

Zusammenfassung Petrinetze

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

Def. Ein **Netzgraph** ist ein Tripel (S, T, W) , wobei S und T disjunkte, endliche Mengen sind und $W : S \times T \cup T \times S \rightarrow \mathbb{N}$. Dadurch ist ein gerichteter, gewichteter, bipartiter Graph mit Kantenmenge $F = \{(x, y) \mid W(x, y) \neq 0\}$ gegeben.

Notation	Bezeichnung	Symbol
$t \in T$	Transition	\square
$s \in S$	Stelle, Platz	\bigcirc
$(x, y) \in F$	Kante	\rightarrow falls $W(x, y) = 1$ \xrightarrow{w} falls $w := W(x, y) > 1$

Def. Sei $x \in S \cup T$.

- $\bullet x := \{y \mid (y, x) \in F\}$ heißt **Vorbereich** von x und
- $x^\bullet := \{y \mid (x, y) \in F\}$ heißt **Nachbereich** von x .
- x heißt **isoliert**, falls $\bullet x \cup x^\bullet = \emptyset$.
- x heißt **vorwärts-verzweigt**, falls $|x^\bullet| \geq 2$
- x heißt **rückwärts-verzweigt**, falls $|\bullet x| \geq 2$

Def. $(x, y) \in S \times T \cup T \times S$ bilden eine **Schlinge** falls $(x, y) \in F$ und $(y, x) \in F$.

Def. Eine **Markierung** ist eine Abbildung $M : S \rightarrow \mathbb{N}$. Eine Teilmenge $S' \subseteq S$ heißt **markiert** unter M , falls $\exists s \in S' : M(s') > 0$, andernfalls **unmarkiert**. Ein Element $s \in S$ heißt (*un-*)**markiert**, falls $\{s\} \subseteq S$ es ist.

Notation. $\mathfrak{M}(S) := \{M : S \rightarrow \mathbb{N}\}$

Def. Ein **Petrinetz** $N = (S, T, W, M_N)$ besteht aus

- einem Netzgraphen (S, T, W) und
- einer **Anfangsmarkierung** $M_N : S \rightarrow \mathbb{N}$.

Notation. Für eine feste Transition $t \in T$ ist

$$t^- : S \rightarrow \mathbb{N}, \quad s \mapsto W(s, t), \quad t^+ : S \rightarrow \mathbb{N}, \quad s \mapsto W(t, s)$$

Def. Eine Transition $t \in T$ heißt **aktiviert** unter einer Markierung M , notiert $M[t]$, falls

$$\forall s \in S : W(s, t) \leq M(s) \iff t^- \leq M.$$

Ist t aktiviert, so kann t *schalten* und es entsteht die **Folgemarkierung** $M' := M + \Delta t$, wobei

$$\Delta t : S \rightarrow \mathbb{Z}, \quad s \mapsto W(t, s) - W(s, t).$$

Notation. $M[t]M'$

Def. Für $w = t_1 \cdots t_n \in T^*$ und Markierungen M und M' gilt

$$M[w]M' : \iff M[t_1]M_1[t_2] \cdots [t_{n-1}]M_{n-1}[t_n]M'$$

für (eindeutig bestimmte) Markierungen M_1, \dots, M_{n-1} .

Ein Wort $w \in T^*$ heißt **Schaltfolge** (*firing sequence*) von N , notiert $M_N[w]$, falls $\exists M' : M_N[w]M'$.

Notation. $[M] := \{M' \mid \exists w \in T^* : M[w]M'\}$
 $\text{FS}(N) := \{w \in T^* \mid M_N[w]\}$ für ein Petrinetz N

Def. M' heißt **erreichbar** von M , falls $M' \in [M]$.

Def. $w \in T^*$ heißt **unendliche Schaltfolge** von N , falls alle endlichen Präfixe von w Schaltfolgen von N sind.

Def. Der **Erreichbarkeitsgraph** $\mathfrak{R}(N)$ zu N besitzt die Knoten $[M_N]$ und die Kanten $\{(M, M') \mid \exists t : M[t]M'\}$.

Def. Für $w = a_1 \cdots a_n \in A^*$ ist $\text{Parikh}(w) : A \rightarrow \mathbb{N}$, $a \mapsto |a|_{a_i} = a$.

Lem. In $M[w]M'$ hängt M' nur von M und $\text{Parikh}(w)$ ab, genauer

$$M' = M + \sum_{t \in T} \text{Parikh}(w)(t) \cdot \Delta t.$$

Lem. $M_1[w]M_2 \implies M + M_1[w]M + M_2$

TODO: Satz 2.8

Lem. Sei N ein Petri-Netz. Dann gilt:

- $\text{FS}(N)$ ist *präfix-abg.*, d. h. $w = vu \in \text{FS}(N) \implies v \in \text{FS}(N)$.
- Ist $[M_N]$ endlich, so ist $\text{FS}(N)$ regulär.

Def. Ein **beschriftetes Petrinetz** $N = (S, T, W, M_N, \ell)$ best. aus

- einem Petrinetz (S, T, W, M_N) und
- einer Transitionsbeschriftung (*labelling*) $\ell : T \rightarrow \Sigma \cup \{\lambda\}$, wobei Σ eine Menge von *Aktionen* ist.

Sprechweise. $t \in T$ mit $\ell(t) = \lambda$ heißt *intern* oder *unsichtbar*.

Notation. Für $t \in T^*$ ist $\ell(w) := \ell(t_1) \cdots \ell(t_n) \in \Sigma^*$. Dabei wird λ als das leere Wort in Σ^* aufgefasst.

Def. Mit $t \in T$, $w \in T^*$ und Markierungen M , M' ist definiert:

$$\frac{M[t]M'}{M[\ell(t)]M'} \quad \frac{M[t]}{M[\ell(t)]} \quad \frac{M[w]M'}{M[\ell(w)]M'} \quad \frac{M[w]}{M[\ell(w)]}$$

Def. Die **Sprache** eines beschrifteten Netzes N ist

$$L(N) := \{v \in \Sigma^* \mid M_N[v]\}.$$

Def. Ein **beschriftetes Netz mit Endmarkierung** ist ein Tupel $N = (S, T, W, M_N, \ell, \text{Fin})$ wobei

- (S, T, W, M_N, ℓ) ein beschriftetes Netz und
- $\text{Fin} \subseteq \mathfrak{M}(S)$ eine endliche Menge ist.

Die entspr. Sprache ist $L_{\text{fin}}(N) := \{v \in \Sigma^* \mid \exists M \in \text{Fin} : M_N[v]M\}$.

Notation. $\mathcal{L}^\lambda := \{L_{\text{fin}}(N) \mid N \text{ beschr. Netz mit Endmarkierung}\}$
 $\mathcal{L} := \{L_{\text{fin}}(N) \mid N \text{ beschr. Netz mit Endmark. ohne interne Trans.}\}$

Satz. $\{\text{reguläre Sprachen}\} \subseteq \mathcal{L}$

Nebenläufigkeit I

Def. Eine Multimenge über X ist eine Funktion $\mu : X \rightarrow \mathbb{N}$.

Notation. $\mathfrak{M}(X) := \{\mu : X \rightarrow \mathbb{N}\}$
 $\mu_Y \in \mathfrak{M}(X), x \mapsto |\{\star \mid x \in Y\}|$ für $Y \subseteq X$,
 $\emptyset := \mu_\emptyset \in \mathfrak{M}(X), \mu_x := \mu_{\{x\}} \in \mathfrak{M}(X)$ für $x \in X$

Def. Ein **Schritt** μ ist eine Multimenge $\mu \neq \emptyset \in \mathfrak{M}(T)$. Der Schritt μ ist **aktiviert** unter M , notiert $M[\mu]$, falls

$$\forall s \in S : \mu^-(s) := \sum_{t \in T} \mu(t)W(s, t) \leq M(s).$$

Durch *Schalten* von μ entsteht die Folgemarkierung $M' \in \mathfrak{M}(S)$ mit

$$M'(s) = M(s) + \sum_{t \in T} \mu(t) \cdot (W(t, s) - W(s, t)).$$

Bem. Analog wird verallgemeinert: $M[\mu]M', M[w], M[w]M'$ für $\mu \in \mathfrak{M}(T) \setminus \{\emptyset\}$ bzw. $w \in (\mathfrak{M}(T) \setminus \{\emptyset\})^*$.

Def. $\text{SS}(N) := \{w \in (\mathfrak{M}(T) \setminus \{\emptyset\})^* \mid M_N[w]\}$ heißen **Schrittfolgen** (*step sequences*).

Def. Zwei Transitionen $t, t' \in T$ sind

- **nebenläufig** unter M , falls $M[t + t']$,
- **in Konflikt** unter M , falls $\neg M[t + t']$.

Notation. Für $\mu \in \mathfrak{M}(T)$ ist $\ell(\mu)$ die Multimenge mit

$$\ell(\mu) : \Sigma \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto \sum_{t \in T, \ell(t)=x} \mu(t)$$

(falls die rechte Zahl endlich ist für alle $x \in \Sigma$). Für $w = \mu_1 \cdots \mu_n \in (\mathfrak{M}(T))^*$ ist $\ell(w) := \ell(\mu_1) \cdots \ell(\mu_n)$.

Def. Mit $\mu \in \mathfrak{M}(T) \setminus \{0\}$, $w \in (\mathfrak{M}(T) \setminus \{0\})^*$ und M, M' ist defin.:

$$\frac{M[\mu]M'}{M[\ell(\mu)]M'} \quad \frac{M[\mu]}{M[\ell(\mu)]} \quad \frac{M[w]M'}{M[\ell(w)]M'} \quad \frac{M[w]}{M[\ell(w)]}$$

Lem. $M[t_1], \dots, M[t_n] \wedge \forall i \neq j : \bullet t_i \cap \bullet t_j = \emptyset \implies M[t_1 + \dots + t_n]$

Lem. $M[\mu]M' \wedge \text{Parikh}(w) = \mu \implies M[w]M'$

Bem. Über Schrittfolgen werden somit dieselben Markierungen erreicht wie über Schaltfolgen.

Def. Der **schrittweise Erreichbarkeitsgraph** $\mathfrak{SR}(N)$ besitzt die Knoten $[M]$ und die Kanten $\{(M, M') \mid \exists \mu \in \mathfrak{M}(T) \setminus \{\emptyset\} : M[\mu]M'\}$.

Lem. Sei N schlingenfrei. Dann gilt:

$$(\forall w \in T^*, \text{Parikh}(w) = \mu : M[w]) \iff M[\mu]$$

Problem (Erreichbarkeit). Gegeben seien ein Netz N und eine Markierung M . Frage: Ist M erreichbar in N ?

Problem (0-Erreichbarkeit). Gegeben seien ein Netz N . Frage: Ist die Nullmarkierung erreichbar?

Bem. Diese Probleme sind lösbar, falls der Erreichbarkeitsgraph endlich ist.

Def. Eine Stelle $s \in S$ heißt *n -beschränkt* / *beschränkt*, falls

$$\sup\{M(s) \mid M \in [M_N]\} \leq n \quad / \quad \sup\{M(s) \mid M \in [M_N]\} < \infty.$$

Ein Netz heißt (n -) *beschränkt*, wenn alle Stellen $s \in S$ (n -) beschränkt sind. Ein Netz heißt *sicher*, wenn es 1-beschränkt ist.

Prop. $[M_N]$ endlich $\iff N$ beschränkt

Def. Eine Transition $t \in T$ heißt *tot* unter M , falls
 $\forall M' \in [M] : \neg M'[t].$

- M heißt *tot*, falls alle Transitionen unter M tot sind.
- N heißt *tot*, falls M_N tot ist.
- N heißt *verklemmungsfrei*, falls $\forall M \in [M_N] : \neg(M \text{ tot})$
- t heißt *lebendig* unter M , falls
 $\forall M' \in [M] : \neg(t \text{ ist tot unter } M)$

- t heißt *lebendig*, falls t lebendig unter M_N ist.
- M heißt *lebendig*, wenn alle $t \in T$ unter M lebendig sind.
- N heißt *lebendig*, wenn M_N lebendig ist.

Problem (Lebendigkeit). Gegeben N . Frage: Ist N lebendig?

Problem (Einzellebendigkeit). Gegeben seien N und $t \in T$.
 Frage: Ist t lebendig?