- 第十讲 四个基本子空间

第十讲 四个基本子空间

对于$m\times n$矩阵A，$rank(A)=r$有：

- 行空间$C(A^T)\in\mathbb{R}^n, dimC(A^T)=r$，基见例1。
- 零空间$N(A)\in\mathbb{R}^n, dimN(A)=n-r$，自由元所在的列即可组成零空间的一组基。
- 列空间$C(A)\in\mathbb{R}^m, dimC(A)=r$，主元所在的列即可组成列空间的一组基。
- 左零空间$N(A^T)\in\mathbb{R}^m, dimN(A^T)=m-r$，基见例2。

例1，对于行空间 $A=\begin{bmatrix}1&2&3&1\\1&1&2&1\\1&2&3&1\end{bmatrix}\underrightarrow{消元、化简}\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=R$

由于我们做了行变换，所以A的列空间受到影响，$C(R)\neq C(A)$，而行变换并不影响行空间，所以可以在R中看出前两行就是行空间的一组基。

所以，可以得出无论对于矩阵A还是R，其行空间的一组基，可以由R矩阵的前r行向量组成（这里的R就是第七讲提到的简化行阶梯形式）。

例2，对于左零空间，有$A^Ty=0\rightarrow(A^Ty)^T=0^T\rightarrow y^TA=0^T$，因此得名。

采用Gauss-Jordan消元，将增广矩阵$\left[\ A_{m\times n}\ \middle|\ I_{m\times m}\ \right]$中$A$的部分划为简化行阶梯形式$\left[\ R_{m\times n}\ \middle|\ E_{m\times m}\ \right]$，此时矩阵$E$会将所有的行变换记录下来。

则$EA=R$，而在前几讲中，有当A'是m阶可逆方阵时，R'即是I，所以E就是A^{-1}。

本例中

$$\left[\ A_{m\times n}\ \middle|\ I_{m\times m}\ \right]=\left[\begin{array}{cccc|ccc}1&2&3&1&1&0&0\\1&1&2&1&0&1&0\\1&2&3&1&0&0&1\end{array}\right]\underrightarrow{消元、化简}\left[\begin{array}{cccc|ccc}1&0&1&1&-1&2&0\\0&1&1&0&1&-1&0\\0&0&0&0&-1&0&1\end{array}\right]=\left[\ R_{m\times n}\ \middle|\ E_{m}\right.$$

则

$$EA=\begin{bmatrix}-1&2&0\\1&-1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2&3&1\\1&1&2&1\\1&2&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=R$$

很明显，式中E的最后一行对A的行做线性组合后，得到R的最后一行，即0向量，也就是$y^TA=0^T$。

最后，引入矩阵空间的概念，矩阵可以同向量一样，做求和、数乘。

举例，设所有3×3矩阵组成的矩阵空间为M。则上三角矩阵、对称矩阵、对角矩阵（前两者的交集）。

观察一下对角矩阵，如果取 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&7\end{bmatrix}$，可以发现，任何三阶对角矩阵均可用这三个矩阵的线性组合生成，因此，他们生成了三阶对角矩阵空间，即这三个矩阵是三阶对角矩阵空间的一组基。