12. Характеристические функции.

Определение. Характеристической функцией случайной величины ξ называется комплекснозначная функция вещественного аргумента t :

$$\varphi_\xi(t) = \varphi(t) = Ee^{it\xi} = \begin{cases} \sum\limits_k p_k e^{itx_k}, \text{для дискретной } \xi \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{itx} dx, \text{для непрерывной } \xi \end{cases}.$$

Здесь i обозначает мнимую единицу, $i^2 = -1$.

Теорема 1. Основные свойства характеристических функций:

1). $\varphi(0) = 1$; при всех $t, |\varphi(t)| \le 1$.

2). Если $\eta = a + b\xi$, то $\varphi_\eta(t) = e^{ita}\varphi_\xi(bt)$.

3). Если ξ и η независимы, то $\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t)\varphi_\eta(t)$.

4). Если существует k-й момент $m_k = E\xi^k$, то

$$\frac{d^k\varphi(t)}{dt^k}\Big|_{t=0} = i^k m_k.$$

Доказательство. Первые два свойства очевидны; третье основано на свойстве: математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = Ee^{it(\xi+\eta)} = Ee^{it\xi}e^{it\eta} = Ee^{it\xi}Ee^{it\eta} = \varphi_\xi(t)\varphi_\eta(t).$$

Для доказательства равенства 4) вычислим производные характеристической функции:

$$\frac{d\varphi}{dt} = iE\xi e^{it\xi}, \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = i^2E\xi^2e^{it\xi}, \dots, \frac{d^k\varphi(t)}{dt^k} = i^kE\xi^ke^{it\xi},$$

положив $t = 0$, получим доказываемое соотношение. Из него следует, что характеристическую функцию можно разложить в ряд Тейлора:

$$\varphi_\xi(t) = 1 + im_1t + \frac{i^2m_2}{2}t^2 + \frac{i^3m_3}{3!}t^3 + \cdots \blacksquare$$

Рассмотрим некоторые примеры вычисления характеристических функций.

Пример 1. Характеристическая функция биномиального распределения. Представим случайную величину ξ в виде суммы n независимых одинаково распределенных бинарных случайных величин, $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$, ($P\{\xi_1 = 1\} = p$, $P\{\xi_1 = 0\} = 1 - p$). Каждая ξ_k имеет характеристическую функцию

$$\varphi_{\xi_k}(t) = pe^{it\cdot 1} + (1-p)e^{it\cdot 0} = pe^{it} + 1 - p = 1 + p\left(e^{it} - 1\right).$$

Вследствие свойства 3),

$$\varphi_\xi(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t) = \left(1 + p\left(e^{it} - 1\right)\right)^n.$$

Пример 2. Характеристическая функция распределения Пуассона. Для случайной величины с распределением Пуассона,

$$p_k = P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

имеем

$$\varphi(t) = e^{-\lambda} \sum_k \frac{\lambda^k}{k!} e^{itk} = e^{-\lambda} \sum_k \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = exp\left(\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right).$$

Пример 3. Характеристическая функция гауссовского распределения. Сначала рассмотрим стандартное нормальное, $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$. Представляя экспоненту по формуле Эйлера,

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{itx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \cos(tx) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} p(x) sin(tx) dx$$

видим, что мнимая часть обращается в 0, так как *p(x)* – симметричная функция, а sin – антисимметричная, следовательно, как и для любой для симметричной плотности, характеристическая функция вещественна,

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} cos(tx) dx.$$

Продифференцируем,

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-x) e^{-\frac{x^2}{2}} sin(tx) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} sin(tx) d\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

и проинтегрируем по частям,

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[sin(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot cos(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right] = -t\, \varphi(t).$$

Получили дифференциальное уравнение для $\varphi(t)$, $\varphi'(t) = -t\, \varphi(t)$ или

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = -t,$$

решение которого:

$$ln\varphi = \frac{t^2}{2} + const;$$

согласно начальному условию $\varphi(0) = 1$, получаем $const = 0$ и окончательно характеристическая функция стандартного нормального распределения

$$\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Для гауссовского распределения общего вида $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$, согласно свойству 2) Теоремы 1,

$$\varphi(t) = exp\left(ita - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right). \blacksquare$$

С помощью характеристической функции легко вывести свойство нормального распределения для независимых случайных величин: сумма двух независимых нормальных случайных величин имеет нормальное распределение. Пусть независимые $\xi_k \sim \mathcal{N}(a_k, \sigma_k^2), (k = 1,2)$, тогда

$$\varphi_{\xi_k}(t) = exp\left(ita_k - \frac{\sigma_k^2 t^2}{2}\right)$$

и в силу свойства 3),

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t) = exp\left(ita_1 - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}\right) exp\left(ita_2 - \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}\right) =$$

$$= exp\left(it(a_1 + a_2) - \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2}{2}\right).$$

Отметим еще: как следует из свойств характеристических функций, гауссовское распределение имеет моменты всех порядков.

Несколько важных свойств характеристических функций сформулируем здесь без доказательства.

Теорема (**формула обращения**). Если распределение абсолютно непрерывно (существует плотность распределения *p(x))* и характеристическая функция $\varphi(t)$ интегрируема ($\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\, dt < \infty$), то

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, e^{-itx} dt$$

Таким образом, теорема дает условие, при котором характеристическая функция случайной величины однозначно определяет ее распределение.

Теорема Хелли. Пусть $\{\varphi_n(t)\}$ - последовательность характеристических функций и $\{F_n(x)\}$ - последовательность соответствующих функций распределения. Если при любом *t* последовательность $\varphi_n(t)$ сходится к некоторой функции $\varphi(t)$, непрерывной в 0, то

1) $\varphi(t)$ есть характеристическая функция, соответствующая некоторой функции распределения $F(x)$*;*
2) последовательность $F_n(x)$ сходится к $F(x)$ в точках непрерывности функции $F(x)$.

Пример 4. Доказательство теоремы Пуассона с помощью характеристических функций. Рассмотрим схему Бернулли в условиях Теоремы 4.1. Характеристическую функцию в схеме Бернулли (Пример 1) обозначим

$$\varphi_n(t) = \left(1 + p_n(e^{it} - 1)\right)^n, \;\; p_n = \frac{\lambda}{n};$$

переходя к пределу, получаем

$$\varphi_n(t) \to \; exp\left(\lambda(e^{it} - 1)\right),$$

а это есть характеристическая функция распределения Пуассона (Пример 2).

Упражнение 1. С помощью характеристической функции вычислить моменты m_k гауссовского распределения $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ (*k* = 1, 2, 3,…, *n*). Чему равны асимметрия и эксцесс?