- 第八讲：求解：可解性和解的结构

第八讲：求解$Ax=b$：可解性和解的结构

举例，同上一讲：3×4矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&2&2\\2&4&6&8\\3&6&8&10\end{bmatrix}$，求$Ax=b$的特解：

写出其增广矩阵（augmented matrix）$\left[\begin{array}{c|c}A&b\end{array}\right]$：

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&2&2&b_1\\2&4&6&8&b_2\\3&6&8&10&b_3\end{array}\right]\underrightarrow{消元}\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&2&2&b_1\\0&0&2&4&b_2-2b_1\\0&0&0&0&b_3-b_2-b_1\end{array}\right]$$

显然，有解的必要条件为$b_3-b_2-b_1=0$。

讨论b满足什么条件才能让方程$Ax=b$有解（solvability condition on b）：当且仅当b属于A的列空间时。另一种描述：如果A的各行线性组合得到0行，则b端分量做同样的线性组合，结果也为0时，方程才有解。

解法：令所有自由变量取0，则有 \Big\lbrace \begin{eqnarray*} x_1 & + & 2x_3 & = & 1 \\ & & 2x_3 & = & 3 \\ \end{eqnarray*}，解得 \Big\lbrace \begin{eqnarray*} x_1 & = & -2 \\ x_3 & = & \frac{3}{2} \\ \end{eqnarray*}，代入$Ax=b$求得特解 $x_p=\begin{bmatrix}-2\\0\\\frac{3}{2}\\0\end{bmatrix}$。

令$Ax=b$成立的所有解：

\Big\lbrace \begin{eqnarray} A & x_p & = & b \\ A & x_n & = & 0 \\ \end{eqnarray} \quad \underrightarrow{两式相加} \quad A(x_p+x_n)=b

即$Ax=b$的解集为其特解加上零空间，对本例有：$x_{complete}=\begin{bmatrix}-2\\0\\\frac{3}{2}\\0\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$

对于$m \times n$矩阵A，有矩阵A的秩$r \le min(m, n)$

列满秩$r = n$情况：$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$，$rank(A) = 2$，要使$Ax = b, b \neq 0$有非零解，$b$必须取$A$中各列的线性组合，此时A的零空间中只有0向量。

行满秩$r = m$情况：$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，$rank(A) = 2$，$\forall b \in R^m$都有$x \neq 0$的解，因为此时$A$的列空间为$R^m$，$b \in R^m$恒成立，组成$A$的零空间的自由变量有n-r个。

行列满秩情况：$r = m = n$，如 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，则$A$最终可以化简为$R = I$，其零空间只包含0向量。

总结：

$$
\begin{array}{c|c|c|c}
r = m = n & r = n < m & r = m < n & r < m, r < n \\
R = I & R = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} & R = \begin{bmatrix} I & F \end{bmatrix} & R = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
1\ solution & 0\ or\ 1\ solution & \infty\ solution & 0\ or\ \infty\ solution
\end{array}
$$