Zusammenfassung Term Rewriting aAT

Dies ist eine übersetzte Zusammenfassung des Buches Term Rewriting and All That von Franz Baader und Tobias Nipkow.

Abstrakte Reduktionssysteme

Def. Ein **abstraktes Reduktionssystem** ist ein Tupel $(A, \to)$, wobei $\to \in A \times A$ eine Relation auf A ist.

Def.
$$\begin{array}{rll}
\xrightarrow{0} & := \{(a,a) \mid a \in A\} & \text{Identität} \\
\xrightarrow{i+1} & := \xrightarrow{i} \circ \to & (i+1)\text{-fache Komposition, } i \geq 0 \\
\leftarrow & := \{(t,s) \mid (s,t) \in \to\} & \text{Inverse Relation} \\
\xrightarrow{=} & := (\to) \cup (\xrightarrow{0}) & \text{refl. Hülle} \\
\xrightarrow{*} & := \cup_{i \geq 0} (\xrightarrow{i}) & \text{refl. trans. Hülle} \\
\xrightarrow{+} & := \cup_{i \geq 1} (\xrightarrow{i}) & \text{refl. trans. Hülle} \\
\leftrightarrow & := \to \cup \leftarrow & \text{symm. Hülle} \\
\xleftrightarrow{*} & := (\leftrightarrow)^* & \text{refl. trans. symm. Hülle}
\end{array}$$

Def. Sei $x \in A$ ein Term.

- Der Term x heißt **reduzibel**, falls ein $y \in A$ mit $x \to y$ existiert,
- **irreduzibel** (oder in **Normalform**) falls x nicht reduzibel ist.
- Ein Term $y \in A$ heißt **Normalform** von x, falls $x \xrightarrow{*} y$ und y irreduzibel ist.
- Eine Term y heißt **direkter Nachfolger** von x, falls $x \to y$.
- Eine Term y heißt **Nachfolger** von x, falls $x \xrightarrow{+} y$.
- x und y heißen *joinable*, notiert $x \downarrow y$, falls $\exists\, z : x \xrightarrow{*} z \xleftarrow{*} y$.

Def. Eine Reduktion $\to$ heißt

Church-Rosser	$:\iff$	$x \xleftrightarrow{*} y \implies x \downarrow y$
konfluent	$:\iff$	$y_1 \xleftarrow{*} y \xrightarrow{*} y_2 \implies y_1 \downarrow y_2$
semi-konfluent	$:\iff$	$y_1 \leftarrow y \xrightarrow{*} y_2 \implies y_1 \downarrow y_2$
terminierend	$:\iff$	es gibt keine unendlich absteigende Kette $x_0 \to x_1 \to x_2 \to \ldots$ (auch: *noethersch*)
normalisierend	$:\iff$	jeder Term besitzt eine Normalform
konvergent	$:\iff$	konfluent $\wedge$ normalisierend

Lem. Für eine Reduktion $\to$ sind äquivalent:

- $\to$ ist Church-Rosser
- $\to$ ist konfluent
- $\to$ ist semi-konfluent

Lem. Ist die Reduktion $\to$ konfluent/terminierend/konvergent, so besitzt jeder Term höchstens/mindestens/genau eine Normalform.

Notation. Falls x eine NF y besitzt, so schreibe $x{\downarrow} := y$.

Thm. Ist $\to$ konvergent, so gilt $x \xleftrightarrow{*} y \iff x{\downarrow} = y{\downarrow}$.

Bem. Dies liefert einen einfachen Algorithmus, um $x \xleftrightarrow{*} y$ zu entscheiden: Reduziere die Terme x und y zu Normalformen und vergleiche diese.

Terminierungsbeweise

Lem. $\to$ ist terminierend $\iff$ $\to$ ist eine Wohlordnung

Def. Eine Relation $\to$ heißt

- **endlich verzweigend**, falls jeder Term nur endlich viele direkte Nachfolger besitzt,
- **global endlich**, falls jeder Term nur endl. viele Nachfolger hat,
- **azyklisch**, falls kein Term a mit $a \xrightarrow{+} a$ existiert.

Lem.
- Eine endlich verzweigende Relation ist global endlich, falls sie terminierend ist.
- Eine azykl. Relation ist terminierend, falls sie global endlich ist.

Lem. Sei $(A, \to)$ ein Reduktionssystem und $(B, >)$ eine wohlgeordnete Menge. Gibt es eine streng monotone Abbildung $\varphi : A \to B$, so ist A terminierend.

Lem. Ein endlich verzweigendes Reduktionssystem $(A, \to)$ ist genau dann terminierend, falls es eine streng monotone Abbildung $\varphi : (A, \to) \to (\mathbb{N}, >)$ gibt.

Def. Seien $(A_i, >_i)_{i=1,\ldots,n}$ geordnete Mengen. Die **lexikalische Ordnung** $>_{\text{lex}}$ auf $A_1 \times \ldots \times A_n$ ist definiert durch

$$(x_1, ..., x_n) >_{\text{lex}} (y_1, ..., y_n) :\iff \exists\, k{\leq}n : (\forall\, i{<}k : x_i{=}y_i) \wedge x_k <_k y_k.$$

Lem. Ist $>$ eine strikte (Wohl-) Ordnung, so auch $>_{lex}$.

Def. Eine *Multimenge* M über einer Menge A ist eine Abbildung $M : A \to \mathbb{N}$. Sie ist endlich, falls $\sum_{a \in A} M(a) < \infty$.

Notation. $\mathcal{M}(A) := \{$ Multimengen über A $\}$
$a \in M \;:\iff\; M(a) \geq 1$

Def. Die *Differenz* von Multimengen $M, N \in \mathcal{M}(A)$ ist $M - N \in \mathcal{M}(A)$ mit $(M - N)(a) := \max\{0, M(a) - N(a)\}$.

Def. Sei $>$ eine strikte Ordung auf A. Die **Multimengenordnung** $>_{\text{mul}}$ auf $\mathcal{M}(A)$ ist dann definiert durch

$$M >_{\text{mul}} N \;:\iff\; M \neq N \wedge \forall\, n \in N - M \,:\, \exists\, m \in M - N \,:\, m > n.$$

Lem. Ist $>$ eine strikte (Wohl-) Ordnung, so auch $>_{mul}$.

Konfluenzbeweise

Def. Eine Relation $\to$

- heißt **lokal konfluent**, falls $y_1 \leftarrow y \to y_2 \implies y_1 \downarrow y_2$.
- heißt **stark konfluent**, falls $y_1 \leftarrow y \to y_2 \implies \exists\, z : y_1 \xrightarrow{*} z \xleftarrow{=} y_2$.
- besitzt die **Diamant-Eigenschaft**, falls

$$y_1 \leftarrow y \to y_2 \implies \exists\, z \,:\, y_1 \to z \leftarrow y_2.$$

Lem. Falls $\to_1 \,\leq\, \to_2 \,\leq\, \xrightarrow{*}_1$, so gilt $\xrightarrow{*}_1 = \xrightarrow{*}_2$. Ist zusätzlich $\to_2$ (stark) konfluent, so auch $\to_1$.

Lem.
- Stark konfluente Relationen sind konfluent.
- Eine terminierende Rel. ist konfluent, falls sie lokal konfluent ist.

Def. Zwei Relationen $\to_1$ und $\to_2$ auf A

- **kommutieren**, falls $y_1 \xleftarrow{*}_1 x \xrightarrow{*}_2 y_2 \implies \exists\, z \,:\, y_1 \xrightarrow{*}_2 z \xleftarrow{*}_1 y_2$.
- **kommutieren stark**, falls

$$y_1 \leftarrow_1 x \to_2 y_2 \implies \exists\, z \,:\, y_1 \xrightarrow{=}_2 z \xleftarrow{*}_1 y_2.$$

- besitzen die **Kommutierender-Diamant-Eigenschaft**, falls

$$y_1 \leftarrow_1 x \to_2 y_2 \implies \exists\, z \,:\, y_1 \to_2 z \leftarrow_1 y_2.$$

Lem. Angenommen, $\to_1$ und $\to_2$ sind konfluent und kommutieren. Dann ist auch $\to_1 \cup \to_2$ konfluent.

Universelle Algebra

Def. Eine **Signatur** Σ ist eine Menge von *Funktionssymbolen* zusammen mit einer Aritätsabbildung arity : $\Sigma \to \mathbb{N}$.

Notation. $\Sigma^{(n)} := \text{arity}^{-1}(n)$

Def. Sei Σ eine Signatur und X eine Menge von Variablen (d. h. es gilt $X \cap \Sigma = \emptyset$). Die Menge $T(\Sigma, X)$ der **Σ-Terme über X** ist induktiv definiert durch

- $X \subseteq T(\Sigma, X)$
- $\forall f \in \Sigma^{(n)}, t_1 \in T(\Sigma, X), ..., t_n \in T(\Sigma, X) \;:\; f(t_1, ..., t_n) \in T(\Sigma, X)$

Bem. Falls $X \subseteq Y$, $Y \cap \Sigma = \emptyset$, so gilt $T(\Sigma, X) \subseteq T(\Sigma, Y)$.

Def. Terme t ohne freie Variablen (d. h. $t \in T(\Sigma, \emptyset)$) heißen **Grundterme** oder **geschlossene Terme**.

Def. Die Menge der **Positionen** $\text{Pos}(s)$ eines Terms $s \in T(\Sigma, X)$ ist folgende Menge von Listen von natürlichen Zahlen

- Falls $s = x \in X$: $\text{Pos}(s) := \{\epsilon\}$
- Falls $s = f(s_1, \ldots, s_n)$: $\text{Pos}(s) := \{\epsilon\} \cup \bigcup_{i=1}^n \{ip \mid p \in \text{Pos}(s_i)\}$

Def. Die **Größe** eines Terms $s \in T(\Sigma, X)$ ist $|s| := |\text{Pos}(s)|$.

Def. Der **Subterm** $s|_p$ an der Position $p \in \text{Pos}(s)$ eines Terms s ist

$$s|_\epsilon := s, \qquad f(s_1, \ldots, s_n)|_{iq} := s_i|_q.$$

Die **Ersetzung** $s[t]_p$ von $s|_p$ durch einen Term $t \in T(\Sigma, X)$ ist

$$s[t]_\epsilon := t, \qquad f(s_1, \ldots, s_n)[t]_{iq} := s_i[t]_q.$$

Def. Die **Menge der Variablen** in $s \in T(\Sigma, X)$ ist

$$\text{Var}(s) := \{x \in X \mid \exists\, p \in \text{Pos}(s) \;:\; s|_p = x\}.$$

Bem. Für jeden Term $t \in T(\Sigma, X)$ gilt $t \in T(\Sigma, \text{Var}(t))$.

Def. Sei Σ eine Signatur und V eine abzählbar unendliche Menge von Variablen. Eine $T(\Sigma, V)$-**Ersetzung** ist eine Abbildung $\sigma : V \to T(\Sigma, V)$, für die gilt:

$$\text{Dom}(\sigma) := \{v \in V \mid \sigma(v) \neq v\}$$

ist endlich. Die Menge der $T(\Sigma, V)$-Ersetzungen ist $\text{Sub}(T(\Sigma, V))$. Wir können σ ausdehnen zu einer Abb. $\hat{\sigma} : T(\Sigma, V) \to T(\Sigma, V)$ durch

$$\hat{\sigma}(v) := \sigma(v), \qquad \hat{\sigma}(f(s_1, \ldots, s_n)) := f(\hat{\sigma}(s_1), \ldots, \hat{\sigma}(s_n)).$$

Die *Komposition* zweier Ersetzungen σ und τ ist $\sigma \circ \tau := \hat{\sigma} \circ \tau$.

Def. Eine **Σ-Identität** ist ein Paar $(s, t) \in T(\Sigma, V) \times T(\Sigma, V)$, auch geschrieben $s \approx t$.

Def. Die **Reduktionsrelation** $\to_E$ zu einer Menge E von Σ-Identitäten ist

$$s \to_E t \;\;:\Longleftrightarrow\;\; \exists\, (l \approx r) \in E, p \in \text{Pos}(s), \sigma \in \text{Sub}(T(\Sigma, V)) \;:\; s|_p = \sigma(l) \wedge t = s[\sigma(r)]_p.$$

Def. Eine Relation $\equiv$ auf $T(\Sigma, V)$ heißt

- **abgeschlossen unter Ersetzungen**, falls $s = t \implies \sigma(s) = \sigma(t)$
- **abgeschlossen unter Σ-Operationen**, falls
$$s_1 \equiv t_1, \ldots, s_n \equiv t_n \implies f(s_1, \ldots, s_n) \equiv f(t_1, \ldots, t_n)$$
- **kompatibel mit Σ-Operationen**, falls
$$s \equiv t \implies f(s_1, \ldots, s_{i-1}, s, s_{i+1}, s_n) \equiv f(s_1, \ldots, s_{i-1}, t, s_{i+1}, s_n)$$
- **kompatibel mit Σ-Kontexten**, falls
$$s \equiv s' \implies t[s]_p \equiv t[s']_p$$

Lem. Es sind äquivalent:

- $\equiv$ ist kompatibel mit Σ-Operationen
- $\equiv$ ist kompatibel mit Σ-Kontexten

Ist $\equiv$ reflexiv und transitiv, so ist außerdem äquivalent:

- $\equiv$ ist abgeschlossen unter Σ-Operationen

Thm. Sei E eine Menge von Σ-Identitäten.

- $\to_E$ ist abgeschlossen unter Ersetzungen und kompatibel mit Σ-Operationen
- Die Relation $\overset{*}{\leftrightarrow}_E$ ist die kleinste Äquivalenzrelation, die E enthält und abg. ist unter Ersetzungen und Σ-Operationen.

Def. Eine **Σ-Algebra** $\mathcal{A}$ besteht aus

- einer *Trägermenge* A und
- einer Abbildung $f^{\mathcal{A}} : A^n \to A$ für alle $f \in \Sigma^{(n)}$.

Bsp. $T(\Sigma, V)$ ist eine Σ-Algebra mit

$$f^{T(\Sigma,V)} : T(\Sigma, V)^n \to T(\Sigma, V), \quad (t_1, \ldots, t_n) \mapsto f(t_1, \ldots, t_n).$$

Def.
- Eine **Σ-Subalgebra** von A ist eine Teilmenge $B \subset A$, sodass $f^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_n) \in B$ für alle $f \in \Sigma^{(n)}$ und $b_1, \ldots, b_n \in B$.
- Die von $X \subseteq A$ **erzeugte Σ-Subalgebra** ist die kleinste Σ-Subalgebra, die X enthält.

Def. Ein *Homomorphismus* ϕ zwischen Σ-Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ (mit Trägermengen A bzw. B) ist eine Abbildung $\phi : A \to B$, sodass

$$\phi(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n)).$$

Bem. Damit bilden Σ-Algebren eine Kategorie.

Def. Eine Äquivalenzrelation $\equiv$ auf A heißt **Kongruenz** auf $\mathcal{A}$, falls

$$a_1 \equiv b_1, \ldots, a_n \equiv b_n \implies f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \equiv f^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_n).$$

Lem/Def. Ist $\equiv$ eine Äquivalenz, so wird $A/\equiv$ mit

$$f^{\mathcal{A}/\equiv}([a_1], \ldots, [a_n]) := [f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)]$$

eine Σ-Algebra, die **Quotientenalgebra** $\mathcal{A}/\equiv$.

Lem. Die Kategorie der Σ-Algebren enthält kleine Limiten.

Def. Eine Σ-Algebra heißt **frei**, falls sie isomorph ist zu $F(X) := T(\Sigma, X)$ für eine Menge X von Variablen.

Bem. Diese Setzung definiert einen Funktor $F : \mathbf{Set} \to \Sigma\text{-}\mathbf{Alg}$.

Lem. $F \dashv U$, wobei $U : \mathbf{Set} \to \Sigma\text{-}\mathbf{Alg}$ der Vergissfunktor ist.

Kor. $F(\emptyset) = T(\Sigma, \emptyset)$ ist das initiale Objekt in Σ-**Alg**.

Def.
- Eine Σ-Identität $s \approx t$ **gilt in einer Σ-Algebra** $\mathcal{A}$, falls für alle Homomorphismen $\phi : T(\Sigma, V) \to \mathcal{A}$ gilt: $\phi(s) = \phi(t)$.
- $\mathcal{A}$ ist ein **Modell** einer Menge E von Σ-Algebren (notiert $\mathcal{A} \models E$), falls jede Identität aus E in $\mathcal{A}$ gilt.
- Die Subkategorie von Σ-**Alg** der Modelle von E heißt *durch E definierte* **Σ-Varietät** $\mathcal{V}(E)$.

Def.
- Die Identität $s \approx t$ ist eine **semantische Konsequenz** von E (notiert $E \models s \approx t$), falls $s \approx t$ in allen $\mathcal{A} \in \mathcal{V}(E)$ gilt.
- $\approx_E := \{(s, t) \mid E \models s \approx t\}$ heißt von E **induzierte Theorie**.

Def. Eine Relation $\equiv$ auf $T(\Sigma, V)$ heißt **voll invariant**, falls $s \equiv t \implies \phi(s) \equiv \phi(t)$ für alle Mor. $\phi : T(\Sigma, V) \to T(\Sigma, V)$.

Lem. $\approx_E$ ist eine voll invariante Kongruenz.

Lem/Def. Es sind äquivalent:

- E heißt **trivial**
- $\approx_E = T(\Sigma, V) \times T(\Sigma, V)$
- $x \approx_E y$ gilt für Variablen $x, y \in V$, $x \neq y$
- $\mathcal{V}(E)$ besteht aus Algebren der Kardinalität ≤ 1.

Thm. Sei V eine abzählbar unendliche Menge von Variablen.

- $T(\Sigma, V)/{\approx_E}$ ist eine freie Algebra in $\mathcal{V}(E)$ mit erz. Menge $V/{\approx_E}$. Falls E nicht trivial ist, so ist $V/{\approx_E}$ abzählbar unendlich.
- $T(\Sigma, V)/{\approx_E} \models s \approx t \iff s \approx_E t$

Def. Die durch E **induzierte induktive Theorie** ist

$$\approx_E^I := \{(s, t) \mid T(\Sigma, \emptyset) \models s \approx t\} \subseteq T(\Sigma, V) \times T(\Sigma, V).$$

Bem. $\approx_E \subseteq \approx_E^I$

Umformulierung. Die Relation $\overset{*}{\leftrightarrow}_E$ ist die kleinste voll invariante Kongruenz auf $T(\Sigma, V)$, die E enthält.

Lem. Für eine voll invariante Kongruenz $\equiv$ auf $T(\Sigma, V)$ gilt:

$$E \subseteq \equiv \implies \approx_E \subseteq \equiv.$$

Kor (Birkhoffs Lemma). $\overset{*}{\leftrightarrow}_E \;=\; \approx_E$

Thm. Für eine Klasse $\mathcal{K}$ von Σ-Algebren sind äquivalent:

- $\mathcal{K}$ ist eine Varietät, d. h. $\mathcal{K} = \mathcal{V}(E)$ für eine Menge E von Identitäten.
- $\mathcal{K}$ ist abgeschlossen unter dem Bilden von Unteralgebren, Bildalgebren und direkten Produkten.