- 第十二讲：图和网络
    - 图和网络

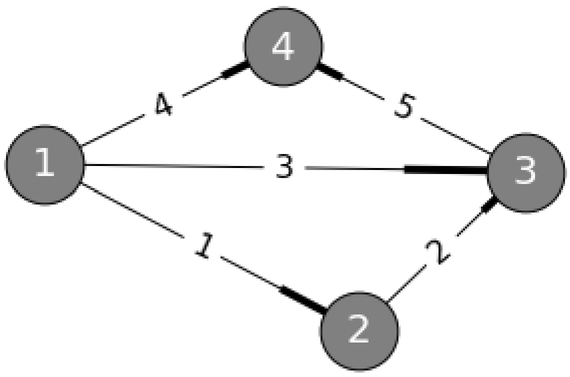
第十二讲：图和网络

图和网络

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline

dg = nx.DiGraph()
dg.add_edges_from([(1,2), (2,3), (1,3), (1,4), (3,4)])
edge_labels = {(1, 2): 1, (1, 3): 3, (1, 4): 4, (2, 3): 2, (3, 4): 5}

pos = nx.spring_layout(dg)
nx.draw_networkx_edge_labels(dg,pos,edge_labels=edge_labels, font_size=16)
nx.draw_networkx_labels(dg, pos, font_size=20, font_color='w')
nx.draw(dg, pos, node_size=1500, node_color="gray")
```



该图由4个节点与5条边组成，

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & node_1 & node_2 & node_3 & node_4 \\
\hline
edge_1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
edge_2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
edge_3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
edge_4 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
edge_5 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{array}
$$

我们可以建立5×4矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\-1&0&1&0\\-1&0&0&1\\0&0&-1&1\end{bmatrix}$

观察前三行，易看出这三个行向量线性相关，也就是这三个向量可以形成回路（loop）。

现在，解$Ax=0$：$Ax=\begin{bmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\-1&0&1&0\\-1&0&0&1\\0&0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$。

展开得到：$\begin{bmatrix}x_2-x_1\\x_3-x_2\\x_3-x_1\\x_4-x_1\\x_4-x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$

引入矩阵的实际意义：将$x=\begin{bmatrix}x_1&x_2&x_3&x_4\end{bmatrix}$设为各节点电势（Potential at the Nodes）。

则式子中的诸如x_2-x_1的元素，可以看做该边上的电势差（Potential Differences）。

容易看出其中一个解$x=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$，即等电势情况，此时电势差为0。

化简A易得$rank(A)=3$，所以其零空间维数应为$n-r=4-3=1$，即$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$就是其零空间的一组基。

其零空间的物理意义为，当电位相等时，不存在电势差，图中无电流。

当我们把图中节点4接地后，节点4上的电势为0，此时的 $A=\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\-1&0&1\\-1&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$，各列线性无关，$rank(A)=3$。

现在看看$A^Ty=0$（这是应用数学里最常用的式子）：

$$A^Ty=0=\begin{bmatrix}-1&0&-1&-1&0\\1&-1&0&0&0\\0&1&1&0&-1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$，对于转置矩阵有

$dimN(A^T)=m-r=5-3=2$。

接着说上文提到的的电势差，矩阵C将电势差与电流联系起来，电流与电势差的关系服从欧姆定律：边上的电流值是电势差的倍数，这个倍数就是边的电导（conductance）即电阻（resistance）的倒数。

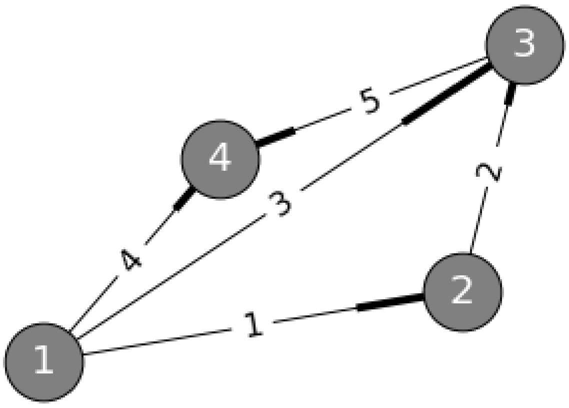
$\text{电势差}\xrightarrow[\text{欧姆定律}]{\text{矩阵}C}\text{各边上的电流}y_1,y_2,y_3,y_4,y_5$，而$A^Ty=0$的另一个名字叫做“基尔霍夫电流定律”（Kirchoff's Law, 简称KCL）。

再把图拿下来观察：

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline

dg = nx.DiGraph()
dg.add_edges_from([(1,2), (2,3), (1,3), (1,4), (3,4)])
edge_labels = {(1, 2): 1, (1, 3): 3, (1, 4): 4, (2, 3): 2, (3, 4): 5}

pos = nx.spring_layout(dg)
nx.draw_networkx_edge_labels(dg,pos,edge_labels=edge_labels, font_size=16)
nx.draw_networkx_labels(dg, pos, font_size=20, font_color='w')
nx.draw(dg, pos, node_size=1500, node_color="gray")
```



将$A^T y = 0$中的方程列出来：$\begin{cases} y_1 + y_3 + y_4 = 0 \\ y_1 - y_2 = 0 \\ y_2 + y_3 - y_5 = 0 \\ y_4 - y_5 = 0 \end{cases}$

对比看$A^T y = 0$的第一个方程，$-y_1 - y_3 - y_4 = 0$，可以看出这个方程是关于节点1上的电流的，方程指出节点1上的电流和为零，基尔霍夫定律是一个平衡方程、守恒定律，它说明了流入等于流出，电荷不会在节点上累积。

对于A^T，有上文得出其零空间的维数是2，则零空间的基应该有两个向量。

- 现在假设$y_1 = 1$，也就是令1安培的电流在边1上流动；
- 由图看出y_2也应该为1；
- 再令$y_3 = -1$，也就是让1安培的电流流回节点1；
- 令$y_4 = y_5 = 0$；

得到一个符合KCL的向量$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，代回方程组发现此向量即为一个解，这个解发生在节点$1, 2, 3$组成的回路中，该解即为零空间的一个基。

根据上一个基的经验，可以利用$1, 3, 4$组成的节点求另一个基：

- 令$y_1 = y_2 = 0$；
- 令$y_3 = 1$；
- 由图得$y_5 = 1$；
- 令$y_4 = -1$；

得到令一个符合KCL的向量$\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\\1\end{bmatrix}$，代回方程可知此为另一个解。

则$N(A^T)$的一组基为$\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\\1\end{bmatrix}$。

看图，利用节点$1,2,3,4$组成的大回路（即边$1,2,5,4$）：

- 令$y_3=0$；
- 令$y_1=1$；
- 则由图得$y_2=1,y_5=1,y_4=-1$；

得到符合KCL的向量$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}$，易看出此向量为求得的两个基之和。

接下来观察A的行空间，即A^T的列空间，方便起见我们直接计算 $A^T=\begin{bmatrix}-1&0&-1&-1&0\\1&-1&0&0&0\\0&1&1&0&-1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}$的列空间。

易从基的第一个向量看出前三列A^T的线性相关，则A^T的主列为第$1,2,4$列，对应在图中就是边$1,2,4$，可以发现这三条边没有组成回路，则在这里可以说**线性无关等价于没有回路**。由4个节点与3条边组成的图没有回路，就表明A^T的对应列向量线性无关，也就是节点数减一（$rank=nodes-1$）条边线性无关。另外，没有回路的图也叫作树（Tree）。

再看左零空间的维数公式：$dimN(A^T)=m-r$，左零空间的维数就是相互无关的回路的数量，于是得到$loops=edges-(nodes-1)$，整理得：

$$nodes-edges+loops=1$$

此等式对任何图均有效，任何图都有此拓扑性质，这就是著名的欧拉公式（Euler's Formula）。**零维（节点）**$-$**一维（边）**$+$**二维（回路）**$=1$便于记忆。

总结：

- 将电势记为e，则在引入电势的第一步中，有$e = Ax$；
- 电势差导致电流产生，$y = Ce$；
- 电流满足基尔霍夫定律方程，$A^T y = 0$；

这些是在无电源情况下的方程。

电源可以通过：在边上加电池（电压源），或在节点上加外部电流 两种方式接入。

如果在边上加电池，会体现在$e = Ax$中；如果在节点上加电流，会体现在$A^T y = f$中，f向量就是外部电流。

将以上三个等式连起来得到$A^T CAx = f$。另外，最后一个方程是一个平衡方程，还需要注意的是，方程仅描述平衡状态，方程并不考虑时间。最后，$A^T A$是一个对称矩阵。