, t)).$$

Bem. Analog wird verallgemeinert: $M[\mu\rangle M'$, $M[w\rangle$, $M[w\rangle M'$ für $\mu \in \mathfrak{M}(T) \setminus \{\emptyset\}$ bzw. $w \in (\mathfrak{M}(T) \setminus \{\emptyset\})^*$.

Def. $\mathrm{SS}(N) \coloneqq \{w \in (\mathfrak{M}(T) \setminus \{\emptyset\})^* \mid M_N[w\rangle\}$
heißen **Schrittfolgen** (*step sequences*).

Def. Zwei Transitionen $t, t' \in T$ sind

- **nebenläufig** *unter* M, falls $M[t + t'\rangle$,
- **in Konflikt** *unter* M, falls $\neg M[t + t'\rangle$.

Notation. Für $\mu \in \mathfrak{M}(T)$ ist $\ell(\mu)$ die Multimenge mit

$$\ell(\mu) : \Sigma \to \mathbb{N}, x \mapsto \textstyle\sum_{t \in T, \ell(t) = x} \mu(t)$$

(falls die rechte Zahl endlich ist für alle $x \in \Sigma$).
Für $w = \mu_1 \cdots \mu_n \in \mathfrak{M}(T)^*$ ist $\ell(w) \coloneqq \ell(\mu_1) \cdots \ell(\mu_n)$.

Def. Mit $\mu \in \mathfrak{M}(T) \setminus \{0\}$, $w \in (\mathfrak{M}(T) \setminus \{0\})^*$ und M, M' ist defin.:

$$\frac{M[\mu\rangle M'}{M[\ell(\mu)\rangle M'} \qquad \frac{M[\mu\rangle}{M[\ell(\mu)\rangle} \qquad \frac{M[w\rangle M'}{M[\ell(w)\rangle M'} \qquad \frac{M[w\rangle}{M[\ell(w)\rangle}$$

Lem. $M[t_1\rangle, \ldots, M[t_n\rangle \wedge \forall\, i \neq j : {}^\bullet t_i \cap {}^\bullet t_j = \emptyset \implies M[t_1 + \ldots t_n\rangle$

Lem. $M[\mu\rangle M' \wedge \mathrm{Parikh}(w) = \mu \implies M[w\rangle M'$

Bem. Über Schrittfolgen werden somit dieselben Markierungen erreicht wie über Schaltfolgen.

Def. Der **schrittweise Erreichbarkeitsgraph** $\mathfrak{SR}(N)$ besitzt die Knoten $[M\rangle$ und die Kanten $\{(M, M') \mid \exists\, \mu \in \mathfrak{M}(T) \setminus \{\emptyset\} : M[\mu\rangle M'\}$.

Lem. Sei N schlingenfrei. Dann gilt:

$$(\forall\, w \in T^*, \mathrm{Parikh}(w) = \mu : M[w\rangle) \iff M[\mu\rangle$$

Def. Eine Stelle $s \in S$ heißt **n-beschränkt** / **beschränkt**, falls

$$\sup\{M(s) \mid M \in [M_N\rangle\} \leq n \quad / \quad \sup\{M(s) \mid M \in [M_N\rangle\} < \infty.$$

Ein Netz heißt (n-) *beschränkt*, wenn alle Stellen $s \in S$ (n-) beschränkt sind. Ein Netz heißt **sicher**, wenn es 1-beschränkt ist. Ein Netz heißt **strukturell beschränkt**, wenn es bei beliebig geänderter Anfangsmarkierung beschränkt ist.

Prop. $[M_N\rangle$ endlich $\iff$ N beschränkt

Def. Eine Transition $t \in T$ heißt **tot** *unter* M, falls $\forall\, M' \in [M\rangle \,:\, \neg M'[t\rangle$.

- M heißt *tot*, falls alle Transitionen unter M tot sind.
- N heißt *tot*, falls M_N tot ist.
- N heißt **verklemmungsfrei**, falls $\forall\, M \in [M_N\rangle \,:\, \neg(M \text{ tot})$
- t heißt **lebendig** *unter* M, falls $\forall\, M' \in [M\rangle \,:\, \neg(t \text{ ist tot unter } M)$
- t heißt *lebendig*, falls t lebendig unter M_N ist.
- M heißt *lebendig*, wenn alle $t \in T$ unter M lebendig sind.
- N heißt *lebendig*, wenn M_N lebendig ist.

S- und T-Invarianten

Def. Die **Inzidenzmatrix** *eines Netzes* N ist die Matrix $C(N) \in \mathbb{Z}^{|T| \times |S|}$ mit $C(N)_{st} = \Delta t(s)$ für $s \in S$ und $t \in T$.

Bem. Folglich ist $\Delta t = C(N) \cdot t$ (wenn man t als One-Hot-Vektor auffasst) und für $M[w\rangle M'$ ist $M' = M + C(N) \cdot \text{Parikh}(w)$.

Def. Eine **S-Invariante** $y : S \to \mathbb{Z}$ ist eine Lsg von $C(N)^T \cdot y = 0$. Der **Träger** $\text{supp}(y)$ *einer S-Invarianten* y ist $\{s \in S \,|\, y(s) \neq 0\}$.

Notation. $S\text{-Inv}(N) \coloneqq \{\ S\text{-Invarianten von } N\ \} = \ker(C(N)^T)$

Lem/Def. Das Netz N heißt **von S-Invarianten überdeckt**, falls folgende äquivalente Bedingungen gelten:

- N besitzt eine positive (d. h. $\forall\, s \in S \,:\, y(s) > 0$) S-Invariante.
- Für alle $s \in S$ gibt es eine nichtnegative (d. h. $\forall\, s \in S \,:\, y(s) \geq 0$) S-Invariante mit $s \in \text{supp}(y)$.

Lem. $y \in S\text{-Inv}(N) \implies \forall\, M \in [M_N\rangle \,:\, y^T \cdot M = y^T \cdot M_N$

Bem. Das Lemma kann verwendet werden um zu zeigen, dass ein M nicht erreichbar ist.

Lem. Sei keine Transition in N tot. Dann gilt für $y \in \mathbb{Z}^S$:

$$\forall\, M \in [M_N\rangle \,:\, y^T \cdot M = y^T \cdot M_N \implies y \in S\text{-Inv}(N)$$

Lem. Sei $s \in S$ und $y \in S\text{-Inv}(N)$ nichtnegativ mit $y(s) > 0$. Dann ist s beschränkt, genauer $(y^T \cdot M_N / y(s))$-beschränkt.

Lem. Ist N von S-Invarianten überdeckt, so ist N strukturell beschränkt.

TODO: Umkehrung, siehe Buch von Starke

Def. Ein **home state** ist eine Markierung M mit

$$\forall\, M' \in [M\rangle \,:\, M \in [M'\rangle.$$

Ein Netz N heißt **reversibel**, wenn M_N ein home state ist.

Lem. Angenommen, N ist reversibel und keine Transitionen sind tot unter M_N. Dann ist N lebendig.

Bem. Es gibt lebendige, sichere Netze, die *nicht* von S-Invarianten überdeckt sind.

Def. Eine **T-Invariante** $x : T \to \mathbb{Z}$ ist eine Lsg von $C(N) \cdot x = 0$. Das Netz N heißt **von T-Invarianten überdeckt**, wenn es eine positive T-Invariante gibt.

Notation. $T\text{-Inv}(N) \coloneqq \{\ T\text{-Invarianten von } N\ \} = \ker(C(N))$

Lem. Sei $w \in T^*$ mit $M[w\rangle M'$. Dann gilt:

$$\text{Parikh}(w) \in T\text{-Inv}(N) \iff M = M'$$

Satz. Ist N lebendig und beschränkt, so ist N von T-Invarianten überdeckt.

Einige Entscheidbarkeitsprobleme

Problem (E – **Erreichbarkeit**)**.** Gegeben seien ein Netz N und eine Markierung M. Frage: Ist M erreichbar in N?

Problem (0-E – **0-Erreichbarkeit**)**.** Gegeben seien ein Netz N. Frage: Ist die Nullmarkierung erreichbar?

Bem. Diese Probleme sind lösbar, falls der Erreichbarkeitsgraph endlich ist.

Problem (TE – **Teilerreichbarkeit**)**.** Gegeben ein Netz N, eine Teilmenge $S' \subseteq S$ und $M : S' \to \mathbb{N}$. Frage: Gibt es eine erreichbare Markierung $M \in \mathfrak{M}(S)$ mit $M|_{S'} = M'$?

Def.
- Ein Entscheidungsproblem A ist auf ein Entscheidungsproblem B **reduzierbar** (notiert $A \mapsto B$), falls ein Lösungsalgorithmus für A existiert, welcher einen (vllt. gar nicht existenten!) Lösungsalgorithmus für B verwenden darf.
- A ist **linear / polynomiell many-one-reduzierbar** *auf* B, falls aus einer Instanz I von A in linearer / polynomieller Zeit eine Instanz I' von B berechnet werden kann, sodass die Antwort auf I gleich der Antwort auf I' ist. Notation: $A \xmapsto{\text{lin}}_M B$ / $A \xmapsto{\text{poly}}_M B$

Satz. (0-E) $\xmapsto{\text{lin}}_M$ (E) $\xmapsto{\text{lin}}_M$ (TE) $\xmapsto{\text{lin}}_M$ (0-E)

Beweis ((TE) $\xmapsto{\text{lin}}_M$ (0-E))**.** Konstruiere $\overline{N} = (\overline{S}, \overline{T}, \overline{W}, M_{\overline{N}})$ mit

$$\begin{aligned}
\overline{S} &\coloneqq S \amalg \{\overline{s'} \,|\, s' \in S'\} \\
\overline{T} &\coloneqq T \amalg \{t_{s'} \,|\, s' \in S'\} \amalg \{t_s \,|\, s \in S \setminus S'\} \\
\overline{W} &\coloneqq W \cup \{s \to t_s \,|\, s \in S \setminus S'\} \cup \{s' \to t_{s'} \leftarrow \overline{s'} \,|\, s' \in S'\} \\
M_{\overline{N}} &\coloneqq (s \in S \mapsto M_N(s),\ \ \overline{s'} \mapsto M'(s'))
\end{aligned}$$

Dann: M' teilerreichbar in $N \iff$ Nullmark. erreichbar in $\overline{N}$

Satz. (E) ist entscheidbar.

TODO: Beweis lesen, zusammenfassen

Problem (L – **Lebendigkeit**)**.** Gegeben N. Frage: Ist N lebendig?

Problem (EL – **Einzellebendigkeit**)**.** Gegeben seien N und $t \in T$. Frage: Ist t lebendig?

Satz. (L) ist reduzierbar auf (EL)

Beweis. Konstruiere $\overline{N} = (\overline{S}, \overline{T}, \overline{W}, M_{\overline{N}})$ mit

$$\begin{aligned}
\overline{S} &\coloneqq S \amalg \{s_t \,|\, t \in T\} \\
\overline{T} &\coloneqq T \amalg \{t_{\text{afterall}}\} \\
\overline{W} &\coloneqq W \cup \{t \to s_t \,|\, t \in T\} \cup \{s_t \to t_{\text{afterall}} \,|\, t \in T\} \\
M_{\overline{N}} &\coloneqq (s \in S \mapsto M_N(s),\ \ s_t \mapsto 0)
\end{aligned}$$

Dann: N lebendig $\iff$ t_{afterall} lebendig in $\overline{N}$.

Satz. (EL) ist reduzierbar auf (TE)

TODO: Beweis verstehen, zusammenfassen

Satz. (0-E) $\xmapsto{\text{lin}}_M$ Co-(L), das ist (L) mit umgekehrter Antwort

Beweis. Konstruiere $\overline{N} = (\overline{S}, \overline{T}, \overline{W}, M_{\overline{N}})$ mit

$$\begin{aligned}
\overline{S} &\coloneqq S \amalg \{s_{\text{distr}}, s_{\text{control}}\} \\
\overline{T} &\coloneqq T \amalg \{t_s \,|\, s \in S\} \amalg \{t_{\text{distr}}, t_{\text{blackhole}}\} \\
\overline{W} &\coloneqq W \cup \{t \rightleftarrows s_{\text{control}} \,|\, t \in T\} \cup \{t_{\text{distr}} \to s \to t_s \to s_{\text{distr}} \,|\, s \in S\} \\
&\quad \cup \{s_{\text{distr}} \rightleftarrows t_{\text{distr}}\} \cup \{s_{\text{control}} \to t_{\text{blackhole}}\} \\
M_{\overline{N}} &\coloneqq (s \in S \mapsto M_N(s),\ \ s_{\text{distr}} \mapsto 0,\ \ s_{\text{control}} \mapsto 1)
\end{aligned}$$

(Bemerke: Jede Markierung $\hat{M}$ mit $\hat{M}(s_{\text{distr}}) \geq 0$ ist lebendig.)
Dann: Nullmarkierung in N erreichbar $\iff$ $\overline{N}$ nicht lebendig

Satz. (L) $\xmapsto{\text{lin}}_M$ (EL) $\xmapsto{\text{lin}}_M$ (L)

TODO: Beweise nachvollziehen, aufschreiben

Fazit. (L) und (EL) sind entscheidbar, aber mindestens so schwer wie (E), (0-E) und (TE).