Zusammenfassung Markovketten

 Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Abzählbare Markovketten

Notation. Sei im Folgenden $\{Z_n\}$ eine Markovkette auf einem abzählbaren Zustandsraum E.

Def. Für $x \in E$ und $n \in \mathbb{N}$ definiere die ZV $\tau_x^{(n)}$ induktiv durch

$$\begin{array}{rcl} \tau_x^{(1)} & := & \inf\{n > 0 \mid Z_n = x\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\ \tau_x^{(k)} & := & \inf\{n > \tau_x^{(k-1)} \mid Z_n = x\}, \quad k > 1. \end{array}$$

(Beachte: $\tau_x^{(k)}$ ist eine messbare Abbildung.)

Bem. Ferner gilt $\{\tau_x^{(k)} = n\} \in \sigma(Z_0, Z_1, \ldots, Z_n)$.

Def. Für $x, y \in E$ sei $F(x, y) := P(\tau_y^{(1)} < \infty \mid Z_0 = x)$

Lem. Für alle $x, y \in E$ und $k \geq 1$ gilt

$$P(\tau_y^{(k)} < \infty \mid Z_0 = x) = F(x, y) \cdot F(y, y)^{k-1}.$$

Bem. Setze $\widetilde{\ell}(y) := \sum_{k=j}^{\infty} \mathbb{1}\{Z_k = y\}$. Dann gilt

$$P(\tau_y^{(k)} < \infty \mid Z_0 = x) = P(\widetilde{\ell} \geq k \mid Z_0 = x).$$

Def. Ein Zustand $x \in E$ heißt

- **absorbierend**, falls $p(x, x) = 1$,
- **rekurrent**, falls $F(x, x) = 1$ und
- **transient**, falls $F(x, x) < 1$.

Bem. Absorbierende Zustände sind rekurrent.

Bsp. In der Markovkette

$$\begin{tikzcd} (0) \arrow[r, bend left, "1"] & (1) \arrow[l, bend left, "1-p"] \arrow[r, bend left, "p"] & (2) \arrow[l, bend left, "1-p"] \arrow[r, bend left, "p"] & (3) \arrow[l, bend left, "1-p"] \arrow[r, bend left, "p"] & \ldots \arrow[l, bend left, "1-p"] \end{tikzcd}$$

ist (0) genau dann rekurrent, falls $p \leq 1/2$, ansonsten transient.
TODO: genauer!

Def. Die **Anzahl der Besuche** in $y \in E$ ist

$$\ell(y) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}\{Z_k = y\}.$$

Die **Green'sche Funktion** von $\{Z_n\}$ ist $G : E \times E \to [0, \infty]$ mit

$$G(x, y) := \mathbb{E}(\ell(y) \mid Z_0 = x).$$

Bem.
$$\begin{array}{rcl} G(x, y) & = & \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}\{Z_k = y\} \mid Z_0 = x\right) \\ & = & \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_k = y \mid Z_0 = x) \\ & = & \delta_{xy} + \sum_{k=1}^{\infty} p^{(k)}(x, y). \end{array}$$

Satz. Für alle $x, y \in E$ gilt

$$G(x, y) = \begin{cases} F(x, y)/(1 - F(y, y)) & \text{falls } x \neq y, \\ 1/(1 - F(y, y)) & \text{falls } x = y. \end{cases}$$

Kor. x ist rekurrent $\iff G(x, x) = \infty$

Lem. Ist $F(x, y) \in (0, 1)$, so ist x nicht rekurrent.

Satz. Ist $x \in E$ rekurrent und $F(x, y) > 0$, so ist y auch rekurrent und $F(x, y) = F(y, x) = 1$.

Satz. Es sind äquivalent:

- x ist rekurrent
- $F(x, x) = 1$
- $G(x, x) = \infty$
- $\forall\, y \in E : F(x, y) \in \{0, 1\}$
- $\forall\, y \in E : G(x, y) \in \{0, \infty\}$

Bem. $F(x, y) > 0 \iff \exists\, n \geq 1 : p^{(n)}(x, y) > 0$

Def. $\{Z_n\}$ heißt **irreduzibel**, falls $\forall\, x, y \in E : F(x, y) > 0$.

Satz. Sei $\{Z_n\}$ irreduzibel. Dann sind entweder alle Zustände rekurrent oder alle Zustände transient.

Satz. Irreduzible Ketten auf endlichen Räumen sind rekurrent.

Rekurrenz und Transienz von Irrfahrten

Situation. $\{Z_n\}$ ist eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$, d. h.

$$p(x, y) = p(0, y - x) =: q(y - x).$$

Mit and. Worten: Die *Zuwächse* $\{Z_n - Z_{n-1}\}_{n \geq 1}$ sind i. i. d. ZVn.

Bsp. Einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$: $\quad p(0, 1) = p,\ p(0, -1) = q = 1 - p$

In diesem Fall kann man die Greensche Funktion exakt berechnen:

$$\begin{array}{rcl} G(x, x) & = & G(0, 0) \\ & = & \sum_{m=0}^{\infty} p^{(m)}(0, 0) \\ & = & 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p^{(2n)}(0, 0) \\ & = & 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} p^n (1 - p)^n \\ & = & 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} 4^{-n} (4p(1 - p))^n \\ & = & (1 - 4p(1 - p))^{-1/2} \\ & = & 1/|2p - 1| \end{array}$$

Satz. Sei $\{Z_n\}$ eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit

$$\mathbb{E}|Z_1 - Z_0| = \sum_{x \in \mathbb{Z}} |x| p(0, x) < \infty.$$

Dann gilt: $\quad \{Z_n\}$ ist rekurrent $\iff \sum_{x \in \mathbb{Z}} x p(0, x) = 0.$

Def. Die **einfache symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$** ist die translationsinvariante Markovkette mit

$$p(0, \pm e_i) = \tfrac{1}{2d} \quad \text{für } i = 1, \ldots, d.$$

Bem. Für einfache symmetrische Irrfahrten gilt:

$$p^{(2n)}(x, x) = \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_d \in \mathbb{N} \\ k_1 + \ldots + k_d = n}} \frac{(2n)!}{(k_1!)^2 \cdots (k_d!)^2} \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n}$$

Für $d = 2$ gilt $p^{(2n)}(0, 0) = \left[\binom{2n}{n} (\frac{1}{2})^{2n}\right]^2$. Mit der Stirling'schen Formel folgt $p^{(2n)}(0, 0) \approx \frac{1}{\pi n}$. Somit gilt $\sum p^{(2n)}(0, 0) = \infty$.

Fazit. Die zweidimensionale einfache symm. Irrfahrt ist rekurrent.

Bem. Man kann zeigen: Für einfache symm. Irrfahrten auf $\mathbb{Z}^d$ gilt

$$p^{(2n)}(0, 0) \leq C_d / n^{d/2}$$

für eine Konstante $C_d > 0$. Somit ist die einfache Irrfahrt transient für alle $d \geq 3$.

Def. $\varphi(t) := \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{i(t \cdot x)} p(0, x) \quad$ für $t \in \mathbb{R}^d$

Bem. Da die Zuwächse $\{Z_n - Z_{n-1}\}$ i. i. d. sind, gilt

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{i(t \cdot x)} p^{(n)}(0, x) = \varphi^n(t), \quad n \geq 1$$

Inversionsformel: $\quad p^{(n)}(0, x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi, \pi)^d} e^{-i(t \cdot x)} \varphi^n(t)\, \mathrm{d}t$

Satz. Für jede Irrfahrt $\{Z_n\}$ auf $\mathbb{Z}^d$ gilt

$$G(0, 0) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \lim_{\lambda \uparrow 1} \int\limits_{t \in [-\pi, \pi)^d} Re\left(\tfrac{1}{1 - \lambda \varphi(t)}\right) \mathrm{d}t = \infty$$

Bsp. Für die einfache symm. Irrfahrt $\{Z_n\}$ auf $\mathbb{Z}^d$ ist

$$\varphi(t) = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d} \cos(t_k)$$

Mit der Ungleichung $1 - \cos(u) \geq c_0 u^2$ für alle $u \in [-\pi, \pi]$ folgt

$$\varphi(t) \geq \frac{c_0}{d}|t|^2.$$

Es folgt

$$\frac{1}{1-\lambda\varphi(t)} \leq \frac{d}{\lambda c_0}|t|^{-2}$$

Die Funktion $|t|^{-2}$ ist auf $[-\pi, \pi)^d$ für jedes $d \geq 3$ integrierbar. Somit ist die einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$, transient.

Satz. Jede irreduzible Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ mit $d \geq 3$ ist transient.

Bsp. Sei $\{Z_n\}$ eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit $p(0,x) = p(0,-x)$. Gelte

$$x^\alpha p(0,x) \xrightarrow{x\to\infty} c \in (0,\infty)$$

für ein $\alpha > 1$. Dann ist

$$1-\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(1-\cos(nt))p(0,n) \quad \text{und} \quad \frac{1-\varphi(t)}{|t|^{\alpha-1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|n|^\alpha p(0,n)|t|f(nt)$$

mit $f(x) = (1-\cos(x))/|x|^\alpha$. Außerdem $|n|^\alpha p(0,n) = c + \epsilon_n$, wobei $\epsilon_n \to 0$ für $|n| \to \infty$. Es folgt

$$\frac{1-\varphi(t)}{|t|^{\alpha-1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c|t|f(nt) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon_n|t|f(nt).$$

Für $t \to 0$ hat man

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|t|f(nt) \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}\epsilon_n|t|f(nt) \to 0.$$

Es folgt für $\alpha < 3$:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\varphi(t)}{|t|^{\alpha-1}} = c\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos(x)}{|x|^\alpha}\,\mathrm{d}x < \infty$$

Folglich ist $\frac{1}{1-\varphi(t)}$ für $\alpha < 2$ integrierbar und somit $\{Z_n\}$ transient.
Für $\alpha = 2$ ist $1/(1-\varphi(t))$ in der Umgebung von null nicht integrierbar und damit $\{Z_n\}$ rekurrent.
Für $\alpha > 2$ ist $\sum|x|p(0,x) < \infty$ und somit ist die Irrfahrt rekurrent, da der Erwartungswert der Zuwächse null ist.

Erneuerungstheorie

Situation. Seien $\{X_k\}_{k\geq 1}$ unabhängige ZVn mit Werten in $\mathbb{N}$ und $P(X_k \geq 1) > 0$, wobei $\{X_k\}_{k\geq 2}$ identisch vert. sind. Dann definiert

$$Z_n := \sum_{k=1}^n X_k + Z_0$$

eine Irrfahrt $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ mit nicht-negativen Zuwächsen auf $\mathbb{Z}$.

Ziel. Untersuche das asympt. Verhalten von $G(0,x)$.

Def. Die **erzeugende Funktion** einer Folge $\{a_n\}$ ist

$$A(s) := \sum_{n=0}^\infty a_n s^n.$$

Bsp. Setze $p_k := P(X_2 = k)$, $k \geq 0$. Wir nehmen an, dass

$$a := \mathbb{E}[X_2] = \sum_{k=1}^\infty k p_k \in (0,\infty)\,.$$

Definiere $q_k := \frac{1}{a}\sum_{j=k}^\infty p_j$ für $k \geq 1$. Dann ist $\sum_{k=1}^\infty q_k = 1$.
Sei X_1 eine ZV mit $P(X_1 = k) = q_k$, $k \geq 1$. Setze

$$\begin{aligned}
f(s) &:= \sum_{k=1}^\infty p_k s^k = \mathbb{E}[s^{X_2}], \quad |s| \leq 1\\
g(s) &:= \sum_{k=1}^\infty q_k s^k = \mathbb{E}[s^{X_1}]\\
\psi(s) &:= \sum_{x=1}^\infty G(0,x)s^x, \quad |s| < 1
\end{aligned}$$

Dann gilt für $|s| < 1$:

$$\psi(s) = \sum_{k=1}^\infty g(s)f(s)^{k-1} = g(s)/(1-f(s))$$

Außerdem gilt:

$$g(s) = \frac{s}{a(1-s)}(1-f(s))$$

Es folgt:

$$\psi(s) = \sum_{x=1}^\infty \frac{1}{a}s^x$$

Somit ist $G(0,x) = \frac{1}{a}$.

Satz. Angenommen, $\mathrm{ggT}\{k \,|\, p_k > 0\} = 1$. Dann gilt für jede Verteilung von X_1, dass

$$G(0,x) \xrightarrow{x\to\infty} \frac{1}{a}.$$

Lem. Sei $g(\theta)$ integrierbar auf $[-\pi,\pi)$. Dann gilt

$$\int_{[-\pi,\pi)} e^{i\theta x} g(\theta)\,\mathrm{d}\theta \xrightarrow{|x|\to\infty} \quad (x \in \mathbb{Z})$$

Lem. Seien alle X_k identisch verteilt und $\mathrm{ggT}\{p \,|\, p_k > 0\} = 1$. Dann existiert $L := \lim_{x\to\infty} G(0,x)$.

Def. Seien $\{X_k\}_{k\geq 1}$ unabhängige, nichtneg. ZVn und seien $\{X_k\}_{k\geq 2}$ identisch verteilt. Setze $Z_n := \sum_{k=1}^n X_k$. Dann heißt

$$\begin{aligned}
\eta(t) &:= \min\{k \geq 1 \,|\, Z_k > t\} && \textbf{Erneuerungsprozess} \text{ und}\\
H(t) &:= \mathbb{E}[\eta(t)] && \textbf{Erneuerungsfunktion}.
\end{aligned}$$

Falls X_k nur Werte aus $\mathbb{N}$ annimmt, so können wir das Verhalten von $H(t) - H(t-1)$ wie folgt beschreiben:

$$\begin{aligned}
H(t) &= \mathbb{E}[\eta(t)] = \sum_{k=0}^\infty P(\eta(t) > k) = \sum_{k=0}^\infty P(Z_k \leq t)\\
\rightsquigarrow \quad H(t) - H(t-1) &= \sum_{k=0}^\infty P(Z_k = t) \xrightarrow{t\to\infty} 1/\mathbb{E}[X_2].
\end{aligned}$$

Def.
$$\begin{aligned}
\gamma(t) &:= t - Z_{\eta(t)-1} \geq 0 && \text{heißt } \textbf{Undershoot},\\
\chi(t) &:= Z_{\eta(t)} - t > 0 && \text{heißt } \textbf{Overshoot}.
\end{aligned}$$

Satz. Sind die Bedingungen des letzten Satzes erfüllt, so gilt

$$P(\gamma(t) = i, \chi(t) = j) \xrightarrow{t\to\infty} \frac{p_{i+j}}{\mathbb{E}[X_2]} \qquad \text{für alle } i \geq 0, j \geq 1.$$

Kor.
$$\begin{aligned}
P(\gamma(t) = i) &\xrightarrow{t\to\infty} \frac{1}{a}\sum_{k=i+1}^\infty p_k,\\
P(\gamma(t) = j) &\xrightarrow{t\to\infty} \frac{1}{a}\sum_{k=j}^\infty p_k
\end{aligned}$$

TODO: Eine der Gleichungen im Korollar sollte χ beinhalten.

Positive Rekurrenz

Def. $x \in E$ heißt **positiv rekurrent**, falls $\mathbb{E}[\tau_x^{(1)} | Z_0 = x] < \infty$.
Ist x rekurrent, aber nicht pos. rekurrent, so heißt x **nullrekurrent**.

Bem. positive Rekurrenz $\implies$ Rekurrenz

Lem. Sei x ein positiv rekurrenter Zustand.
Ist $F(x, y) > 0$, so ist auch y positiv rekurrent.

Kor. Ist $\{Z_n\}$ irreduzibel und $x_0 \in E$ positiv rekurrent, so gilt:

- alle Zustände sind positiv rekurrent
- $m(x, y) \coloneqq \mathbb{E}[\tau_y^{(1)} | Z_0 = x] < \infty$ für alle $x, y \in E$

Def. Die Zahl $d_x \coloneqq \mathrm{ggT}\{n \geq 1 \,|\, p^{(n)}(x, x) > 0\}$ heißt **Periode** von x. Falls $d = d_x$ für alle $x \in E$, so heißt d *Periode* der Kette $\{Z_n\}$.

Lem. Ist $\{Z_n\}$ irreduzibel, so gilt $d_x = d_y$ für alle $x, y \in E$.

Satz. Es gibt eine Familie $\{\pi_y \in \mathbb{R}_{>0}\}_{y \in E}$, sodass

$$\forall\, x, y \in E \,:\, p^{(n)}(x, y) \xrightarrow{n \to \infty} \pi_y$$

genau dann, wenn

- $\{Z_n\}$ irreduzibel und
- aperiodisch (d. h. $d = 1$) ist und
- ein x_0 existiert, sodass $m(x_0, x_0) < \infty$.

Die Folge $\{\pi_y\}_{y \in E}$ ist die eindeutige Lösung zu

$$\begin{cases} \sum_{y \in E} |P_y| < \infty \\ \sum_{y \in E} \pi_y = 1 \\ \sum_{x \in E} \pi_x p(x, y) = \pi_y \text{ für alle } y \in E \end{cases}$$

Es gilt $\pi_y = 1/m(y, y)$.

Def. Eine Verteilung $\{\mu_x\}_{x \in E}$ auf E heißt **stationär**, falls

$$\mu_x = \textstyle\sum_{y \in E} \mu_y p(y, x) \quad \text{für alle } x \in E \qquad (\text{kurz: } \mu = \mu P).$$

Bem. Für eine stationäre Verteilung $\{\mu_x\}_{x \in E}$ gilt

$$\mu_x = \textstyle\sum_{y \in E} \mu_y p^{(n)}(y, x) \quad \text{für alle } x \in E \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

Lem. Sei x ein positiv rekurrenter Zustand. Dann definiert

$$\mu_y^{(x)} \coloneqq \frac{1}{m(x, x)} \cdot \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\tau_x^{(1)} - 1} \mathbb{1}\{Z_k = y\} \middle| Z_0 = x \right]$$

für alle $y \in E$ eine stationäre Verteilung $\{\mu_y^{(x)}\}_{y \in E}$.

Satz. Sei $\{Z_n\}$ eine irreduzible Kette. Dann gilt:

$$\{Z_n\} \text{ ist pos. rekurrent} \iff \{Z_n\} \text{ hat eine stationäre Verteilung.}$$

In diesem Fall ist die stationäre Verteilung eindeutig.

Satz. Eine irreduzible Kette auf einem endlichen Zustandsraum ist immer positiv rekurrent. Ferner existieren $C > 0$ und $q \in (0, 1)$ mit

$$P(\tau_y^{(1)} > n \,|\, Z_0 = x) < C q^n \quad \text{für alle } n \geq 1 \text{ und } x, y \in E.$$

Satz. Sei $\{Z_n\}$ irreduzibel und positiv rekurrent.
Sei $f : E \to \mathbb{R}$ integrierbar bezüglich der stationären Verteilung $\{\pi_x\}$, d. h. $\sum_{x \in E} |f(x)| \pi_x < \infty$. Dann gilt

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(Z_k) \xrightarrow{\text{f. s.}} \sum_{x \in E} f(x) \pi_x$$

Bsp. Für $f(y) \coloneqq \mathbb{1}\{y = x_0\}$ für eine $x_0 \in E$ erhalten wir

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}\{Z_k = x_0\} \xrightarrow{\text{f. s.}} \pi_{x_0}.$$

Es folgt mit majorisierter Konvergenz:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} p^{(k)}(x, x_0) \xrightarrow{n \to \infty} \pi_{x_0}.$$

Bsp. Sei $\{Z_n\}$ irreduzibel, periodisch mit Periode $p > 1$. Dann gilt

$$p^{(dk)}(x_0, x_0) \xrightarrow{d} /m(x_0, x_0).$$

Lem. Sei $\{Z_n\}$ eine irreduzible Kette mit der Periode $d \geq 1$.
Für jedes $x \in E$ existiert ein $m_x \geq 1$ mit

$$p^{(md)}(x, x) > 0 \text{für alle } m \geq m_x.$$

Prop. Sei $\{Z_n\}$ irreduzibel und periodisch mit $d \geq 1$.
Dann existieren paarweise disjunkte $C_0, C_1, \ldots, C_{d-1} \subseteq E$ mit $C_0 \cup \ldots \cup C_{d-1} = E$ und

$$\{y \in E \,|\, x \in C_i, p(x, y) > 0\} = C_{(i+1)\% d}.$$

In anderen Worten: Die Mengen C_i werden zyklisch besucht.

Bem. Die Markovkette $\{Z_{md}\}_{m \geq 0}$ ist nicht irreduzibel (für $d > 1$) aber die Restriktion auf jedes C_i ist irreduzibel und außerdem aperiodisch. Mit dem Ergodensatz erhalten wir

$$p^{(md)}(x, y) \xrightarrow{m \to \infty} d/m(y, y) \quad \text{für alle } x, y \in C_i$$

Falls $x \in C_0$ und wir wollen $p^{(md+r)}(x, y)$ berechnen, so reicht es $y \in C_r$ zu betrachten. Definiere

$$F_r(x, y) \coloneqq \mathbb{P}(\tau_y^{(1)} < \infty,\, \tau_y^{(1)} \equiv r \,(\mathrm{mod}\, d) \,|\, Z_0 = x)$$

Es gilt dann:

$$p^{(md+r)}(x, y) \xrightarrow{m \to \infty} F_r(x, y) d/m(y, y)$$

Martingale

Sei im Folgenden $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Maßraum.

Def. Eine wachsende Folge $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots$ von σ-Algebren heißt **Filtration**. Eine Folge von ZVen $\{M_n\}$ heißt **adaptiert** an die Filtration $\{\mathcal{F}_n\}$, falls M_n $\mathcal{F}_n$-messbar ist für jedes $n \geq 0$.

Def. Sei X eine ZV mit $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Dann heißt $\widehat{X}$ **bedingte Erwartung** von X bzgl. σ-Algebra $\mathcal{A}$ falls $\hat{X}$ $\mathcal{A}$-messbar ist und $\mathbb{E}[X \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\hat{X} \mathbb{1}_A]$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

Def. Eine $\{F_n\}$-adapt. Folge $\{M_n\}$ mit $\forall\, n : \mathbb{E}[|M_n|] < \infty$ heißt

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{Martingal}\\ \textit{Submartingal}\\ \textit{Supermartingal}\end{array}\right\} \text{ falls } \mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] \left\{\begin{array}{c} = \\ \geq \\ \leq \end{array}\right\} M_n \quad \forall\, n \geq 0.$$

Bem. • $\{M_n\}$ ist Submartingal $\iff$ $\{-M_n\}$ ist Supermartingal

• $\{M_n\}$ ist Martingal $\iff$ $\{M_n\}$ ist Super- und Submartingal

Bem. Martingal-Strategie für wdh. Werfen einer fairen Münze:

- 1. Runde: Einsatz = 1 Euro, bei Gewinn Ausstieg
- 2. Runde: Einsatz = 2 Euro, bei Gewinn Ausstieg, ...
- n. Runde: Einsatz = 2^{n-1} Euro, bei Gewinn Ausstieg

Es gilt: $T = \inf\{n \geq 1 \,|\, n\text{-te Runde ist gewonnen}\} < \infty$ fast sicher, der Gewinn ist 1 Euro.

Bsp. Seien $\{X_i\}$ unabh. ZVen mit $\mathbb{E}[X_i] = 0$ for alle $i \geq 0$. Sei $M_n := X_1 + \ldots + X_n$. Dann ist $\{M_n\}$ ein Martingal bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F}_n\}$ mit $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

Def. Für eine Folge $\{M_n\}$ von ZVen heißt $\{\sigma(M_0, M_1, \ldots, M_n)\}_{n\geq 0}$ **natürliche Filtration**.

Lem. Ist $\{M_n\}$ ein Martingal bzgl. einer bel. Filtration, so ist $\{M_n\}$ auch ein Martingal bzgl. der natürlichen Filtration.

Def. $\{M_n\}$ ist Martingal $:\iff$ $\{M_n\}$ ist Martingal bzgl. der natürlichen Filtration

Lem. Ist $\{M_n\}$ ein Submartingal, so gilt $\mathbb{E}[M_{i+1}] \geq \mathbb{E}[M_i]$.

Lem. Sei $\{M_n\}$ ein Martingal bzgl. $\{\mathcal{F}_n\}$. Dann gilt:

$$\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_i] = M_i \quad \text{für alle } i \leq n.$$

Lem. Sei $\{M_n\}$ ein Martingal bzgl. $\{\mathcal{F}_n\}$ und sei φ eine konvexe messbare Funktion. Falls $\mathbb{E}[|\varphi(M_n)|] < \infty$ für alle $n \geq 1$, so ist di Folge $\{\varphi(M_n)\}_{n\geq 0}$ ein Submartingal bzgl. $\{F_n\}$

Bem. Die Aussage des vorh. Lemmas gilt auch, falls $\{M_n\}$ nur ein Submartingal, dafür aber φ zusätzlich monoton wachsend ist.

Bsp. Ist $\{M_n\}$ ein Martingal, so sind M_n^2, M_n^+ und $|M_n|$ Submartingale.

Bsp. Ein Anleger kauft H_0 Aktien einer Firma. Es sei W_0 der Wert der Aktien beim Kauf, Y_n der Kurs der Aktie n Tage nach dem Kauf und H_n die Anzal der Aktien n Tage nach dem Kauf. Forderung: H_n soll $\sigma(Y_0, \ldots, Y_{n-1})$-messbar sein. Sei W_n der Wert der Aktien n Tage nach dem Kauf. Es gilt

$$W_n = W_{n-1} + H_n(Y_n - Y_{n-1}) = W_0 + \sum_{i=1}^{n} H_i(Y_i - Y_{i-1})$$

Falls $\{Y_n\}$ ein Martingal ist, so gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[W_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\ = \;& \mathbb{E}[W_n + H_{n+1}(Y_{n+1} - Y_n)|\mathcal{F}_n] \\ = \;& W_n + \mathbb{E}[H_{n+1}(Y_{n+1} - Y_n)|\mathcal{F}_n] \\ = \;& W_n + H_{n+1}\mathbb{E}[Y_{n+1} - Y_n|\mathcal{F}_n] \\ = \;& W_n + H_{n+1}(\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] - Y_n) \\ = \;& W_n (\text{bzw.} \geq W_n \text{ für Sub- und } \leq W_n \text{ für Supermartingale}). \end{aligned}$$

Fazit: Man kann mit der Wahl der Handelsstrategie keine Anlage verbessern.

Def. Eine Folge $\{H_n\}_{n\geq 1}$ heißt **prävisibel**, falls H_n $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar ist für alle $n \geq 1$. Definiere $\{H \cdot Y\}_n$ durch

$$(H \cdot Y)_n := \sum_{i=1}^{n} H_i(Y_i - Y_{i-1})$$

Satz. Sei $\{Y_n\}$ ein Supermartingal und sei $\{H_n\}$ prävisibel jeweils bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F}_n\}$. Falls $H_n \in [0, C_n]$ für Konstanten $\{C_n\}$, so ist $\{(H \cdot Y)_n\}$ auch ein Supermartingal.

Bem. Man kann den Satz für Submartingale und Martingale formulieren. Für Martingale reicht es anzunehmen, dass $|H_n| \leq C_n$.

Def. Eine Abbildung $T : \Omega \to \{\infty\}$ heißt **Stoppzeit** bzgl. $\{F_n\}$, falls $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ für alle $n \geq 0$.

Bsp. Sei $\{M_n\}$ eine Folge von ZVen und sei $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Dann ist $T = \inf\{n \geq 0 \,|\, M_n \in A\}$ eine Stoppzeit bzgl. $\{\sigma(M_0, \ldots, M_n)\}_n$.

Satz. Ist $\{M_n\}$ ein Supermartingal und T eine Stoppzeit, so ist $\{M_{\min(T,n)}\}$ auch ein Supermartingal.

Sei $\{M_n\}$ eine Folge von ZVen Seien $a < b$. Definiere

$$\begin{aligned} N_0 &:= -1, \\ N_{2k-1} &:= \inf\{n > N_{2k-2} \,|\, M_n < a\}, \\ N_{2k} &:= \inf\{n > N_{2k} \,|\, M_n \geq b\} \end{aligned}$$

Die Anzahl der *Aufkreuzungen* ist dann

$$U_n := \max\{k \,|\, N_{2k} \leq n\}.$$

Satz (**Doob'sche Aufkreuzungsungleichung**).
Ist $\{M_n\}$ ein Submartingal, so gilt für alle $a < b$ und alle $n \geq 1$:

$$\mathbb{E}[U_n] \leq (\mathbb{E}[(M_n - a)^+] - \mathbb{E}[(M_0 - a)^+])/(b - a).$$

Satz (**Martingalkonvergenzsatz**).
Sei $\{M_n\}$ ein Submartingal mit $\sup_{n\geq 0}\mathbb{E}[M_n^+] < \infty$. Dann existiert eine ZV M_∞ mit $\mathbb{E}[|M_\infty|] < \infty$ sodass $M_n \to M_\infty$ fast-sicher.

Bsp (*Polya-Urne*). Urne mit b blauen und r roten Kugeln. In jeder Runde wird eine Kugel gezogen und mit einer weiteren Kugel gleicher Farbe zurückgelegt. Sei R_n di Anzahl von zugefügten roten Kugeln nach n Runden.
Man kann zeigen: $\{M_n := (r + R_n)/(r + b + n)\}_{n\geq 0}$ ist ein Martingal. Außerdem gilt $\sup \mathbb{E}[M_n^+] \leq 1$ Nach dem vorherigen Satz gilt also $M_n \to M_\infty$ fast-sicher. Man kann zeigen, dass $M_\infty \sim \text{Beta}(r, b)$,

$$f_{M_\infty}(x) = \frac{1}{B(r,b)} x^{r-1}(1-x)^{b-1}.$$

Kor. Sei $\{M_n\}$ ein nichtneg. Supermartingal. Dann existiert $M_\infty \in L_1$ mit $M_n \to M_\infty$ fast-sicher.

Satz. Sei $\{M_n\}$ ein Submartingal und sei T eine Stoppzeit bzgl. derselben Filtration mit $P(T \leq N) = 1$ für ein $N \geq 1$. Dann gilt:

$$\mathbb{E}[M_0] \leq \mathbb{E}[M_T] \leq \mathbb{E}[M_N].$$

Satz (**Doob'sche Ungleichung**).
Sei $\{M_n\}$ ein Submartingal. Dann gilt:

$$P(\max_{k\leq n} M_k \geq \lambda) \leq \tfrac{1}{\lambda}\mathbb{E}[M_n \mathbb{1}\{\max_{k\leq n} M_k \geq \lambda\} \leq \mathbb{E}[M_n^+]/\lambda.]$$

Bem. Die Doob'sche Ungleichung verbessert die Markov-Ungleichung.

Kor (**Kolmogorov-Ungleichung**). Seien $\{X_i\}$ unabh. ZVen mit $\mathbb{E}[X_i] = 0$ und $\mathbb{E}[X_i^2] < \infty$. Setze $S_k = X_1 + \ldots + X_k$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}(\max_{k\leq n} |S_k| \geq \lambda) \leq \text{Var}(S_n)/\lambda^2.$$

Satz. Ist $\{M_n\}$ ein Submartingal, dann gilt für jedes $p \in (1, \infty)$:

$$\mathbb{E}[(\max_{k\leq n})^p] \leq (p/(p-1))^p \mathbb{E}[(M_n^+)^p]$$

Kor. Sei $\{M_n\}$ ein Martingal. Dann gilt für jedes $p \in (1, \infty)$:

$$\mathbb{E}[(\max_{k\leq n} |M_k|)^p \leq (p/(p-1))^p \mathbb{E}[|M_n|^p.]$$

Satz. Sei $\{M_n\}$ ein Martingal mit $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[|M_n|^p] < \infty$ für ein $p > 1$. Dann konvergiert M_n fast-sicher und in L^p.

Def. Eine Familie $\{X_i\}_{i\in I}$ heißt **gleichgradig integrierbar**, falls

$$\forall\, \epsilon > 0 \,:\, \exists\, M > 0 \,:\, \forall\, i \in I \,:\, \mathbb{E}[|X_i| \mathbb{1}_{\{|X_i| > M\}}] < \epsilon.$$

Lem. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wkts-Raum, $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ eine Famile von σ-Algebren mit $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{F}$ für alle $i \in I$. Dann ist die Familie $\{\mathbb{E}[X|\mathcal{A}_i]\}_{i\in I}$ gleichgradig integrierbar.

Lem. Sei $\{\mathcal{F}_n\}$ eine Filtration und $X \in L^1$. Dann ist $\{M_n\}$ mit $M_n := \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$ ein gleichgradig integrierbares Martingal.

Satz. Für jedes Martingal $\{M_n\}$ (bzgl. $\{\mathcal{F}_n\}$) sind äquivalent:

- $\{M_n\}$ ist gleichgradig integrierbar
- $\{M_n\}$ konvergiert fast sicher und in L^1
- $\{M_n\}$ konvergiert in L^1
- $\{\exists\, M \in L^1 \,:\, \forall\, n \geq 0 \,:\, M_n = \mathbb{E}[M|\mathcal{F}_n]\}$

Satz. Sei $\{\mathcal{F}_n\}$ eine Filtration. Betrachte $\mathcal{F}_\infty := \sigma(\cup_{n=0}^\infty \mathcal{F}_n)$

Bsp. Seien $\{X_i\}$ unabhängig und $\tau := \cap_{n\geq 1}\sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$ die terminale σ-Algebra. Dann folgt aus dem vorh. Satz, dass $P(A) \in \{0, 1\}$ für alle $A \in \tau$.

Bsp. Betrachte eine Lipschitz-stetige Funktion $f:[0,1)\to\mathbb{R}$. Setze

$$\begin{aligned} X_n &:= \textstyle\sum_{k=1}^{2^n}(k-1)/2^n \mathbb{1}\left[(k-1)/2^n, k/2^n\right), \\ M_n &:= 2^n(f(X_n+1/2^n)-f(X_n)). \end{aligned}$$

Dies sind ZVen auf $\Omega=[0,1)$ mit dem Lebesgue-Maß. Dann ist $\{M_n\}$ ein gleichgradig integrierbares Martingal. Somit gibt es ein $M\in L^1$ mit $M_n \xrightarrow{n\to\infty} M$ fast-sicher und in L^1. Es gilt dann

$$f(x)-f(0)=\int_0^x M(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{für alle } x\in[0,1).$$

Satz. Sei T eine Stoppzeit. Falls

- $\{M_n\}$ ein gleichgradig integrierbares Submartingal ist *oder*
- $\mathbb{E}[|M_T|]<\infty$ und $\{M_n\mathbb{1}\{T>n\}\}$ gleichgradig integrierbar sind,

so ist die Folge $\{M_{T\wedge n}\}$ ebenfalls gleichgradig integrierbar.

Satz. Sei $\{M_n\}$ ein gleichgradig integrierbares Submartingal. Dann gilt für jede Stoppzeit T:

$$\mathbb{E}[M_0]\le\mathbb{E}[M_T]\le\mathbb{E}[M_\infty].$$

Satz (Optional Stopping Theorem).
Seien $S\le T$ zwei Stoppzeiten. Ist $\{M_{T\wedge n}\}$ ein gleichgradig integrierbares Submartingal, so gilt

$$M_S\le\mathbb{E}[M_T|\mathcal{F}_S].$$

Rekurrenz/Transienz mit Martingaltheorie

Sei $\{Y_n\}$ eine Folge nichtnegativer ZVen.

Def. $\{Y_n\}$ heißt **(topologisch) rekurrent**, falls

$$\exists\, r>0 \,:\, P(\liminf_{n\to\infty}Y_n\le r)=1.$$

$\{Y_n\}$ heißt **(topologisch) transient**, falls $P(\lim_{n\to\infty}Y_n=\infty)=1$.

Satz. Sei $\{Y_n\}$ eine Folge mit $P(\limsup_{n\to\infty}Y_n=\infty)=1$.
Falls ein $M>0$ mit $\mathbb{E}[Y_{n+1}|Y_n=x_n,\dots,Y_0=x_0]\le x_n$ für alle $x_n\ge M$ existiert, so ist $\{Y_n\}$ rekurrent.

Definiere $U_n^{(k)}:=Y_{k+n}\cdot\mathbb{1}\{\min(Y_k,Y_{k+1},\dots,Y_{n+k-1})\ge M\}$.

Lem. Unter Vor. des Satzes: Sei $\mathcal{F}_n^{(k)}:=\sigma(Y_0,Y_1,\dots,Y_{n+k})$.
Dann ist $\{U_n^{(k)}\}$ ein Supermartingal bzgl. $\{F_n^{(k)}\}$.

Satz. Sei $\{Y_n\}$ und $T>0$ mit $P(Y_n\le T)=1$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $P(\limsup_{n\to\infty}Y_n=T)=1$. Falls
$\mathbb{E}[Y_{n+1}|Y_n=x_n,\dots,Y_0=x_0]\ge x_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $x_n\ge M$ für ein $M<T$, so gilt: $Y_n\xrightarrow{n\to\infty}T$ fast-sicher.

Im Folgenden sei $\tau:=\inf\{n\ge1\,|\,Y_n\le r\}$.

Satz. Angenommen, für die Folge $\{\tilde{Y}_n\}$ mit $\tilde{Y}_n:=Y_{n\wedge\tau}$ gilt

$$\mathbb{E}[\tilde{Y}_{n+1}|\sigma(Y_0,\dots,Y_n)]\le\tilde{Y}_n-\epsilon\mathbb{1}\{\tau>n\} \quad \text{für ein } \epsilon>0.$$

Dann gilt für jeden konst. Startwert Y_0 die Ungleichung

$$\mathbb{E}[\tau]\le Y_0/\epsilon<\infty.$$

Satz. Falls $Y_0>r$ und $\mathbb{E}[\tilde{Y}_{n+1}|\sigma(Y_0,\dots,Y_n)]\ge\tilde{Y}_n$ gilt und ein $M>0$ mit $\mathbb{E}[|\tilde{Y}_{n+1}-\tilde{Y}_n||\sigma(Y_0,\dots,Y_n)]\le M$ fast-sicher existiert, so gilt $\mathbb{E}[\tau]=\infty$.

Sei $\{Z_n\}$ eine Markovkette auf $\mathbb{N}_0$.
Definiere $m_1(x):=\mathbb{E}[Z_1-Z_0|Z_0=x]=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}kp(x,x+k)$ und
$m_2(x):=\mathbb{E}[(Z_1-Z_0)^2|Z_0=x]=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}k^2p(x,x+k)$.

Bem. Falls $m_1(x)\le-\epsilon$ für alle $x\ge x_0$, so können wir direkt Satz 4.5 verwenden: Die Stoppzeit $\tau_r:=\min\{n\ge0\,|\,Z_n\le r\}$ hat endlichen Erwartungswert für jedes $r\ge x_0$.

Frage. Was passiert in dem Fall, wenn $m_1(x)$ von Null nicht getrennt ist? Hier hängt vieles von $m_2(x)$ ab.

Satz. Falls es ein $\epsilon>0$ gibt mit

$$\forall\, x\ge x_0 \,:\, 2xm_1(x)+m_2(x)\le-\epsilon,$$

so ist die Kette $\{Z_n\}$ positiv rekurrent.

Beweisidee. Betrachte $Y_n=Z_n^2$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[Y_{n+1}-Y_n|\sigma(Z_0,\dots,Z_n)]\le-\epsilon \quad \text{auf } \{Y_n\ge x_0^2\}.$$

Somit ist $\{Y_n\}$ nach Satz 4.5 und damit auch $\{Z_n\}$ rekurrent.

Falls $m_1(x)\sim-c/x$ und $m_2(x)\sim1$, so ist $2xm_1(x)+m_2(x)\sim1-2c$. Falls $c>\frac12$, so ist die Kette positiv rekurrent.

Satz. Sei $\{Z_n\}$ eine irreduzible Kette mit $|Z_{n+1}-Z_n|\le B$ fast-sicher für alle n für ein $B>0$. Außerdem gelte $\inf\limits_x m_2(x)>0$.

- Falls $2xm_1(x)\le(1-\epsilon)m_2(x)$ für alle $x\ge x_1$, so ist $\{Z_n\}$ rekurrent.
- Falls $2xm_1(x)\ge(1+\epsilon)m_2(x)$ für alle $x\ge x_2$, so ist die Kette $\{Z_n\}$ transient.

Bsp. Sei $\{Z_n\}$ eine einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ mit $Z_{n+1}-Z_n\in U_d=\{\pm e_1,\dots,\pm e_d\}$, alle gleich wahrscheinlich.
Wir wissen: $\{Z_n\}$ ist rekurrent $\iff$ $d\le2$ Dies können wir auch wie folgt zeigen:
Betrachte $X_n:=\|Z_n\|$. Dann ist

$$\mathbb{E}[X_{n+1}-X_n|Z_n=x]=\ldots=\tfrac{1/2-1/d}{\|x\|}+O(1/\|x\|^2)$$

und

$$\mathbb{E}[(X_{n+1}-X_n)^2|Z_n=x]=\ldots=1/d+O(1/\|x\|)$$

Für $d=1$ ist also

$$\mathbb{E}[X_{n+1}-X_n|X_n=x]\le(1-\epsilon)\mathbb{E}[(X_1-X_0)^2|Z_0=x]/(2\|x\|)$$

Mit Hilfe von $Y_n:=\log(1+X_n)$ erhalten wir, dass $\{X_n\}$ rekurrent ist. Bei $d\ge3$ gilt

$$\mathbb{E}[X_{n+1}-X_n|Z_n=x]\ge(1+\epsilon)\mathbb{E}[(X_1-X_0)^2|Z_0=x]/(2\|x\|)$$

Für $d=2$ können wir den vorh. Satz leider nicht benutzen. Man kann den Satz aber verbessern, sodass aus

$$2xm_1(x)\le\left(1+\tfrac{1-\epsilon}{\log x}\right)m_2(x)$$

schon Rekurrenz folgt.

Lem. Sei $\{Z_n\}$ eine irreduzible abzählbare Markovkette.
Falls es eine endliche Menge $A\subseteq E$ mit

$$\mathbb{E}[\tau_A|Z_0=x]<\infty \quad \forall\, x\in A$$

gibt, so ist $\{Z_n\}$ positiv rekurrent.

Satz (Kriterium von Foster). Sei $\{Z_n\}$ eine irreduzible abzählbare Markovkette. Dann sind äquivalent:

- Die Kette $\{Z_n\}$ ist positiv rekurrent.
- Es gibt eine Abbildung $f:E\to\mathbb{R}_{\ge0}$, ein $\epsilon>0$ und eine endliche Teilmenge $A\subseteq E$ mit

$$\begin{aligned} &\forall\, x\in E: && \mathbb{E}[f(Z_1)|Z_0=x]<\infty \\ \text{und } &\forall\, x\in E\setminus A: && \mathbb{E}[f(Z_1)-f(Z_0)|Z_0=x]\le-\epsilon. \end{aligned}$$

Bem. Man kann sogar immer $\epsilon=1$ und $|A|=1$ erreichen.

Satz. Sei $\{Z_n\}$ eine irr. Markovkette auf E, E abzählbar. Dann gilt:

$$\{Z_n\} \text{ ist transient} \iff \begin{aligned}[t] &\exists\, A\ne\emptyset\subset E \,:\, \exists\, f:E\to\mathbb{R}_{\ge0}: \\ &\inf_{x\in E}f(x)<\inf_{x\in A}f(x), \\ &\forall\, x\in E\setminus A \,:\, \mathbb{E}[f(Z_1)-f(Z_0)\,|\,Z_0=x]\le0. \end{aligned}$$

Lem. Im Kontext der rechten Seite des Satzes:
Sei $y\in E\setminus A$ mit $y<\inf_{x\in A}f(x)$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}(\tau_A<\infty\,|\,Z_0=y)\le f(y)/\inf_{x\in A}f(x).$$

Kor. Sei $\{Z_n\}$ eine irr. Markovkette auf E, E abzählbar. Dann gilt:

$$\{Z_n\} \text{ ist transient} \iff \begin{aligned}[t] &\exists\, x_0\in E \,:\, \exists\, h:E\to\mathbb{R}: \\ &h \text{ beschränkt, nicht konstant und} \\ &\forall\, x\ne x_0 \,:\, \mathbb{E}[f(Z_1)-f(Z_0)\,|\,Z_0=x]=0. \end{aligned}$$

Def. Eine Funktion $f:X\to\mathbb{R}$ (mit $|X|=\infty$) heißt **unbeschränkt**, falls $\sup_{x\in B}f(x)=\infty$ für jede unendliche Teilmenge $B\subseteq X$.

Satz. Sei $\{Z_n\}$ eine irr. Markovkette auf E, E abzählbar. Dann gilt:

$$\{Z_n\} \text{ ist rekurrent} \iff \begin{aligned}[t] &\exists \text{ endliche Teilmenge } A\subset E: \\ &\exists \text{ unbeschränkte Funktion } f:E\to\mathbb{R}_{\ge0}: \\ &\forall\, x\in E\setminus A \,:\, \mathbb{E}[f(Z_1)-f(Z_0)\,|\,Z_0=x]\le0. \end{aligned}$$