

# Zusammenfassung Markovketten

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

## Abzählbare Markovketten

**Notation.** Sei im Folgenden  $\{Z_n\}$  eine Markovkette auf einem abzählbaren Zustandsraum  $E$ .

**Def.** Für  $x \in E$  definiere die Zufallsvariablen

$$\begin{aligned}\tau_x^{(1)} &:= \inf\{n > 0 \mid Z_n = x\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\ \tau_x^{(k)} &:= \inf\{n > \tau_x^{(k-1)} \mid Z_n = x\}, \quad k > 1.\end{aligned}$$

(Beachte:  $\tau_x^{(k)}$  ist eine messbare Abbildung.)

*Bem.* Ferner gilt  $\{\tau_x^{(k)} = n\} \in \sigma(Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$ .

**Def.** Für  $x, y \in E$  sei  $F(x, y) := P(\tau_y^{(1)} < \infty \mid Z_0 = x)$

**Lem.** Für alle  $x, y \in E$  und  $k \geq 1$  gilt

$$P(\tau_y^{(k)} < \infty \mid Z_0 = x) = F(x, y) \cdot F(y, y)^{k-1}.$$

**Notation.**  $\tilde{\ell}(y) = \sum_{k=j}^{\infty} \mathbb{1}\{Z_k = y\}$

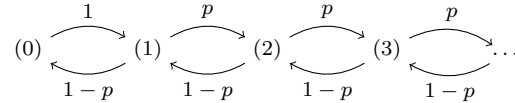
Dann gilt  $P(\tau_y^{(k)} < \infty \mid Z_0 = x) = P(\tilde{\ell} \geq k \mid Z_0 = x)$

**Def.** Ein Zustand  $x \in E$  heißt

- **absorbierend**, falls  $p(x, x) = 1$ ,
- **rekurrent**, falls  $F(x, x) = 1$  und
- **transient**, falls  $F(x, x) < 1$ .

*Bem.* Absorbierende Zustände sind rekurrent.

**Bsp.** In der Markovkette



ist (0) genau dann rekurrent, falls  $p \leq 1/2$ , ansonsten transient.

**TODO:** genauer!

**Def.** Für  $y \in E$  sei

$$\ell(y) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}\{Z_k = y\}$$

die **Anzahl der Besuche in  $y$** . Die **Green'sche Funktion** von  $\{Z_n\}$  ist  $G : E \times E \rightarrow [0, \infty]$  mit

$$G(x, y) := \mathbb{E}(\ell(y) \mid Z_0 = x).$$

*Bem.*  $G(x, y) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}\{Z_k = y\} \mid Z_0 = x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_k = y \mid Z_0 = x) = \delta_{xy} + \sum_{k=1}^{\infty} p^{(k)}(x, y)$

**Satz.** Für alle  $x, y \in E$  gilt

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{F(x, y)}{1 - F(y, y)} & \text{falls } x \neq y, \\ \frac{1}{1 - F(y, y)} & \text{falls } x = y. \end{cases}$$

**Kor.**  $x$  ist rekurrent  $\iff G(x, x) = \infty$

**Satz.** ist  $x \in E$  rekurrent und  $F(x, y) > 0$ , so ist  $y$  auch rekurrent und  $F(x, y) = F(y, x) = 1$ .

*Bem.*  $F(x, y) > 0 \iff \exists n \geq 1 : P^{(n)}(x, y) > 0$

**Def.**  $\{Z_n\}$  heißt **irreduzibel**, falls  $\forall x, y \in E : F(x, y) > 0$ .

**Satz.** Sei  $\{Z_n\}$  irreduzibel. Dann sind entweder alle Zustände rekurrent oder alle Zustände transient.