Zusammenfassung Markovketten

Abzählbare Markovketten

Notation. Sei im Folgenden $\{Z_n\}$ eine Markovkette auf einem abzählbaren Zustandsraum E.

Def. Für $x \in E$ definiere die Zufallsvariablen

$$\begin{aligned} \tau_x^{(1)} &:= \inf\{n > 0 \,|\, Z_n = x\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\ \tau_x^{(k)} &:= \inf\{n > \tau_x^{(k-1)} \,|\, Z_n = x\}, \quad k > 1. \end{aligned}$$

(Beachte: $\tau_x^{(k)}$ ist eine messbare Abbildung.)

Bem. Ferner gilt $\{\tau_x^{(k)} = n\} \in \sigma(Z_0, Z_1, \ldots, Z_n)$.

Def. Für $x, y \in E$ sei $F(x,y) := P(\tau_y^{(i)} < \infty \mid Z_0 = x)$

Lem. Für alle $x, y \in E$ und $k \geq 1$ gilt

$$P(\tau_y^{(k)} < \infty \mid Z_0 = x) = F(x,y) \cdot F(y,y)^{k-1}.$$

Notation. $\tilde{\ell}(y) = \sum_{k=j}^{\infty} \mathbb{1}\{Z_k = y\}$

Dann gilt $P(\tau_y^{(k)} < \infty \mid Z_0 = x) = P(\tilde{\ell} \geq k \mid Z_0 = x)$

Def. Ein Zustand $x \in E$ heißt

- **absorbierend**, falls $p(x,x) = 1$,
- **rekurrent**, falls $F(x,x) = 1$ und
- **transient**, falls $F(x,x) < 1$.

Bem. Absorbierende Zustände sind rekurrent.

Bsp. In der Markovkette

$$\begin{tikzcd} (0) \arrow[r, bend left, "1"] & (1) \arrow[l, bend left, "1-p"] \arrow[r, bend left, "p"] & (2) \arrow[l, bend left, "1-p"] \arrow[r, bend left, "p"] & (3) \arrow[l, bend left, "1-p"] \arrow[r, bend left, "p"] & \ldots \arrow[l, bend left, "1-p"] \end{tikzcd}$$

ist (0) genau dann rekurrent, falls $p \leq 1/2$, ansonsten transient. TODO: genauer!

Def. Für $y \in E$ sei

$$\ell(y) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}\{Z_k = y\}$$

die **Anzahl der Besuche in y**. Die **Green'sche Funktion** von $\{Z_n\}$ ist $G : E \times E \to [0, \infty]$ mit

$$G(x,y) := \mathbb{E}(\ell(y) \mid Z_0 = x).$$

Bem. $G(x,y) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}\{Z_k = y\} \mid Z_0 = x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_k = y \mid Z_0 = x) = \delta_{xy} + \sum_{k=1}^{\infty} p^{(k)}(x,y)$

Satz. Für alle $x, y \in E$ gilt

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{F(x,y)}{1-F(y,y)} & \text{falls } x \neq y, \\ \frac{1}{1-F(y,y)} & \text{falls } x = y. \end{cases}$$

Kor. x ist rekurrent $\iff G(x,x) = \infty$

Satz. ist $x \in E$ rekurrent und $F(x,y) > 0$, so ist y auch rekurrent und $F(x,y) = F(y,x) = 1$.

Bem. $F(x,y) > 0 \iff \exists\, n \geq 1 \,:\, P^{(n)}(x,y) > 0$

Def. $\{Z_n\}$ heißt **irreduzibel**, falls $\forall\, x, y \in E \,:\, F(x,y) > 0$.

Satz. Sei $\{Z_n\}$ irreduzibel. Dann sind entweder alle Zustände rekurrent oder alle Zustände transient.

Satz. Eine irreduzible Kette auf einem endlichen Raum ist immer rekurrent.

Rekurrenz und Transienz von Irrfahrten

Sei $\{Z_n\}$ eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$, d. h. $p(x,y) = p(0, y-x) =: q(y-x)$. Mit anderen Worten: Die Zuwächse $\{Z_n - Z_{n-1}\}_{n \geq 1}$ sind i. i. d. Zufallsvariablen.

Bsp. Einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$: $p(0,1) = p$, $p(0,-1) = q = 1-p$

In diesem Fall kann man die Greensche Funktion exakt berechnen:

$$G(x,x) = G(0,0) = \sum_{m=0}^{\infty} p^{(m)}(0,0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p^{(2n)}(0,0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} p^n (1$$

Satz. Sei $\{Z_n\}$ eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit $\mathbb{E}|Z_1 - Z_0| = \sum_{x \in \mathbb{Z}} |x| p(0,x) < \infty$. Dann gilt

$$\{Z_n\} \text{ ist rekurrent} \iff \sum_{x \in \mathbb{Z}} x p(0,x) = 0.$$

Def. Einfache symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ ist eine translationsinvariante Markovkette mit $p(0, \pm e_i) = \frac{1}{2d}$ für $i = 1, \ldots, d$.

Für einfache symm. Irrfahrten gilt:
$p^{(2n)}(x,x) = \sum_{k_1, \ldots, k_d \in \mathbb{N}, k_1 + \ldots + k_d = n} \frac{(2n)!}{(k_1!)^2 \cdot (k_d!)^2} (\frac{1}{2d})^{2n}$

Für $d = 2$ gilt $p^{(2n)}(0,0) = [\binom{2n}{n} (\frac{1}{2})^{2n}]^2$

Mit der Stirling'schen Formel folgt $p^{(2n)}(0,0) \approx \frac{1}{\pi n}$.
Somit gilt $\sum p^{(2n)}(0,0) = \infty$.

Fazit. Die zweidimensionale einfache symm. Irrfahrt ist rekurrent.