第二十七讲：复数矩阵和快速傅里叶变换

本讲主要介绍复数向量、复数矩阵的相关知识（包括如何做复数向量的点积运算、什么是复数对称矩阵等），以及傅里叶矩阵（最重要的复数矩阵）和快速傅里叶变换。

复数矩阵运算

先介绍复数向量，我们不妨换一个字母符号来表示：$z=\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{bmatrix}$，向量的每一个分量都是复数。此时$z$不再属于$\mathbb{R}^n$实向量空间，它现在处于$\mathbb{C}^n$复向量空间。

计算复向量的模

对比实向量，我们计算模只需要计算$|v|=\sqrt{v^Tv}$即可，而如果对复向量使用z^Tz则有$z^Tz=\begin{bmatrix}z_1&z_2&\cdots&z_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{bmatrix}=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2$，这里$z_i$是复数，平方后虚部为负，求模时本应相加的运算变成了减法。（如向量$\begin{bmatrix}1&i\end{bmatrix}$，右乘其转置后结果为$0$，但此向量的长度显然不是零。）

根据上一讲我们知道，应使用$|z| = \sqrt{\bar{z}^T z}$，即$[\bar{z}_1 \quad \bar{z}_2 \quad \cdots \quad \bar{z}_n]\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$，即使用向量共轭的转置乘以原向量即可。（如向量$[1 \quad i]$，右乘其共轭转置后结果为$[1 \quad -i]\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = 2$。）

我们把共轭转置乘以原向量记为$z^H z$，H读作埃尔米特（人名为Hermite，形容词为Hermitian）

计算向量的内积

有了复向量模的计算公式，同理可得，对于复向量，内积不再是实向量的$y^T x$形式，复向量内积应为$y^H x$。

对称性

对于实矩阵，$A^T = A$即可表达矩阵的对称性。而对于复矩阵，我们同样需要求一次共轭$\bar{A}^T = A$。举个例子$\begin{bmatrix} 2 & 3+i \\ 3-i & 5 \end{bmatrix}$是一个复数情况下的对称矩阵。这叫做埃尔米特矩阵，有性质$A^H = A$。

正交性

在第十七讲中，我们这样定义标准正交向量：$q_i^T q_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$。现在，对于复向量我们需要求共轭：$\bar{q}_i^T q_j = q_i^H q_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$。

第十七讲中的标准正交矩阵：$Q = [q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_n]$有$Q^T Q = I$。现在对于复矩阵则有$Q^H Q = I$。

就像人们给共轭转置起了个“埃尔米特”这个名字一样，正交性（orthogonal）在复数情况下也有了新名字，酉（unitary），酉矩阵（unitary matrix）与正交矩阵类似，满足$Q^H Q = I$的性质。而前面提到的傅里叶矩阵就是一个酉矩阵。

傅里叶矩阵

n阶傅里叶矩阵$F_n=\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&w&w^2&\cdots&w^{n-1}\\1&w^2&w^4&\cdots&w^{2(n-1)}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&w^{n-1}&w^{2(n-1)}&\cdots&w^{(n-1)^2}\end{bmatrix}$，对于每一个元素有$(F_n)_{ij}=w^{ij}\quad i,j=0,1,2,\cdots,n-1$。矩阵中的$w$是一个非常特殊的值，满足$w^n=1$，其公式为$w=e^{i2\pi/n}$。易知$w$在复平面的单位圆上，$w=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$。

在傅里叶矩阵中，当我们计算w的幂时，w在单位圆上的角度翻倍。比如在6阶情形下，$w=e^{2\pi/6}$，即位于单位圆上60°角处，其平方位于单位圆上120°角处，而w^6位于1处。从开方的角度看，它们是1的6个六次方根，而一次的w称为原根。

- 我们现在来看4阶傅里叶矩阵，先计算w有$w=i,\ w^2=-1,\ w^3=-i,\ w^4=1$，$F_4=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&i&i^2&i^3\\1&i^2&i^4&i^6\\1&i^3&i^6&i^9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&i&-1&-i\\1&-1&1&-1\\1&-i&-1&i\end{bmatrix}$。

  矩阵的四个列向量正交，我们验证一下第二列和第四列，$\bar{c_2}^Tc_4=1-0+1-0=0$，正交。不过我们应该注意到，F_4的列向量并不是标准的，我们可以给矩阵乘上系数$\frac{1}{2}$（除以列向量的长度）得到标准正交矩阵$F_4=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&i&-1&-i\\1&-1&1&-1\\1&-i&-1&i\end{bmatrix}$。此时有$F_4^HF_4=I$，于是该矩阵的逆矩阵也就是其共轭转置$F_4^H$。

快速傅里叶变换（Fast Fourier transform/FFT）

对于傅里叶矩阵，F_6，F_3、F_8，F_4、F_{64}，F_{32}之间有着特殊的关系。

举例，有傅里叶矩阵F_64，一般情况下，用一个列向量右乘F_{64}需要约64^2次计算，显然这个计算量是比较大的。我们想要减少计算量，于是想要分解F_{64}，联系到F_{32}，有

$$[F_{64}]=\begin{bmatrix}I & D\\ I & -D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_{32} & 0\\ 0 & F_{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \cdots & & & 0 & & \cdots & & \\ 0 & & \cdots & & & 1 & & \cdots & & \\ & 1 & \cdots & & & & 0 & \cdots & & \\ & 0 & \cdots & & & & 1 & \cdots & & \\ & & & \ddots & & & & & \ddots & \\ & & & \ddots & & & & & \ddots & \\ & & & \cdots & 1 & & & & \cdots & 0\\ & & & \cdots & 0 & & & & \cdots & 1\end{bmatrix}。$$

我们分开来看等式右侧的这三个矩阵：

- 第一个矩阵由单位矩阵I和对角矩阵$D=\begin{bmatrix}1 & & & & \\ & w & & & \\ & & w^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & w^{31}\end{bmatrix}$组成，我们称这个矩阵为修正矩阵，显然其计算量来自$D$矩阵，对角矩阵的计算量约为32即这个修正矩阵的计算量约为32，单位矩阵的计算量忽略不计。
- 第二个矩阵是两个F_{32}与零矩阵组成的，计算量约为2×32^2。
- 第三个矩阵通常记为P矩阵，这是一个置换矩阵，其作用是讲前一个矩阵中的奇数列提到偶数列之前，将前一个矩阵从$\begin{bmatrix}x_0 & x_1 & \cdots\end{bmatrix}$变为$\begin{bmatrix}x_0 & x_2 & \cdots & x_1 & x_3 & \cdots\end{bmatrix}$，这个置换矩阵的计算量也可以忽略不计。（这里教授似乎在黑板上写错了矩阵，可以参考FFT、How the FFT is computed做进一步讨论。）

所以我们把64^2复杂度的计算化简为$2\times 32^2+32$复杂度的计算，我们可以进一步化简F_{32}得到与F_{16}有关的式子

$$\begin{bmatrix}I_{32} & D_{32}\\ I_{32} & -D_{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{16} & D_{16} & & \\ I_{16} & -D_{16} & & \\ & & I_{16} & D_{16}\\ & & I_{16} & -D_{16}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_{16} & & & \\ & F_{16} & & \\ & & F_{16} & \\ & & & F_{16}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{16} & \\ & P_{16}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{32}\end{bmatrix}$$

。而32^2的计算量进一步分解为$2\times 16^2+16$的计算量，如此递归下去我们最终得到含有一阶傅里叶矩阵的式子。

来看化简后计算量，$2\left(2\left(2\left(2\left(2\left(2(1)^2+1\right)+2\right)+4\right)+8\right)+16\right)+32$，约为$6\times 32=\log_2 64\times\frac{64}{2}$，算法复杂度为$\frac{n}{2}\log_2 n$。

于是原来需要n^2的运算现在只需要$\frac{n}{2}\log_2 n$就可以实现了。不妨看看$n=10$的情况，不使用FFT时需要$n^2=1024\times 1024$次运算，使用FFT时只需要$\frac{n}{2}\log_2 n=5\times 1024$次

运算，运算量大约是原来的 $\frac{1}{200}$。

下一讲将继续介绍特征值、特征向量及正定矩阵。