第一讲：方程组的几何解释

我们从求解线性方程组来开始这门课，从一个普通的例子讲起：方程组有2个未知数，一共有2个方程，分别来看方程组的“行图像”和“列图像”。

有方程组$\begin{cases}2x & -y & =0\\ -x & +2y & =3\end{cases}$，写作矩阵形式有$\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix}$，通常我们把第一个矩阵称为系数矩阵$A$，将第二个矩阵称为向量$x$，将第三个矩阵称为向量$b$，于是线性方程组可以表示为$Ax=b$。

我们来看行图像，即直角坐标系中的图像：

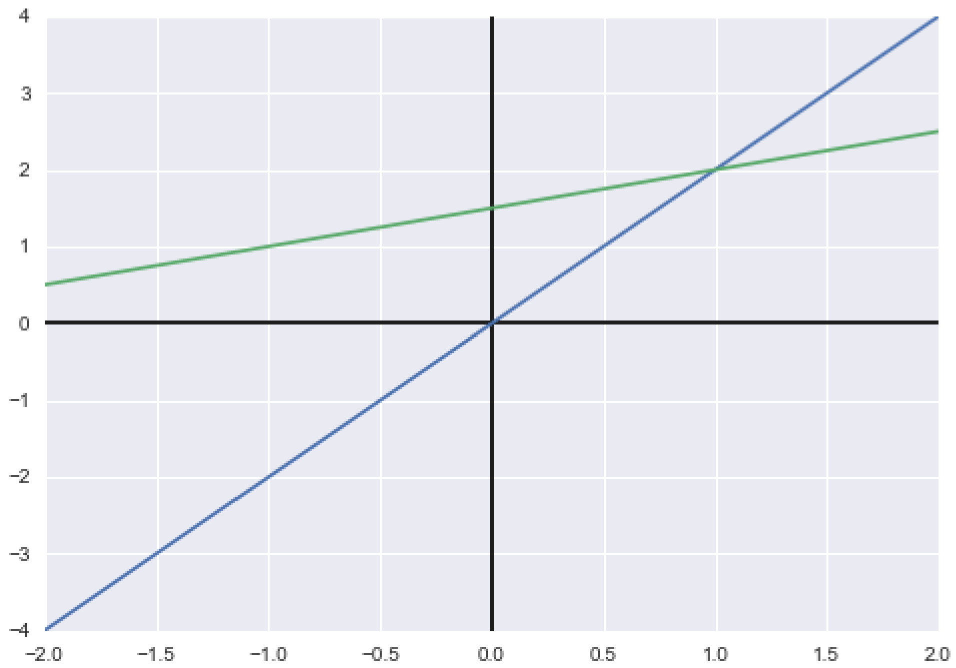
```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import pandas as pd
import seaborn as sns

x = [-2, 2, -2, 2]
y = [-4, 4, 0.5, 2.5]

fig = plt.figure()
plt.axhline(y=0, c='black')
plt.axvline(x=0, c='black')

plt.plot(x[:2], y[:2], x[2:], y[2:])

plt.draw()
```




```
plt.close(fig)
```

上图是我们都很熟悉的直角坐标系中两直线相交的情况，接下来我们按列观察方程组 $x\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$（我们把第一个向量称作$col_1$，第二个向量称作$col_2$，以表示第一列向量和第二列向量），要使得式子成立，需要第一个向量加上两倍的第二个向量，即$1\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$。

现在来看列图像，在二维平面上画出上面的列向量：

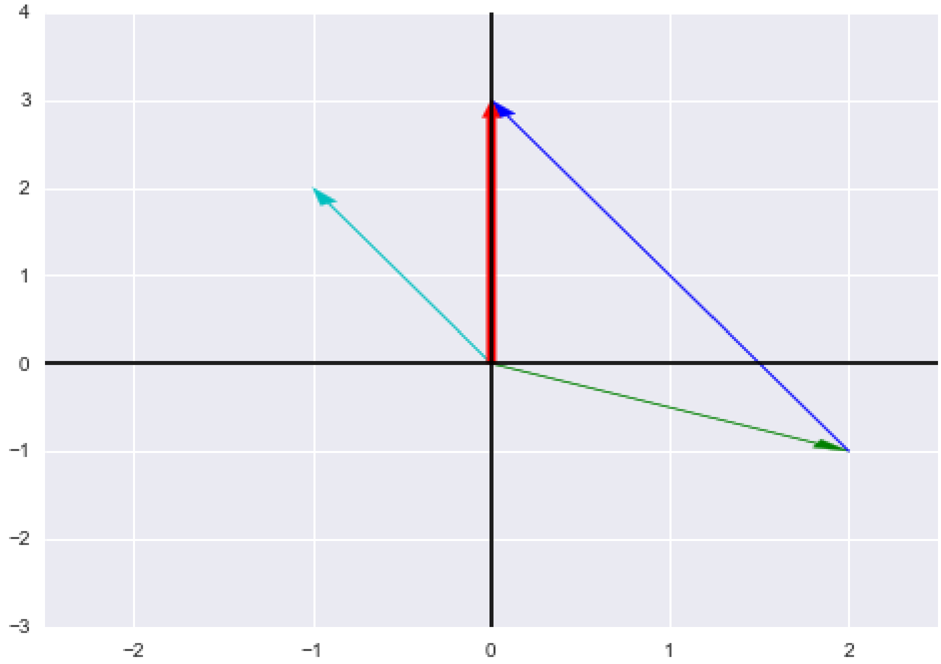
```
from functools import partial

fig = plt.figure()
plt.axhline(y=0, c='black')
plt.axvline(x=0, c='black')
ax = plt.gca()
ax.set_xlim(-2.5, 2.5)
ax.set_ylim(-3, 4)

arrow_vector = partial(plt.arrow, width=0.01, head_width=0.1, head_length=0.2,
length_includes_head=True)

arrow_vector(0, 0, 2, -1, color='g')
arrow_vector(0, 0, -1, 2, color='c')
arrow_vector(2, -1, -2, 4, color='b')
arrow_vector(0, 0, 0, 3, width=0.05, color='r')

plt.draw()
```




```
plt.close(fig)
```

如图，绿向量col_1与蓝向量（两倍的蓝绿向量col_2）合成红向量b。

接着，我们继续观察$x\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$，$col_1,col_2$的某种线性组合得到了向量$b$，那么$col_1,col_2$的所有线性组合能够得到什么结果？它们将铺满整个平面。

下面进入三个未知数的方程组：$\begin{cases}2x & -y & & =0\\-x & +2y & -z & =-1\\ & -3y & +4z & =4\end{cases}$，写作矩阵形式$A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-3&4\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}0\\-1\\4\end{bmatrix}$。

在三维直角坐标系中，每一个方程将确定一个平面，而例子中的三个平面会相交于一点，这个点就是方程组的解。

同样的，将方程组写成列向量的线性组合，观察列图像：$x\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\2\\-3\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0\\-1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\\4\end{bmatrix}$。易知教授特意安排的例子中最后一个列向量恰巧等于等式右边的b向

量，所以我们需要的线性组合为$x = 0, y = 0, z = 1$。假设我们令$b = \begin{bmatrix}1\\1\\-3\end{bmatrix}$，则需要的线性组合为$x = 1, y = 1, z = 0$。

我们并不能总是这么轻易的求出正确的线性组合，所以下一讲将介绍消元法——一种线性方程组的系统性解法。

现在，我们需要考虑，对于任意的b，是否都能求解$Ax = b$？用列向量线性组合的观点阐述就是，列向量的线性组合能否覆盖整个三维向量空间？对上面这个例子，答案是肯定的，这个例子中的A是我们喜欢的矩阵类型，但是对另一些矩阵，答案是否定的。那么在什么情况下，三个向量的线性组合得不到b？

——如果三个向量在同一个平面上，问题就出现了——那么他们的线性组合也一定都在这个平面上。举个例子，比如$col_3 = col_1 + col_2$，那么不管怎么组合，这三个向量的结果都逃不出这个平面，因此当b在平面内，方程组有解，而当b不在平面内，这三个列向量就无法构造出b。在后面的课程中，我们会了解到这种情形称为**奇异**、**矩阵不可逆**。

下面我们推广到九维空间，每个方程有九个未知数，共九个方程，此时已经无法从坐标图像中描述问题了，但是我们依然可以从求九维列向量线性组合的角度解决问题，仍然是上面的问题，是否总能得到b？当然这仍取决于这九个向量，如果我们取一些并不相互独立的向量，则答案是否定的，比如取了九列但其实只相当于八列，有一列毫无贡献（这一列是前面列的某种线性组合），则会有一部分b无法求得。

接下来介绍方程的矩阵形式$Ax = b$，这是一种乘法运算，举个例子，取$A = \begin{bmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，来看如何计算矩阵乘以向量：

- 我们依然使用列向量线性组合的方式，一次计算一列，$\begin{bmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12\\7\end{bmatrix}$
- 另一种方法，使用向量内积，矩阵第一行向量点乘x向量$\begin{bmatrix}2 & 5\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}^T = 12$, $\begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}^T = 7$。

教授建议使用第一种方法，将Ax看做A列向量的线性组合。