Zusammenfassung Term Rewriting aAT

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Dies ist eine übersetzte Zusammenfassung des Buches Term Rewriting and All That von Franz Baader und Tobias Nipkow.

Abstrakte Reduktionssysteme

Def. Ein **abstraktes Reduktionssystem** ist ein Tupel $(A, \to)$, wobei $\to\, \in A \times A$ eine Relation auf A ist.

Def.

$\xrightarrow{0}$	$:= \{(a,a) \mid a \in A\}$	Identität
$\xrightarrow{i+1}$	$:= \xrightarrow{i} \circ \to$	$(i+1)$-fache Komposition, $i \geq 0$
$\leftarrow$	$:= \{(t,s) \mid (s,t) \in \to\}$	Inverse Relation
$\xrightarrow{=}$	$:= (\to) \cup (\xrightarrow{0})$	refl. Hülle
$\xrightarrow{*}$	$:= \cup_{i \geq 0} (\xrightarrow{i})$	refl. trans. Hülle
$\xrightarrow{+}$	$:= \cup_{i \geq 1} (\xrightarrow{i})$	refl. trans. Hülle
$\leftrightarrow$	$:= \to \cup \leftarrow$	symm. Hülle
$\xleftrightarrow{*}$	$:= (\leftrightarrow)^*$	refl. trans. symm. Hülle

Def. Sei $x \in A$ ein Term.

- Der Term x heißt **reduzibel**, falls ein $y \in A$ mit $x \to y$ existiert,
- **irreduzibel** (oder in **Normalform**) falls x nicht reduzibel ist.
- Ein Term $y \in A$ heißt **Normalform** von x, falls $x \xrightarrow{*} y$ und y irreduzibel ist.
- Eine Term y heißt **direkter Nachfolger** von x, falls $x \to y$.
- Eine Term y heißt **Nachfolger** von x, falls $x \xrightarrow{+} y$.
- x und y heißen *joinable*, notiert $x \downarrow y$, falls $\exists\, z : x \xrightarrow{*} z \xleftarrow{*} y$.

Def. Eine Reduktion $\to$ heißt

Church-Rosser	$:\iff$	$x \xleftrightarrow{*} y \implies x \downarrow y$
konfluent	$:\iff$	$y_1 \xleftarrow{*} y \xrightarrow{*} y_2 \implies y_1 \downarrow y_2$
semi-konfluent	$:\iff$	$y_1 \leftarrow y \xrightarrow{*} y_2 \implies y_1 \downarrow y_2$
terminierend	$:\iff$	es gibt keine unendlich absteigende Kette $x_0 \to x_1 \to x_2 \to \dots$ (auch: *noethersch*)
normalisierend	$:\iff$	jeder Term besitzt eine Normalform
konvergent	$:\iff$	konfluent $\wedge$ normalisierend

Lem. Für eine Reduktion $\to$ sind äquivalent:

- $\to$ ist Church-Rosser
- $\to$ ist konfluent
- $\to$ ist semi-konfluent

Lem. Ist die Reduktion $\to$ konfluent/terminierend/konvergent, so besitzt jeder Term höchstens/mindestens/genau eine Normalform.

Notation. Falls x eine NF y besitzt, so schreibe $x{:=}\downarrow\, y$.

Thm. Ist $\to$ konvergent, so gilt $x \xleftrightarrow{*} y \iff x\downarrow = y\downarrow$.

Bem. Dies liefert einen einfachen Algorithmus, um $x \xleftrightarrow{*} y$ zu entscheiden: Reduziere die Terme x und y zu Normalformen und vergleiche diese.

Terminierungsbeweise

Lem. $\to$ ist terminierend $\iff$ $\to$ ist eine Wohlordnung

Def. Eine Relation $\to$ heißt

- **endlich verzweigend**, falls jeder Term nur endlich viele direkte Nachfolger besitzt,
- **global endlich**, falls jeder Term nur endl. viele Nachfolger hat,
- **azyklisch**, falls kein Term a mit $a \xrightarrow{+} a$ existiert.

Lem.
- Eine endlich verzweigende Relation ist global endlich, falls sie terminierend ist.
- Eine azykl. Relation ist terminierend, falls sie global endlich ist.

Lem. Sei $(A, \to)$ ein Reduktionssystem und $(B, >)$ eine wohlgeordnete Menge. Gibt es eine streng monotone Abbildung $\varphi : A \to B$, so ist A terminierend.

Lem. Ein endlich verzweigendes Reduktionssystem $(A, \to)$ ist genau dann terminierend, falls es eine streng monotone Abbildung $\varphi : (A, \to) \to (\mathbb{N}, >)$ gibt.

Def. Seien $(A_i, >_i)_{i=1,\dots,n}$ geordnete Mengen. Die **lexikalische Ordnung** $>_{\text{lex}}$ auf $A_1 \times \dots \times A_n$ ist definiert durch

$$(x_1, \dots, x_n) >_{\text{lex}} (y_1, \dots, y_n) :\iff \exists\, k{\leq}n : (\forall\, i{<}k : x_i{=}y_i) \wedge x_k <_k y_k.$$

Lem. Ist $>$ eine strikte (Wohl-) Ordnung, so auch $>_{lex}$.

Def. Eine *Multimenge* M über einer Menge A ist eine Abbildung $M : A \to \mathbb{N}$. Sie ist endlich, falls $\sum_{a \in A} M(a) < \infty$.

Notation. $\mathcal{M}(A) := \{$ Multimengen über A $\}$
$a \in M \;:\iff\; M(a) \geq 1$

Def. Die *Differenz* von Multimengen $M, N \in \mathcal{M}(A)$ ist $M - N \in \mathcal{M}(A)$ mit $(M - N)(a) := \max\{0, M(a) - N(a)\}$.

Def. Sei $>$ eine strikte Ordung auf A. Die **Multimengenordnung** $>_{\text{mul}}$ auf $\mathcal{M}(A)$ ist dann definiert durch

$$M >_{\text{mul}} N \;:\iff\; M \neq N \wedge \forall\, n \in N - M \,:\, \exists\, m \in M - N \,:\, m > n.$$

Lem. Ist $>$ eine strikte (Wohl-) Ordnung, so auch $>_{mul}$.

Konfluenzbeweise

Def. Eine Relation $\to$

- heißt **lokal konfluent**, falls $y_1 \leftarrow y \to y_2 \implies y_1 \downarrow y_2$.
- heißt **stark konfluent**, falls $y_1 \leftarrow y \to y_2 \implies \exists\, z : y_1 \xrightarrow{*} z \xleftarrow{=} y_2$.
- besitzt die **Diamant-Eigenschaft**, falls

$$y_1 \leftarrow y \to y_2 \implies \exists\, z \,:\, y_1 \to z \leftarrow y_2.$$

Lem. Falls $\to_1 \leq \to_2 \leq \xrightarrow{*}_1$, so gilt $\xrightarrow{*}_1 = \xrightarrow{*}_2$. Ist zusätzlich $\to_2$ (stark) konfluent, so auch $\to_1$.

Lem.
- Stark konfluente Relationen sind konfluent.
- Eine terminierende Rel. ist konfluent, falls sie lokal konfluent ist.

Def. Zwei Relationen $\to_1$ und $\to_2$ auf A

- **kommutieren**, falls $y_1 \xleftarrow{*}_1 x \xrightarrow{*}_2 y_2 \implies \exists\, z \,:\, y_1 \xrightarrow{*}_2 z \xleftarrow{*}_1 y_2$.
- **kommutieren stark**, falls

$$y_1 \leftarrow_1 x \to_2 y_2 \implies \exists\, z \,:\, y_1 \xrightarrow{=}_2 z \xleftarrow{*}_1 y_2.$$

- besitzen die **Kommutierender-Diamant-Eigenschaft**, falls

$$y_1 \leftarrow_1 x \to_2 y_2 \implies \exists\, z \,:\, y_1 \to_2 z \leftarrow_1 y_2.$$

Lem. Angenommen, $\to_1$ und $\to_2$ sind konfluent und kommutieren. Dann ist auch $\to_1 \cup \to_2$ konfluent.