# Zusammenfassung Markovketten



## Abzählbare Markovketten

**Notation.** Sei im Folgenden $\{Z_n\}$ eine Markovkette auf einem abzählbaren Zustandsraum $E$.

**Def.** Für $x \in E$ und $n \in \mathbb{N}$ definiere die ZV $\tau_x^{(n)}$ induktiv durch

$$\begin{array}{rcl}\tau_x^{(1)} &:=& \inf\{n>0 \mid Z_n = x\} \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}\\ \tau_x^{(k)} &:=& \inf\{n > \tau_x^{(k-1)} \mid Z_n = x\},\quad k>1.\end{array}$$

(Beachte: $\tau_x^{(k)}$ ist eine messbare Abbildung.)

*Bem.* Ferner gilt $\{\tau_x^{(k)} = n\} \in \sigma(Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$.

**Def.** Für $x, y \in E$ sei $F(x,y) := P(\tau_y^{(1)} < \infty \mid Z_0 = x)$

**Lem.** Für alle $x, y \in E$ und $k \geq 1$ gilt

$$P(\tau_y^{(k)} < \infty \mid Z_0 = x) = F(x,y) \cdot F(y,y)^{k-1}.$$

*Bem.* Setze $\widetilde{\ell}(y) := \sum_{k=j}^{\infty} \mathbb{1}\{Z_k = y\}$. Dann gilt

$$P(\tau_y^{(k)} < \infty \mid Z_0 = x) = P(\widetilde{\ell} \geq k \mid Z_0 = x).$$

**Def.** Ein Zustand $x \in E$ heißt

- **absorbierend**, falls $p(x,x) = 1$,
- **rekurrent**, falls $F(x,x) = 1$ und
- **transient**, falls $F(x,x) < 1$.

*Bem.* Absorbierende Zustände sind rekurrent.

**Bsp.** In der Markovkette

$$\begin{tikzcd}
(0) \arrow[r, bend left, "1"] & (1) \arrow[l, bend left, "1-p"] \arrow[r, bend left, "p"] & (2) \arrow[l, bend left, "1-p"] \arrow[r, bend left, "p"] & (3) \arrow[l, bend left, "1-p"] \arrow[r, bend left, "p"] & \dots \arrow[l, bend left, "1-p"]
\end{tikzcd}$$

ist (0) genau dann rekurrent, falls $p \leq 1/2$, ansonsten transient. TODO: genauer!

**Def.** Die **Anzahl der Besuche** in $y \in E$ ist

$$\ell(y) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}\{Z_k = y\}.$$

Die **Green'sche Funktion** von $\{Z_n\}$ ist $G : E \times E \to [0, \infty]$ mit

$$G(x,y) := \mathbb{E}(\ell(y) \mid Z_0 = x).$$

*Bem.*
$$\begin{array}{rcl} G(x,y) &=& \mathbb{E}\,(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}\{Z_k = y\} \mid Z_0 = x)\\ &=& \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_k = y \mid Z_0 = x)\\ &=& \delta_{xy} + \sum_{k=1}^{\infty} p^{(k)}(x,y).\end{array}$$

**Satz.** Für alle $x, y \in E$ gilt

$$G(x,y) = \begin{cases} F(x,y)/(1-F(y,y)) & \text{falls } x \neq y,\\ 1/(1-F(y,y)) & \text{falls } x = y.\end{cases}$$

**Kor.** $x$ ist rekurrent $\iff G(x,x) = \infty$

**Satz.** Ist $x \in E$ rekurrent und $F(x,y) > 0$, so ist $y$ auch rekurrent und $F(x,y) = F(y,x) = 1$.

*Bem.* $F(x,y) > 0 \iff \exists\, n \geq 1 : p^{(n)}(x,y) > 0$

**Def.** $\{Z_n\}$ heißt **irreduzibel**, falls $\forall\, x, y \in E : F(x,y) > 0$.

**Satz.** Sei $\{Z_n\}$ irreduzibel. Dann sind entweder alle Zustände rekurrent oder alle Zustände transient.

**Satz.** Irreduzible Ketten auf endlichen Räumen sind rekurrent.

## Rekurrenz und Transienz von Irrfahrten

**Situation.** $\{Z_n\}$ ist eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$, d. h.

$$p(x,y) = p(0, y-x) =: q(y-x).$$

Mit and. Worten: Die *Zuwächse* $\{Z_n - Z_{n-1}\}_{n\geq 1}$ sind i. i. d. ZVn.

**Bsp.** Einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$: $\quad p(0,1) = p,\ p(0,-1) = q = 1-p$

In diesem Fall kann man die Greensche Funktion exakt berechnen:

$$\begin{array}{rcl} G(x,x) &=& G(0,0)\\ &=& \sum_{m=0}^{\infty} p^{(m)}(0,0)\\ &=& 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p^{(2n)}(0,0)\\ &=& 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n\\ &=& 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} 4^{-n} (4p(1-p))^n\\ &=& (1 - 4p(1-p))^{-1/2}\\ &=& 1/|2p-1| \end{array}$$

**Satz.** Sei $\{Z_n\}$ eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit

$$\mathbb{E}|Z_1 - Z_0| = \sum_{x \in \mathbb{Z}} |x| p(0,x) < \infty.$$

Dann gilt: $\quad \{Z_n\}$ ist rekurrent $\iff \sum_{x\in\mathbb{Z}} x p(0,x) = 0.$

**Def.** Die **einfache symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$** ist die translationsinvariante Markovkette mit

$$p(0, \pm e_i) = \tfrac{1}{2d} \quad \text{für } i = 1, \dots, d.$$

*Bem.* Für einfache symmetrische Irrfahrten gilt:

$$p^{(2n)}(x,x) = \sum_{\substack{k_1,\dots,k_d \in \mathbb{N}\\ k_1+\dots+k_d = n}} \frac{(2n)!}{(k_1!)^2 \cdots (k_d!)^2} \left(\frac{1}{2d}\right)^{2n}$$

Für $d = 2$ gilt $p^{(2n)}(0,0) = [\binom{2n}{n}(\frac{1}{2})^{2n}]^2$. Mit der Stirling'schen Formel folgt $p^{(2n)}(0,0) \approx \frac{1}{\pi n}$. Somit gilt $\sum p^{(2n)}(0,0) = \infty$.

**Fazit.** Die zweidimensionale einfache symm. Irrfahrt ist rekurrent.

*Bem.* Man kann zeigen: Für einfache symm. Irrfahrten auf $\mathbb{Z}^d$ gilt

$$p^{(2n)}(0,0) \leq C_d / n^{d/2}$$

für eine Konstante $C_d > 0$. Somit ist die einfache Irrfahrt transient für alle $d \geq 3$.

**Def.** $\varphi(t) := \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{i(t\cdot x)} p(0,x) \qquad$ für $t \in \mathbb{R}^d$

*Bem.* Da die Zuwächse $\{Z_n - Z_{n-1}\}$ i. i. d. sind, gilt

$$\textstyle\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} e^{i(t\cdot x)} p^{(n)}(0,x) = \varphi^n(t), \quad n \geq 1$$

*Inversionsformel:* $\quad p^{(n)}(0,x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi)^d} e^{-i(t\cdot x)} \varphi^n(t)\, \mathrm{d}t$

**Satz.** Für jede Irrfahrt $\{Z_n\}$ auf $\mathbb{Z}^d$ gilt

$$G(0,0) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \lim_{\lambda\uparrow 1} \int\limits_{t\in[-\pi,\pi)^d} Re\left(\tfrac{1}{1-\lambda\varphi(t)}\right) \mathrm{d}t = \infty$$

**Bsp.** Für die einfache symm. Irrfahrt $\{Z_n\}$ auf $\mathbb{Z}^d$ ist

$$\varphi(t) = \tfrac{1}{d} \textstyle\sum_{k=1}^{d} \cos(t_k)$$

Mit der Ungleichung $1 - \cos(u) \geq c_0 u^2$ für alle $u \in [-\pi, \pi]$ folgt

$$\varphi(t) \geq \tfrac{c_0}{d} |t|^2.$$

Es folgt

$$\tfrac{1}{1-\lambda\varphi(t)} \leq \tfrac{d}{\lambda c_0} |t|^{-2}$$

Die Funktion $|t|^{-2}$ ist auf $[-\pi,\pi)^d$ für jedes $d \geq 3$ integrierbar. Somit ist die einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$, transient.

**Satz.** Jede irreduzible Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ mit $d \geq 3$ ist transient.

**Bsp.** Sei $\{Z_n\}$ eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit $p(0,x) = p(0,-x)$. Gelte

$$x^\alpha p(0,x) \xrightarrow{x\to\infty} c \in (0,\infty)$$

für ein $\alpha > 1$. Dann ist

$$1 - \varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 - \cos(nt)) p(0,n) \quad \text{und} \quad \frac{1-\varphi(t)}{|t|^{\alpha-1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^\alpha p(0,n) |t| f(nt)$$

mit $f(x) = (1-\cos(x))/|x|^\alpha$. Außerdem $|n|^\alpha p(0,n) = c + \epsilon_n$, wobei $\epsilon_n \to 0$ für $|n| \to \infty$. Es folgt

$$\tfrac{1-\varphi(t)}{|t|^{\alpha-1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c|t| f(nt) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon_n |t| f(nt).$$

Für $t \to 0$ hat man

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |t| f(nt) \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon_n |t| f(nt) \to 0.$$

Es folgt für $\alpha < 3$:

$$\lim_{t\to 0} \tfrac{1-\varphi(t)}{|t|^{\alpha-1}} = c \int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{1-\cos(x)}{|x|^\alpha}\, \mathrm{d}x < \infty$$

Folglich ist $\frac{1}{1-\varphi(t)}$ für $\alpha < 2$ integrierbar und somit $\{Z_n\}$ transient.
Für $\alpha = 2$ ist $1/(1-\varphi(t))$ in der Umgebung von null nicht integrierbar und damit $\{Z_n\}$ rekurrent.
Für $\alpha > 2$ ist $\sum |x| p(0,x) < \infty$ und somit ist die Irrfahrt rekurrent, da der Erwartungswert der Zuwächse null ist.

# Erneuerungstheorie

**Situation.** Seien $\{X_k\}_{k\geq 1}$ unabhängige ZVn mit Werten in $\mathbb{N}$ und $P(X_k \geq 1) > 0$, wobei $\{X_k\}_{k\geq 2}$ identisch vert. sind. Dann definiert

$$Z_n := \sum_{k=1}^n X_k + Z_0$$

eine Irrfahrt $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ mit nicht-negativen Zuwächsen auf $\mathbb{Z}$.

**Ziel.** Untersuche das asympt. Verhalten von $G(0,x)$.

**Def.** Die **erzeugende Funktion** einer Folge $\{a_n\}$ ist

$$A(s) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n.$$

**Bsp.** Setze $p_k := P(X_2 = k)$, $k \geq 0$. Wir nehmen an, dass

$$a := \mathbb{E}[X_2] = \sum_{k=1}^\infty k p_k \in (0,\infty)\,.$$

Definiere $q_k := \frac{1}{a}\sum_{j=k}^\infty p_j$ für $k \geq 1$. Dann ist $\sum_{k=1}^\infty q_k = 1$. Sei $X_1$ eine ZV mit $P(X_1 = k) = q_k$, $k \geq 1$. Setze

$$\begin{aligned} f(s) &:= \sum_{k=1}^\infty p_k s^k = \mathbb{E}[s^{X_2}],\ \ |s| \leq 1 \\ g(s) &:= \sum_{k=1}^\infty q_k s^k = \mathbb{E}[s^{X_1}] \\ \psi(s) &:= \sum_{x=1}^\infty G(0,x) s^x,\ \ |s| < 1 \end{aligned}$$

Dann gilt für $|s| < 1$:

$$\psi(s) = \sum_{k=1}^\infty g(s) f(s)^{k-1} = g(s)/(1-f(s))$$

Außerdem gilt:

$$g(s) = \frac{s}{a(1-s)}(1-f(s))$$

Es folgt:

$$\psi(s) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{a} s^x$$

Somit ist $G(0,x) = \frac{1}{a}$.

**Satz.** Angenommen, $\mathrm{ggT}\{k \mid p_k > 0\} = 1$. Dann gilt für jede Verteilung von $X_1$, dass

$$G(0,x) \xrightarrow{x\to\infty} \frac{1}{a}.$$

**Lem.** Sei $g(\theta)$ integrierbar auf $[-\pi,\pi)$. Dann gilt

$$\int_{[-\pi,\pi)} e^{i\theta x} g(\theta)\,\mathrm{d}\theta \xrightarrow{|x|\to\infty} \quad (x \in \mathbb{Z})$$

**Lem.** Seien alle $X_k$ identisch verteilt und $\mathrm{ggT}\{p \mid p_k > 0\} = 1$. Dann existiert $L := \lim_{x\to\infty} G(0,x)$.

**Def.** Seien $\{X_k\}_{k\geq 1}$ unabhängige, nichtneg. ZVn und seien $\{X_k\}_{k\geq 2}$ identisch verteilt. Setze $Z_n := \sum_{k=1}^n X_k$. Dann heißt

$$\begin{aligned} \eta(t) &:= \min\{k \geq 1 \mid Z_k > t\} && \textbf{Erneuerungsprozess} \text{ und} \\ H(t) &:= \mathbb{E}[\eta(t)] && \textbf{Erneuerungsfunktion}. \end{aligned}$$

Falls $X_k$ nur Werte aus $\mathbb{N}$ annimmt, so können wir das Verhalten von $H(t) - H(t-1)$ wie folgt beschreiben:

$$\begin{aligned} & H(t) = \mathbb{E}[\eta(t)] = \sum_{k=0}^\infty P(\eta(t) > k) = \sum_{k=0}^\infty P(Z_k \leq t) \\ \rightsquigarrow\ & H(t) - H(t-1) = \sum_{k=0}^\infty P(Z_k = t) \xrightarrow{t\to\infty} 1/\mathbb{E}[X_2]. \end{aligned}$$

**Def.**
$$\begin{aligned} \gamma(t) &:= t - Z_{\eta(t)-1} \geq 0 && \text{heißt } \textbf{Undershoot}, \\ \chi(t) &:= Z_{\eta(t)} - t > 0 && \text{heißt } \textbf{Overshoot}. \end{aligned}$$

**Satz.** Sind die Bedingungen des letzten Satzes erfüllt, so gilt

$$P(\gamma(t) = i, \chi(t) = j) \xrightarrow{t\to\infty} \frac{p_{i+j}}{\mathbb{E}[X_2]} \qquad \text{für alle } i \geq 0, j \geq 1.$$

**Kor.**
$$\begin{aligned} P(\gamma(t) = i) &\xrightarrow{t\to\infty} \tfrac{1}{a}\textstyle\sum_{k=i+1}^\infty p_k, \\ P(\gamma(t) = j) &\xrightarrow{t\to\infty} \tfrac{1}{a}\textstyle\sum_{k=j}^\infty p_k \end{aligned}$$

TODO: Eine der Gleichungen im Korollar sollte $\chi$ beinhalten.

# Positive Rekurrenz

**Def.** $x \in E$ heißt **positiv rekurrent**, falls $\mathbb{E}[\tau_x^{(1)} | Z_0 = x] < \infty$

*Bem.* positive Rekurrenz $\implies$ Rekurrenz

**Def.** Falls $x$ rekurrent, aber nicht positiv rekurrent ist, so heißt $x$ **nullrekurrent**.

**Lem.** Sei $x$ ein positiv rekurrenter Zustand.
Ist $F(x,y) > 0$ so ist auch $y$ positiv rekurrent.

**Kor.** Ist $\{Z_n\}$ irreduzibel und $x_0 \in E$ positiv rekurrent, so gilt:

- alle Zustände sind positiv rekurrent
- $m(x,y) := \mathbb{E}[\tau_y^{(1)} | Z_0 = x] < \infty$ für alle $x, y \in E$

**Def.** Die Zahl $d_x := \mathrm{ggT}\{n \geq 1 \mid p^{(n)}(x,x) > 0\}$ heißt **Periode** von $x$. Falls $d = d_x$ für alle $x \in E$, so heißt $d$ *Periode* der Kette $\{Z_n\}$.

**Lem.** Ist $\{Z_n\}$ irreduzibel, so gilt $d_x = d_y$ für alle $x, y \in E$.

**Satz.** Es gibt eine Familie $\{\pi_y \in \mathbb{R}_{>0}\}_{y\in E}$, sodass

$$\forall\, x, y \in E\,:\, p^{(n)}(x,y) \xrightarrow{n\to\infty} \pi_y$$

genau dann, wenn

- $\{Z_n\}$ irreduzibel und
- aperiodisch (d. h. $d = 1$) ist und
- ein $x_0$ existiert, sodass $m(x_0,x_0) < \infty$.

Die Folge $\{\pi_y\}_{y\in E}$ ist die eindeutige Lösung zu

$$\begin{cases} \sum_{y\in E} |P_y| < \infty \\ \sum_{y\in E} \pi_y = 1 \\ \sum_{x\in E} \pi_x p(x,y) = \pi_y \text{ für alle } y \in E \end{cases}$$

Es gilt $\pi_y = 1/m(y,y)$.

**Def.** Eine Verteilung $\{\mu_x\}_{x\in E}$ auf $E$ heißt **stationär**, falls

$$\mu_x = \sum_{y\in E} \mu_y p(y,x) \quad \text{für alle } x \in E \qquad (\text{kurz: } \mu = \mu P).$$

*Bem.* Für eine stationäre Verteilung $\{\mu_x\}_{x\in E}$ gilt

$$\mu_x = \sum_{y\in E} \mu_y p^{(n)}(y,x) \quad \text{für alle } x \in E \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

**Lem.** Sei $x$ ein positiv rekurrenter Zustand. Dann definiert

$$\mu_y^{(x)} := \mathbb{E}\Big[\sum_{k=0}^{\tau_x^{(1)}-1} \mathbb{1}\{Z_k = y | Z_0 = x\}\Big]/m(x,x)$$

für alle $y \in E$ eine stationäre Verteilung $\{\mu_y^{(x)}\}_{y\in E}$.

**Satz.** Sei $\{Z_n\}$ eine irreduzible Kette. Dann gilt:

$\{Z_n\}$ ist pos. rekurrent $\iff$ $\{Z_n\}$ hat eine stationäre Verteilung.

In diesem Fall ist die stationäre Verteilung eindeutig.

**Satz.** Eine irreduzible Kette auf einem endlichen Zustandsraum ist immer positiv rekurrent. Ferner existieren $C > 0$ und $q \in (0,1)$ mit

$$P(\tau_y^{(1)} > n | Z_0 = x) < Cq^n \quad \text{für alle } n \geq 1 \text{ und } x, y \in E.$$

**Satz.** Sei $\{Z_n\}$ irreduzibel und positiv rekurrent. Sei $f : E \to \mathbb{R}$ integrierbar bezüglich der stationären Verteilung $\{\pi_x\}$, d. h. $\sum_{x\in E} |f(x)| \pi_x < \infty$. Dann gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(Z_k) \xrightarrow{\text{f. s.}} \sum_{x\in E} f(x)\pi_x$$

**Bsp.** Für $f(y) := \mathbb{1}\{y = x_0\}$ für eine $x_0 \in E$ erhalten wir

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}\{Z_k = x_0\} \xrightarrow{\text{f. s.}} \pi_{x_0}.$$

Es folgt mit majorisierter Konvergenz:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} p^{(k)}(x,x_0) \xrightarrow{n\to\infty} \pi_{x_0}.$$

**Bsp.** Sei $\{Z_n\}$ irreduzibel, periodisch mit Periode $p > 1$. Dann gilt $p^{(dk)}(x_0,x_0) \xrightarrow{d} /m(x_0,x_0)$.

**Lem.** Sei $\{Z_n\}$ eine irreduzible Kette mit der Periode $d \geq 1$. Für jedes $x \in E$ existiert ein $m_x \geq 1$ mit

$$p^{(md)}(x,x) > 0 \text{für alle } m \geq m_x.$$

**Prop.** Sei $\{Z_n\}$ irreduzibel und periodisch mit $d \geq 1$. Dann existieren paarweise disjunkte $C_0, C_1, \ldots, C_{d-1} \subseteq E$ mit $C_0 \cup \ldots \cup C_{d-1} = E$ mit

$$\{y \in E \,|\, x \in C_i, p(x,y) > 0\} = C_{(i+1)\%d}.$$

In anderen Worten: Die Mengen $C_i$ werden zyklisch besucht.

*Bem.* Die Markovkette $\{Z_{md}\}_{m \geq 0}$ ist nicht irreduzibel (für $d > 1$) aber die Restriktion auf jedes $C_i$ ist irreduzibel und außerdem aperiodisch. Mit dem Ergodensatz erhalten wir

$$p^{(md)}(x,y) \xrightarrow{m\to\infty} d/m(y,y) \quad \text{für alle } x, y \in C_i$$

Falls $x \in C_0$ und wir wollen $p^{(md+r)}(x,y)$ berechnen, so recht es $y \in C_r$ zu betrachten. Definiere

$$F_r(x,y) = P(\tau_y^{(1)} < \infty, \tau_y^{(1)} = r \mod d | Z_0 = x)$$

Es gilt dann:

$$p^{(md+r)}(x,y) \xrightarrow{m\to\infty} F_r(x,y) d/m(y,y)$$

## Martingale

Sei im Folgenden $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Maßraum.

**Def.** Eine wachsende Folge $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots$ von $\sigma$-Algebren heißt **Filtration**. Eine Folge von ZVen $\{M_n\}$ heißt **adaptiert** an die Filtration $\{\mathcal{F}_n\}$, falls $M_n$ $\mathcal{F}_n$-messbar ist für jedes $n \geq 0$.

**Def.** Sei $X$ eine ZV mit $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Dann heißt $\widehat{X}$ **bedingte Erwartung** von $X$ bzgl. $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}$ falls $\hat{X}$ $\mathcal{A}$-messbar ist und $\mathbb{E}[X \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\hat{X} \mathbb{1}_A]$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

**Def.** Eine $\{F_n\}$-adapt. Folge $\{M_n\}$ mit $\forall\, n : \mathbb{E}[|M_n|] < \infty$ heißt

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{Martingal}\\ \textit{Submartingal}\\ \textit{Supermartingal}\end{array}\right\} \text{ falls } \mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] \left\{\begin{array}{c} = \\ \geq \\ \leq \end{array}\right\} M_n \quad \forall\, n \geq 0.$$

*Bem.* • $\{M_n\}$ ist Submartingal $\iff$ $\{-M_n\}$ ist Supermartingal
• $\{M_n\}$ ist Martingal $\iff$ $\{M_n\}$ ist Super- und Submartingal

*Bem.* Martingal-Strategie für wdh. Werfen einer fairen Münze:

- 1. Runde: Einsatz = 1 Euro, bei Gewinn Ausstieg
- 2. Runde: Einsatz = 2 Euro, bei Gewinn Ausstieg, ...
- $n$. Runde: Einsatz = $2^{n-1}$ Euro, bei Gewinn Ausstieg

Es gilt: $T = \min\{n \geq 1 | n\text{-te Runde ist gewonnen}\} < \infty$ fast sicher, der Gewinn ist 1 Euro.

**Bsp.** Seien $\{X_i\}$ unabh. ZVen mit $\mathbb{E}[X_i] = 0$ for alle $i \geq 0$. Sei $M_n \coloneqq X_1 + \ldots + X_n$. Dann ist $\{M_n\}$ ein Martingal bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F}_n\}$ mit $\mathcal{F}_n \coloneqq \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

**Def.** Für eine Folge $\{M_n\}$ von ZVen heißt $\{\sigma(M_0, M_1, \ldots, M_n)\}_{n \geq 0}$ **natürliche Filtration**.

**Lem.** Ist $\{M_n\}$ ein Martingal bzgl. einer bel. Filtration, so ist $\{M_n\}$ auch ein Martingal bzgl. der natürlichen Filtration.

**Def.** $\{M_n\}$ ist Martingal $:\iff$ $\{M_n\}$ ist Martingal bzgl. der natürlichen Filtration

**Lem.** Ist $\{M_n\}$ ein Submartingal, so gilt $\mathbb{E}[M_{i+1}] \geq \mathbb{E}[M_i]$.

**Lem.** Sei $\{M_n\}$ ein Martingal bzgl. $\{\mathcal{F}_n\}$. Dann gilt:

$$\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_i] = M_i \quad \text{für alle } i \leq n.$$

**Lem.** Sei $\{M_n\}$ ein Martingal bzgl. $\{\mathcal{F}_n\}$ und sei $\varphi$ eine konvexe messbare Funktion. Falls $\mathbb{E}[|\varphi(M_n)|] < \infty$ für alle $n \geq 1$, so ist di Folge $\{\varphi(M_n)\}_{n \geq 0}$ ein Submartingal bzgl. $\{F_n\}$

*Bem.* Die Aussage des vorh. Lemmas gilt auch, falls $\{M_n\}$ nur ein Submartingal, dafür aber $\varphi$ zusätzlich monoton wachsend ist.

**Bsp.** Ist $\{M_n\}$ ein Martingal, so sind $M_n^2$, $M_n^+$ und $|M_n|$ Submartingale.

**Bsp.** Ein Anleger kauft $H_0$ Aktien einer Firma. Es sei $W_0$ der Wert der Aktien beim Kauf, $Y_n$ der Kurs der Aktie $n$ Tage nach dem Kauf und $H_n$ die Anzal der Aktien $n$ Tage nach dem Kauf. Forderung: $H_n$ soll $\sigma(Y_0, \ldots, Y_{n-1})$-messbar sein. Sei $W_n$ der Wert der Aktien $n$ Tage nach dem Kauf. Es gilt

$$W_n = W_{n-1} + H_n(Y_n - Y_{n-1}) = W_0 + \sum_{i=1}^n H_i(Y_i - Y_{i-1})$$

Falls $\{Y_n\}$ ein Martingal ist, so gilt

$$\mathbb{E}[W_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[W_n + H_{n+1}(Y_{n+1} - Y_n)|\mathcal{F}_n] = W_n + \mathbb{E}[H_{n+1}(Y_{n+1} - Y_n)|\mathcal{F}_n] = W_n + H_{n+1}\mathbb{E}[Y_{n+1} - Y_n|\mathcal{F}_n] = W_n + H_{n+1}(\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] - Y_n) = W_n (\text{bz}$$

Fazit: Man kann mit der Wahl der Handelsstrategie keine Anlage verbessern.

**Def.** Eine Folge $\{H_n\}_{n \geq 1}$ heißt **prävisibel**, falls $H_n$ $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar ist für alle $n \geq 1$. Definiere $\{H \cdot Y\}_n$ durch

$$(H \cdot Y)_n \coloneqq \sum_{i=1}^n H_i(Y_i - Y_{i-1})$$

**Satz.** Sei $\{Y_n\}$ ein Supermartingal und sei $\{H_n\}$ prävisibel jeweils bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F}_n\}$. Falls $H_n \in [0, C_n]$ für Konstanten $\{C_n\}$, so ist $\{(H \cdot Y)_n\}$ auch ein Supermartingal.

*Bem.* Man kann den Satz für Submartingale und Martingale formulieren. Für Martingale reicht es anzunehmen, dass $|H_n| \leq C_n$.

**Def.** Eine Abbildung $T : \Omega \to \{\infty\}$ heißt **Stoppzeit** bzgl. $\{F_n\}$, falls $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ für alle $n \geq 0$.

**Bsp.** Sei $\{M_n\}$ eine Folge von ZVen und sei $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Dann ist $T = \inf\{n \geq 0 \,|\, M_n \in A\}$ eine Stoppzeit bzgl. $\{\sigma(M_0, \ldots, M_n)\}_n$.

**Satz.** Ist $\{M_n\}$ ein Supermartingal und $T$ eine Stoppzeit, so ist $\{M_{\min(T,n)}\}$ auch ein Supermartingal.

Sei $\{M_n\}$ eine Folge von ZVen Seien $a < b$. Definiere

$$N_0 \coloneqq -1, \quad N_{2k-1} \coloneqq \inf\{n > N_{2k-2} \,|\, M_n < a\}, \quad N_{2k} \coloneqq \inf\{n > N_{2k} \,|\, M_n$$

Außerdem sei

$$U_n \coloneqq \max\{k \,|\, N_{2k} \leq n\}.$$

die Anzahl der *Aufkreuzungen*.

**Satz** (Doob'sche Aufkreuzungsungleichung)**.** Ist $\{M_n\}$ ein Submartingal, so gilt für alle $a < b$ und alle $n \geq 1$:

$$\mathbb{E}[U_n] \leq (\mathbb{E}[(M_n - a)^+] - \mathbb{E}[(M_0 - a)^+])/(b - a).$$

**Satz** (**Martingalkonvergenzsatz**)**.** Sei $\{M_n\}$ ein Submartingal mit $\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[M_n^+] < \infty$. Dann existiert eine ZV $M_\infty$ mit $\mathbb{E}[|M_\infty|] < \infty$ sodass $M_n \to M_\infty$ fast-sicher.

**Bsp** (Polya-Urne)**.** Urne mit $b$ blauen und $r$ roten Kugeln. In jeder Runde wird eine Kugel gezogen und mit einer weiteren Kugel gleicher Farbe zurückgelegt. Sei $R_n$ di Anzahl von zugefügten roten Kugeln nach $n$ Runden.
Man kann zeigen: $\{M_n \coloneqq (r + R_n)/(r + b + n)\}_{n \geq 0}$ ist ein Martingal. Außerdem gilt $\sup \mathbb{E}[M_n^+] \leq 1$ Nach dem vorherigen Satz gilt also $M_n \to M_\infty$ fast-sicher. Man kann zeigen, dass $M_\infty \sim \text{Beta}(r, b)$,

$$f_{M_\infty}(x) = \frac{1}{B(r,b)} x^{r-1}(1-x)^{b-1}.$$

**Kor.** Sei $\{M_n\}$ ein nichtneg. Supermartingal. Dann existert $M_\infty \in L_1$ mit $M_n \to M_\infty$ fast-sicher.

**Satz.** Sei $\{M_n\}$ ein Submartingal und sei $T$ eine Stoppzeit bzgl. derselben Filtration mit $P(T \leq N) = 1$ für ein $N \geq 1$. Dann gilt:

$$\mathbb{E}[M_0] \leq \mathbb{E}[M_T] \leq \mathbb{E}[M_N].$$

**Satz** (**Doob'sche Ungleichung**)**.** Sei $\{M_n\}$ ein Submartingal. Dann gilt:

$$P(\max_{k \leq n} M_k \geq \lambda) \leq \tfrac{1}{\lambda}\mathbb{E}[M_n \mathbb{1}\{\max_{k \leq n} M_k \geq \lambda\} \leq \mathbb{E}[M_n^+]/\lambda.]$$

*Bem.* Die Doob'sche Ungleichung verbessert die Markov-Ungleichung.

**Kor** (**Kolmogorov-Ungleichung**)**.** Seien $\{X_i\}$ unabh. ZVen mit $\mathbb{E}[X_i] = 0$ und $\mathbb{E}[X_i^2] < \infty$. Sei $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}(\max_{k \leq n} |S_k| \geq \lambda) \leq \text{Var}(S_n)/\lambda^2.$$

**Satz.** Ist $\{M_n\}$ ein Submartingal, dann gilt für jedes $p \in (1, \infty)$:

$$\mathbb{E}[(\max_{k \leq n})^p] \leq (p/(p-1))^p \mathbb{E}[(M_n^+)^p]$$

**Kor.** Sei $\{M_n\}$ ein Martingal. Dann gilt für jedes $p \in (1, \infty)$:

$$\mathbb{E}[(\max_{k \leq n} |M_k|)^p \leq (p/(p-1))^p \mathbb{E}[|M_n|^p.]$$

**Satz.** Sei $\{M_n\}$ ein Martingal mit $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[|M_n|^p] < \infty$ für ein $p > 1$. Dann konvergiert $M_n$ fast-sicher und in $L^p$.

**Def.** Eine Familie $\{X_i\}_{i\in I}$ heißt **gleichgradig integrierbar**, falls

$$\forall \epsilon > 0 : \exists M > 0 : \forall i \in I : \mathbb{E}[|X_i|\mathbb{1}_{\{|X_i|>M\}}] < \epsilon.$$

**Lem.** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wkts-Raum, $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ eine Famile von $\sigma$-Algebren mit $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{F}$ für alle $i \in I$. Dann ist die Familie $\{\mathbb{E}[X|\mathcal{A}_i]\}_{i\in I}$ gleichgradig integrierbar.

**Lem.** Sei $\{\mathcal{F}_n\}$ eine Filtration und $X \in L^1$. Dann ist $\{M_n\}$ mit $M_n := \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$ ein gleichgradig integrierbares Martingal.

**Satz.** Für jedes Martingal $\{M_n\}$ (bzgl. $\{\mathcal{F}_n\}$) sind äquivalent:

- $\{M_n\}$ ist gleichgradig integrierbar
- $\{M_n\}$ konvergiert fast sicher und in $L^1$
- $\{M_n\}$ konvergiert in $L^1$
- $\{\exists M \in L^1 : \forall n \geq 0 : M_n = \mathbb{E}[M|\mathcal{F}_n]\}$

**Satz.** Sei $\{\mathcal{F}_n\}$ eine Filtration. Betrachte $\mathcal{F}_\infty := \sigma(\cup_{n=0}^\infty \mathcal{F}_n)$

**Bsp.** Seien $\{X_i\}$ unabhängig und $\tau := \cap_{n\geq 1}\sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$ die terminale $\sigma$-Algebra. Dann folgt aus dem vorh. Satz, dass $P(A) \in \{0, 1\}$ für alle $A \in \tau$.

**Bsp.** Betrachte eine Lipschitz-stetige Funktion $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$. Setze

$$\begin{aligned} X_n &:= \textstyle\sum_{k=1}^{2^n} (k-1)/2^n \mathbb{1}\left[(k-1)/2^n, k/2^n\right), \\ M_n &:= 2^n(f(X_n + 1/2^n) - f(X_n)). \end{aligned}$$

Dies sind ZVen auf $\Omega = [0, 1)$ mit dem Lebesgue-Maß. Dann ist $\{M_n\}$ ein gleichgradig integrierbares Martingal. Somit gibt es ein $M \in L^1$ mit $M_n \xrightarrow{n\to\infty} M$ fast-sicher und in $L^1$. Es gilt dann

$$f(x) - f(0) = \int_0^x M(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{für alle } x \in [0, 1)\,.$$

**Satz.** Sei $T$ eine Stoppzeit. Falls

- $\{M_n\}$ ein gleichgradig integrierbares Submartingal ist *oder*
- $\mathbb{E}[|M_T|] < \infty$ und $\{M_n \mathbb{1}\{T > n\}\}$ gleichgradig integrierbar sind,

so ist die Folge $\{M_{T\wedge n}\}$ ebenfalls gleichgradig integrierbar.

**Satz.** Sei $\{M_n\}$ ein gleichgradig integrierbares Submartingal. Dann gilt für jede Stoppzeit $T$:

$$\mathbb{E}[M_0] \leq \mathbb{E}[M_T] \leq \mathbb{E}[M_\infty].$$

**Satz** (**Optional Stopping Theorem**).
Seien $S \leq T$ zwei Stoppzeiten. Ist $\{M_{T\wedge n}\}$ ein gleichgradig integrierbares Submartingal, so gilt

$$M_S \leq \mathbb{E}[M_T|\mathcal{F}_S].$$

# Rek. und Transienz mit Martingaltheorie

Sei $\{Y_n\}$ eine Folge nichtnegativer ZVen.

**Def.** $\{Y_n\}$ heißt **(topologisch) rekurrent**, falls

$$\exists r > 0 : P(\liminf_{n\to\infty} Y_n \leq r) = 1.$$

$\{Y_n\}$ heißt **(topologisch) transient**, falls $P(\lim_{n\to\infty} Y_n = \infty) = 1$.

**Satz.** Sei $\{Y_n\}$ eine Folge mit $P(\limsup_{n\to\infty} Y_n = \infty) = 1$. Falls ein $M > 0$ mit $\mathbb{E}[Y_{n+1}|Y_n = x_n, \ldots, Y_0 = x_0] \leq x_n$ für alle $x_n \geq M$ existiert, so ist $\{Y_n\}$ rekurrent.

Definiere $U_n^{(k)} := Y_{k+n} \cdot \mathbb{1}\{\min(Y_k, Y_{k+1}, \ldots, Y_{n+k-1}) \geq M\}$.

**Lem.** Unter Vor. des Satzes: Sei $\mathcal{F}_n^{(k)} := \sigma(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n+k})$.
Dann ist $\{U_n^{(k)}\}$ ein Supermartingal bzgl. $\{F_n^{(k)}\}$.

**Satz.** Sei $\{Y_n\}$ und $T > 0$ mit $P(Y_n \leq T) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $P(\limsup_{n\to\infty} Y_n = T) = 1$. Falls $\mathbb{E}[Y_{n+1}|Y_n = x_n, \ldots, Y_0 = x_0] \geq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \geq M$ für ein $M < T$, so gilt: $Y_n \xrightarrow{n\to\infty} T$ fast-sicher.

Im Folgenden sei $\tau := \inf\{n \geq 1 \,|\, Y_n \leq r\}$.

**Satz.** Angenommen, für die Folge $\{\tilde{Y}_n\}$ mit $\tilde{Y}_n := Y_{n\wedge\tau}$ gilt

$$\mathbb{E}[\tilde{Y}_{n+1}|\sigma(Y_0, \ldots, Y_n)] \leq \tilde{Y}_n - \epsilon\mathbb{1}\{\tau > n\} \quad \text{für ein } \epsilon > 0.$$

Dann gilt für jeden konst. Startwert $Y_0$ die Ungleichung

$$\mathbb{E}[\tau] \leq Y_0/\epsilon < \infty.$$

**Satz.** Falls $Y_0 > r$ und $\mathbb{E}[\tilde{Y}_{n+1}|\sigma(Y_0, \ldots, Y_n)] \geq \tilde{Y}_n$ gilt und ein $M > 0$ mit $\mathbb{E}[|\tilde{Y}_{n+1} - \tilde{Y}_n||\sigma(Y_0, \ldots, Y_n)] \leq M$ fast-sicher existiert, so gilt $\mathbb{E}[\tau] = \infty$.

Sei $\{Z_n\}$ eine Markovkette auf $\mathbb{N}_0$.
Definiere $m_1(x) := \mathbb{E}[Z_1 - Z_0|Z_0 = x] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} kp(x, x+k)$ und $m_2(x) := \mathbb{E}[(Z_1 - Z_0)^2|Z_0 = x] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 p(x, x+k)$.

*Bem.* Falls $m_1(x) \leq -\epsilon$ für alle $x \geq x_0$, so können wir direkt Satz 4.5 verwenden: Die Stoppzeit $\tau_r := \min\{n \geq 0 \,|\, Z_n \leq r\}$ hat endlichen Erwartungswert für jedes $r \geq x_0$.

**Frage.** Was passiert in dem Fall, wenn $m_1(x)$ von Null nicht getrennt ist? Hier hängt vieles von $m_2(x)$ ab.

**Satz.** Falls es ein $\epsilon > 0$ gibt mit

$$\forall x \geq x_0 : 2xm_1(x) + m_2(x) \leq -\epsilon,$$

so ist die Kette $\{Z_n\}$ positiv rekurrent.

*Beweisidee.* Betrachte $Y_n = Z_n^2$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[Y_{n+1} - Y_n|\sigma(Z_0, \ldots, Z_n)] \leq -\epsilon \quad \text{auf } \{Y_n \geq x_0^2\}.$$

Somit ist $\{Y_n\}$ nach Satz 4.5 und damit auch $\{Z_n\}$ rekurrent.

Falls $m_1(x) \sim -c/x$ und $m_2(x) \sim 1$, so ist $2xm_1(x) + m_2(x) \sim 1 - 2c$. Falls $c > \frac{1}{2}$, so ist die Kette positiv rekurrent.

**Satz.** Sei $\{Z_n\}$ eine irreduzible Kette mit $|Z_{n+1} - Z_n| \leq B$ fast-sicher für alle $n$ für ein $B > 0$. Außerdem gelte $\inf_x m_2(x) > 0$.

- Falls $2xm_1(x) \leq (1 - \epsilon)m_2(x)$ für alle $x \geq x_1$, so ist $\{Z_n\}$ rekurrent.
- Falls $2xm_1(x) \geq (1 + \epsilon)m_2(x)$ für alle $x \geq x_2$, so ist die Kette $\{Z_n\}$ transient.

**Bsp.** Sei $\{Z_n\}$ eine einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ mit $Z_{n+1} - Z_n \in U_d = \{\pm e_1, \ldots, \pm e_d\}$, alle gleich wahrscheinlich.
Wir wissen: $\{Z_n\}$ ist rekurrent $\iff d \leq 2$ Dies können wir auch wie folgt zeigen:
Betrachte $X_n := \|Z_n\|$. Dann ist

$$\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|Z_n = x] = \ldots = \frac{1/2 - 1/d}{\|x\|} + O(1/\|x\|^2)$$

und

$$\mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2|Z_n = x] = \ldots = 1/d + O(1/\|x\|)$$

Für $d = 1$ ist also

$$\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|X_n = x] \leq (1 - \epsilon)\mathbb{E}[(X_1 - X_0)^2|Z_0 = x]/(2\|x\|)$$

Mit Hilfe von $Y_n := \log(1 + X_n)$ erhalten wir, dass $\{X_n\}$ rekurrent ist. Bei $d \geq 3$ gilt

$$\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|Z_n = x] \geq (1 + \epsilon)\mathbb{E}[(X_1 - X_0)^2|Z_0 = x]/(2\|x\|)$$

Für $d = 2$ können wir den vorh. Satz leider nicht benutzen. Man kann den Satz aber verbessern, sodass aus

$$2xm_1(x) \leq \left(1 + \tfrac{1-\epsilon}{\log x}\right)m_2(x)$$

schon Rekurrenz folgt.

**Lem.** Sei $\{Z_n\}$ eine irreduzible abzählbare Markovkette. Falls es eine endliche Menge $A \subseteq E$ mit

$$\mathbb{E}[\tau_A|Z_0 = x] < \infty \quad \forall x \in A$$

gibt, so ist $\{Z_n\}$ positiv rekurrent.

**Satz** (**Kriterium von Foster**). Sei $\{Z_n\}$ eine irreduzible abzählbare Markovkette. Dann sind äquivalent:

- Die Kette $\{Z_n\}$ ist positiv rekurrent.
- Es gibt eine Abbildung $f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, ein $\epsilon > 0$ und eine endliche Teilmenge $A \subseteq E$ mit

$$\begin{aligned} &\forall x \in E : && \mathbb{E}[f(Z_1)|Z_0 = x] < \infty \\ \text{und} \quad &\forall x \in E \setminus A : && \mathbb{E}[f(Z_1) - f(Z_0)|Z_0 = x] \leq -\epsilon. \end{aligned}$$

*Bem.* Man kann sogar immer $\epsilon = 1$ und $|A| = 1$ erreichen.