第十九讲：行列式公式和代数余子式

上一讲中，我们从三个简单的性质扩展出了一些很好的推论，本讲将继续使用这三条基本性质：

1. $\det I=1$；
2. 交换行行列式变号；
3. 对行列式的每一行都可以单独使用线性运算，其值不变；

我们使用这三条性质推导二阶方阵行列式：

$$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&0\\c&d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&b\\c&d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&0\\c&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a&0\\0&d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&b\\c&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&b\\0&d\end{vmatrix}=ad-bc$$

按照这个方法，我们继续计算三阶方阵的行列式，可以想到，我们保持第二、三行不变，将第一行拆分为个行列式之和，再将每一部分的第二行拆分为三部分，这样就得到九个行列式，再接着拆分这九个行列式的第三行，最终得到二十七个行列式。可以想象到，这些矩阵中有很多值为零的行列式，我们只需要找到不为零的行列式，求和即可。

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&0&0\\0&a_{22}&0\\0&0&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&0&0\\0&0&a_{23}\\0&a_{32}&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&a_{12}&0\\a_{21}&0&0\\0&0&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&a_{12}&0\\0&0&a_{23}\\a_{31}&0&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&0&a_{13}\\a_{21}&0&0\\0&a_{32}&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0\\0\\a_{31}\end{vmatrix}$$

$$\text{原式}=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}\tag{1}$$

同理，我们想继续推导出阶数更高的式子，按照上面的式子可知n阶行列式应该可以分解成$n!$个非零行列式（占据第一行的元素有n种选择，占据第二行的元素有$n-1$种选择，以此类推得$n!$）：

$$\det A=\sum_{n!}\pm a_{1\alpha}a_{2\beta}a_{3\gamma}\cdots a_{n\omega},(\alpha,\beta,\gamma,\omega)=P_n^n\tag{2}$$

这个公式还不完全，接下来需要考虑如何确定符号：

$$\begin{vmatrix}0&0&\overline{1}&\underline{1}\\0&\overline{1}&\underline{1}&0\\\overline{1}&\underline{1}&0&0\\\underline{1}&0&0&\overline{1}\end{vmatrix}$$

- 观察带有下划线的元素，它们的排列是$(4,3,2,1)$，变为$(1,2,3,4)$需要两步操作，所以应取$+$；
- 观察带有上划线的元素，它们的排列是$(3,2,1,4)$，变为$(1,2,3,4)$需要一步操作，所以应取$-$。
- 观察其他元素，我们无法找出除了上面两种以外的排列方式，于是该行列式值为零，这是一个奇异矩阵。

此处引入代数余子式（cofactor）的概念，它的作用是把n阶行列式化简为$n-1$阶行列式。

于是我们把(1)式改写为：

$$a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}&0&0\\0&a_{22}&a_{23}\\0&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&a_{12}&0\\a_{21}&0&a_{23}\\a_{31}&0&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&0&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&0\\a_{31}&a_{32}&0\end{vmatrix}$$

于是，我们可以定义a_{ij}的代数余子式：将原行列式的第i行与第j列抹去后得到的$n-1$阶行列式记为C_{ij}，$i+j$为偶时时取$+$，$i+j$为奇时取$-$。

现在再来完善式子(2)：将行列式A沿第一行展开：

$$\det A=a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+\cdots+a_{1n}C_{1n}$$

到现在为止，我们了解了三种求行列式的方法：

1. 消元，$\det A$就是主元的乘积；
2. 使用(2)式展开，求$n!$项之积；
3. 使用代数余子式。

计算例题：$A_4=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\end{vmatrix}\overset{\text{沿第一行展开}}{=}\begin{vmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&1&1\end{vmatrix}=-1-0=-1$