- 第十一讲：矩阵空间、秩1矩阵和小世界图
    - 矩阵空间
    - 秩一矩阵
    - 小世界图

第十一讲：矩阵空间、秩1矩阵和小世界图

矩阵空间

接上一讲，使用3×3矩阵举例，其矩阵空间记为M。

则M的一组基为：$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

易得，$dimM=9$。

所以可以得出，对上讲中的三阶对称矩阵空间有$dimS=6$、上三角矩阵空间有$dimU=6$、对角矩阵空间有$dimD=3$

求并（intersect）：$S\cup U=D, dim(S\cup U)=9$；

求交（sum）：$S\cap U=M, dim(S\cap U)=3$；

可以看出：$dimS+dimU=12=dim(S\cup U)+dim(S\cap U)$。

另一个例子来自微分方程：

$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$，即$y''+y=0$

方程的解有：$y=\cos x,\quad y=\sin x,\quad y=e^{ix},\quad y=e^{-ix}$等等（$e^{ix}=\cos x+i\sin x,\quad e^{-ix}=\cos x-i\sin x$）

而该方程的所有解：$y=c_1\cos x+c_2\sin x$。

所以，该方程的零空间的一组基为$\cos x, \sin x$，零空间的维数为2。同理e^{ix}, e^{-ix}可以作为另一组基。

秩一矩阵

2×3矩阵$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$。

且$dimC(A) = 1 = dimC(A^T)$，所有的秩一矩阵都可以划为$A = UV^T$的形式，这里的U, V均为列向量。

秩一矩阵类似“积木”，可以搭建任何矩阵，如对于一个5×17秩为4的矩阵，只需要4个秩一矩阵就可以组合出来。

令M代表所有5×17，M中所有秩4矩阵组成的集合并不是一个子空间，通常两个秩四矩阵相加，其结果并不是秩四矩阵。

现在，在$\mathbb{R}^4$空间中有向量$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$，取$\mathbb{R}^4$中满足$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$的所有向量组成一个向量空间$S$，则$S$是一个向量子空间。

易看出，不论是使用系数乘以该向量，或是用两个满足条件的向量相加，其结果仍然落在分量和为零的向量空间中。

求S的维数：

从另一个角度看，$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$等价于$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = 0$，则$S$就是$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$的零空间。

$rank(A) = 1$，则对其零空间有$rank(N(A)) = n - r = 3 = dimN(A)$，则$S$的维数是3。

顺便看一下1×4矩阵A的四个基本子空间：

行空间：$dimC(A^T) = 1$，其中的一组基是$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$；

零空间：$dimN(A) = 3$，其中的一组基是$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

列空间：$dimC(A) = 1$，其中一组基是$[1]$，可以看出列空间就是整个R^1空间。

左零空间：$dimN(A^T) = 0$，因为A转置后没有非零的v可以使$Av = 0$成立，就是$[0]$。

综上，$dimC(A^T) + dimN(A) = 4 = n, dimC(A) + dimN(A^T) = 1 = m$

小世界图

图（graph）由节点（node）与边（edge）组成。

假设，每个人是图中的一个节点，如果两个人为朋友关系，则在这两个人的节点间添加一条边，通常来说，从一个节点到另一个节点只需要不超过6步（即六条边）即可到达。