Zusammenfassung Markovketten

Abzählbare Markovketten

Notation. Sei im Folgenden $\{Z_n\}$ eine Markovkette auf einem abzählbaren Zustandsraum E.

Def. Für $x \in E$ definiere die Zufallsvariablen

$$\begin{aligned} \tau_x^{(1)} &:= \inf\{n > 0 \,|\, Z_n = x\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\ \tau_x^{(k)} &:= \inf\{n > \tau_x^{(k-1)} \,|\, Z_n = x\}, \quad k > 1. \end{aligned}$$

(Beachte: $\tau_x^{(k)}$ ist eine messbare Abbildung.)

Bem. Ferner gilt $\{\tau_x^{(k)} = n\} \in \sigma(Z_0, Z_1, \ldots, Z_n)$.

Def. Für $x, y \in E$ sei $F(x,y) := P(\tau_y^{(i)} < \infty \mid Z_0 = x)$

Lem. Für alle $x, y \in E$ und $k \geq 1$ gilt

$$P(\tau_y^{(k)} < \infty \mid Z_0 = x) = F(x,y) \cdot F(y,y)^{k-1}.$$

Notation. $\tilde{\ell}(y) = \sum_{k=j}^{\infty} \mathbb{1}\{Z_k = y\}$

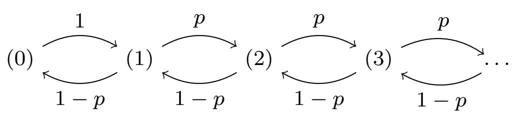
Dann gilt $P(\tau_y^{(k)} < \infty \mid Z_0 = x) = P(\tilde{\ell} \geq k \mid Z_0 = x)$

Def. Ein Zustand $x \in E$ heißt

- **absorbierend**, falls $p(x,x) = 1$,
- **rekurrent**, falls $F(x,x) = 1$ und
- **transient**, falls $F(x,x) < 1$.

Bem. Absorbierende Zustände sind rekurrent.

Bsp. In der Markovkette



ist (0) genau dann rekurrent, falls $p \leq 1/2$, ansonsten transient. TODO: genauer!

Def. Für $y \in E$ sei

$$\ell(y) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}\{Z_k = y\}$$

die **Anzahl der Besuche in y**. Die **Green'sche Funktion** von $\{Z_n\}$ ist $G : E \times E \to [0, \infty]$ mit

$$G(x,y) := \mathbb{E}(\ell(y) \mid Z_0 = x).$$

Bem. $G(x,y) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}\{Z_k = y\} \mid Z_0 = x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_k = y \mid Z_0 = x) = \delta_{xy} + \sum_{k=1}^{\infty} p^{(k)}(x,y)$

Satz. Für alle $x, y \in E$ gilt

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{F(x,y)}{1-F(y,y)} & \text{falls } x \neq y, \\ \frac{1}{1-F(y,y)} & \text{falls } x = y. \end{cases}$$

Kor. x ist rekurrent $\iff G(x,x) = \infty$

Satz. ist $x \in E$ rekurrent und $F(x,y) > 0$, so ist y auch rekurrent und $F(x,y) = F(y,x) = 1$.

Bem. $F(x,y) > 0 \iff \exists\, n \geq 1 : P^{(n)}(x,y) > 0$

Def. $\{Z_n\}$ heißt **irreduzibel**, falls $\forall\, x, y \in E : F(x,y) > 0$.

Satz. Sei $\{Z_n\}$ irreduzibel. Dann sind entweder alle Zustände rekurrent oder alle Zustände transient.

Satz. Eine irreduzible Kette auf einem endlichen Raum ist immer rekurrent.

Rekurrenz und Transienz von Irrfahrten

Sei $\{Z_n\}$ eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$, d. h. $p(x,y) = p(0, y-x) =: q(y-x)$. Mit anderen Worten: Die Zuwächse $\{Z_n - Z_{n-1}\}_{n \geq 1}$ sind i. i. d. Zufallsvariablen.

Bsp. Einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$: $p(0,1) = p$, $p(0,-1) = q = 1-p$

In diesem Fall kann man die Greensche Funktion exakt berechnen:

$$G(x,x) = G(0,0) = \sum_{m=0}^{\infty} p^{(m)}(0,0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p^{(2n)}(0,0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} p^n (1$$

Satz. Sei $\{Z_n\}$ eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit $\mathbb{E}|Z_1 - Z_0| = \sum_{x \in \mathbb{Z}} |x| p(0,x) < \infty$. Dann gilt

$$\{Z_n\} \text{ ist rekurrent} \iff \sum_{x \in \mathbb{Z}} x p(0,x) = 0.$$

Def. Einfache symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ ist eine translationsinvariante Markovkette mit $p(0, \pm e_i) = \frac{1}{2d}$ für $i = 1, \ldots, d$.

Für einfache symm. Irrfahrten gilt:
$p^{(2n)}(x,x) = \sum_{k_1, \ldots, k_d \in \mathbb{N}, k_1 + \ldots + k_d = n} \frac{(2n)!}{(k_1!)^2 \cdot (k_d!)^2} (\frac{1}{2d})^{2n}$
Für $d = 2$ gilt $p^{(2n)}(0,0) = [\binom{2n}{n} (\frac{1}{2})^{2n}]^2$
Mit der Stirling'schen Formel folgt $p^{(2n)}(0,0) \approx \frac{1}{\pi n}$.
Somit gilt $\sum p^{(2n)}(0,0) = \infty$.

Fazit. Die zweidimensionale einfache symm. Irrfahrt ist rekurrent.

Bem. Man kann zeigen: Für einfache symm. Irrfahrten auf $\mathbb{Z}^d$ gilt:

$$p^{2n}(0,0) \leq \frac{C_d}{n^{d/2}}$$

Somit ist die einfache Irrfahrt transient für alle $d \geq 3$.

Def. $\varphi(t) := \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{i(t \cdot x)} p(0,x)$ für $t \in \mathbb{R}^d$

Da die Zuwächse $\{Z_n - Z_{n-1}\}$ i. i. d. sind, so gilt

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{i(t \cdot x)} p^n(0,x) = \varphi^n(t), \quad n \geq 1$$

Inversionsformel: $p^n(0,x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int [-\pi, \pi)^d e^{-i(t \cdot x)} \varphi^n(t) t$

Satz. Für jede Irrfahrt $\{Z_n\}$ auf $\mathbb{Z}^d$ gilt

$$G(0,0) = (\tfrac{1}{2\pi})^d \lim_{\lambda \uparrow 1} \int t \in [-\pi, \pi)^d Re(\tfrac{1}{1 - \lambda \varphi(t)}) t = \infty$$

Bsp. Für die einfache symm. Irrfahrt $\{Z_n\}$ auf $\mathbb{Z}^d$ ist

$$\varphi(t) = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\cos(t_k)$$

Mit der Ungleichung $1-\cos(u) \geq c_0 u^2$ für alle $u \in [-\pi,\pi]$ folgt

$$\varphi(t) \geq \frac{c_0}{d}|t|^2.$$

Es folgt

$$\frac{1}{1-\lambda\varphi(t)} \leq \frac{d}{\lambda c_0}|t|^{-2}$$

Die Funktion $|t|^{-2}$ ist auf $[-\pi,\pi)^d$ für jedes $d \geq 3$ integrierbar. Somit ist die einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$, transient.

Satz. Jede irreduzible Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ mit $d \geq 3$ ist transient.

Bsp. Sei $\{Z_n\}$ eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit $p(0,x) = p(0,-x)$. Angenommen $x^\alpha p(0,x) \to c \in (0,\infty)$ für $x \to \infty$ für ein $\alpha > 1$. Dann gilt

$$1-\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(1-\cos(nt))p(0,n)$$

und

$$\frac{1-\varphi(t)}{|t|^{\alpha-1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|n|^\alpha p(0,n)|t|f(nt)$$

mit $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{|x|^\alpha}$. Außerdem $|n|^\alpha p(0,n) = c + \epsilon_n$, wobei $\epsilon_n \to 0$ für $|n| \to \infty$. Es folgt

$$\frac{1-\varphi(t)}{|t|^{\alpha-1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}c|t|f(nt) + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\epsilon_n|t|f(nt).$$

Für $t \to 0$ hat man

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|t|f(nt) \to \int -\infty^\infty f(x)x$$

und

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\epsilon_n|t|f(nt) \to 0.$$

Es folgt für $\alpha < 3$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\varphi(t)}{|t|^{\alpha-1}} = c\int -\infty\infty\frac{1-\cos(x)}{|x|^\alpha}x < \infty$$

Folglich ist $\frac{1}{1-\varphi(t)}$ für $\alpha < 2$ integrierbar und somit $\{Z_n\}$ transient. Für $\alpha = 2$ ist $\frac{1}{1-\varphi(t)}$ in der Umgebung von null nicht integrierbar und damit $\{Z_n\}$ rekurrent. Für $\alpha > 2$ ist $\sum|x|p(0,x) < \infty$ und somit ist die Irrfahrt rekurrent, da der Erwartungswert der Zuwächse null ist.

Erneuerungstheorie

Situation. Seien $\{X_k\}_{k\geq 1}$ i. i. d. ZVn mit Werten in $\mathbb{N}$ und $P(X_k \geq 1) > 0$. Dann definiert

$$Z_n := \sum_{k=1}^{n} X_k + Z_0$$

eine Irrfahrt $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ mit nicht-negativen Zuwächsen auf $\mathbb{Z}$.

Ziel. Asymptotisches Verhalten von $G(0,x)$ untersuchen.

Wir werden annehmen, dass X_1 eine andere Verteilung haben darf.

Def. Sei $\{a_n\}$ eine Folge. Die Funktion

$$A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$$

heißt **erzeugende Funktion**.

Bsp. Setze $p_k := P(X_2 = k)$, $k \geq 0$. Wir nehmen an, dass $\mathbb{E}[X_2] = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k =: a \in (0,\infty)$. Definiere

$$q_k := \frac{1}{a}\sum_{j=k}^{\infty} p_j, \quad k \geq 1.$$

Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} q_k = 1$. Sei X_1 sodass $P(X_1 = k) = q_k$, $k \geq 1$. Definiere

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{k=1}^{\infty} p_k s^k = \mathbb{E}[s^{X_2}], \quad |s| \leq 1 \\ g(s) &= \sum_{k=1}^{\infty} q_k s^k = \mathbb{E}[s^{X_1}] \\ \psi(s) &= \sum_{x=1}^{\infty} G(0,x)s^x, \quad |s| < 1 \end{aligned}$$

Dann gilt für $|s| < 1$:

$$\psi(s) = \sum_{k=1}^{\infty} g(s)f(s)^{k-1} = \frac{g(s)}{1-f(s)}$$

Außerdem gilt:

$$g(s) = \frac{s}{a(1-s)}(1-f(s))$$

Es folgt:

$$\psi(s) = \sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{a}s^x$$

Somit ist $G(0,x) = \frac{1}{a}$.

Satz. Angenommen, $\mathrm{ggT}\{p \,|\, p_k > 0\} = 1$. Dann gilt für jede Verteilung von X_1, dass

$$G(0,x) \xrightarrow{x\to\infty} \frac{1}{a}.$$

Lem. Sei $g(\theta)$ integrierbar auf $[-\pi,\pi)$. Dann gilt

$$\int [-\pi,\pi) e^{i\theta x} g(\theta)\theta \xrightarrow{|x|\to\infty} \quad (x \in \mathbb{Z})$$

Lem. Seien alle X_k identisch verteilt und $\mathrm{ggT}\{p \,|\, p_k > 0\} = 1$. Dann existiert $L := \lim_{x\to\infty} G(0,x)$.

Def. Seien $\{X_k\}_{k\geq 1}$ unabhängige, nichtneg. ZVn und seien $\{X_k\}_{k\geq 2}$ identisch verteilt. Setze $Z_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$. Der Prozess $\eta(t) := \min\{k \geq 1 \,|\, Z_k > t\}$ heißt **Erneuerungsprozess** und die Funktion $H(t) := \mathbb{E}[\eta(t)]$ heißt **Erneuerungsfunktion**.

Falls X_k nur Werte aus $\mathbb{N}$ annehmen, so können wir das Verhalten von $H(t) - H(t-1)$ wie folgt beschreiben:

$$H(t) = \mathbb{E}[\eta(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} P(\eta(t) > k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_k \leq t)$$

Es folgt

$$H(t) - H(t-1) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_k = t) \xrightarrow{t\to\infty} \frac{1}{\mathbb{E}[X_2]}.$$

Def. $\gamma(t) := t - Z_{\eta(t)-1} \geq 0, \quad \chi(t) := Z_{\eta(t)} - t > 0$

Satz. Sind die Bedingungen des letzten Satzes erfüllt, so gilt

$$P(\gamma(t) = i, \chi(t) = j) \xrightarrow{t\to\infty} \frac{p_{i+j}}{\mathbb{E}[X_2]} \qquad \text{für alle } i \geq 0, j \geq 1.$$

Kor. $P(\gamma(t) = i) \xrightarrow{t\to\infty} \frac{1}{a}\sum_{k=i+1}^{\infty} p_k$, $P(\gamma(t) = j) \xrightarrow{t\to\infty} \frac{1}{a}\sum_{k=j}^{\infty} p_k$