第二讲：矩阵消元

这个方法最早由高斯提出，我们以前解方程组的时候都会使用，现在来看如何使用矩阵实现消元法。

消元法

有三元方程组$\begin{cases}x&+2y&+z&=2\\3x&+8y&+z&=12\\&4y&+z&=2\end{cases}$，对应的矩阵形式$Ax=b$为$\begin{bmatrix}1&2&1\\3&8&1\\0&4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\12\\2\end{bmatrix}$。

按照我们以前做消元法的思路：

- 第一步，我们希望在第二个方程中消去x项，来操作系数矩阵$A=\begin{bmatrix}\underline{1}&2&1\\3&8&1\\0&4&1\end{bmatrix}$，下划线的元素为第一步的主元（pivot）：$\begin{bmatrix}\underline{1}&2&1\\3&8&1\\0&4&1\end{bmatrix}\xrightarrow{row_2-3row_1}\begin{bmatrix}\underline{1}&2&1\\0&2&-2\\0&4&1\end{bmatrix}$

  这里我们先不管b向量，等做完A的消元可以再做b的消元。（这是MATLAB等工具经常使用的算法。）

- 第二步，我们希望在第三个方程中消去y项，现在第二行第一个非零元素成为了第二个主元：$\begin{bmatrix}\underline{1}&2&1\\0&\underline{2}&-2\\0&4&1\end{bmatrix}\xrightarrow{row_3-2row_2}\begin{bmatrix}\underline{1}&2&1\\0&\underline{2}&-2\\0&0&\underline{5}\end{bmatrix}$

  注意到第三行消元过后仅剩一个非零元素，所以它就成为第三个主元。做到这里就算消元完成了。

再来讨论一下消元失效的情形：首先，主元不能为零；其次，如果在消元时遇到主元位置为零，则需要交换行，使主元不为零；最后提一下，如果我们把第三个方程z前的系数改成-4，会导致第二步消元时最后一行全部为零，则第三个主元就不存在了，至此消元不能继续进行了，这就是下一讲中涉及的不可逆情况。

- 接下来就该回代（back substitution）了，这时我们在A矩阵后面加上b向量写成增广矩阵（augmented matrix）的形式：$\begin{bmatrix} A \mid b \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{array}\right]$
  不难看出，z的解已经出现了，此时方程组变为$\begin{cases} x & +2y & +z & = 2 \\ & 2y & -2z & = 6 \\ & & 5z & = -10 \end{cases}$，从第三个方程求出$z=-2$，代入第二个方程求出$y=1$，再代入第一个方程求出$x=2$。

消元矩阵

上一讲我们学习了矩阵乘以向量的方法，有三个列向量的矩阵乘以另一个向量，按列的线性组合可以写作$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = 3v_1 + 4v_2 + 5v_3$。

但现在我们希望用矩阵乘法表示行操作，则有$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} row_1 \\ row_2 \\ row_3 \end{bmatrix} = 1row_1 + 2row_2 + 7row_3$。易看出这里是一个行向量从左边乘以矩阵，这个行向量按行操作矩阵的行向量，并将其合成为一个矩阵行向量的线性组合。

介绍到这里，我们就可以将消元法所做的行操作写成向量乘以矩阵的形式了。

- 消元法第一步操作为将第二行改成$row_2 - 3row_1$，其余两行不变，则有$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$（另外，如果三行都不变，消元矩

阵就是单位矩阵$I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$I$之于矩阵运算相当于$1$之于四则运算。）这个消元矩阵我们记作$E_{21}$，即将第二行第一个元素变为零。

- 接下来就是求E_{32}消元矩阵了，即将第三行第二个元素变为零，则$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&-2\\0&4&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&-2\\0&0&5\end{bmatrix}$。这就是消元所用的两个初等矩阵（elementary matrix）。
- 最后，我们将这两步综合起来，即$E_{32}(E_{21}A)=U$，也就是说如果我们想从A矩阵直接得到U矩阵的话，只需要$(E_{32}E_{21})A$即可。注意，矩阵乘法虽然不能随意变动相乘次序，但是可以变动括号位置，也就是满足结合律（associative law），而结合律在矩阵运算中非常重要，很多定理的证明都需要巧妙的使用结合律。

既然提到了消元用的初等矩阵，那我们再介绍一种用于置换两行的矩阵：置换矩阵（permutation matrix）：例如$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c&d\\a&b\end{bmatrix}$，置换矩阵将原矩阵的两行做了互换。顺便提一下，如果我们希望交换两列，则有$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b&a\\d&c\end{bmatrix}$。

我们现在能够将A通过行变换写成U，那么如何从U再变回A，也就是求消元的逆运算。对某些“坏”矩阵，并没有逆，而本讲的例子都是“好”矩阵。

逆

现在，我们以E_{21}为例，$\begin{bmatrix}&?&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，什么矩阵可以取消这次行变换？这次变换是从第二行中减去三倍的第一行，那么其逆变换就是给第二行加上三倍的第一行，所以逆矩阵就是$\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$。

我们把矩阵E的逆记作E^{-1}，所以有$E^{-1}E=I$。