Matematyka

Michał Nycz

11.05.2024

Spis treści

1 Podstawy logiki matematycznej

1.1 Elementy logiki matematycznej

Negatyw $\sim$

p	$\sim p$
1	0
0	1

Alternatywa $\vee$

p	p	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Koniunkcja $\wedge$

p	p	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Implikacja $\implies$

p	p	$p \implies q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Równoważność $\iff$

p	p	$p \iff q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

1.2 Prawa logiczne

Tautologia - Zdanie zawsze prawdziwe.

1.2.1 Prawa De Morgana

I prawo De Morgana

Prawo zaprzeczania koniunkcji: negacja koniunkcji jest równoważna alternatywie negacji

$$[\sim(p \wedge q)] \iff (\sim p \vee \sim q)$$

Tabela 1: Wartości logiczne I prawa De Morgana

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \vee (\sim q)$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

II prawo De Morgana

Prawo zaprzeczenia alternatywy: negacja alternatywy jest równoważna koniunkcji negacji

$$[\sim(p \vee q)] \iff (\sim p \wedge \sim q)$$

Tabela 2: Wartości logiczne II prawa De Morgana

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

1.2.2 Prawo kontrapozycji

$$(p \implies q) \iff (\sim p \implies \sim q)$$

Tabela 3: Wartości logiczne prawa kontrapozycji

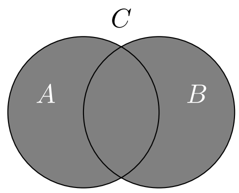
p	q	$p \implies q$	$\sim q$	$\sim p$	$(\sim q) \implies (\sim p)$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

2 Elementy kombinatoryki i teorii mnogości

2.1 Działania na zbiorach

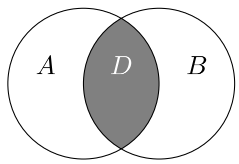
Suma

$$C = A \cup B$$



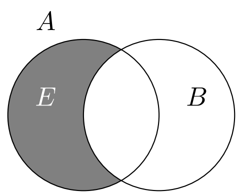
Iloczyn

$$D = A \cap B$$



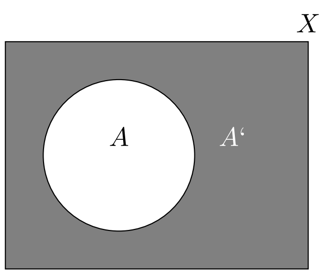
Różnica

$$E = A \setminus B$$



Dopełnienie zbioru

$$A' = X \setminus A$$



2.2 Iloczyn kartezjański

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ i } b \in B\}$$

$$A = \{a, b, c\} \qquad B = \{1, 2\}$$
$$A \times B = \{(a, 1)(a, 2)(b, 1)(b, 2)(c, 1)(c, 2)\}$$

Oznaczenie: $|X|$ - ilość elementów

Tw. $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych (prosta liczbowa)

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \text{ i } y \in \mathbb{R}\}$ - płaszczyzna

$\mathbb{R}^n$ - przestrzeń n wymiarowa

2.3 Kombinatoryka

2.3.1 Silnia

$n!$ - n silnia $\qquad n \in \mathbb{N}_0$

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0 \lor n = 1 \\ 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n, & n > 1 \end{cases}$$

$$n! = (n-1)! \cdot n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Def. Permutacja skończonego zbirou A to ciąg wszystkich elementów zbioru A.

Tw. Ilość wszystkich permutacji zbioru n-elementowego wynosi $n!$.

2.3.2 Symbol Newtona

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad {\scriptstyle k,\, n \in \mathbb{N}_0 \atop k \leqslant n}$$
$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \qquad {\scriptstyle k,\, n \in \mathbb{N}_0 \atop k \leqslant n}$$

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{n-1} = n \quad \binom{n}{n} = 1$$

Tw. Ilość wszystkich k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego wynosi $\binom{n}{k}$

Tw. Ilość wszystkich podzbiorów zbioru n-elementowego 2^n

Tw. Dla $k, n \in \mathbb{N}, k \leqslant n$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

2.4 Symbol sumy

$\sum$ - sigma, symbol sumy

$$\sum_{i=2}^{5} i^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 4 + 9 + 16 + 25 = 54$$

2.5 Symbol iloczynu

$\prod$ - pi, symbol iloczynu

$$\prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

2.6 Trójkąt Pascala

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1
\end{array}$$

2.7 Dwumian Newtona

Tw. Dwumian Newtona, dla $a, b \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

3 Rachunek różniczkowy

3.1 Pochodne funkcji jednej zmiennej

3.1.1 Wzory na pochodne podstawowych funkcji

Pochodna funckji stałej:

$$(c)' = 0, \quad \text{gdzie } c \in \mathbb{R} \text{ jest stałą}$$

Pochodna funckji potęgowej:

$$(x^a)' = ax^{a-1}, \quad \text{gdzie } a \in \mathbb{R} \text{ jest stałą}$$

Pochodna funckji wykładniczej i logarytmicznej:

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad \text{gdzie } a \in (0,1) \cup (1,\infty) \text{ jest stałą}$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad \text{gdzie } a \in (0,1) \cup (1,\infty) \text{ jest stałą}$$

$$(e^x)' = e^x$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Pochodna funckji trygonometrycznych:

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Pochodne funkcji łączonych:

$$(a \cdot f)' = a \cdot f', \quad \text{gdzie } a \in \mathbb{R} \text{ jest stałą}$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$
$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$
$$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Przydatne pochodne[1]:

$$(x)' = 1$$
$$(ax)' = a$$
$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

[1] Przydatne pochodne wywodządze się z pochodnych funkcji podstawowych