第二十讲：克拉默法则、逆矩阵、体积

本讲主要介绍逆矩阵的应用。

求逆矩阵

我们从逆矩阵开始，对于二阶矩阵有$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$。观察易得，系数项就是行列式的倒数，而矩阵则是由一系列代数余子式组成的。先给出公式：

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}C^T \tag{1}$$

观察这个公式是如何运作的，化简公式得$AC^T=(\det A)I$，写成矩阵形式有$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_{11}&\cdots&C_{n1}\\C_{12}&\cdots&C_{n2}\\\vdots&\ddots&\vdots\\C_{1n}&\cdots&C_{nn}\end{bmatrix}=Res$

对于这两个矩阵的乘积，观察其结果的元素$Res_{11}=a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+\cdots+a_{1n}C_{1n}$，这正是上一讲提到的将行列式按第一行展开的结果。同理，对$Res_{22},\cdots,Res_{nn}$都有$Res_{ii}=\det A$，即对角线元素均为$\det A$。

再来看非对角线元素：回顾二阶的情况，如果用第一行乘以第二行的代数余子式$a_{11}C_{21}+a_{12}C_{22}$，得到$a(-b)+ab=0$。换一种角度看问题，$a(-b)+ab=0$也是一个矩阵的行列式值，即$A_s=\begin{bmatrix}a&b\\a&b\end{bmatrix}$。将$\det A_s$按第二行展开，也会得到$\det A_s=a(-b)+ab$，因为行列式有两行相等所以行列式值为零。

推广到n阶，我们来看元素$Res_{1n}=a_{11}C_{n1}+a_{12}C_{n2}+\cdots+a_{1n}C_{nn}$，该元素是第一行与最后一行的代数余子式相乘之积。这个式子也可以写成一个特殊矩阵的行列式，即矩

阵$A_s = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-a1} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$。计算此矩阵的行列式，将$\det A_s$按最后一行展开，也得到$\det A_s = a_{11}C_{n1} + a_{12}C_{n2} + \cdots + a_{1n}C_{nn}$。同理，行列式$A_s$有两行相等，其值为零。

结合对角线元素与非对角线元素的结果，我们得到$Res = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{bmatrix}$，也就是(1)等式右边的$(\det A)I$，得证。

求解$Ax = b$

因为我们现在有了逆矩阵的计算公式，所以对$Ax = b$有$x = A^{-1}b = \frac{1}{\det A}C^Tb$，这就是计算$x$的公式，即克莱默法则（Cramer's rule）。

现在来观察$x = \frac{1}{\det A}C^Tb$，我们将得到的解拆分开来，对x的第一个分量有$x_1 = \frac{y_1}{\det A}$，这里y_1是一个数字，其值为$y_1 = b_1C_{11} + b_2C_{21} + \cdots + b_nC_{n1}$，每当我们看到数字与代数余子式乘之积求和时，都应该联想到求行列式，也就是说y_1可以看做是一个矩阵的行列式，我们设这个矩阵为B_1。所以有$x_i = \frac{\det B_1}{\det A}$，同理有$x_2 = \frac{\det B_2}{\det A}$，$x_2 = \frac{\det B_2}{\det A}$。

而B_1是一个型为$[ba_2a_3 \cdots a_n]$的矩阵，即将矩阵A的第一列变为b向量而得到的新矩阵。其实很容易看出，$\det B_1$可以沿第一列展开得到$y_1 = b_1C_{11} + b_2C_{21} + \cdots + b_nC_{n1}$。

一般的，有$B_j = [a_1a_2 \cdots a_{j-1}ba_{j+1} \cdots a_n]$，即将矩阵$A$的第$j$列变为$b$向量而得到的新矩阵。所以，对于解的分量有$x_j = \frac{\det B_j}{\det A}$。

这个公式虽然很漂亮，但是并不方便计算。

关于体积（Volume）

先提出命题：行列式的绝对值等于一个箱子的体积。

来看三维空间中的情形，对于3阶方阵A，取第一行(a_1, a_2, a_3)，令其为三维空间中点A_1的坐标，同理有点A_2, A_3。连接这三个点与原点可以得到三条边，使用这三条边展开得到一个平行六面体，$\|\det A\|$就是该平行六面体的体积。

对于三阶单位矩阵，其体积为$\det I = 1$，此时这个箱子是一个单位立方体。这其实也证明了前面学过的行列式性质1。于是我们想，如果能接着证明性质2、3即可证明体积与行列式的关系。

对于行列式性质2，我们交换两行并不会改变箱子的大小，同时行列式的绝对值也没有改变，得证。

现在我们取矩阵$A = Q$，而Q是一个标准正交矩阵，此时这个箱子是一个立方体，可以看出其实这个箱子就是刚才的单位立方体经过旋转得到的。对于标准正交矩阵，有$Q^TQ = I$，等式两边取行列式得$\det(Q^TQ) = 1 = \left|Q^T\right| |Q|$，而根据行列式性质10有$\left|Q^T\right| = |Q|$，所以**原式** $= |Q|^2 = 1, |Q| = \pm 1$。

接下来在考虑不再是“单位”的立方体，即长方体。 假设Q矩阵的第一行翻倍得到新矩阵Q_2，此时箱子变为在第一行方向上增加一倍的长方体箱子，也就是两个“标准正交箱子”在第一行方向上的堆叠。易知这个长方体箱子是原来体积的两倍，而根据行列式性质3.a有$\det Q_2 = \det Q$，于是体积也符合行列式的数乘性质。

我们来看二阶方阵的情形，$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$。在二阶情况中，行列式就是一个求平行四边形面积的公式，原来我们求由四个点$(0, 0), (a, b), (c, d), (a + c, b + d)$围成的四边形的面积，需要先求四边形的底边长，再做高求解，现在只需要计算$\det A = ad - bc$即可（更加常用的是求由$(0, 0), (a, b), (c, d)$围成的三角形的面积，即$\frac{1}{2}ad - bc$）。也就是说，如果知道了歪箱子的顶点坐标，求面积（二阶情形）或体积（三阶情形）时，我们不再需要开方、求角度，只需要计算行列式的值就行了。

再多说两句我们通过好几讲得到的这个公式，在一般情形下，由点$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$围成的三角形面积等于$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$，计算时分别用第二行、第三行减去第一行化简到第三列只有一个1（这个操作实际作用是将三角形移动到原点），得到$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix}$，再按照第三列展开，得到三角形面积等于$\frac{(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)}{2}$。