- 第十八讲：行列式及其性质

第十八讲：行列式及其性质

本讲我们讨论出行列式（determinant）的性质：

1. $\det I=1$，单位矩阵行列式值为一。
2. 交换行行列式变号。

   在给出第三个性质之前，先由前两个性质可知，对置换矩阵有$\det P=\begin{cases}1 & even\\ -1 & odd\end{cases}$。

   举例：$\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1,\quad\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1$，于是我们猜想，对于二阶方阵，行列式的计算公式为$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$。

3. a. $\begin{vmatrix}ta&tb\\c&d\end{vmatrix}=t\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$。

   b. $\begin{vmatrix}a+a^{'}&b+b^{'}\\c&d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a^{'}&b^{'}\\c&d\end{vmatrix}$。

   注意：~~这里并不是指~~$\det(A+B)=\det A+\det B$~~，方阵相加会使每一行相加，这里仅是针对某一行的线性变换。~~

4. 如果两行相等，则行列式为零。使用性质2交换两行易证。
5. 从第k行中减去第i行的l倍，行列式不变。这条性质是针对消元的，我们可以先消元，将方阵变为上三角形式后再计算行列式。

   举例：$\begin{vmatrix}a&b\\c-la&d-lb\end{vmatrix}\stackrel{3.b}{=}\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a&b\\-la&-lb\end{vmatrix}\stackrel{3.a}{=}\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}-l\begin{vmatrix}a&b\\a&b\end{vmatrix}\stackrel{4}{=}\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$

6. 如果方阵的某一行为零，则其行列式值为零。使用性质3.a对为零行乘以不为零系数l，使$l\det A=\det A$即可证明；或使用性质5将某行加到为零行，使存在两行相等后使用性质4即可证明。

7. 有上三角行列式$U=\begin{vmatrix} d_1 & * & \cdots & * \\ 0 & d_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix}$，则$\det U = d_1 d_2 \cdots d_n$。使用性质5，从最后一行开始，将对角元素上方的$*$元素依次变为零，可以得到型为$D=\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix}$的对角行列式，再使用性质3将对角元素提出得到$d_n d_{n-1} \cdots d_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$，得证。

8. 当矩阵A为奇异矩阵时，$\det A = 0$；当且仅当A可逆时，有$\det A \neq 0$。如果矩阵可逆，则化简为上三角形式后各行都含有主元，行列式即为主元乘积；如果矩阵奇异，则化简为上三角形式时会出现全零行，行列式为零。

   再回顾二阶情况：$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{消元}} \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d-\frac{c}{a}b \end{vmatrix} = ad-bc$，前面的猜想得到证实。

9. $\det AB = (\det A)(\det B)$。使用这一性质，$\det I = \det A^{-1}A = \det A^{-1}\det A$，所以$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$。

   同时还可以得到：$\det A^2 = (\det A)^2$，以及$\det 2A = 2^n \det A$，这个式子就像是求体积，对三维物体有每边翻倍则体积变为原来的八倍。

10. $\det A^T = \det A$，前面一直在关注行的属性给行列式带来的变化，有了这条性质，行的属性同样适用于列，比如对性质2就有“交换列行列式变号”。

    证明：$\left|A^T\right| = |A| \rightarrow \left|U^T L^T\right| = |LU| \rightarrow \left|U^T\right|\left|L^T\right| = |L|\,|U|$，值得注意的是，$L, U$的行列式并不因为转置而改变，得证。