- 第十三讲：复习一

第十三讲：复习一

1. 令u, v, w是R^7空间内的非零向量：则u, v, w生成的向量空间可能是$1, 2, 3$维的。
2. 有一个5×3矩阵U，该矩阵为阶梯矩阵（echelon form），有3个主元：则能够得到该矩阵的秩为3，即三列向量线性无关，不存在非零向量使得三列的线性组合为零向量，所以该矩阵的零空间应为$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$。
3. 接上一问，有一个10×3矩阵$B=\begin{bmatrix}U\\2U\end{bmatrix}$，则化为最简形式（阶梯矩阵）应为$\begin{bmatrix}U\\0\end{bmatrix}$，$rank(B)=3$。
4. 接上一问，有一个矩阵型为$C=\begin{bmatrix}U&U\\U&0\end{bmatrix}$，则化为最简形式应为$\begin{bmatrix}U&0\\0&U\end{bmatrix}$，$rank(C)=6$。矩阵$C$为$10\times 6$矩阵，$dimN(C^T)=m-r=4$。
5. 有$Ax=\begin{bmatrix}2\\4\\2\end{bmatrix}$，并且$x=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$，则等号右侧$b$向量的列数应为$A$的行数，且解的列数应为$A$的列数，所以$A$是一个$3\times 3$矩阵。从解的结构可知自由元有两个，则$rank(A)=1, dimN(A)=2$。从解的第一个向量得出，矩阵$A$的第一列是$\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$；解的第二个向量在零空间中，说明第二列与第一列符号相反，所以矩阵第二列是$\begin{bmatrix}-1\\-2\\-1\end{bmatrix}$；解的第三个向量在零空间中，说明第三列为零向量；综上，$A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&-2&0\\1&-1&0\end{bmatrix}$。
6. 接上一问，如何使得$Ax=b$有解？即使b在矩阵A的列空间中。易知A的列空间型为$c\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$，所以使$b$为向量$\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$的倍数即可。
7. 有一方阵的零空间中只有零向量，则其左零空间也只有零向量。

8. 由5×5矩阵组成的矩阵空间，其中的可逆矩阵能否构成子空间？两个可逆矩阵相加的结果并不一定可逆，况且零矩阵本身并不包含在可逆矩阵中。其中的奇异矩阵（singular matrix，非可逆矩阵）也不能组成子空间，因为其相加的结果并不一定能够保持不可逆。

9. 如果$B^2=0$，并不能得出$B=0$，反例：$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，**这个矩阵经常会被用作反例。**

10. $n\times n$矩阵的列向量线性无关，则是否$\forall b, Ax=b$有解？是的，因为方阵各列线性无关，所以方阵满秩，它是可逆矩阵，肯定有解。

11. 有 $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，在不解出$B$的情况下，求$B$的零空间。
   可以观察得出前一个矩阵是可逆矩阵，设$B=CD$，则求零空间$Bx=0, CDx=0$，而C是可逆矩阵，则等式两侧同时乘以C^{-1}有$C^{-1}CDx=Dx=0$，所以当C为可逆矩阵时，有$N(CD)=N(D)$，即左乘逆矩阵不会改变零空间。本题转化为求D的零空间，$N(B)$的基为$\begin{bmatrix}-F\\ I\end{bmatrix}$，也就是$\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$

12. 接上题，求$Bx=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$的通解。观察$B=CD$，易得$B$矩阵的第一列为$\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$，恰好与等式右边一样，所以$\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$可以作为通解中的特解部分，再利用上一问中求得的零空间的基，得到通解 $x=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$

13. 对于任意方阵，其行空间等于列空间？不成立，可以使用$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$作为反例，其行空间是向量$\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$的任意倍数，而列空间是向量$\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$的任意倍数。但是如果该方阵是对称矩阵，则成立。

14. A与$-A$的四个基本子空间相同。

15. 如果A, B的四个基本子空间相同，则A, B互为倍数关系。不成立，如任意两个n阶可逆矩阵，他们的列空间、行空间均为R^n，他们的零空间、左零空间都只有零向量，所以他们的四个基本子空间相同，但是并不一定具有倍数关系。

16. 如果交换矩阵的某两行，则其行空间与零空间保持不变，而列空间与左零空间均已改变。

17. 为什么向量$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$不能同时出现在矩阵的行空间与零空间中？令$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，很明显矩阵$A$中不能出现值为$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$的行向量，否则无法形成等式右侧的零向量。这里引入正交（perpendicular）的概念，矩阵的行空间与零空间正交，它们仅共享零向量。