Zusammenfassung Markovketten

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Abzählbare Markovketten

Notation. Sei im Folgenden $\{Z_n\}$ eine Markovkette auf einem abzählbaren Zustandsraum E.

Def. Für $x \in E$ definiere die Zufallsvariablen

$$\begin{aligned} \tau_x^{(1)} &\coloneqq \inf\{n > 0 \,|\, Z_n = x\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\ \tau_x^{(k)} &\coloneqq \inf\{n > \tau_x^{(k-1)} \,|\, Z_n = x\}, \quad k > 1. \end{aligned}$$

(Beachte: $\tau_x^{(k)}$ ist eine messbare Abbildung.)

Bem. Ferner gilt $\{\tau_x^{(k)} = n\} \in \sigma(Z_0, Z_1, \ldots, Z_n)$.

Def. Für $x, y \in E$ sei $F(x, y) \coloneqq P(\tau_y^{(i)} < \infty \mid Z_0 = x)$

Lem. Für alle $x, y \in E$ und $k \geq 1$ gilt

$$P(\tau_y^{(k)} < \infty \mid Z_0 = x) = F(x, y) \cdot F(y, y)^{k-1}.$$

Notation. $\tilde{\ell}(y) = \sum_{k=j}^{\infty} \mathbb{1}\{Z_k = y\}$

Dann gilt $P(\tau_y^{(k)} < \infty \mid Z_0 = x) = P(\tilde{\ell} \geq k \mid Z_0 = x)$

Def. Ein Zustand $x \in E$ heißt

- **absorbierend**, falls $p(x, x) = 1$,
- **rekurrent**, falls $F(x, x) = 1$ und
- **transient**, falls $F(x, x) < 1$.

Bem. Absorbierende Zustände sind rekurrent.

Bsp. In der Markovkette

$$\begin{tikzcd} (0) \arrow[r, bend left, "1"] & (1) \arrow[l, bend left, "1-p"] \arrow[r, bend left, "p"] & (2) \arrow[l, bend left, "1-p"] \arrow[r, bend left, "p"] & (3) \arrow[l, bend left, "1-p"] \arrow[r, bend left, "p"] & \cdots \arrow[l, bend left, "1-p"] \end{tikzcd}$$

ist (0) genau dann rekurrent, falls $p \leq 1/2$, ansonsten transient.
TODO: genauer!

Def. Für $y \in E$ sei

$$\ell(y) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}\{Z_k = y\}$$

die **Anzahl der Besuche in y**. Die **Green'sche Funktion** von $\{Z_n\}$ ist $G : E \times E \to [0, \infty]$ mit

$$G(x, y) \coloneqq \mathbb{E}(\ell(y) \mid Z_0 = x).$$

Bem. $G(x, y) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}\{Z_k = y\} \mid Z_0 = x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_k = y \mid Z_0 = x) = \delta_{xy} + \sum_{k=1}^{\infty} p^{(k)}(x, y)$

Satz. Für alle $x, y \in E$ gilt

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{F(x,y)}{1-F(y,y)} & \text{falls } x \neq y, \\ \frac{1}{1-F(y,y)} & \text{falls } x = y. \end{cases}$$

Kor. x ist rekurrent $\iff G(x, x) = \infty$

Satz. ist $x \in E$ rekurrent und $F(x, y) > 0$, so ist y auch rekurrent und $F(x, y) = F(y, x) = 1$.

Bem. $F(x, y) > 0 \iff \exists\, n \geq 1 : P^{(n)}(x, y) > 0$

Def. $\{Z_n\}$ heißt **irreduzibel**, falls $\forall\, x, y \in E : F(x, y) > 0$.

Satz. Sei $\{Z_n\}$ irreduzibel. Dann sind entweder alle Zustände rekurrent oder alle Zustände transient.