

Zusammenfassung Petrinetze

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

Def. Ein **Netzgraph** ist ein Tripel (S, T, W) , wobei S und T disjunkte, endliche Mengen sind und $W : S \times T \cup T \times S \rightarrow \mathbb{N}$. Dadurch ist ein gerichteter, gewichteter, bipartiter Graph mit Kantenmenge $F = \{(x, y) \mid W(x, y) \neq 0\}$ gegeben.

Notation	Bezeichnung	Symbol
$t \in T$	Transition	\square
$s \in S$	Stelle, Platz	\bigcirc
$(x, y) \in F$	Kante	\rightarrow falls $W(x, y) = 1$ \xrightarrow{w} falls $w := W(x, y) > 1$

Def. Sei $x \in S \cup T$.

- $\bullet x := \{y \mid (y, x) \in F\}$ heißt **Vorbereich** von x und
- $x^\bullet := \{y \mid (x, y) \in F\}$ heißt **Nachbereich** von x .
- x heißt **isoliert**, falls $\bullet x \cup x^\bullet = \emptyset$.
- x heißt **vorwärts-verzweigt**, falls $|x^\bullet| \geq 2$
- x heißt **rückwärts-verzweigt**, falls $|\bullet x| \geq 2$

Def. $(x, y) \in S \times T \cup T \times S$ bilden eine **Schlinge** falls $(x, y) \in F$ und $(y, x) \in F$.

Def. Eine **Markierung** ist eine Abbildung $M : S \rightarrow \mathbb{N}$. Eine Teilmenge $S' \subseteq S$ heißt **markiert** unter M , falls $\exists s \in S' : M(s') > 0$, andernfalls **unmarkiert**. Ein Element $s \in S$ heißt (*un-*)**markiert**, falls $\{s\} \subseteq S$ es ist.

Notation. $\mathfrak{M}(S) := \{M : S \rightarrow \mathbb{N}\}$

Def. Ein **Petrinetz** $N = (S, T, W, M_N)$ besteht aus

- einem Netzgraphen (S, T, W) und
- einer **Anfangsmarkierung** $M_N : S \rightarrow \mathbb{N}$.

Notation. Für eine feste Transition $t \in T$ ist

$$t^- : S \rightarrow \mathbb{N}, \quad s \mapsto W(s, t), \quad t^+ : S \rightarrow \mathbb{N}, \quad s \mapsto W(t, s)$$

Def. Eine Transition $t \in T$ heißt **aktiviert** unter einer Markierung M , notiert $M[t]$, falls

$$\forall s \in S : W(s, t) \leq M(s) \iff t^- \leq M.$$

Ist t aktiviert, so kann t *schalten* und es entsteht die **Folgemarkierung** $M' := M + \Delta t$, wobei

$$\Delta t : S \rightarrow \mathbb{Z}, \quad s \mapsto W(t, s) - W(s, t).$$

Notation. $M[t]M'$

Def. Für $w = t_1 \cdots t_n \in T^*$ und Markierungen M und M' gilt

$$M[w]M' : \iff M[t_1]M_1[t_2] \cdots [t_{n-1}]M_{n-1}[t_n]M'$$

für (eindeutig bestimmte) Markierungen M_1, \dots, M_{n-1} .

Ein Wort $w \in T^*$ heißt **Schaltfolge** (*firing sequence*) von N , notiert $M_N[w]$, falls $\exists M' : M_N[w]M'$.

Notation. $[M] := \{M' \mid \exists w \in T^* : M[w]M'\}$
 $\text{FS}(N) := \{w \in T^* \mid M_N[w]\}$ für ein Petrinetz N

Def. M' heißt **erreichbar** von M , falls $M' \in [M]$.

Def. $w \in T^*$ heißt **unendliche Schaltfolge** von N , falls alle endlichen Präfixe von w Schaltfolgen von N sind.

Def. Der **Erreichbarkeitsgraph** $\mathfrak{R}(N)$ zu N besitzt die Knoten $[M_N]$ und die Kanten $\{(M, M') \mid \exists t : M[t]M'\}$.

Def. Für $w = a_1 \cdots a_n \in A^*$ ist $\text{Parikh}(w) : A \rightarrow \mathbb{N}$, $a \mapsto |i|a_i = a$.

Lem. In $M[w]M'$ hängt M' nur von M und $\text{Parikh}(w)$ ab, genauer

$$M' = M + \sum_{t \in T} \text{Parikh}(w)(t) \cdot \Delta t.$$

Lem. $M_1[w]M_2 \implies M + M_1[w]M + M_2$

TODO: Satz 2.8

Lem. Sei N ein Petri-Netz. Dann gilt:

- $\text{FS}(N)$ ist *präfix-abg.*, d. h. $w = vu \in \text{FS}(N) \implies v \in \text{FS}(N)$.
- Ist $[M_N]$ endlich, so ist $\text{FS}(N)$ regulär.

Def. Ein **beschriftetes Petrinetz** $N = (S, T, W, M_N, \ell)$ best. aus

- einem Petrinetz (S, T, W, M_N) und
- einer Transitionsbeschriftung (*labelling*) $\ell : T \rightarrow \Sigma \cup \{\lambda\}$, wobei Σ eine Menge von *Aktionen* ist.

Sprechweise. $t \in T$ mit $\ell(t) = \lambda$ heißt *intern* oder *unsichtbar*.

Notation. Für $t \in T^*$ ist $\ell(w) := \ell(t_1) \cdots \ell(t_n) \in \Sigma^*$.
 Dabei wird λ als das leere Wort in Σ^* aufgefasst.

Def. Mit $t \in T$, $w \in T^*$ und Markierungen M , M' ist definiert:

$$\frac{M[t]M'}{M[\ell(t)]M'} \quad \frac{M[t]}{M[\ell(t)]} \quad \frac{M[w]M'}{M[\ell(w)]M'} \quad \frac{M[w]}{M[\ell(w)]}$$

Def. Die **Sprache** eines beschrifteten Netzes N ist

$$L(N) := \{v \in \Sigma^* \mid M_N[v]\}.$$

Def. Ein **beschriftetes Netz mit Endmarkierung** ist ein Tupel $N = (S, T, W, M_N, \ell, \text{Fin})$ wobei

- (S, T, W, M_N, ℓ) ein beschriftetes Netz und
- $\text{Fin} \subseteq \mathfrak{M}(S)$ eine endliche Menge ist.

Die entspr. Sprache ist $L_{\text{fin}}(N) := \{v \in \Sigma^* \mid \exists M \in \text{Fin} : M_N[v]M\}$.

Notation. $\mathcal{L}^\lambda := \{L_{\text{fin}}(N) \mid N \text{ beschr. Netz mit Endmarkierung}\}$
 $\mathcal{L} := \{L_{\text{fin}}(N) \mid N \text{ beschr. Netz mit Endmark. ohne interne Trans.}\}$

Satz. $\{\text{reguläre Sprachen}\} \subseteq \mathcal{L}$

Nebenläufigkeit I

Def. Eine Multimenge über X ist eine Funktion $\mu : X \rightarrow \mathbb{N}$.

Notation. $\mathfrak{M}(X) := \{\mu : X \rightarrow \mathbb{N}\}$
 $\mu_Y \in \mathfrak{M}(X), x \mapsto |\{x \mid x \in Y\}|$ für $Y \subseteq X$,
 $\emptyset := \mu_\emptyset \in \mathfrak{M}(X), \mu_x := \mu_{\{x\}} \in \mathfrak{M}(X)$ für $x \in X$

Def. Ein **Schritt** μ ist eine Multimenge $\mu \neq \emptyset \in \mathfrak{M}(T)$. Der Schritt μ ist **aktiviert** unter M , notiert $M[\mu]$, falls

$$\forall s \in S : \mu^-(s) := \sum_{t \in T} \mu(t)W(s, t) \leq M(s).$$

Durch *Schalten* von μ entsteht die Folgemarkierung $M' \in \mathfrak{M}(S)$ mit

$$M'(s) = M(s) + \sum_{t \in T} \mu(t) \cdot (W(t, s) - W(s, t)).$$

Bem. Analog wird verallgemeinert: $M[\mu]M', M[w], M[w]M'$ für $\mu \in \mathfrak{M}(T) \setminus \{\emptyset\}$ bzw. $w \in (\mathfrak{M}(T) \setminus \{\emptyset\})^*$.

Def. $\text{SS}(N) := \{w \in (\mathfrak{M}(T) \setminus \{\emptyset\})^* \mid M_N[w]\}$
 heißen **Schrittfolgen** (*step sequences*).

Def. Zwei Transitionen $t, t' \in T$ sind

- **nebenläufig** unter M , falls $M[t + t']$,
- **in Konflikt** unter M , falls $\neg M[t + t']$.

Notation. Für $\mu \in \mathfrak{M}(T)$ ist $\ell(\mu)$ die Multimenge mit

$$\ell(\mu) : \Sigma \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto \sum_{t \in T, \ell(t)=x} \mu(t)$$

(falls die rechte Zahl endlich ist für alle $x \in \Sigma$).

Für $w = \mu_1 \cdots \mu_n \in \mathfrak{M}(T)^*$ ist $\ell(w) := \ell(\mu_1) \cdots \ell(\mu_n)$.

Def. Mit $\mu \in \mathfrak{M}(T) \setminus \{0\}$, $w \in (\mathfrak{M}(T) \setminus \{0\})^*$ und M, M' ist defin.:

$$\frac{M[\mu]M'}{M[\ell(\mu)]M'} \quad \frac{M[\mu]}{M[\ell(\mu)]} \quad \frac{M[w]M'}{M[\ell(w)]M'} \quad \frac{M[w]}{M[\ell(w)]}$$

Lem. $M[t_1], \dots, M[t_n] \wedge \forall i \neq j : \bullet t_i \cap \bullet t_j = \emptyset \implies M[t_1 + \dots + t_n]$

Lem. $M[\mu]M' \wedge \text{Parikh}(w) = \mu \implies M[w]M'$

Bem. Über Schrittfolgen werden somit dieselben Markierungen erreicht wie über Schaltfolgen.

Def. Der **schrittweise Erreichbarkeitsgraph** $\mathfrak{S}\mathfrak{R}(N)$ besitzt die Knoten $[M]$ und die Kanten $\{(M, M') \mid \exists \mu \in \mathfrak{M}(T) \setminus \{\emptyset\} : M[\mu]M'\}$.

Lem. Sei N schlingenfrei. Dann gilt:

$$(\forall w \in T^*, \text{Parikh}(w) = \mu : M[w]) \iff M[\mu]$$

Def. Eine Stelle $s \in S$ heißt ***n*-beschränkt** / **beschränkt**, falls
 $\sup\{M(s) \mid M \in [M_N]\} \leq n$ / $\sup\{M(s) \mid M \in [M_N]\} < \infty$.

Ein Netz heißt (*n*-) **beschränkt**, wenn alle Stellen $s \in S$ (*n*-) beschränkt sind. Ein Netz heißt **sicher**, wenn es 1-beschränkt ist. Ein Netz heißt **strukturell beschränkt**, wenn es bei beliebig geänderter Anfangsmarkierung beschränkt ist.

Prop. $[M_N]$ endlich $\iff N$ beschränkt

Def. Eine Transition $t \in T$ heißt **tot** unter M , falls $\forall M' \in [M] : \neg M'[t]$.

- M heißt *tot*, falls alle Transitionen unter M tot sind.
- N heißt *tot*, falls M_N tot ist.
- N heißt **verklemmungsfrei**, falls $\forall M \in [M_N] : \neg(M \text{ tot})$
- t heißt **lebendig** unter M , falls $\forall M' \in [M] : \neg(t \text{ ist tot unter } M)$
- t heißt *lebendig*, falls t lebendig unter M_N ist.
- M heißt *lebendig*, wenn alle $t \in T$ unter M lebendig sind.
- N heißt *lebendig*, wenn M_N lebendig ist.

S- und T-Invarianten

Def. Die **Inzidenzmatrix** eines Netzes N ist die Matrix $C(N) \in \mathbb{Z}^{|T| \times |S|}$ mit $C(N)_{st} = \Delta t(s)$ für $s \in S$ und $t \in T$.

Bem. Folglich ist $\Delta t = C(N) \cdot t$ (wenn man t als One-Hot-Vektor auffasst) und für $M[w]M'$ ist $M' = M + C(N) \cdot \text{Parikh}(w)$.

Def. Eine **S-Invariante** $y : S \rightarrow \mathbb{Z}$ ist eine Lsg von $C(N)^T \cdot y = 0$. Der **Träger** $\text{supp}(y)$ einer S-Invarianten y ist $\{s \in S \mid y(s) \neq 0\}$.

Notation. $S\text{-Inv}(N) := \{ S\text{-Invarianten von } N \} = \ker(C(N)^T)$

Lem/Def. Das Netz N heißt **von S-Invarianten überdeckt**, falls folgende äquivalente Bedingungen gelten:

- N besitzt eine positive (d. h. $\forall s \in S : y(s) > 0$) S-Invariante.
- Für alle $s \in S$ gibt es eine nichtnegative (d. h. $\forall s \in S : y(s) \geq 0$) S-Invariante mit $s \in \text{supp}(y)$.

Lem. $y \in S\text{-Inv}(N) \implies \forall M \in [M_N] : y^T \cdot M = y^T \cdot M_N$

Bem. Das Lemma kann verwendet werden um zu zeigen, dass ein M nicht erreichbar ist.

Lem. Sei keine Transition in N tot. Dann gilt für $y \in \mathbb{Z}^S$:

$$\forall M \in [M_N] : y^T \cdot M = y^T \cdot M_N \implies y \in S\text{-Inv}(N)$$

Lem. Sei $s \in S$ und $y \in S\text{-Inv}(N)$ nichtnegativ mit $y(s) > 0$. Dann ist s beschränkt, genauer $(y^T \cdot M_N / y(s))$ -beschränkt.

Lem. Ist N von S-Invarianten überdeckt, so ist N strukturell beschränkt.

TODO: Umkehrung, siehe Buch von Starke

Def. Ein **home state** ist eine Markierung M mit

$$\forall M' \in [M] : M \in [M'].$$

Ein Netz N heißt **reversibel**, wenn M_N ein home state ist.

Lem. Angenommen, N ist reversibel und keine Transitionen sind tot unter M_N . Dann ist N lebendig.

Bem. Es gibt lebendige, sichere Netze, die *nicht* von S-Invarianten überdeckt sind.

Def. Eine **T-Invariante** $x : T \rightarrow \mathbb{Z}$ ist eine Lsg von $C(N) \cdot x = 0$. Das Netz N heißt **von T-Invarianten überdeckt**, wenn es eine positive T-Invariante gibt.

Notation. $T\text{-Inv}(N) := \{ T\text{-Invarianten von } N \} = \ker(C(N))$

Lem. Sei $w \in T^*$ mit $M[w]M'$. Dann gilt:

$$\text{Parikh}(w) \in T\text{-Inv}(N) \iff M = M'$$

Satz. Ist N lebendig und beschränkt, so ist N von T-Invarianten überdeckt.

Einige Entscheidbarkeitsprobleme

Problem (E – Erreichbarkeit). Gegeben seien ein Netz N und eine Markierung M . Frage: Ist M erreichbar in N ?

Problem (0-E – 0-Erreichbarkeit). Gegeben seien ein Netz N . Frage: Ist die Nullmarkierung erreichbar?

Bem. Diese Probleme sind lösbar, falls der Erreichbarkeitsgraph endlich ist.

Problem (TE – Teilerreichbarkeit). Gegeben ein Netz N , eine Teilmenge $S' \subseteq S$ und $M : S' \rightarrow \mathbb{N}$. Frage: Gibt es eine erreichbare Markierung $M \in \mathfrak{M}(S)$ mit $M|_{S'} = M'$?

Def. • Ein Entscheidungsproblem A ist auf ein Entscheidungsproblem B **reduzierbar** (notiert $A \mapsto B$), falls ein Lösungsalgorithmus für A existiert, welcher einen (vllt. gar nicht existenten!) Lösungsalgorithmus für B verwenden darf.

- A ist **linear / polynomiell many-one-reduzierbar** auf B , falls aus einer Instanz I von A in linearer / polynomieller Zeit eine Instanz I' von B berechnet werden kann, sodass die Antwort auf I gleich der Antwort auf I' ist. Notation: $A \xrightarrow{\text{lin}}_M B / A \xrightarrow{\text{poly}}_M B$

Satz. (0-E) $\xrightarrow{\text{lin}}_M$ (E) $\xrightarrow{\text{lin}}_M$ (TE) $\xrightarrow{\text{lin}}_M$ (0-E)

Beweis ((TE) $\xrightarrow{\text{lin}}_M$ (0-E)). Konstruiere $\overline{N} = (\overline{S}, \overline{T}, \overline{W}, M_{\overline{N}})$ mit

$$\overline{S} := S \amalg \{\overline{s'} \mid s' \in S'\}$$

$$\overline{T} := T \amalg \{t_{s'} \mid s' \in S'\} \amalg \{t_s \mid s \in S \setminus S'\}$$

$$\overline{W} := W \cup \{s \rightarrow t_s \mid s \in S \setminus S'\} \cup \{s' \rightarrow t_{s'} \leftarrow \overline{s'} \mid s' \in S'\}$$

$$M_{\overline{N}} := (s \in S \mapsto M_N(s), \quad \overline{s'} \mapsto M'(s'))$$

Dann: M' teilerreichbar in $N \iff$ Nullmark. erreichbar in \overline{N}

Satz. (E) ist entscheidbar.

TODO: Beweis lesen, zusammenfassen

Problem (L – Lebendigkeit). Gegeben N . Frage: Ist N lebendig?

Problem (EL – Einzellebendigkeit). Gegeben seien N und $t \in T$. Frage: Ist t lebendig?

Satz. (L) ist reduzierbar auf (EL)

Beweis. Konstruiere $\overline{N} = (\overline{S}, \overline{T}, \overline{W}, M_{\overline{N}})$ mit

$$\overline{S} := S \amalg \{s_t \mid t \in T\}$$

$$\overline{T} := T \amalg \{t_{\text{afterall}}\}$$

$$\overline{W} := W \cup \{t \rightarrow s_t \mid t \in T\} \cup \{s_t \rightarrow t_{\text{afterall}} \mid t \in T\}$$

$$M_{\overline{N}} := (s \in S \mapsto M_N(s), \quad s_t \mapsto 0)$$

Dann: N lebendig $\iff t_{\text{afterall}}$ lebendig in \overline{N} .

Satz. (EL) ist reduzierbar auf (TE)

TODO: Beweis verstehen, zusammenfassen

Satz. (0-E) $\xrightarrow{\text{lin}}_M$ Co-(L), das ist (L) mit umgekehrter Antwort

Beweis. Konstruiere $\overline{N} = (\overline{S}, \overline{T}, \overline{W}, M_{\overline{N}})$ mit

$$\overline{S} := S \amalg \{s_{\text{distr}}, s_{\text{control}}\}$$

$$\overline{T} := T \amalg \{t_s \mid s \in S\} \amalg \{t_{\text{distr}}, t_{\text{blackhole}}\}$$

$$\overline{W} := W \cup \{t \rightleftharpoons s_{\text{control}} \mid t \in T\} \cup \{t_{\text{distr}} \rightarrow s \rightarrow t_s \rightarrow s_{\text{distr}} \mid s \in S\}$$

$$\cup \{s_{\text{distr}} \rightleftharpoons t_{\text{distr}}\} \cup \{s_{\text{control}} \rightarrow t_{\text{blackhole}}\}$$

$$M_{\overline{N}} := (s \in S \mapsto M_N(s), \quad s_{\text{distr}} \mapsto 0, \quad s_{\text{control}} \mapsto 1)$$

(Bemerke: Jede Markierung \hat{M} mit $\hat{M}(s_{\text{distr}}) > 0$ ist lebendig.)
Dann: Nullmarkierung in N erreichbar $\iff \overline{N}$ nicht lebendig

Satz. (L) $\xrightarrow{\text{lin}}_M$ (EL) $\xrightarrow{\text{lin}}_M$ (L)

TODO: Beweise nachvollziehen, aufschreiben

Fazit. (L) und (EL) sind entscheidbar, aber mindestens so schwer wie (E), (0-E) und (TE).

Beschränktheit und Überdeckbarkeit

Lem (Dickson). \leq ist eine Wohlquasiordnung auf \mathbb{N}^n , d. h. für alle unendlichen Folgen $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{N}^n gibt es eine Teilfolge $(M_{i_j})_{j \in \mathbb{N}}$ mit $M_{i_j} \leq M_{i_{j+1}}$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

Def. Ein **Weg** in einem Graphen (V, E) ist eine Folge $v_1 \dots v_n$ in V mit $\forall i \neq j : v_i \neq v_j$ und $(v_i, v_{i+1}) \in E$.

Def. Ein Graph (V, E) heißt **lokal endlich**, falls für alle $v \in V$ die Menge $\{w \in V \mid (v, w) \in E\}$ endlich ist.

Lem (König). Sei (V, E) ein lokal endlicher gerichteter Graph und $v_0 \in V$ ein Knoten, sodass für alle $v \in V$ ein Weg von v_0 nach v existiert. Dann gibt es einen unendlichen Weg ausgehend von v_0 .

Satz. N ist unbeschränkt $\iff \exists M, M' \in [M_N] : \exists w \in T^* : M[w]M' \wedge M \leq M' \wedge M \neq M'$

Def. Eine **erweiterte Markierung** von N ist eine Abbildung

$$M : S \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\omega\}.$$

Notation. $\mathfrak{M}^\omega(S) := \{ \text{erw. Mark. von } N \} := (\mathbb{N} \cup \{\omega\})^S$

Def. Sei N ein Netz und M_1, M_2 erweiterte Markierungen.

- M_2 **überdeckt** M_1 : $\iff M_1 \leq M_2$
- M_1 ist **überdeckbar** : $\iff \exists M \in [M_N] : M_1 \leq M$

Def. Eine Menge $S' \subseteq S$ heißt **simultan unbeschränkt**, falls

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists M \in [M_N] : \forall s \in S' : M(s) \geq n.$$

Def. Sei $N = (S, T, W, M_N)$ ein Netz. Ein **Überdeckungsgraph** von N ist ein kantenbeschrifteter, gericht. Graph $\text{Cov}(N) = (V, E)$, der von folgendem (nichtdet.) Algorithmus berechnet wird:

```

1:  $V := \emptyset \subset \mathfrak{M}^\omega(S), \quad A := \{M_N\} \subset \mathfrak{M}^\omega(S),$ 
2:  $E := \emptyset \subset \mathfrak{M}^\omega(S) \times T \times \mathfrak{M}^\omega(S),$ 
3:  $\text{PRED} := \text{const nil} \in (\mathfrak{M}^\omega(S) \cup \{\text{nil}\})^{\mathfrak{M}^\omega(S)}$ 
4: while  $A \neq \emptyset$  do
5:   wähle  $M \in A$ 
6:    $A := A \setminus \{M\}, \quad V := V \cup \{M\}$ 
7:   for  $t \in T$  mit  $M[t]$  do
8:      $M' := M + \Delta t, \quad M^* := M$ 
9:     while  $M^* \neq \text{nil} \wedge M^* \not\leq M' \wedge M^* \neq \text{PRED}(M^*)$  do
10:      if  $M^* \neq \text{nil}$  then  $M' := M' + \omega \cdot (M' - M^*)$ 
11:       $E := \{(M, t, M')\}$ 
12:      if  $M' \notin V \cup A$  then  $A := A \cup \{M'\}, \quad \text{PRED}(M') := M$ 
```

Satz. $\text{Cov}(N)$ ist endlich (\iff der Algorithmus terminiert)

Kor. Es ist entscheidbar, ob N beschränkt ist.

Beweis. Konstruiere $\text{Cov}(N) = (V, E)$ wobei $V \subset \mathfrak{M}^\omega(S)$ endl. ist. Überprüfe, ob sogar $V \subset \mathfrak{M}(S)$ gilt. Falls ja, so ist $\mathfrak{R}(N) = \text{Cov}(N)$ endlich. Falls nein, so gibt es M, M' wie im letzten Satz und N ist somit unbeschränkt.

Bem. Jedes $\text{Cov}(N)$ ist (nach Einführen eines Fehlerzustandes und Kanten dorthin) ein determ. endl. Automat mit Startzustand M_N .

Def. $L(\text{Cov}(N)) \subseteq T^*$ ist die Sprache der von einem $\text{Cov}(N)$ akzeptierten Wörter.

Notation. M_w := durch $w \in L(\text{Cov}(N))$ erreichter Zust. in $\text{Cov}(N)$

Lem. $M_N[w]M \implies w \in L(\text{Cov}(N)) \wedge \forall s \in S : M_w(s) \in \{M(s), \omega\}$

Lem. Für alle M in $\text{Cov}(N)$ u. alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $M' \in [M_N]$ mit

$$\begin{cases} M'(s) = M(s) & \text{falls } M(s) \neq \omega, \\ M'(s) > n & \text{falls } M(s) = \omega. \end{cases}$$

Kor. • S' ist simultan unbeschränkt $\iff (\text{const } \omega) \in \text{Cov}(N)$

- Sei \tilde{M} eine Markierung von N . Dann gilt: \tilde{M} ist überdeckbar in $N \iff \tilde{M}$ wird von einem M in $\text{Cov}(N)$ überdeckt
- t ist nicht tot in $N \iff t$ ist Kantenbeschriftung in $\text{Cov}(N)$

Strukturtheorie und Free-Choice-Netze

Konvention. In diesem Abschn. seien alle Kantengewichte 0 oder 1.

Def. Eine Teilmenge $R \subseteq S$ heißt

- **Siphon**, falls $\bullet R \subseteq R^\bullet$
- **Falle**, falls $R^\bullet \subseteq \bullet R$

Lem. • Ist R ein Siphon und unmarkiert unter M , so ist R unmarkiert unter allen $M' \in [M]$.

- Ist R eine Falle und markiert unter M , so ist R markiert unter allen $M' \in [M]$.

Lem. Angenommen, N hat keine isolierten Stellen. Ist $R \neq \emptyset$ ein Siphon und unmarkiert unter $M \in [M_N]$, so ist N nicht lebendig.

Lem. Sei $T \neq \emptyset$ und M eine tote Markierung. Dann ist $R = M^{-1}(\{0\})$ ein nichtleerer, unmarkierter Siphon.

Lem. Sei $T \neq \emptyset$. Enthält jeder nichtleere Siphon eine markierte Falle, so ist N verklemmungsfrei.

Def. Ein Netz N heißt **Free-Choice-Netz** (*FC-Netz*), falls

$$\forall t, t' \in T : t \neq t' \wedge s \in \bullet t \cap \bullet t' \implies \bullet t = \bullet t' = \{s\}.$$

Ein Netz N heißt **erweit. Free-Choice-Netz** (*EFC-Netz*), falls

$$\forall t, t' \in T : t \neq t' \wedge s \in \bullet t \cap \bullet t' \implies \bullet t = \bullet t'.$$

Bem. Ist N ein EFC-Netz, $s \in S, t_1, t_2 \in s^\bullet$ und M eine Markierung, so gilt $M[t_1] \iff M[t_2]$.

TODO: Definition von Konfusion

Lem. Die Vereinigung von Siphons / Fallen ist wieder ein Siphon / eine Falle. Damit bilden Siphons / Fallen mit der Vereinigung einen beschränkten Halbverband.

Kor. • Jedes $R \subseteq S$ enthält eine größte Falle.

- $R \subseteq S$ enthält eine markierte Falle \iff die größte Falle in R ist markiert

Def. Sei $P \subseteq S$ und $<$ eine Totalordnung auf P . Die durch $<$ induzierte **lexikographische Ordnung** $<_{\text{lex}}$ auf $\mathfrak{M}(S)$ ist

$$M_1 <_{\text{lex}} M_2 : \iff \exists p \in P : \begin{aligned} &\forall q < p : M_1(q) = M_2(q) \\ &\wedge \quad M_1(p) < M_2(p). \end{aligned}$$

Lem. $<_P$ ist Noethersch (wohlfundiert)

Lem. Sei N ein EFC-Netz, $R \subseteq S$ und $Q \subseteq R$ die größte Falle in R . Dann gibt es eine Totalordnung $<$ auf $R \setminus Q$, sodass:

Für alle Markierungen M mit $M|_Q \equiv 0$ und $\exists t \in R^\bullet : M[t]$ gilt

$$\exists M' \in [M] : M' <_{\text{lex}} M \wedge M'|_Q \equiv 0.$$

Beweis. Setze $n := |R \setminus Q|$. Wähle

- $t_1 \in R^\bullet \setminus \bullet R$ und $s_1 \in \bullet t_1 \cap (R \setminus Q)$
- $t_2 \in (R \setminus \{s_1\})^\bullet \setminus \bullet (R \setminus \{s_1\})$ und $s_2 \in \bullet t_2 \cap (R \setminus (Q \cup \{s_1\}))$
- ...
- $t_n \in (R \setminus \{s_1, \dots, s_{n-1}\})^\bullet \setminus \bullet (R \setminus \{s_1, \dots, s_{n-1}\})$ und $s_n \in \bullet t_n \cap (R \setminus (Q \cup \{s_1, \dots, s_{n-1}\}))$

Definiere $<$ durch $s_n < \dots < s_2 < s_1$. Für t mit $M[t]$ gibt es ein $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $s_i \in \bullet t$. Da N EFC ist, gilt $\bullet t_i = \bullet t$.

Somit existiert M' mit $M[t_i]M'$. Es stimmen M und M' auf $Q \cup \{s_{i+1}, \dots, s_n\}$ überein, aber $M'(s_i) < M(s_i)$. Also $M' <_{\text{lex}} M$.

Kor. Die Aussage des letzten Satzes gilt auch für alle Markierungen M mit $M|_Q \equiv 0$ und $\exists t \in R^\bullet : t$ ist nicht tot unter M , falls R ein Siphon ist.

Satz (Commoner). Sei N ein EFC-Netz ohne isol. Stellen. Dann:

N ist lebendig \iff jeder Siphon $\neq \emptyset$ enth. eine markierte Falle

Beweis. „ \Rightarrow “. Sei R ein nichtleerer Siphon und $Q \subseteq R$ die größte Falle in R . Wähle $t \in R^\bullet$. Angenommen, $M_N|_Q \equiv 0$. Durch mehrmalige Anwendung des vorh. Korollar (beachte: t ist nicht tot) erhalten wir eine unendliche absteigende Reihe $M_N >_{\text{lex}} M_1 >_{\text{lex}} \dots$ im Widerspruch zur Noetherianität von $<_{\text{lex}}$.

Netzvariationen

Def. Ein **High-Level-Netz** N ist gegeben durch

- eine endliche Menge S von *Stellen*,
- eine endliche Menge T von *Transitionen*,
- eine Menge L von *Marken* (eine *Markierung* von N ist gegeben durch eine Multimenge von L für jede Stelle von N , also durch eine Abbildung in $\mathfrak{M}(L)^S$)
- für jede Transition $t \in T$ eine (berechenbare) *Transitionsregel* $r_t \subseteq \mathfrak{M}(S \times L) \times \mathfrak{M}(S \times L)$
- und eine *Anfangsmarkierung* $M_N : S \rightarrow \mathfrak{M}(L)$.

Def. Ein **Netz mit Zeit** ist ein Tupel $N = (S, T, W, M_N, \tau)$, wobei

- (S, T, W, M_N) ein sicheres Petrinetz ist mit $\forall t \in T : \bullet t \neq \emptyset$ und
- $\tau : S \rightarrow \mathbb{N}_1$ die **Latenzzeit** aller Transitionen angibt.

Ein **Zustand** von N ist ein Tupel (M, res) , wobei M eine Markierung ist und $\text{res} : T \rightarrow \mathbb{N}_0$ die *Restzeit* jeder Transition angibt. Es gibt zwei verschiedene Schaltschritte:

$$\begin{aligned} (M, \text{res})[\sigma](M', \text{res}') &: \Longleftrightarrow \text{res} \geq 1 \wedge \text{res}' = \text{res} - 1 & \textbf{(Zeitschritt)} \\ (M, \text{res})[t](M', \text{res}') &: \Longleftrightarrow M[t]M' \wedge \\ &\quad \wedge \text{res}'(t') = \begin{cases} \tau(t') & \text{falls } \neg(M[t']) \wedge M'[t'] \\ \text{res}(t') & \text{sonst} \end{cases} & \textbf{(Transition)} \end{aligned}$$

Def. Ein **Netz mit Prioritäten** ist ein Petri-Netz

$N = (S, T, W, M_N)$ mit einer Halbordnung \sqsubseteq .

Das Netz schaltet unter Beachtung der Priorität, falls

$$M[t] \sqsubseteq M' : \Longleftrightarrow M[t]M' \wedge \forall t' \in T : M[t'] \Longrightarrow t' \not\sqsubseteq t$$

Def. Ein **Netz mit Inhibitor-Kanten** ist eine Petri-Netz

$N = (S, T, W, M_N)$ zusammen mit einer Menge $I \subseteq S \times T$ von *Inhibitor-Kanten*. Man definiert:

$$M[t]_I M' : \Longleftrightarrow M[t]M' \wedge \forall s \in S : (s, t) \in I \Longrightarrow M(s) = 0$$

Def. Eine **Zählermaschine** besteht aus \mathbb{N} -wertigen Registern c_1, \dots, c_n und einem Programm bestehend aus den Instruktionen

- $\text{INCR}(c_i)$ – erhöhe c_i um eins
- $\text{JZDEC}(c_i, m)$ – springe zu Adresse m , falls $c_i = 0$, ansonsten erniedrige c_i um eins.

Prop. Für jede Turingmaschine gibt es eine 2-Zählermaschine, die die Turingmaschine simuliert (bei passender Kodierung der Eingabe und Ausgabe).

Kor. Das Halteproblem für 2-Zählermaschinen ist unentscheidbar.

Lem. Zählermaschinen lassen sich als Netze mit Zeit, mit Prioritäten oder mit Inhibitor-Kanten kodieren.

Kor. Das Erreichbarkeitsproblem ist für solche Netze unentscheidbar.

Def. Ein **Netz mit Kapazitäten** ist eine Petri-Netz $N = (S, T, W, M_N)$ zusammen mit einer Abbildung $k : S \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Man definiert:

$$M[t]_k M' : \Longleftrightarrow M[t]M' \wedge M' \leq k$$

Nichtdeterminismus und modulare Konstruktion

Def. Zwei Netze N_1 und N_2 heißen **sprachäquivalent**, wenn $L(N_1) = L(N_2)$.

Satz. Für beschränkte Netze ist Sprachäquivalenz entscheidbar.

Beweis. Für beschränkte Netze N ist $L(N)$ regulär (man erhält einen endlichen Automaten aus $\mathfrak{R}(N)$). Gleichheit von regulären Sprachen ist entscheidbar.

Bem. Sprachäquivalenz ist unzureichend für den Systemvergleich.

Def. Die **ready-Semantik** eines Netzes N ist

$$\text{ready}(N) := \{(w, X) \mid \exists M : M_N[w]\rangle M \wedge X = \{a \in \Sigma \mid M[a]\rangle\} \}.$$

N_1, N_2 heißen **ready-äquivalent**, falls $\text{ready}(N_1) = \text{ready}(N_2)$.

Def. Die **Failure-Semantik** (*Verweigerungssemantik*) eines Netzes N ist

$$\mathfrak{F}(N) := \{(w, X) \mid X \subseteq \Sigma, \exists M : M_N[w]\rangle M \wedge \forall a \in X : \neg M[a]\rangle\}.$$

Dabei heißt X *Verweigerungsmenge*.

N_1, N_2 sind **failure-äquivalent**, falls $\mathfrak{F}(N_1) = \mathfrak{F}(N_2)$.

Lem. • $(w, X) \in \mathfrak{F}(N), Y \subseteq X \Longrightarrow (w, Y) \in \mathfrak{F}(N)$

• $(w, \emptyset) \in \mathfrak{F}(N) \Longleftrightarrow w \in L(N)$

• $(w, X) \in \mathfrak{F}(N), \forall a \in Y : (wa, \emptyset) \notin L(N) \Longrightarrow (w, X \cup Y) \in \mathfrak{F}(N)$

• $(w, X) \in \mathfrak{F}(N), Y \subseteq \Sigma \setminus \ell(T) \Longrightarrow (w, X \cup Y) \in \mathfrak{F}(N)$

Lem. $(w, X) \in \mathfrak{F}(N) \Longleftrightarrow \exists Y \subseteq \Sigma \setminus X : (w, Y) \in \text{ready}(N)$

Satz. Ready-Äquivalenz \Longrightarrow \mathfrak{F} -Äquivalenz \Longrightarrow Sprachäquivalenz

Bem. Die Umkehrungen sind falsch.

Satz. Für beschränkte Netze ist \mathfrak{F} -Äquivalenz entscheidbar.

Beweisidee. Aus jedem Netz N kann man einen endlichen Automaten konstruieren, dessen Sprache kanonisch isomorph zu $\mathfrak{F}(N)$ ist. Gleichheit von regulären Sprachen ist entscheidbar.

Def. Seien N_1 und N_2 mit Σ beschriftete Petrinetze und $A \subseteq \Sigma$. Die **parallele Komposition** mit *Synchronisation über A* ist das beschriftete Netz $N \parallel_A N_2 = (S, T, W, M_N, \ell)$ mit

- $S = S_1 \amalg S_2$
- $T = \begin{aligned} &\{(t_1, \lambda) \mid t_1 \in T_1, \ell_1(t_1) \notin A\} \\ &\amalg \{(\lambda, t_2) \mid t_2 \in T_2, \ell_2(t_2) \notin A\} \\ &\amalg \{(t_1, t_2) \in T_1 \times T_2 \mid \ell_1(t_1) = \ell_2(t_2) \in A\} \end{aligned}$
- $\begin{aligned} W(s_1 \in S_1, (t_1, t_2)) &:= W_1(s_1, t_1) \text{ falls } t_1 \in T_1 \\ W(s_2 \in S_1, (t_1, t_2)) &:= W_2(s_2, t_2) \text{ falls } t_2 \in T_2 \\ W(s \in S, t \in T) &:= 0 \text{ (sonst)} \\ W((t_1, t_2), s_1 \in S_1) &:= W_1(t_1, s_1) \text{ falls } t_1 \in T_1 \\ W((t_1, t_2), s_2 \in S_1) &:= W_2(t_2, s_2) \text{ falls } t_2 \in T_2 \\ W(t \in T, s \in S) &:= 0 \text{ (sonst)} \end{aligned}$
- $M_N := M_{N_1} \amalg M_{N_2}$
- $\begin{aligned} \ell((t_1, t_2) \in T_1 \times T_2) &:= \ell_1(t_1) = \ell_2(t_2) \\ \ell(t_1 \in T_1) &:= \ell_1(t_1) \\ \ell(t_2 \in T_2) &:= \ell_2(t_2) \end{aligned}$

Bem. Die Menge der mit Σ beschr. Netze wird mit \parallel_A zu einem komm. Monoid mit neutralem Element $(S = \emptyset, T = \Sigma, -, \ell = \text{id})$

Lem. Sei $N = N_1 \parallel N_2$, $M_1, M'_1 \in \mathfrak{M}(S_1)$, $M_2, M'_2 \in \mathfrak{M}(S_2)$ und $(t_1^{(1)}, t_2^{(1)}), \dots, (t_1^{(n)}, t_2^{(n)}) \in T_N$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} M_1 \amalg M_2[(t_1^{(1)}, t_2^{(1)}), \dots, (t_1^{(n)}, t_2^{(n)})] M'_1 \amalg M'_2 \\ \Longleftrightarrow M_1[t_1^{(1)}, \dots, t_1^{(n)}] M'_1 \wedge M_2[t_2^{(1)}, \dots, t_2^{(n)}] M'_2 \end{aligned}$$

Bem. Dabei gilt $M[\lambda]M$ immer.

Lem. Sei $a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$. Es gilt $M_1 \amalg M_2[a] M'_1 \amalg M'_2$ g. d. wenn

- Falls $a \in A$: $M_1[a] M'_1 \wedge M_2[a] M'_2$
- Falls $a \notin A$: $M_1[a] M'_1 \wedge M_2[\lambda] M'_2$ oder $M_1[\lambda] M'_1 \wedge M_2[a] M'_2$

Def. Seien $u, v \in \Sigma^*$. Dann ist

$$u \parallel_A v := \left\{ \begin{aligned} &w = w_1 \cdots w_n \left| \begin{aligned} &u = u_1 \cdots u_n, v = v_1 \cdots v_n \text{ mit} \\ &u_i, v_i \in \Sigma \cup \{\lambda\} \text{ sodass} \\ &\forall 1 \leq i \leq n : u_i = v_i = w_i \in A \\ &\quad \vee u_i v_i = w_i \notin A \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\}$$

Bem. Im Fall $u_i v_i = w_i$ gilt $u_i = \lambda$ oder $v_i = \lambda$.

Lem. Es sind äquivalent:

- in $N_1 \parallel_A N_2$ gilt $M_1 \amalg M_2[w] M'_1 \amalg M'_2$
- $\exists u, v \in \Sigma^* : M_1[u] M'_1 \wedge M_2[v] M'_2 \wedge w \in u \parallel_A v$

Satz. • $L(N_1 \parallel_A N_2) = \cup \{u \parallel_A v \mid u \in L(N_1), v \in L(N_2)\}$

- $\mathfrak{F}(N_1 \parallel_A N_2) = \left\{ (w, Z) \left| \begin{aligned} &\exists (u, X) \in \mathfrak{F}(N_1), (v, Y) \in \mathfrak{F}(N_2) : \\ &w \in u \parallel_A v \text{ und} \\ &Z \cap A \subseteq X \cup Y \text{ und } Z \setminus A \subseteq X \cap Y \end{aligned} \right. \right\}$

Def. Ein *beschriftetes* Netz heißt **verklemmungsfrei**, wenn

$$\forall M \in [M_N] : \exists a \in \Sigma : M[a]\rangle.$$

Zwei Netze heißen **v-äquivalent**, falls beide verklemmungsfrei oder beide nicht verklemmungsfrei sind.

Lem. N ist verklemmungsfrei $\Longleftrightarrow \forall w \in \Sigma^* : (w, \Sigma) \notin \mathfrak{F}(N)$

Def. **VA-Äquivalenz** sei die kongruente Hülle von v-Äquivalenz unter der Operation \parallel_A .

Satz. \mathfrak{F} - und VA-Äquivalenz stimmen überein.

Beweisidee. Seien N_1 und N_2 VA-äquivalent.

Setze $A := (\ell_1(T_1) \cup \ell_2(T_2)) \setminus \{\lambda\}$. Zeige:

Es gibt ein Netz N , sodass für alle N' mit $l'(N') \setminus \{\lambda\} \subseteq A$ gilt:

$$N \parallel_A N' \text{ ist verklemmungsfrei} \Longleftrightarrow (w, X) \notin \mathfrak{F}(N')$$

Dann:

$$\begin{aligned} (w, X) \notin \mathfrak{F}(N_1) & \qquad \qquad \qquad (w, X) \notin \mathfrak{F}(N_2) \\ \Downarrow & \qquad \qquad \qquad \Downarrow \\ N \parallel_A N_1 \text{ verklemmungsfrei} & \Longleftrightarrow N \parallel_A N_2 \text{ verklemmungsfrei} \end{aligned}$$

TODO: Verstehen: Zusammenhang zum Testen