- 第十四讲：正交向量与子空间

# 第十四讲：正交向量与子空间

在四个基本子空间中，提到对于秩为r的$m\times n$矩阵，其行空间（$dim C(A^T)=r$）与零空间（$dim N(A)=n-r$）同属于$\mathbb{R}^n$空间，其列空间（$dim C(A)=r$）与左零空间（$dim N(A^T)$=m-r）同属于$\mathbb{R}^m$空间。

对于向量$x,y$，当$x^T\cdot y=0$即$x_1y_1+x_2y_x+\cdots+x_ny_n=0$时，有向量$x,y$正交（vector orthogonal）。

毕达哥拉斯定理（Pythagorean theorem）中提到，直角三角形的三条边满足：

$$
\begin{aligned}
\left\|\overrightarrow{x}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{y}\right\|^2&=\left\|\overrightarrow{x+y}\right\|^2\\
x^Tx+y^Ty&=(x+y)^T(x+y)\\
x^Tx+y^Ty&=x^Tx+y^Ty+x^Ty+y^Tx\\
0&=x^Ty+y^Tx\qquad\text{对于向量点乘，}x^Ty=y^Tx\\
0&=2x^Ty\\
x^Ty&=0
\end{aligned}
$$

由此得出，两正交向量的点积为0。另外，$x,y$可以为0向量，由于0向量与任意向量的点积均为零，所以0向量与任意向量正交。

举个例子：$x=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},y=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix},x+y=\begin{bmatrix}3\\1\\3\end{bmatrix}$，有$\left\|\overrightarrow{x}\right\|^2=14,\left\|\overrightarrow{y}\right\|^2=5,\left\|\overrightarrow{x+y}\right\|^2=19$，而$x^Ty=1\times2+2\times(-1)+3\times0=0$。

向量$S$与向量$T$正交，则意味着$S$中的每一个向量都与$T$中的每一个向量正交。若两个子空间正交，则它们一定不会相交于某个非零向量。

现在观察行空间与零空间，零空间是$Ax=0$的解，即$x$若在零空间，则$Ax$为零向量；

而对于行空间，有$\begin{bmatrix}row_1\\row_2\\\vdots\\row_m\end{bmatrix}\Big[x\Big]=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$，可以看出：

$$[row_1]\,[x] = 0$$

$$[row_2]\,[x] = 0$$

$$\vdots$$

$$[row_m]\,[x] = 0$$

所以这个等式告诉我们，$x$同$A$中的所有行正交；

接下来还验证$x$是否与$A$中各行的线性组合正交，$\begin{cases} c_1(row_1)^T x = 0 \\ c_2(row_2)^T x = 0 \\ \vdots \\ c_n(row_m)^T x = 0 \end{cases}$，各式相加得$(c_1 row_1 + c_2 row_2 + \cdots + c_n row_m)^T x = 0$，得证。

我们可以说，行空间与零空间将$\mathrm{R}^n$分割为两个正交的子空间，同样的，列空间与左零空间将$\mathrm{R}^m$分割为两个正交的子空间。

举例，$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix}$，则可知$m = 2, n = 3, rank(A) = 1, dimN(A) = 2$。

有$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，解得零空间的一组基$x_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$。

而行空间的一组基为$r = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$，零空间与行空间正交，在本例中行空间也是零空间的法向量。

补充一点，我们把行空间与零空间称为$n$维空间里的正交补（orthogonal complement），即零空间包含了所有与行空间正交的向量；同理列空间与左零空间为$m$维空间里的正交补，即左零空间包含了所有与零空间正交的向量。

接下来看长方矩阵，$m > n$。对于这种矩阵，$Ax = b$中经常混入一些包含“坏数据”的方程，虽然可以通过筛选的方法去掉一些我们不希望看到的方程，但是这并不是一个稳妥的方法。

于是，我们引入一个重要的矩阵：$A^TA$。这是一个$n\times m$矩阵点乘$m\times n$矩阵，其结果是一个$n\times n$矩阵，应该注意的是，这也是一个对称矩阵，证明如下：

$$(A^TA)^T=A^T(A^T)^T=A^TA$$

这一章节的核心就是$A^TAx=A^Tb$，这个变换可以将“坏方程组”变为“好方程组”。

举例，有$\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$，只有当$\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$在矩阵的列空间时，方程才有解。

现在来看$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&8\\8&30\end{bmatrix}$，可以看出此例中$A^TA$是可逆的。然而并非所有$A^TA$都是可逆的，如$\begin{bmatrix}1&1&1\\3&3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\1&3\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&9\\9&27\end{bmatrix}$（注意到这是两个秩一矩阵相乘，其结果秩不会大于一）

先给出结论：

$$N(A^TA)=N(A)$$
$$rank(A^TA)=rank(A)$$
$$A^TA\text{可逆当且仅当}N(A)\text{为零向量，即}A\text{的列线性无关}$$

下一讲涉及投影，很重要。