Zusammenfassung Petrinetze

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Def. Ein **Netzgraph** ist ein Tripel (S, T, W), wobei S und T disjunkte, endliche Mengen sind und $W : S \times T \cup T \times S \to \mathbb{N}$. Dadurch ist ein gerichteter, gewichteter, bipartiter Graph mit Kantenmenge $F = \{(x, y) \mid W(x, y) \neq 0\}$ gegeben.

Notation	Bezeichnung	Symbol
$t \in T$	**Transition**	$\square$
$s \in S$	**Stelle**, **Platz**	$\bigcirc$
$(x, y) \in F$	**Kante**	$\longrightarrow$ falls $W(x, y) = 1$ $\xrightarrow{w}$ falls $w := W(x, y) > 1$

Def. Sei $x \in S \cup T$.

- ${}^\bullet x := \{y \mid (y, x) \in F\}$ heißt **Vorbereich** von x und
- $x^\bullet := \{y \mid (x, y) \in F\}$ heißt **Nachbereich** von x.
- x heißt **isoliert**, falls ${}^\bullet x \cup x^\bullet = \emptyset$.
- x heißt **vorwärts-verzweigt**, falls $|x^\bullet| \geq 2$
- x heißt **rückwärts-verzweigt**, falls $|{}^\bullet x| \geq 2$

Def. $(x, y) \in S \times T \cup T \times S$ bilden eine **Schlinge** falls $(x, y) \in F$ und $(y, x) \in F$.

Def. Eine **Markierung** ist eine Abbildung $M : S \to \mathbb{N}$.
Eine Teilmenge $S' \subseteq S$ heißt **markiert** unter M, falls $\exists\, s \in S' : M(s') > 0$, andernfalls *unmarkiert*.
Ein Element $s \in S$ heißt *(un-)markiert*, falls $\{s\} \subseteq S$ es ist.

Notation. $\mathfrak{M}(S) := \{M : S \to \mathbb{N}\}$

Def. Ein **Petrinetz** $N = (S, T, W, M_N)$ besteht aus

- einem Netzgraphen (S, T, W) und
- einer *Anfangsmarkierung* $M_N : S \to \mathbb{N}$.

Notation. Für eine feste Transition $t \in T$ ist

$$t^- : S \to \mathbb{N}, \enspace s \mapsto W(s, t), \qquad t^+ : S \to \mathbb{N}, \enspace s \mapsto W(t, s)$$

Def. Eine Transition $t \in T$ heißt **aktiviert** unter einer Markierung M, notiert $M[t\rangle$, falls

$$\forall\, s \in S : W(s, t) \leq M(s) \iff t^- \leq M.$$

Ist t aktiviert, so kann t *schalten* und es entsteht die *Folgemarkierung* $M' := M + \Delta t$, wobei

$$\Delta t : S \to \mathbb{Z}, \enspace s \mapsto W(t, s) - W(s, t).$$

Notation. $M[t\rangle M'$

Def. Für $w = t_1 \cdots t_n \in T^*$ und Markierungen M und M' gilt

$$M[w\rangle M' \enspace :\iff M[t_1\rangle M_1 [t_2\rangle \cdots [t_{n-1}\rangle M_{n-1} [t_n\rangle M'$$

für (eindeutig bestimmte) Markierungen $M_1, \ldots, M_{n-1}$.
Ein Wort $w \in T^*$ heißt **Schaltfolge** (*firing sequence*) von N, notiert $M_N[w\rangle$, falls $\exists\, M' : M_N[w\rangle M'$.

Notation. $[M\rangle := \{M' \mid \exists\, w \in T^* : M[w\rangle M'\}$
$\mathrm{FS}(N) := \{w \in T^* \mid M_N[w\rangle\}$ für ein Petrinetz N

Def. M' heißt **erreichbar** von M, falls $M' \in [M\rangle$.

Def. $w \in T^\omega$ heißt **unendliche Schaltfolge** von N, falls alle endlichen Präfixe von w Schaltfolgen von N sind.

Def. Eine Schaltfolge ist **maximal**, falls sie endlich ist und in einer toten Markierung endet *oder* unendlich ist.
Eine Schaltfolge ist **schwach/stark fair** für eine Trans. $t \in T$ falls

- sie endlich ist und in einer Markierung endet, die t nicht aktiviert
- *oder* t unendlich ist und t unendlich oft deaktiviert ist / t nur endlich oft aktiviert ist
- *oder* t unendlich oft enthält.

Die Schaltfolge heißt *schwach/stark fair*, falls sie für jede Transition schwach/stark fair ist.

Bem. stark fair $\implies$ schwach fair $\implies$ maximal

Def. Der **Erreichbarkeitsgraph** $\mathfrak{R}(N)$ zu N besitzt die Knoten $[M_N\rangle$ und die Kanten $\{(M, M') \mid \exists\, t : M[t\rangle M'\}$.

Def. $\mathrm{Parikh} : A^* \to \mathbb{N}^A, \enspace \mathrm{Parikh}(w)(a) := |\{i \mid w_i = a\}|$

Lem. In $M[w\rangle M'$ hängt M' nur von M und $\mathrm{Parikh}(w)$ ab, genauer

$$M' = M + \textstyle\sum_{t \in T} \mathrm{Parikh}(w)(t) \cdot \Delta t.$$

Lem. $M_1[w\rangle M_2 \implies M + M_1[w\rangle M + M_2$

Lem. Sei N ein Petri-Netz. Dann gilt:

- $\mathrm{FS}(N)$ ist *präfix-abg.*, d. h. $w = vu \in \mathrm{FS}(N) \implies v \in \mathrm{FS}(N)$.
- Ist $[M_N\rangle$ endlich, so ist $\mathrm{FS}(N)$ regulär.

Def. Ein **beschriftetes Petrinetz** $N = (S, T, W, M_N, \ell)$ best. aus

- einem Petrinetz (S, T, W, M_N) und
- einer Transitionsbeschriftung (*labelling*) $\ell : T \to \Sigma \cup \{\lambda\}$, wobei Σ eine Menge von *Aktionen* ist.

Sprechweise. $t \in T$ mit $\ell(t) = \lambda$ heißt *intern* oder *unsichtbar*.

Notation. Für $t \in T^*$ ist $\ell(w) := \ell(t_1) \cdots \ell(t_n) \in \Sigma^*$.
Dabei wird λ als das leere Wort in Σ^* aufgefasst.

Def. Mit $t \in T$, $w \in T^*$ und Markierungen M, M' ist definiert:

$$\frac{M[t\rangle M'}{M[\ell(t)\rangle\rangle M'} \quad \frac{M[t\rangle}{M[\ell(t)\rangle\rangle} \quad \frac{M[w\rangle M'}{M[\ell(w)\rangle\rangle M'} \quad \frac{M[w\rangle}{M[\ell(w)\rangle\rangle}$$

Def. Die **Sprache** eines beschrifteten Netzes N ist

$$L(N) := \{v \in \Sigma^* \mid M_n[v\rangle\rangle\}.$$

Def. Ein **beschriftetes Netz mit Endmarkierung** ist ein Tupel $N = (S, T, W, M_N, \ell, \mathrm{Fin})$ wobei

- (S, T, W, M_N, ℓ) ein beschriftetes Netz und
- $\mathrm{Fin} \subseteq \mathfrak{M}(S)$ eine endliche Menge von *Endmarkierungen* ist.

Die entspr. Sprache ist $L_{\mathrm{fin}}(N) := \{v \in \Sigma^* \mid \exists\, M \in \mathrm{Fin} : M_N[v\rangle M\}$.

Notation. $\mathfrak{L}^\lambda := \{L_{\mathrm{fin}}(N) \mid N \text{ beschrift. Netz mit Endmarkierung}\}$
$\mathfrak{L} := \{L_{\mathrm{fin}}(N) \mid N \text{ beschrift. Netz mit Endmark. ohne interne Trans.}\}$

Satz. $\{$ reguläre Sprachen $\} \subseteq \mathfrak{L}$

Nebenläufigkeit I

Def. Eine Multimenge über X ist eine Funktion $\mu : X \to \mathbb{N}$.

Notation. $\mathfrak{M}(X) := \{\mu : X \to \mathbb{N}\}$
$\mu_Y \in \mathfrak{M}(X)$, $\mu_Y(x) := |\{\star \mid x \in Y\}|$ für $Y \subset X$,
$\emptyset := \mu_\emptyset \in \mathfrak{M}(X)$, $\quad \mu_x := \mu_{\{x\}} \in \mathfrak{M}(X)$ für $x \in X$

Def. Ein **Schritt** μ ist eine Multimenge $\mu \neq \emptyset \in \mathfrak{M}(T)$.
Der Schritt μ ist **aktiviert** unter M, notiert $M[\mu\rangle$, falls

$$\forall\, s \in S : \mu^-(s) := \textstyle\sum_{t \in T} \mu(t) W(s, t) \leq M(s).$$

Durch *Schalten* von μ entsteht die Folgemarkierung $M' \in \mathfrak{M}(S)$ mit

$$M'(s) = M(s) + \textstyle\sum_{t \in T} \mu(t) \cdot (W(t, s) - W(s, t)).$$

Bem. Analog wird verallgemeinert: $M[\mu\rangle M'$, $M[w\rangle$, $M[w\rangle M'$ für $\mu \in \mathfrak{M}(T) \setminus \{\emptyset\}$ bzw. $w \in (\mathfrak{M}(T) \setminus \{\emptyset\})^*$.

Def. $\mathrm{SS}(N) := \{w \in (\mathfrak{M}(T) \setminus \{\emptyset\})^* \mid M_N[w\rangle\}$ heißen **Schrittfolgen** (*step sequences*).

Def. Zwei Transitionen $t, t' \in T$ sind

- **nebenläufig** *unter* M, falls $M[t + t'\rangle$,
- **in Konflikt** *unter* M, falls $\neg M[t + t'\rangle$.

Notation. Für $\mu \in \mathfrak{M}(T)$ ist $\ell(\mu)$ die Multimenge mit

$$\ell(\mu) : \Sigma \to \mathbb{N}, \enspace x \mapsto \textstyle\sum_{t \in T, \ell(t) = x} \mu(t)$$

(falls die rechte Zahl endlich ist für alle $x \in \Sigma$).
Für $w = \mu_1 \cdots \mu_n \in \mathfrak{M}(T)^*$ ist $\ell(w) := \ell(\mu_1) \cdots \ell(\mu_n)$.

Def. Mit $\mu \in \mathfrak{M}(T) \setminus \{0\}$, $w \in (\mathfrak{M}(T) \setminus \{0\})^*$ und M, M' ist defin.:

$$\frac{M[\mu\rangle M'}{M[\ell(\mu)\rangle\rangle M'} \quad \frac{M[\mu\rangle}{M[\ell(\mu)\rangle\rangle} \quad \frac{M[w\rangle M'}{M[\ell(w)\rangle\rangle M'} \quad \frac{M[w\rangle}{M[\ell(w)\rangle\rangle}$$

Lem. $M[t_1\rangle, \ldots, M[t_n\rangle \wedge \forall\, i \neq j : {}^\bullet t_i \cap {}^\bullet t_j = \emptyset \implies M[t_1 + \ldots t_n\rangle$

Lem. $M[\mu\rangle M' \wedge \mathrm{Parikh}(w) = \mu \implies M[w\rangle M'$

Bem. Über Schrittfolgen werden somit dieselben Markierungen erreicht wie über Schaltfolgen.

Def. Der **schrittweise Erreichbarkeitsgraph** $\mathfrak{S}\mathfrak{R}(N)$ besitzt die Knoten $[M\rangle$ und die Kanten $\{(M, M') \mid \exists\, \mu \in \mathfrak{M}(T) \setminus \{\emptyset\} : M[\mu\rangle M'\}$.

Lem. Sei N schlingenfrei. Dann gilt:

$$(\forall\, w \in T^*, \mathrm{Parikh}(w) = \mu : M[w\rangle) \iff M[\mu\rangle$$

Def. Eine Stelle $s \in S$ heißt ***n*-beschränkt** / **beschränkt**, falls

$$\sup\{M(s) \mid M \in [M_N\rangle\} \leq n \quad / \quad \sup\{M(s) \mid M \in [M_N\rangle\} < \infty.$$

Ein Netz heißt *(n-) beschränkt*, wenn alle Stellen $s \in S$ (*n*-) beschränkt sind. Ein Netz heißt **sicher**, wenn es 1-beschränkt ist. Ein Netz heißt **strukturell beschränkt**, wenn es bei beliebig geänderter Anfangsmarkierung beschränkt ist.

Prop. $[M_N\rangle$ endlich $\iff$ N beschränkt

Lebendigkeit

Def. Sei $t \in T$ eine Trans. in einem Netz N und M eine Markierung.

- t heißt **tot** (oder *0-lebendig*) *unter* M, falls $\forall\, M' \in [M\rangle \,:\, \neg M'[t\rangle$.
- t heißt *1-lebendig unter* M, falls $\exists\, w \in T^* \,:\, M[wt\rangle$
- t heißt *2-lebendig unter* M, falls

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \,:\, \exists\, w_1, \ldots, w_n \in T^* \,:\, M[w_1 t w_2 t \cdots w_n t\rangle$$

- t heißt *3-lebendig unter* M, falls eine unendliche Schaltfolge w existiert, $M[w\rangle$, die t unendlich oft enthält.
- t heißt **(4-) lebendig** *unter* M, falls

$$\forall\, M' \in [M\rangle \,:\, \neg(t \text{ ist tot unter } M)$$

- t heißt *lebendig*, falls t lebendig unter M_N ist.

Bem. t 4-lebendig $\implies$ t 3-lebendig $\implies$ t 2-lebendig $\implies$ t 1-lebendig $\iff$ $\neg$ (t 0-lebendig)

Def. Bezogen auf eine Markierung M:

- M heißt *tot*, falls alle Transitionen unter M tot sind.
- M heißt *lebendig*, wenn alle $t \in T$ unter M lebendig sind.
- M heißt **monoton lebendig**, wenn alle $M' \geq M$ lebendig sind.

Bem. M ist tot $\iff$ $\forall\, t \in T \,:\, \neg M[t\rangle$

Def. Bezogen auf ein Netz N:

- N heißt *tot*, falls M_N tot ist.
- N heißt **verklemmungsfrei**, falls $\forall\, M \in [M_N\rangle \,:\, \neg(M \text{ tot})$
- N heißt *lebendig*, wenn M_N lebendig ist.
- N heißt *monoton lebendig*, wenn M_N monoton lebendig ist.

S- und T-Invarianten

Def. Die **Inzidenzmatrix** *eines Netzes* N ist die Matrix $C(N) \in \mathbb{Z}^{T \times S}$ mit $C(N)_{st} = \Delta t(s)$ für $s \in S$ und $t \in T$.

Bem. Folglich ist $\Delta t = C(N) \cdot t$ (wenn man t als One-Hot-Vektor auffasst) und für $M[w\rangle M'$ ist $M' = M + C(N) \cdot \text{Parikh}(w)$.

Def. Eine **S-Invariante** $y : S \to \mathbb{Z}$ ist eine Lsg von $C(N)^T \cdot y = 0$. Der **Träger** $\text{supp}(y)$ *einer S-Invarianten* y ist $\{s \in S \mid y(s) \neq 0\}$.

Notation. $S\text{-Inv}(N) \coloneqq \{\ S\text{-Invarianten von } N\ \} = \ker(C(N)^T)$

Lem/Def. Das Netz N heißt **von S-Invarianten überdeckt**, falls folgende äquivalente Bedingungen gelten:

- N besitzt eine positive (d. h. $\forall\, s \in S \,:\, y(s) > 0$) S-Invariante.
- Für alle $s \in S$ gibt es eine nichtnegative (d. h. $\forall\, s \in S \,:\, y(s) \geq 0$) S-Invariante mit $s \in \text{supp}(y)$.

Lem. Für $y \in \mathbb{Z}^S$ gilt

$$y \in S\text{-Inv}(N) \implies \forall\, M \in [M_N\rangle \,:\, y^T \cdot M = y^T \cdot M_N.$$

Ist jede Transition in N 1-lebendig, so gilt auch die Rückrichtung:

$$y \in S\text{-Inv}(N) \iff \forall\, M \in [M_N\rangle \,:\, y^T \cdot M = y^T \cdot M_N$$

Bem. Das Lemma kann verwendet werden um zu zeigen, dass eine Markierung M nicht erreichbar ist.

Lem. Sei $s \in S$ und $y \in S\text{-Inv}(N)$ nichtnegativ mit $y(s) > 0$. Dann ist s beschränkt, genauer $(y^T \cdot M_N / y(s))$-beschränkt.

Satz. Ist N von S-Invarianten überdeckt, so ist N strukturell beschränkt. Besitzt N eine lebendige Markierung, so gilt sogar:

$$N \text{ ist strukturell beschr.} \iff N \text{ ist von } S\text{-Invarianten überdeckt.}$$

Def. Ein **home state** ist eine Markierung M mit

$$\forall\, M' \in [M\rangle \,:\, M \in [M'\rangle.$$

Ein Netz N heißt **reversibel**, wenn M_N ein home state ist.

Lem. Angenommen, N ist reversibel und keine Transitionen sind tot unter M_N. Dann ist N lebendig.

Bem. Es gibt lebendige, sichere Netze, die *nicht* von S-Invarianten überdeckt sind.

Def. Eine **T-Invariante** $x : T \to \mathbb{Z}$ ist eine Lsg von $C(N) \cdot x = 0$. Das Netz N heißt **von T-Invarianten überdeckt**, wenn es eine positive T-Invariante gibt.

Notation. $T\text{-Inv}(N) \coloneqq \{\ T\text{-Invarianten von } N\ \} = \ker(C(N))$

Lem. Sei $w \in T^*$ mit $M[w\rangle M'$. Dann gilt:

$$\text{Parikh}(w) \in T\text{-Inv}(N) \iff M = M'$$

Satz. Ist N lebendig und beschränkt, so ist N von T-Invarianten überdeckt.

Einige Entscheidbarkeitsprobleme

Probleme. Gegeben sei eine Netz N

- **Erreichbarkeit** (E): … und eine Markierung M. Frage: Ist M erreichbar in N, gilt also $M \in [M_N\rangle$?
- **0-Erreichbarkeit** (O-E): Frage: Ist $0 \in [M_N\rangle$?
- **Teilerreichbarkeit** (TE): … eine Teilmenge $S' \subseteq S$ und $M : S' \to \mathbb{N}$. Frage: Gibt es ein $M \in [M_N\rangle$ mit $M|_{S'} = M'$?

Bem. Diese Probleme sind lösbar, falls der Erreichbarkeitsgraph endlich ist.

Def. • Ein Entscheidungsproblem A ist auf ein Entscheidungsproblem B **reduzierbar** (notiert $A \mapsto B$), falls ein Lösungsalgorithmus für A existiert, welcher einen (vllt. gar nicht existenten!) Lösungsalgorithmus für B verwenden darf.

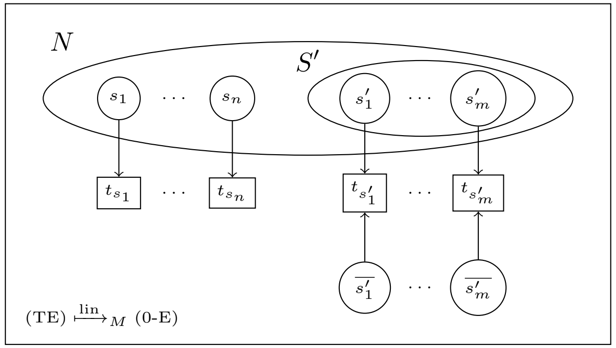
- A ist **linear / polynomiell many-one-reduzierbar** *auf* B, falls aus einer Instanz I von A in linearer / polynomieller Zeit eine Instanz I' von B berechnet werden kann, sodass die Antwort auf I gleich der Antwort auf I' ist.
  Notation: $A \overset{\text{lin}}{\longmapsto}_M B \;/\; A \overset{\text{poly}}{\longmapsto}_M B$

Satz. (0-E) $\overset{\text{lin}}{\longmapsto}_M$ (E) $\overset{\text{lin}}{\longmapsto}_M$ (TE) $\overset{\text{lin}}{\longmapsto}_M$ (0-E)

Beweis ((TE) $\overset{\text{lin}}{\longmapsto}_M$ (0-E)). Konstruiere $\overline{N} = (\overline{S}, \overline{T}, \overline{W}, M_{\overline{N}})$ mit

$$\begin{aligned}
\overline{S} &\coloneqq S \amalg \{\overline{s'} \mid s' \in S'\}\\
\overline{T} &\coloneqq T \amalg \{t_{s'} \mid s' \in S'\} \amalg \{t_s \mid s \in S \setminus S'\}\\
\overline{W} &\coloneqq W \cup \{s \to t_s \mid s \in S \setminus S'\} \cup \{s' \to t_{s'} \leftarrow \overline{s'} \mid s' \in S'\}\\
M_{\overline{N}} &\coloneqq (s \in S \mapsto M_N(s),\;\; \overline{s'} \mapsto M'(s'))
\end{aligned}$$

Dann: M' teilerreichbar in $N \iff$ Nullmark. erreichbar in $\overline{N}$



Satz (schwierig!)**.** (E) ist entscheidbar.

Probleme. Gegeben sei ein Petrinetz N

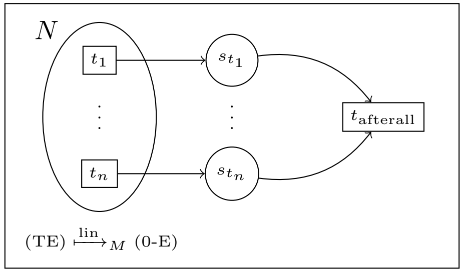
- **Lebendigkeit** (L): Frage: Ist N lebendig?
- **Einzellebendigkeit** (EL): … und $t \in T$. Frage: Ist t lebendig?

Satz. (L) $\overset{\text{lin}}{\longmapsto}_M$ (EL) $\overset{\text{lin}}{\longmapsto}_M$ (L)

Beweis. „(L) $\overset{\text{lin}}{\longmapsto}_M$ (EL)“. Konstruiere $\overline{N} = (\overline{S}, \overline{T}, \overline{W}, M_{\overline{N}})$ mit

$$\begin{aligned}
\overline{S} &\coloneqq S \amalg \{s_t \mid t \in T\}\\
\overline{T} &\coloneqq T \amalg \{t_{\text{afterall}}\}\\
\overline{W} &\coloneqq W \cup \{t \to s_t \mid t \in T\} \cup \{s_t \to t_{\text{afterall}} \mid t \in T\}\\
M_{\overline{N}} &\coloneqq (s \in S \mapsto M_N(s),\;\; s_t \mapsto 0)
\end{aligned}$$

Dann: N lebendig $\iff$ t_{afterall} lebendig in $\overline{N}$.



„(L) $\overset{\text{lin}}{\longmapsto}_M$ (EL)“. Beweisidee: Gefragt sei, ob eine Transition t_0 in Netz N lebendig ist. Erweitere N zu einem Netz $\hat{N}$, sodass jede Transition t aus N außer t_0 und jede neue Transition lebendig ist (indem man die nötigen Marken zum Schalten von t bereitstellt und nach dem Schalten die durch t erzeugten Marken entfernt).
Dann zeige: $\hat{N}$ lebendig $\iff$ t_0 lebendig in N.

Satz. (EL) ist reduzierbar auf (TE)

Beweisidee. Setze

$$\begin{aligned}
T_{t_0} &\coloneqq \{M \in \mathfrak{M}^\omega(N) \mid t_0 \text{ tot in } M\}\\
T_{t_0}^{\max} &\coloneqq \{M \in T_{t_0} \mid M \text{ ist maximal in } T_{t_0}\}\\
S'(M) &\coloneqq \{s \in S \mid M(s) < \infty\} \text{ für } M \in \mathfrak{M}^\omega(N)
\end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
& t_0 \text{ ist nicht lebendig}\\
\iff & \exists\, M \in [M_N\rangle \;:\; t \text{ tot in } M\\
\iff & \exists\, M \in [M_N\rangle \;:\; \exists\, M^\omega \in T_{t_0}^{\max} \;:\; M \leq M^\omega\\
\iff & \exists\, M^\omega \in T_{t_0}^{\max} \;:\; \exists\, M' \leq M^\omega|_{S'(M^\omega)} \;:\; M' \text{ teilerreichbar in } N
\end{aligned}$$

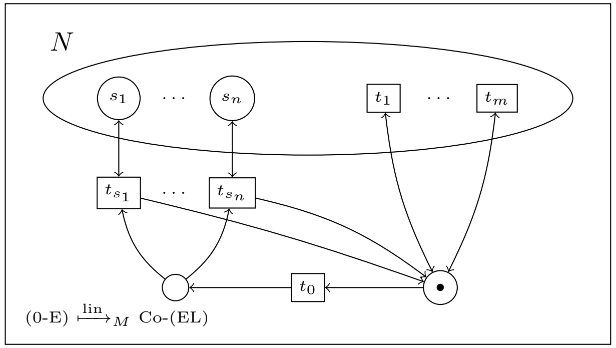
Nach dem Lemma von Dickson ist $T_{t_0}^{\max}$ endlich. Man kann zeigen, dass $T_{t_0}^{\max}$ auch berechenbar ist. Somit ist die Bedingung der letzten Zeile algorithmisch nachprüfbar.

Satz. (0-E) $\overset{\text{lin}}{\longmapsto}_M$ Co-(EL), das ist (EL) mit umgekehrter Antwort

Beweis. Konstruiere $\overline{N} = (\overline{S}, \overline{T}, \overline{W}, M_{\overline{N}})$ mit

$$\begin{aligned}
\overline{S} &\coloneqq S \amalg \{s_{\text{s-ctrl}}, s_{\text{t-ctrl}}\}\\
\overline{T} &\coloneqq T \amalg \{t_s \mid s \in S\} \amalg \{t_0\}\\
\overline{W} &\coloneqq W \cup \{t \rightleftarrows s_{\text{t-ctrl}} \mid t \in T\} \cup \{s \rightleftarrows t_s \mid s \in S\}\\
&\quad \cup \{s_{\text{s-ctrl}} \to t_s \to s_{\text{t-ctrl}} \mid s \in S\} \cup \{s_{\text{t-ctrl}} \to t_0 \to s_{\text{s-ctrl}}\}\\
M_{\overline{N}} &\coloneqq (s \in S \mapsto M_N(s),\;\; s_{\text{s-ctrl}} \mapsto 0,\;\; s_{\text{t-ctrl}} \mapsto 1)
\end{aligned}$$

Dann: Nullmark. in N erreichbar $\iff$ t_0 in $\overline{N}$ nicht lebendig



Problem (Spezielles Reproduktionsproblem (SR)). Gegeben ein Netz N, gibt es eine nicht-leere Schaltfolge w mit $M_N[w\rangle M_N$?

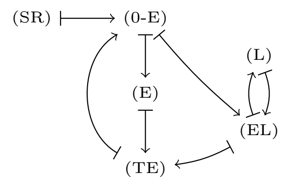
Satz. (SR) $\overset{\text{lin}}{\longmapsto}_M$ (0-E)

Beweis. Konstruiere $\widetilde{N} = (\widetilde{S}, \widetilde{T}, \widetilde{W}, M_{\widetilde{N}})$ mit

$$\begin{aligned}
&\widetilde{S} \coloneqq S \times \{\text{active}, \text{comparison}\} \amalg \{s_{\text{control}}\}\\
&\widetilde{T} \coloneqq T \times \{\text{one-shot}, \text{multiple}\} \amalg \{t_s \mid s \in S\}\\
&\widetilde{W}((t, \text{--}), (s, \text{active})) \coloneqq W(t, s), \qquad \widetilde{W}(s_{\text{control}}, (t, \text{one-shot})) \coloneqq 1,\\
&\widetilde{W}((s, \text{active}), (t, \text{--})) \coloneqq W(s, t) \qquad \widetilde{W}((s, \text{--}), t_s) \coloneqq 1,\\
&\widetilde{W}(\text{--}, \text{--}) \coloneqq 0 \text{ sonst}, \quad M_{\widetilde{N}}(s, \text{--}) \coloneqq M_N(s), \quad M_{\widetilde{N}}(s_{\text{control}}) \coloneqq 1
\end{aligned}$$

Dann gilt: $\quad \exists\, w \in t^* \setminus \{\lambda\} \;:\; M_N[w\rangle M_N \iff 0 \in [M_{\widetilde{N}}\rangle$

Fazit. Im folgenden Bild sind alle Reduktionen eingezeichnet. Dabei handelt es sich um lineare Many-One-Reduktionen mit Ausnahme von (EL) $\mapsto$ (TE).



(L) und (EL) sind entscheidbar, aber mindestens so schwer wie (E), (0-E) und (TE).

Beschränktheit und Überdeckbarkeit

Lem (Dickson). $\leq$ ist eine Wohlquasiordnung auf $\mathbb{N}^n$, d. h. für alle unendlichen Folgen $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}^n$ gibt es eine Teilfolge $(M_{i_j})_{j\in\mathbb{N}}$ mit $M_{i_j} \leq M_{i_{j+1}}$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

Def. Ein **Weg** in einem Graphen (V, E) ist eine Folge $v_1 \dots v_n$ in V mit $\forall\, i \neq j : v_i \neq v_j$ und $(v_i, v_{i+1}) \in E$.

Def. Ein Graph (V, E) heißt **lokal endlich**, falls für alle $v \in V$ die Menge $\{w \in V \mid (v, w) \in E\}$ endlich ist.

Lem (König). Sei (V, E) ein lokal endlicher gerichteter Graph und $v_0 \in V$ ein Knoten, sodass für alle $v \in V$ ein Weg von v_0 nach v existiert. Dann gibt es einen unendlichen Weg ausgehend von v_0.

Satz. N ist unbeschränkt $\iff$ $\exists\, M, M' \in [M_N\rangle : \exists\, w \in T^* : M[w\rangle M' \wedge M \leq M' \wedge M \neq M'$

Def. Eine **erweiterte Markierung** *von* N ist eine Abbildung

$$M : S \to \mathbb{N} \cup \{\omega\}.$$

Notation. $\mathfrak{M}^\omega(S) \coloneqq \{$ erw. Mark. von N $\} \coloneqq (\mathbb{N} \cup \{\omega\})^S$

Def. Sei N ein Netz und M_1, M_2 erweiterte Markierungen.

- M_2 **überdeckt** M_1 $\;:\Longleftrightarrow\; M_1 \leq M_2$
- M_1 ist **überdeckbar** $\;:\Longleftrightarrow\; \exists\, M \in [M_N\rangle : M_1 \leq M$

Def. Eine Menge $S' \subseteq S$ heißt **simultan unbeschränkt**, falls

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \exists\, M \in [M_N\rangle : \forall\, s \in S : M(s) \geq n.$$

Def. Sei $N = (S, T, W, M_N)$ ein Netz. Ein **Überdeckungsgraph** von N ist ein kantenbeschrifteter, gericht. Graph $\mathrm{Cov}(N) = (V, E)$, der von folgendem (nichtdet.) Algorithmus berechnet wird:

$V \coloneqq \emptyset \subset \mathfrak{M}^\omega(S)$, $\quad A \coloneqq \{M_N\} \subset \mathfrak{M}^\omega(S)$,
$E \coloneqq \emptyset \subset \mathfrak{M}^\omega(S) \times T \times \mathfrak{M}^\omega(S)$,
$\textsc{pred} \coloneqq \mathrm{const}\,\textbf{nil} \in (\mathfrak{M}^\omega(S) \cup \{\textbf{nil}\})^{\mathfrak{M}^\omega(S)}$
while $A \neq \emptyset$ **do**
  wähle $M \in A$
  $A \coloneqq A \setminus \{M\}$, $\quad V \coloneqq V \cup \{M\}$
  for $t \in T$ mit $M[t\rangle$ **do**
    $M' \coloneqq M + \Delta t$, $\quad M^* \coloneqq M$
    while $M^* \neq \textbf{nil} \wedge M^* \not\leq M'$ **do** $M^* \coloneqq \textsc{pred}(M^*)$
    if $M^* \neq \textbf{nil}$ **then** $M' \coloneqq M' + \omega \cdot (M' - M^*)$
    $E \coloneqq \{(M, t, M')\}$
    if $M' \notin V \cup A$ **then** $A \coloneqq A \cup \{M'\}$, $\quad \textsc{pred}(M') \coloneqq M$

Satz. $\mathrm{Cov}(N)$ ist endlich ($\iff$ der Algorithmus terminiert)

Kor. Es ist entscheidbar, ob N beschränkt ist.

Beweis. Konstruiere $\mathrm{Cov}(N) = (V, E)$ wobei $V \subset \mathfrak{M}^\omega(S)$ endl. ist. Überprüfe, ob sogar $V \subset \mathfrak{M}(S)$ gilt. Falls ja, so ist $\mathfrak{R}(N) = \mathrm{Cov}(N)$ endlich. Falls nein, so gibt es M, M' wie im letzten Satz und N ist somit unbeschränkt.

Bem. Jedes $\mathrm{Cov}(N)$ ist (nach Einführen eines Fehlerzustandes und Kanten dorthin) ein determ. endl. Automat mit Startzustand M_N.

Def. $L(\mathrm{Cov}(N)) \subseteq T^*$ ist die Sprache der von einem $\mathrm{Cov}(N)$ akzeptierten Wörter.

Notation. $M_w \coloneqq$ durch $w \in L(\mathrm{Cov}(N))$ erreichter Zust. in $\mathrm{Cov}(N)$

Lem. $M_N[w\rangle M \implies w \in L(\mathrm{Cov}(N)) \wedge \forall\, s \in S : M_w(s) \in \{M(s), \omega\}$

Lem. Für alle M in $\mathrm{Cov}(N)$ u. alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $M' \in [M_N\rangle$ mit

$$\begin{cases} M'(s) = M(s) & \text{falls } M(s) \neq \omega, \\ M'(s) > n & \text{falls } M(s) = \omega. \end{cases}$$

Kor.
- S' ist simultan unbeschränkt $\iff$ $(\mathrm{const}\,\omega) \in \mathrm{Cov}(N)$
- Sei $\tilde{M}$ eine Markierung von N. Dann gilt: $\tilde{M}$ ist überdeckbar in N $\iff$ $\tilde{M}$ wird von einem M in $\mathrm{Cov}(N)$ überdeckt
- t ist 1-lebendig in N $\iff$ t ist Kantenbeschriftung in $\mathrm{Cov}(N)$

Lem. Für jedes Netz N mit Transition $t \in T$ sind äquivalent:
- t ist 2-lebendig
- t ist Beschriftung in einem Kreis in $\mathrm{Cov}(N)$

Kor. 2-Lebendigkeit von Transitionen ist entscheidbar.

Strukturtheorie und Free-Choice-Netze

Konvention. In diesem Abschn. seien alle Kantengewichte 0 oder 1.

Def. Eine Teilmenge $R \subseteq S$ heißt
- **Siphon**, falls ${}^\bullet R \subseteq R^\bullet$
- **Falle**, falls $R^\bullet \subseteq {}^\bullet R$

Lem.
- Ist R ein Siphon und unmarkiert unter M, so ist R unmarkiert unter allen $M' \in [M\rangle$.
- Ist R eine Falle und markiert unter M, so ist R markiert unter allen $M' \in [M\rangle$.

Lem. Angenommen, N hat keine isolierten Stellen. Ist $R \neq \emptyset$ ein Siphon und unmarkiert unter $M \in [M_n\rangle$, so ist N nicht lebendig.

Lem. Sei $T \neq \emptyset$ und M eine tote Markierung.
Dann ist $R = M^{-1}(\{0\})$ ein nichtleerer, unmarkierter Siphon.

Lem. Sei $T \neq \emptyset$. Enthält jeder nichtleere Siphon eine markierte Falle, so ist N verklemmungsfrei.

Def. Ein Netz N mit Kantengewichten in $\{0, 1\}$ heißt
- **Free-Choice-Netz** (*FC-Netz*), falls
$$\forall\, t, t' \in T : t \neq t' \wedge s \in {}^\bullet t \cap {}^\bullet t' \implies {}^\bullet t = {}^\bullet t' = \{s\}.$$
- **erweitertes Free-Choice-Netz** (*EFC-Netz*), falls
$$\forall\, t, t' \in T : {}^\bullet t \cap {}^\bullet t' \neq \emptyset \implies {}^\bullet t = {}^\bullet t'.$$

Bem. Ist N ein EFC-Netz, $s \in S$, $t_1, t_2 \in s^\bullet$ und M eine Markierung, so gilt $M[t_1\rangle \iff M[t_2\rangle$.

Lem. Die Vereinigung von Siphons / Fallen ist wieder ein Siphon / eine Falle. Damit bilden Siphons / Fallen mit der Vereinigung einen beschränkten Halbverband.

Kor.
- Jedes $R \subseteq S$ enthält eine größte Falle.
- $R \subseteq S$ enthält eine markierte Falle $\iff$ die größte Falle in R ist markiert

Def. Sei $P \subseteq S$ und $<$ eine Totalordnung auf P. Die durch $<$ induzierte **lexikographische Ordnung** $<_{\text{lex}}$ auf $\mathfrak{M}(S)$ ist

$$M_1 <_{\text{lex}} M_2 \;:\Longleftrightarrow\; \exists\, p \in P : \begin{array}{l} \forall\, q < p : M_1(q) = M_2(q) \\ \wedge\; M_1(p) < M_2(p). \end{array}$$

Lem. $<_P$ ist Noethersch (wohlfundiert)

Lem. Sei N ein EFC-Netz, $R \subseteq S$ und $Q \subseteq R$ die größte Falle in R. Dann gibt es eine Totalordnung $<$ auf $R \setminus Q$, sodass:
Für alle Markierungen M mit $M|_Q \equiv 0$ und $\exists\, t \in R^\bullet : M[t\rangle$ gilt

$$\exists\, M' \in [M\rangle : M' <_{\text{lex}} M \wedge M'|_Q \equiv 0.$$

Beweis. Setze $n \coloneqq |R \setminus Q|$. Wähle
- $t_1 \in R^\bullet \setminus {}^\bullet R$ und $s_1 \in {}^\bullet t_1 \cap (R \setminus Q)$
- $t_2 \in (R \setminus \{s_1\})^\bullet \setminus {}^\bullet (R \setminus \{s_1\})$ und $s_2 \in {}^\bullet t_1 \cap (R \setminus (Q \cup \{s_1\}))$
- ...

- $t_n \in (R \setminus \{s_1, \ldots, s_{n-1}\})^\bullet \setminus {}^\bullet(R \setminus \{s_1, \ldots, s_{n-1}\})$ und $s_n \in {}^\bullet t_1 \cap (R \setminus (Q \cup \{s_1, \ldots, s_{n-1}\}))$

Definiere $<$ durch $s_n < \ldots < s_2 < s_1$. Für t mit $M[t\rangle$ gibt es ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $s_i \in {}^\bullet t$. Da N EFC ist, gilt ${}^\bullet t_i = {}^\bullet t$. Somit existiert M' mit $M[t_i\rangle M'$. Es stimmen M und M' auf $Q \cup \{s_{i+1}, \ldots, s_n\}$ überein, aber $M'(s_i) < M(s_i)$. Also $M' <_{\text{lex}} M$.

Kor. Die Aussage des letzten Satzes gilt auch für alle Markierungen M mit $M|_Q \equiv 0$ und $\exists\, t \in R^\bullet \,:\, t$ ist nicht tot unter M, falls R ein Siphon ist.

Satz (**Commoner**). Sei N ein EFC-Netz ohne isol. Stellen. Dann:

$$N \text{ ist lebendig } \iff \text{ jeder Siphon } \neq \emptyset \text{ enth. eine markierte Falle}$$

Beweis. „$\Rightarrow$“. Sei R ein nichtleerer Siphon und $Q \subseteq R$ die größte Falle in R. Wähle $t \in R^\bullet$. Angenommen, $M_N|_Q \equiv 0$. Durch mehrmalige Anwendung des vorh. Korollar (beachte: t ist nicht tot) erhalten wir eine unendliche absteigende Reihe $M_N >_{\text{lex}} M_1 >_{\text{lex}} \ldots$ im Widerspruch zur Noetherianität von $<_{\text{lex}}$.

Kor. Jedes lebendige EFC-Netz ist monoton lebendig.

Netzvariationen

Def. Ein **High-Level-Netz** N ist gegeben durch

- eine endliche Menge S von *Stellen*,
- eine endliche Menge T von *Transitionen*,
- eine Menge L von *Marken* (eine *Markierung* von N ist gegeben durch eine Multimenge von L für jede Stelle von N, also durch eine Abbildung in $\mathfrak{M}(L)^S$)
- für jede Transition $t \in T$ eine (berechenbare) *Transitionsregel* $r_t \subseteq \mathfrak{M}(S \times L) \times \mathfrak{M}(S \times L)$
- und eine *Anfangsmarkierung* $M_N : S \to \mathfrak{M}(L)$.

Def. Ein **Netz mit Zeit** ist ein Tupel $N = (S, T, W, M_N, \tau)$, wobei

- (S, T, W, M_N) ein sicheres Petrinetz ist mit $\forall\, t \in T \,:\, {}^\bullet t \neq \emptyset$ und
- $\tau : S \to \mathbb{N}_1$ die **Latenzzeit** aller Transitionen angibt.

Ein **Zustand** von N ist ein Tupel (M, res), wobei M eine Markierung ist und $\text{res} : T \to \mathbb{N}_0$ die *Restzeit* jeder Transition angibt. Es gibt zwei verschiedene Schaltschritte:

$$(M, \text{res})[\sigma\rangle(M, \text{res}') \;:\iff\; \text{res} \geq 1 \wedge \text{res}' = \text{res} - 1 \qquad (\textbf{Zeitschritt})$$

$$(M, \text{res})[t\rangle(M', \text{res}') \;:\iff\; M[t\rangle M' \wedge \qquad (\textbf{Transition})$$

$$\wedge\, \text{res}'(t') = \begin{cases} \tau(t') & \text{falls } \neg(M[t'\rangle) \wedge M'[t'\rangle \\ \text{res}(t') & \text{sonst} \end{cases}$$

Def. Ein **Netz mit Prioritäten** ist ein Petri-Netz $N = (S, T, W, M_N)$ mit einer Halbordnung $\sqsubset$.
Das Netz schaltet unter Beachtung der Priorität, falls

$$M[t\rangle_{\sqsubset} M' \;:\iff\; M[t\rangle M' \wedge \forall\, t' \in T \,:\, M[t'\rangle \implies t' \not\sqsupset t$$

Def. Ein **Netz mit Inhibitor-Kanten** ist eine Petri-Netz $N = (S, T, W, M_N)$ zusammen mit einer Menge $I \subseteq S \times T$ von *Inhibitor-Kanten*. Man definiert:

$$M[t\rangle_I M' \;:\iff\; M[t\rangle M' \wedge \forall\, s \in S \,:\, (s, t) \in I \implies M(s) = 0$$

Def. Eine **Zählermaschine** besteht aus $\mathbb{N}$-wertigen Registern $c_1, \ldots, c_n$ und einem Programm bestehend aus den Instruktionen

- $\textsc{incr}(c_i)$ – erhöhe c_i um eins
- $\textsc{jzdec}(c_i, m)$ – springe zu Adresse m, falls $c_i = 0$, ansonsten erniedrige c_i um eins.

Prop. Für jede Turingmaschine gibt es eine 2-Zählermaschine, die die Turingmaschine simuliert (bei passender Kodierung der Eingabe und Ausgabe).

Kor. Das Halteproblem für 2-Zählermaschinen ist unentscheidbar.

Lem. Zählermaschinen lassen sich als Netze mit Zeit, mit Prioritäten oder mit Inhibitor-Kanten kodieren.

Kor. Das Erreichbarkeitsproblem ist für solche Netze unentscheidbar.

Def. Ein **Netz mit Kapazitäten** ist eine Petri-Netz $N = (S, T, W, M_N)$ zusammen mit einer Abbildung $k : S \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Man definiert:

$$M[t\rangle_k M' \;:\iff\; M[t\rangle M' \wedge M' \leq k$$

Nichtdeterminismus und modulare Konstruktion

Def. Zwei Netze N_1 und N_2 heißen **sprachäquivalent**, wenn $L(N_1) = L(N_2)$.

Satz. Für beschränkte Netze ist Sprachäquivalenz entscheidbar.

Beweis. Für beschränkte Netze N ist $L(N)$ regulär (man erhält einen endlichen Automaten aus $\mathfrak{R}(N)$). Gleichheit von regulären Sprachen ist entscheidbar.

Bem. Sprachäquivalenz ist unzureichend für den Systemvergleich.

Def. Die **ready-Semantik** eines Netzes N ist

$$\mathrm{ready}(N) \coloneqq \{(w, X) \mid \exists\, M \,:\, M_N[w\rangle\rangle M \wedge X = \{a \in \Sigma \mid M[a\rangle\rangle\}\}.$$

N_1, N_2 heißen **ready-äquivalent**, falls $\mathrm{ready}(N_1) = \mathrm{ready}(N_2)$.

Def. Die **Failure-Semantik** (*Verweigerungssemantik*) eines Netzes N ist

$$\mathfrak{F}(N) \coloneqq \{(w, X) \mid X \subseteq \Sigma, \exists\, M \,:\, M_N[w\rangle\rangle M \wedge \forall\, a \in X \,:\, \neg M[a\rangle\rangle\}.$$

Dabei heißt X *Verweigerungsmenge*.
N_1, N_2 sind **failure-äquivalent**, falls $\mathfrak{F}(N_1) = \mathfrak{F}(N_2)$.

Lem.
- $(w, X) \in \mathfrak{F}(N), Y \subseteq X \implies (w, Y) \in \mathfrak{F}(N)$
- $(w, \emptyset) \in \mathfrak{F}(N) \iff w \in L(N)$
- $(w, X) \in \mathfrak{F}(N), \forall\, a \in Y \,:\, (wa, \emptyset) \notin L(N) \implies (w, X \cup Y) \in \mathfrak{F}(N)$
- $(w, X) \in \mathfrak{F}(N), Y \subseteq \Sigma \setminus \ell(T) \implies (w, X \cup Y) \in \mathfrak{F}(N)$

Lem. $(w, X) \in \mathfrak{F}(N) \iff \exists\, Y \subseteq \Sigma \setminus X \,:\, (w, Y) \in \mathrm{ready}(N)$

Satz. Ready-Äquivalenz $\implies$ $\mathfrak{F}$-Äquivalenz $\implies$ Sprachäquivalenz

Bem. Die Umkehrungen sind falsch.

Satz. Für beschränkte Netze ist $\mathfrak{F}$-Äquivalenz entscheidbar.

Beweisidee. Aus jedem Netz N kann man einen endlichen Automaten konstruieren, dessen Sprache kanonisch isomorph zu $\mathfrak{F}(N)$ ist. Gleichheit von regulären Sprachen ist entscheidbar.

Def. Seien N_1 und N_2 mit Σ beschriftete Petrinetze und $A \subseteq \Sigma$. Die **parallele Komposition** *mit Synchronisation über* A ist das beschriftete Netz $N \parallel_A N_2 = (S, T, W, M_N, \ell)$ mit

- $S = S_1 \amalg S_2$
- $$\begin{aligned} T = \; & \{(t_1, \lambda) \mid t_1 \in T_1, \ell_1(t_1) \notin A\} \\ \amalg \; & \{(\lambda, t_2) \mid t_2 \in T_2, \ell_2(t_2) \notin A\} \\ \amalg \; & \{(t_1, t_2) \in T_1 \times T_2 \mid \ell_1(t_1) = \ell_2(t_2) \in A\} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} W(s_1 \in S_1, (t_1, t_2)) &\coloneqq W_1(s_1, t_1) \text{ falls } t_1 \in T_1 \\ W(s_2 \in S_1, (t_1, t_2)) &\coloneqq W_2(s_2, t_2) \text{ falls } t_2 \in T_2 \\ W(s \in S, t \in T) &\coloneqq 0 \text{ (sonst)} \\ W((t_1, t_2), s_1 \in S_1) &\coloneqq W_1(t_1, s_1) \text{ falls } t_1 \in T_1 \\ W((t_1, t_2), s_2 \in S_1) &\coloneqq W_2(t_2, s_2) \text{ falls } t_2 \in T_2 \\ W(t \in T, s \in S) &\coloneqq 0 \text{ (sonst)} \end{aligned}$$
- $M_N \coloneqq M_{N_1} \amalg M_{N_2}$
- $$\begin{aligned} \ell((t_1, t_2) \in T_1 \times T_2) &\coloneqq \ell_1(t_1) = \ell_2(t_2) \\ \ell(t_1 \in T_1) &\coloneqq \ell_1(t_1) \\ \ell(t_2 \in T_2) &\coloneqq \ell_2(t_2) \end{aligned}$$

Bem. Die Menge der mit Σ beschr. Netze wird mit $\parallel_A$ zu einem komm. Monoid mit neutralem Element $(S = \emptyset, T = \Sigma, -, -, \ell = \mathrm{id})$

Lem. Sei $N = N_1 \parallel N_2$, $M_1, M_1' \in \mathfrak{M}(S_1)$, $M_2, M_2' \in \mathfrak{M}(S_2)$ und $(t_1^{(1)}, t_2^{(1)}), \ldots, (t_1^{(n)}, t_2^{(n)}) \in T_N$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & M_1 \amalg M_2[(t_1^{(1)}, t_2^{(1)}), \ldots, (t_1^{(n)}, t_2^{(n)})\rangle M_1' \amalg M_2' \\ \iff & M_1[t_1^{(1)}, \ldots, t_1^{(n)}\rangle M_1' \wedge M_2[t_2^{(1)}, \ldots, t_2^{(n)}\rangle M_2' \end{aligned}$$

Bem. Dabei gilt $M[\lambda\rangle M$ immer.

Lem. Sei $a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$. Es gilt $M_1 \amalg M_2[a\rangle\rangle M_1' \amalg M_2'$ g. d. wenn
- Falls $a \in A$: $M_1[a\rangle\rangle M_1' \wedge M_2[a\rangle\rangle M_2'$
- Falls $a \notin A$: $M_1[a\rangle\rangle M_1' \wedge M_2[\lambda\rangle\rangle M_2'$ oder $M_1[\lambda\rangle\rangle M_1' \wedge M_2[a\rangle\rangle M_2'$

Def. Seien $u, v \in \Sigma^*$. Dann ist

$$u \parallel_A v \coloneqq \left\{ \begin{matrix} w = w_1 \cdots w_n \\ \in \Sigma^* \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} u = u_1 \cdots u_n, v = v_1 \cdots v_n \text{ mit} \\ u_i, v_i \in \Sigma \cup \{\lambda\} \text{ sodass} \\ \forall\, 1 \leq i \leq n \,:\, u_i = v_i = w_i \in A \\ \vee u_i v_i = w_i \notin A \end{matrix} \right\}$$

Bem. Im Fall $u_i v_i = w_i$ gilt $u_i = \lambda$ oder $v_i = \lambda$.

Lem. Es sind äquivalent:
- in $N_1 \parallel_A N_2$ gilt $M_1 \amalg M_2[w\rangle\rangle M_1' \amalg M_2'$
- $\exists\, u, v \in \Sigma^* \,:\, M_1[u\rangle\rangle M_1' \wedge M_2[v\rangle\rangle M_2' \wedge w \in u \parallel_A v$

Satz.
- $L(N_1 \parallel_A N_2) = \cup\{u \parallel_A v \mid u \in L(N_1), v \in L(N_2)\}$
- $$\mathfrak{F}(N_1 \parallel_A N_2) = \left\{ (w, Z) \;\middle|\; \begin{matrix} \exists\, (u, X) \in \mathfrak{F}(N_1), (v, Y) \in \mathfrak{F}(N_2) \,: \\ w \in u \parallel_A v \text{ und} \\ Z \cap A \subseteq X \cup A \text{ und } Z \setminus A \subseteq X \cap Y \end{matrix} \right\}$$

Def. Ein *beschriftetes* Netz heißt **verklemmungsfrei**, wenn

$$\forall\, M \in [M_N\rangle \,:\, \exists\, a \in \Sigma \,:\, M[a\rangle\rangle.$$

Zwei Netze heißen **v-äquivalent**, falls beide verklemmungsfrei oder beide nicht verklemmungsfrei sind.

Lem. N ist verklemmungsfrei $\iff \forall\, w \in \Sigma^* \,:\, (w, \Sigma) \notin \mathfrak{F}(N)$

Def. Zwei Netze N_1 und N_2 heißen **VA-äquivalent**, falls:
Für alle Netze N und alle $A \subseteq \Sigma$ gilt:
Die Netze $N_1 \parallel_A N$ und $N_2 \parallel_A N$ sind v-äquivalent.

Satz. $\mathfrak{F}$- und VA-Äquivalenz stimmen überein.

Beweisidee. Seien N_1 und N_2 VA-äquivalent.
Setze $A \coloneqq (\ell_1(T_1) \cup \ell_2(T_2)) \setminus \{\lambda\}$. Zeige:
Es gibt ein Netz N, sodass für alle N' mit $l'(N') \setminus \{\lambda\} \subseteq A$ gilt:

$$N \parallel_A N' \text{ ist verklemmungsfrei} \iff (w, X) \notin \mathfrak{F}(N')$$

Dann:

$$\begin{array}{ccc} (w, X) \notin \mathfrak{F}(N_1) & & (w, X) \notin \mathfrak{F}(N_2) \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ N \parallel_A N_1 \text{ verklemmungsfrei} & \iff & N \parallel_A N_2 \text{ verklemmungsfrei} \end{array}$$