- 第三十一讲：线性变换及对应矩阵

第三十一讲：线性变换及对应矩阵

如何判断一个操作是不是线性变换？线性变换需满足以下两个要求：

$$\begin{aligned}T(v+w)=T(v)+T(w)\\T(cv)=cT(v)\end{aligned}$$

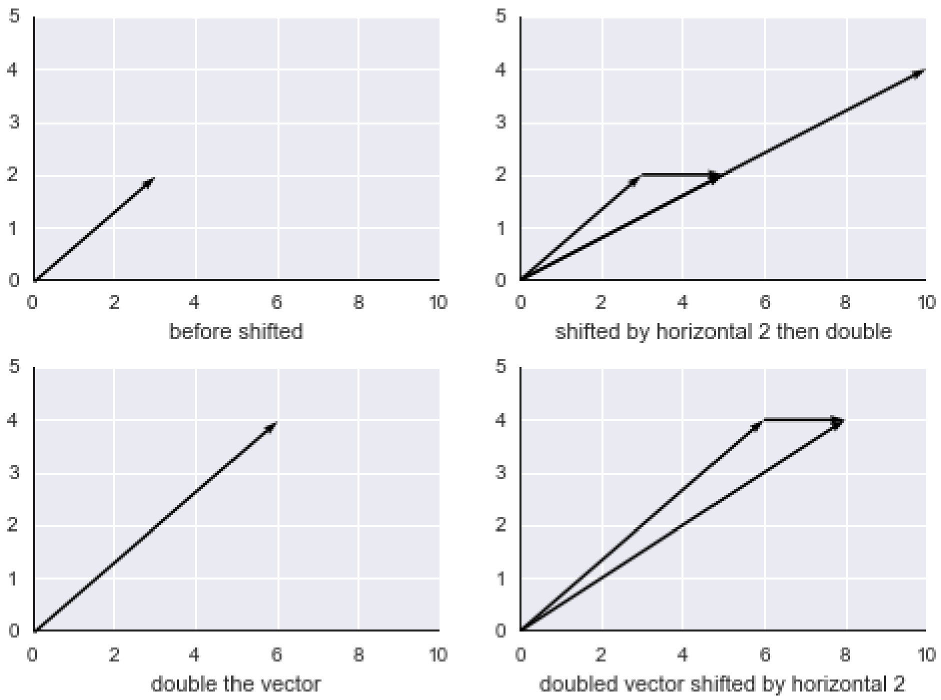
即变换T需要同时满足加法和数乘不变的性质。将两个性质合成一个式子为：$T(cv+dw)=cT(v)+dT(w)$

例1，二维空间中的投影操作，$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$，它可以将某向量投影在一条特定直线上。检查一下投影操作，如果我们将向量长度翻倍，则其投影也翻倍；两向量相加后做投影与两向量做投影再相加结果一致。所以投影操作是线性变换。

“坏”例1，二维空间的平移操作，即平面平移：

```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
import numpy as np


fig = plt.figure()

sp1 = plt.subplot(221)
vectors_1 = np.array([[0,0,3,2],])
X_1, Y_1, U_1, V_1 = zip(*vectors_1)
plt.axhline(y=0, c='black')
plt.axvline(x=0, c='black')
sp1.quiver(X_1, Y_1, U_1, V_1, angles='xy', scale_units='xy', scale=1)
sp1.set_xlim(0, 10)
sp1.set_ylim(0, 5)
sp1.set_xlabel("before shifted")

sp2 = plt.subplot(222)
vector_2 = np.array([[0,0,3,2],
                     [3,2,2,0],
                     [0,0,5,2],
                     [0,0,10,4]])
X_2,Y_2,U_2,V_2 = zip(*vector_2)
plt.axhline(y=0, c='black')
plt.axvline(x=0, c='black')
sp2.quiver(X_2, Y_2, U_2, V_2, angles='xy', scale_units='xy', scale=1)
sp2.set_xlim(0, 10)
sp2.set_ylim(0, 5)
sp2.set_xlabel("shifted by horizontal 2 then double")
```

```
sp3 = plt.subplot(223)
vectors_1 = np.array([[0,0,6,4],])
X_1, Y_1, U_1, V_1 = zip(*vectors_1)
plt.axhline(y=0, c='black')
plt.axvline(x=0, c='black')
sp3.quiver(X_1, Y_1, U_1, V_1, angles='xy', scale_units='xy', scale=1)
sp3.set_xlim(0, 10)
sp3.set_ylim(0, 5)
sp3.set_xlabel("double the vector")

sp4 = plt.subplot(224)
vector_2 = np.array([[0,0,6,4],
                     [6,4,2,0],
                     [0,0,8,4]])
X_2,Y_2,U_2,V_2 = zip(*vector_2)
plt.axhline(y=0, c='black')
plt.axvline(x=0, c='black')
sp4.quiver(X_2, Y_2, U_2, V_2, angles='xy', scale_units='xy', scale=1)
sp4.set_xlim(0, 10)
sp4.set_ylim(0, 5)
sp4.set_xlabel("doubled vector shifted by horizontal 2")

plt.subplots_adjust(hspace=0.33)
plt.draw()
```




```
plt.close(fig)
```

比如，上图中向量长度翻倍，再做平移，明显与向量平移后再翻倍的结果不一致。

有时我们也可以用一个简单的特例判断线性变换，检查$T(0) \stackrel{?}{=} 0$。零向量平移后结果并不为零。

所以平面平移操作并不是线性变换。

“坏”例2，求模运算，$T(v) = \|v\|$, $T: \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^1$，这显然不是线性变换，比如如果我们将向量翻倍则其模翻倍，但如果我将向量翻倍取负，则其模依然翻倍。所以$T(-v) \neq -T(v)$

例2，旋转45°操作，$T: \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$，也就是将平面内一个向量映射为平面内另一个向量。检查可知，如果向量翻倍，则旋转后同样翻倍；两个向量先旋转后相加，与这两个向量先相加后旋转得到的结果一样。

所以从上面的例子我们知道，投影与旋转都是线性变换。

例3，矩阵乘以向量，$T(v) = Av$，这也是一个（一系列）线性变换，不同的矩阵代表不同的线性变换。根据矩阵的运算法则有$A(v+w) = A(v) + A(w)$, $A(cv) = cAv$。比如取$A = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$，作用于平面上的向量$v$，会导致$v$的$x$分量不变，而$y$分量取反，也就是图像沿$x$轴翻转。

线性变换的核心，就是该变换使用的相应的矩阵。

比如我们需要做一个线性变换，将一个三维向量降至二维，$T: \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^2$，则在$T(v) = Av$中，$v \in \mathrm{R}^3$, $T(v) \in \mathrm{R}^2$，所以A应当是一个2×3矩阵。

如果我们希望知道线性变换T对整个输入空间R^n的影响，我们可以找到空间的一组基v_1, v_2, $\cdots$, v_n，检查T对每一个基的影响$T(v_1)$, $T(v_2)$, $\cdots$, $T(v_n)$，由于输入空间中的任意向量都满足：

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n \tag{1}$$

所以我们可以根据$T(v)$推出线性变换T对空间内任意向量的影响，得到：

$$T(v) = c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + \cdots + c_nT(v_n) \tag{2}$$

现在我们需要考虑，如何把一个与坐标无关的线性变换变成一个与坐标有关的矩阵呢？

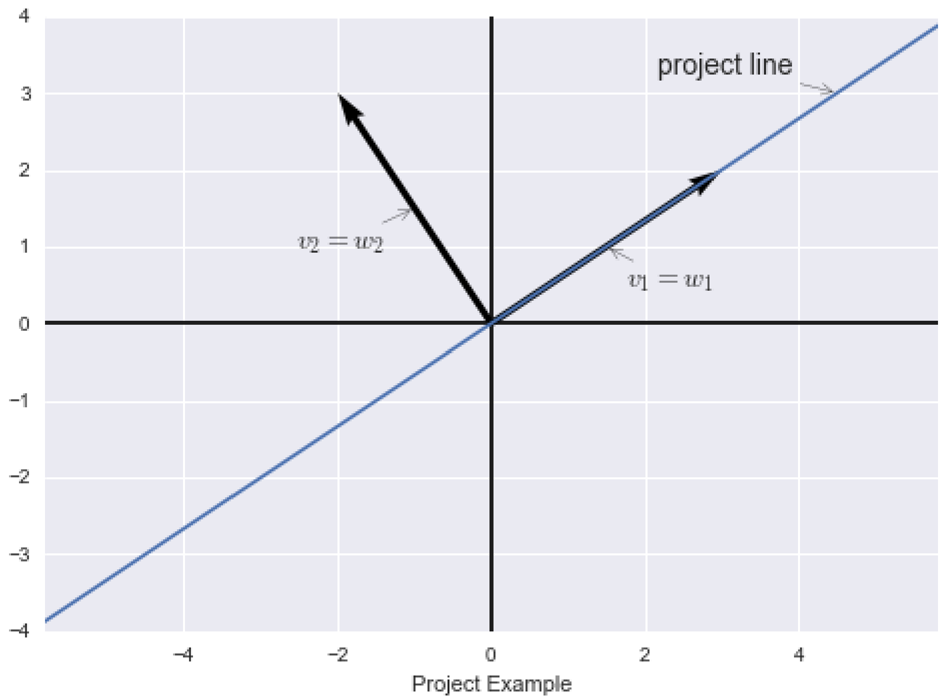
在1式中，$c_1, c_2, \cdots, c_n$就是向量v在基$v_1, v_2, \cdots, v_n$上的坐标，比如分解向量$v = \begin{bmatrix}3\\2\\4\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$，式子将向量$v$分解在一组标准正交基

$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$上。当然，我们也可以选用矩阵的特征向量作为基向量，基的选择是多种多样的。

我们打算构造一个矩阵A用以表示线性变换$T: \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$。我们需要两组基，一组用以表示输入向量，一组用以表示输出向量。令$v_1, v_2, \cdots, v_n$为输入向量的基，这些向量来自R^n；$w_1, w_2, \cdots, w_m$作为输出向量的基，这些向量来自R^m。

我们用二维空间的投影矩阵作为例子：

```
fig = plt.figure()

vectors_1 = np.array([[0, 0, 3, 2],
                      [0, 0, -2, 3]])
X_1, Y_1, U_1, V_1 = zip(*vectors_1)
plt.axis('equal')
plt.axhline(y=0, c='black')
plt.axvline(x=0, c='black')
plt.quiver(X_1, Y_1, U_1, V_1, angles='xy', scale_units='xy', scale=1)
plt.plot([-6, 12], [-4, 8])
plt.annotate('$v_1=w_1$', xy=(1.5, 1), xytext=(10, -20), textcoords='offset
points', size=14, arrowprops=dict(arrowstyle="->"))
plt.annotate('$v_2=w_2$', xy=(-1, 1.5), xytext=(-60, -20), textcoords='offset
points', size=14, arrowprops=dict(arrowstyle="->"))
plt.annotate('project line', xy=(4.5, 3), xytext=(-90, 10), textcoords='offset
points', size=14, arrowprops=dict(arrowstyle="->"))

ax = plt.gca()
ax.set_xlim(-5, 5)
ax.set_ylim(-4, 4)
ax.set_xlabel("Project Example")

plt.draw()
```




```
plt.close(fig)
```

从图中可以看到，设输入向量的基为v_1, v_2，v_1就在投影上，而v_2垂直于投影方向，输出向量的基为w_1, w_2，而$v_1 = w_1, v_2 = w_2$。那么如果输入向量为$v = c_1v_1 + c_2v_2$，则输出向量为$T(v) = c_1v_1$，也就是线性变换去掉了法线方向的分量，输入坐标为(c_1, c_2)，输出坐标变为$(c_1, 0)$。

找出这个矩阵并不困难，$Av = w$，则有$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_1\\0\end{bmatrix}$。

本例中我们选取的基极为特殊，一个沿投影方向，另一个沿投影法线方向，其实这两个向量都是投影矩阵的特征向量，所以我们得到的线性变换矩阵是一个对角矩阵，这是一组很好的基。

所以，如果我们选取投影矩阵的特征向量作为基，则得到的线性变换矩阵将是一个包含投影矩阵特征值的对角矩阵。

继续这个例子，我们不再选取特征向量作为基，而使用标准基$v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，我们继续使用相同的基作为输出空间的基，即$v_1 = w_1, v_2 = w_2$。此时投影矩阵为$P = \frac{aa^T}{a^Ta} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，这个矩阵明显没有上一个矩阵“好”，不过这个矩阵也是一个不错的对称矩阵。

总结通用的计算线性变换矩阵A的方法：

- 确定输入空间的基$v_1, v_2, \cdots, v_n$，确定输出空间的基$w_1, w_2, \cdots, w_m$；
- 计算$T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m$，求出的系数$a_{i1}$就是矩阵$A$的第一列；
- 继续计算$T(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m$，求出的系数$a_{i2}$就是矩阵$A$的第二列；
- 以此类推计算剩余向量直到v_n；
- 最终得到矩阵$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right]$。

最后我们介绍一种不一样的线性变换，$T = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$：

- 设输入为$c_1 + c_2x + c_3x^3$，基为$1, x, x^2$；
- 则输出为导数：$c_2 + 2c_3x$，基为$1, x$；

  所以我们需要求一个从三维输入空间到二维输出空间的线性变换，目的是求导。求导运算其实是线性变换，因此我们只要知道少量函数的求导法则（如$\sin x, \cos x, e^x$），就能求出它们的线性组合的导数。

  有$A\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 \\ 2c_3 \end{bmatrix}$，从输入输出的空间维数可知，$A$是一个$2 \times 3$矩阵，$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$。

最后，矩阵的逆相当于对应线性变换的逆运算，矩阵的乘积相当于线性变换的乘积，实际上矩阵乘法也源于线性变换。