Zusammenfassung Markovketten

Abzählbare Markovketten

Notation. Sei im Folgenden $\{Z_n\}$ eine Markovkette auf einem abzählbaren Zustandsraum E.

Def. Für $x \in E$ definiere die Zufallsvariablen

$$\begin{aligned} \tau_x^{(1)} &:= \inf\{n > 0 \,|\, Z_n = x\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\ \tau_x^{(k)} &:= \inf\{n > \tau_x^{(k-1)} \,|\, Z_n = x\}, \quad k > 1. \end{aligned}$$

(Beachte: $\tau_x^{(k)}$ ist eine messbare Abbildung.)

Bem. Ferner gilt $\{\tau_x^{(k)} = n\} \in \sigma(Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$.

Def. Für $x, y \in E$ sei $F(x, y) := P(\tau_y^{(i)} < \infty \mid Z_0 = x)$

Lem. Für alle $x, y \in E$ und $k \geq 1$ gilt

$$P(\tau_y^{(k)} < \infty \mid Z_0 = x) = F(x, y) \cdot F(y, y)^{k-1}.$$

Notation. $\tilde{\ell}(y) = \sum_{k=j}^{\infty} \mathbb{1}\{Z_k = y\}$

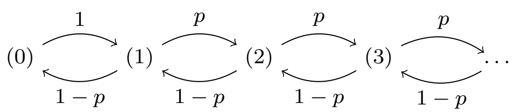
Dann gilt $P(\tau_y^{(k)} < \infty \mid Z_0 = x) = P(\tilde{\ell} \geq k \mid Z_0 = x)$

Def. Ein Zustand $x \in E$ heißt

- **absorbierend**, falls $p(x, x) = 1$,
- **rekurrent**, falls $F(x, x) = 1$ und
- **transient**, falls $F(x, x) < 1$.

Bem. Absorbierende Zustände sind rekurrent.

Bsp. In der Markovkette



ist (0) genau dann rekurrent, falls $p \leq 1/2$, ansonsten transient. TODO: genauer!

Def. Für $y \in E$ sei

$$\ell(y) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}\{Z_k = y\}$$

die **Anzahl der Besuche in y**. Die **Green'sche Funktion** von $\{Z_n\}$ ist $G : E \times E \to [0, \infty]$ mit

$$G(x, y) := \mathbb{E}(\ell(y) \mid Z_0 = x).$$

Bem. $G(x, y) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}\{Z_k = y\} \mid Z_0 = x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_k = y \mid Z_0 = x) = \delta_{xy} + \sum_{k=1}^{\infty} p^{(k)}(x, y)$

Satz. Für alle $x, y \in E$ gilt

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{F(x,y)}{1-F(y,y)} & \text{falls } x \neq y, \\ \frac{1}{1-F(y,y)} & \text{falls } x = y. \end{cases}$$

Kor. x ist rekurrent $\iff G(x, x) = \infty$

Satz. ist $x \in E$ rekurrent und $F(x, y) > 0$, so ist y auch rekurrent und $F(x, y) = F(y, x) = 1$.

Bem. $F(x, y) > 0 \iff \exists\, n \geq 1 : P^{(n)}(x, y) > 0$

Def. $\{Z_n\}$ heißt **irreduzibel**, falls $\forall\, x, y \in E : F(x, y) > 0$.

Satz. Sei $\{Z_n\}$ irreduzibel. Dann sind entweder alle Zustände rekurrent oder alle Zustände transient.

Satz. Eine irreduzible Kette auf einem endlichen Raum ist immer rekurrent.

Rekurrenz und Transienz von Irrfahrten

Sei $\{Z_n\}$ eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$, d. h. $p(x, y) = p(0, y - x) =: q(y - x)$. Mit anderen Worten: Die Zuwächse $\{Z_n - Z_{n-1}\}_{n \geq 1}$ sind i. i. d. Zufallsvariablen.

Bsp. Einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$: $p(0, 1) = p$, $p(0, -1) = q = 1 - p$

In diesem Fall kann man die Greensche Funktion exakt berechnen:

$$G(x, x) = G(0, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} p^{(m)}(0, 0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p^{(2n)}(0, 0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} p^n (1 - p)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} 4^{-n} (4p(1 - p))^n = (1 - 4p(1 - p))^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{|2p-1|}$$

Satz. Sei $\{Z_n\}$ eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit $\mathbb{E}|Z_1 - Z_0| = \sum_{x \in \mathbb{Z}} |x| p(0, x) < \infty$. Dann gilt

$$\{Z_n\} \text{ ist rekurrent} \iff \sum_{x \in \mathbb{Z}} x p(0, x) = 0.$$

Def. Einfache symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ ist eine translationsinvariante Markovkette mit $p(0, \pm e_i) = \frac{1}{2d}$ für $i = 1, \dots, d$.

Für einfache symm. Irrfahrten gilt:
$p^{(2n)}(x, x) = \sum_{k_1, \dots, k_d \in \mathbb{N}, k_1 + \dots + k_d = n} \frac{(2n)!}{(k_1!)^2 \cdot (k_d!)^2} (\frac{1}{2d})^{2n}$

Für $d = 2$ gilt $p^{(2n)}(0, 0) = [\binom{2n}{n} (\frac{1}{2})^{2n}]^2$

Mit der Stirling'schen Formel folgt $p^{(2n)}(0, 0) \approx \frac{1}{\pi n}$.

Somit gilt $\sum p^{(2n)}(0, 0) = \infty$.

Fazit. Die zweidimensionale einfache symm. Irrfahrt ist rekurrent.

Bem. Man kann zeigen: Für einfache symm. Irrfahrten auf $\mathbb{Z}^d$ gilt:

$$p^{2n}(0, 0) \leq \frac{C_d}{n^{d/2}}$$

Somit ist die einfache Irrfahrt transient für alle $d \geq 3$.

Def. $\varphi(t) := \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{i(t \cdot x)} p(0, x)$ für $t \in \mathbb{R}^d$

Da die Zuwächse $\{Z_n - Z_{n-1}\}$ i. i. d. sind, so gilt

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{i(t \cdot x)} p^n(0, x) = \varphi^n(t), \quad n \geq 1$$

Inversionsformel: $p^n(0, x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int [-\pi, \pi)^d e^{-i(t \cdot x)} \varphi^n(t) t$

Satz. Für jede Irrfahrt $\{Z_n\}$ auf $\mathbb{Z}^d$ gilt

$$G(0, 0) = (\tfrac{1}{2\pi})^d \lim_{\lambda \uparrow 1} \int t \in [-\pi, \pi)^d Re(\tfrac{1}{1 - \lambda\varphi(t)}) t = \infty$$

Bsp. Für die einfache symm. Irrfahrt $\{Z_n\}$ auf $\mathbb{Z}^d$ ist

$$\varphi(t) = \tfrac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} \cos(t_k)$$

Mit der Ungleichung $1 - \cos(u) \geq c_0 u^2$ für alle $u \in [-\pi, \pi]$ folgt

$$\varphi(t) \geq \tfrac{c_0}{d} |t|^2.$$

Es folgt

$$\tfrac{1}{1 - \lambda\varphi(t)} \leq \tfrac{d}{\lambda c_0} |t|^{-2}$$

Die Funktion $|t|^{-2}$ ist auf $[-\pi, \pi)^d$ für jedes $d \geq 3$ integrierbar. Somit ist die einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$, transient.

Satz. Jede irreduzible Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ mit $d \geq 3$ ist transient.

Bsp. Sei $\{Z_n\}$ eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit $p(0, x) = p(0, -x)$. Angenommen $x^\alpha p(0, x) \to c \in (0, \infty)$ für $x \to \infty$ für ein $\alpha > 1$. Dann gilt

$$1 - \varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 - \cos(nt)) p(0, n)$$

und

$$\tfrac{1 - \varphi(t)}{|t|^{\alpha - 1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^\alpha p(0, n) |t| f(nt)$$

mit $f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{|x|^\alpha}$. Außerdem $|n|^\alpha p(0, n) = c + \epsilon_n$, wobei $\epsilon_n \to 0$ für $|n| \to \infty$. Es folgt

$$\tfrac{1 - \varphi(t)}{|t|^{\alpha - 1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c|t| f(nt) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon_n |t| f(nt).$$

Für $t \to 0$ hat man

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |t| f(nt) \to \int -\infty^\infty f(x) x$$

und

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon_n |t| f(nt) \to 0.$$

Es folgt für $\alpha < 3$

$$\lim_{t \to 0} \tfrac{1 - \varphi(t)}{|t|^{\alpha - 1}} = c \int -\infty\infty \tfrac{1 - \cos(x)}{|x|^\alpha} x < \infty$$

Folglich ist $\frac{1}{1 - \varphi(t)}$ für $\alpha < 2$ integrierbar und somit $\{Z_n\}$ transient. Für $\alpha = 2$ ist $\frac{1}{1 - \varphi(t)}$ in der Umgebung von null nicht integrierbar und damit $\{Z_n\}$ rekurrent. Für $\alpha > 2$ ist $\sum |x| p(0, x) < \infty$ und somit ist die Irrfahrt rekurrent, da der Erwartungswert der Zuwächse null ist.