第七讲：求解$Ax=0$，主变量，特解

举例：3×4矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&2&2\\2&4&6&8\\3&6&8&10\end{bmatrix}$，求$Ax=0$的特解：

找出主变量（pivot variable）：

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2&2\\2&4&6&8\\3&6&8&10\end{bmatrix}\underrightarrow{消元}\begin{bmatrix}\underline{1}&2&2&2\\0&0&\underline{2}&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}=U$$

主变量（pivot variable，下划线元素）的个数为2，即矩阵A的秩（rank）为2，即$r=2$。

主变量所在的列为主列（pivot column），其余列为自由列（free column）。

自由列中的变量为自由变量（free variable），自由变量的个数为$n-r=4-2=2$。

通常，给自由列变量赋值，去求主列变量的值。如，令$x_2=1,x_4=0$求得特解 $x=c_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}$；再令$x_2=0,x_4=1$求得特解 $x=c_2\begin{bmatrix}2\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$。

该例还能进一步简化，即将U矩阵化简为R矩阵（Reduced row echelon form），即简化行阶梯形式。

在简化行阶梯形式中，主元上下的元素都是0：

$$U=\begin{bmatrix}\underline{1}&2&2&2\\0&0&\underline{2}&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}\underrightarrow{化简}\begin{bmatrix}\underline{1}&2&0&-2\\0&0&\underline{1}&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}=R$$

将R矩阵中的主变量放在一起，自由变量放在一起（列交换），得到

$R=\begin{bmatrix}\underline{1}&2&0&-2\\0&0&\underline{1}&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\underrightarrow{列交换}\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&2&-2\\0&1&0&2\\\hline 0&0&0&0\end{array}\right]=\begin{bmatrix}I&F\\0&0\end{bmatrix}$，其中$I$为单位矩阵，$F$为自由变量组成的矩

计算零空间矩阵N（nullspace matrix），其列为特解，有$RN=0$。

$$x_{pivot}=-Fx_{free}$$

$$\begin{bmatrix}I&F\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{pivot}\\x_{free}\end{bmatrix}=0$$

$$N=\begin{bmatrix}-F\\I\end{bmatrix}$$

在本例中 $N=\begin{bmatrix}-2&2\\0&-2\\1&0\\0&1\end{bmatrix}$，与上面求得的两个$x$特解一致。

另一个例子，矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{消元}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{化简}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$

矩阵的秩仍为$r = 2$，有2个主变量，1个自由变量。

同上一例，取自由变量为$x_3 = 1$，求得特解 $x = c \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$