- 第三十五讲：期末复习
- MIT线性代数的全部课程到此结束

第三十五讲：期末复习

依然是从以往的试题入手复习知识点。

1. *已知$m\times n$矩阵A，有$Ax=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$无解；$Ax=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$仅有唯一解，求关于$m,n,rank(A)$的信息。*

   首先，最容易判断的是$m=3$；而根据第一个条件可知，矩阵不满秩，有$r<m$；根据第二个条件可知，零空间仅有零向量，也就是矩阵消元后没有自由变量，列向量线性无关，所以有$r=n$。

   综上，有$m=3>n=r$。

   根据所求写出一个矩阵A的特例：$A=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}$。

   $\det A^TA\stackrel{?}{=}\det AA^T$：不相等，因为$A^TA$可逆而$AA^T$不可逆，所以行列式不相等。（但是对于方阵，$\det AB=\det BA$恒成立。）

   *A^TA可逆吗？*是，因为$r=n$，矩阵列向量线性无关，即列满秩。

   *AA^T正定吗？*否，因为AA^T是$3\times n$矩阵与$n\times 3$矩阵之积，是一个三阶方阵，而AA^T秩为2，所以不是正定矩阵。（不过AA^T一定是半正定矩阵。）

   求证$A^Ty=c$至少有一个解：因为A的列向量线性无关，所以A^T的行向量线性无关，消元后每行都有主元，且总有自由变量，所以零空间中有非零向量，零空间维数是$m-r$（可以直接从$\dim N\left(A^T\right)=m-r$得到结论）。

2. *设$A=[v_1\ v_2\ v_3]$，对于$Ax=v_1-v_2+v_3$，求x。*

   按列计算矩阵相乘，有$x=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$。

*若Ax=v_1-v_2+v_3=0，则解是唯一的吗？为什么。*如果解释唯一的，则零空间中只有零向量，而在此例中$x=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$就在零空间中，所以解不唯一。

*若v_1, v_2, v_3是标准正交向量，那么怎样的线性组合$c_1v_1+c_2v_2$能够最接近v_3？*此问是考察投影概念，由于是正交向量，所以只有0向量最接近v_3。

3. *矩阵*$A=\begin{bmatrix}.2&.4&.3\\.4&.2&.3\\.4&.4&.4\end{bmatrix}$，*求稳态。*

这是个马尔科夫矩阵，前两之和为第三列的两倍，奇异矩阵总有一个特征值为0，而马尔科夫矩阵总有一个特征值为1，剩下一个特征值从矩阵的迹得知为$-.2$。

再看马尔科夫过程，设从$u(0)$开始，$u_k=A^ku_0, u_0=\begin{bmatrix}0\\10\\0\end{bmatrix}$。先代入特征值$\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=-.2$查看稳态$u_k=c_1\lambda_1^kx_1+c_2\lambda_2^kx_2+c_3\lambda_3^kx_3$，当$k\to\infty$，第一项与第三项都会消失，剩下$u_\infty=c_2x_2$。

到这里我们只需求出λ_2对应的特征向量即可，带入特征值求解$(A-I)x=0$，有$\begin{bmatrix}-.8&.4&.3\\.4&-.8&.3\\.4&.4&-.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}?\\?\\?\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$，可以消元得，也可以直接观察得到$x_2=\begin{bmatrix}3\\3\\4\end{bmatrix}$。

剩下就是求c_2了，可以通过u_0一一解出每个系数，但是这就需要解出每一个特征值。另一种方法，我们可以通过马尔科夫矩阵的特性知道，对于马尔科夫过程的每一个u_k都有其分量之和与初始值分量之和相等，所以对于$x_2=\begin{bmatrix}3\\3\\4\end{bmatrix}$，有$c_2=1$。

所以最终结果是$u_\infty=\begin{bmatrix}3\\3\\4\end{bmatrix}$。

4. *对于二阶方阵，回答以下问题：*

求投影在直线$a=\begin{bmatrix}4\\-3\end{bmatrix}$*上的投影矩阵*：应为$P=\frac{aa^T}{a^Ta}$。

已知特征值$\lambda_1=2,\ x_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\quad \lambda_2=3,\ x_2=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$*求原矩阵A*：从对角化公式得

$A=S\Lambda S^{-1}=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}^{-1}$，解之即可。

A是一个实矩阵，且对任意矩阵B，A都不能分解成$A=B^TB$*，给出A的一个例子*：我们知道B^TB是对称的，所以给出一个非对称矩阵即可。 *矩阵A有正交的特征向量，但不是对称的，给出一个A的例子*：我们在三十三讲提到过，反对称矩阵，因为满足$AA^T=A^TA$而同样具有正交的特征向量，所以有$A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$或旋转矩阵$\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$，这些矩阵都具有复数域上的正交特征向量组。

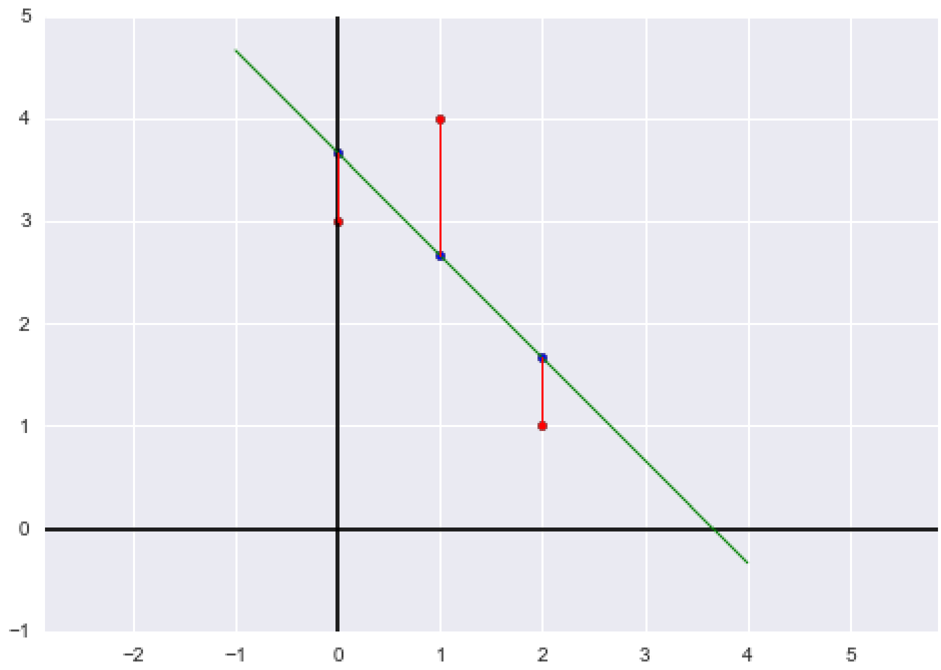
5. *最小二乘问题，因为时间的关系直接写出计算式和答案，* $\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C\\D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix}\ (Ax=b)$，*解得*$\begin{bmatrix}\hat{C}\\\hat{D}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{11}{3}\\-1\end{bmatrix}$。

求投影后的向量p：向量p就是向量b在矩阵A列空间中的投影，所以$p=\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{C}\\\hat{D}\end{bmatrix}$。

求拟合直线的图像：$x=0,1,2$时$y=p_1,p_2,p_2$所在的直线的图像，$y=\hat{C}+\hat{D}x$即$y=\frac{11}{3}-x$。

```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
from sklearn import linear_model
import numpy as np
import pandas as pd
import seaborn as sns

x = np.array([0, 1, 2]).reshape((-1,1))
y = np.array([3, 4, 1]).reshape((-1,1))
predict_line = np.array([-1, 4]).reshape((-1,1))

regr = linear_model.LinearRegression()
regr.fit(x, y)
ey = regr.predict(x)

fig = plt.figure()
```

```
plt.axis('equal')
plt.axhline(y=0, c='black')
plt.axvline(x=0, c='black')

plt.scatter(x, y, c='r')
plt.scatter(x, regr.predict(x), s=20, c='b')
plt.plot(predict_line, regr.predict(predict_line), c='g', lw='1')
[ plt.plot([x[i], x[i]], [y[i], ey[i]], 'r', lw='1') for i in range(len(x))]

plt.draw()
```




```
plt.close(fig)
```

- 接上面的题目

  求一个向量b使得最小二乘求得的$\begin{bmatrix}\hat{C}\\ \hat{D}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$：我们知道最小二乘求出的向量$\begin{bmatrix}\hat{C}\\ \hat{D}\end{bmatrix}$使得$A$列向量的线性组合最接近$b$向量（即$b$在$A$列空间中的投影），如果这个线性组合为0向量（即投影为0），则b向量与A的列空间正交，所以可以取$b=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$同时正交于$A$的两个列向量。

MIT线性代数的全部课程到此结束