4. Независимые события, схема Бернулли

Определение. События A и B называются независимыми, если

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

(предполагается, что оба события имеют ненулевые вероятности).

Если события A и B независимы, то $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$.

Упражнение. Привести примеры независимых событий в игре 6-квадрат.

Пример 1. Предположим, вероятность рождения мальчика равна ½. Рассмотрим множество семей с тремя детьми и в этом множестве два события:

$$A = \{\text{в семье дети обоего пола}\},$$

$$B = \{\text{в семье не меньше двух мальчиков}\}.$$

Всего возможно 8 вариантов таких семей: {ММM}, {ММД}, {МДМ}, {ДММ}, {МДД}, {ДМД}, {ДДМ}, {ДДД} ($|\Omega| = 8$), и для вероятностей имеем:

$$P(A) = \frac{6}{8}, P(B) = \frac{4}{8}, P(AB) = \frac{3}{8} = \frac{6}{8} \cdot \frac{4}{8} = P(A)P(B),$$

Следовательно, события A и B независимы. Проверить, что в случае семей с четырьмя детьми эти события будут зависимы.

Упражнение 1. Рассмотрим пространство элементарных исходов из Примера 1.2. Проверить независимость приведенных в этом примере событий. Показать, что в этом пространстве независимыми являются события, имеющие “ортогональную” конфигурацию, например, $\{3 \leq i \leq 5\}$ и $\{2 \leq k \leq 4\}$ независимы.

Проверим выполнение следующего естественного свойства: если события A и B независимы, то $\bar{A}$ и B также независимы. Действительно, из равенства

$$P(B) = P(B\bar{A}) + P(BA)$$

следует

$$P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(\bar{A})P(B),$$

Что и требовалось. Так же можно доказать и независимость $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

Пример 2. Вероятность поражения цели одной бомбой равна p = 0,6. Какова вероятность поражения цели, если 7 самолетов сбрасывают бомбы (предполагается, что для поражения достаточно одного попадания)?

$$P(A_i) = p, \qquad P(\overline{A_i}) = 1 - p$$

Обозначим A_i событие $\{i$-й самолет попал в цель$\}$, тогда событие A = {цель поражена} можно представить как сумму $A = \{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_7\}$, откуда

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P\overline{\{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_7\}} =$$

$$= 1 - P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_7}) = 1 - \prod_{i=1}^{7} P(\overline{A_i}) =$$

$$= 1 - (1 - p)^7 = 0{,}9984.$$

Предположим, необходимо чтобы цель была уничтожена с высокой вероятностью, например, не менее 0,9990, сколько самолетов тогда необходимо направить? Обозначим это число самолетов *n;* согласно полученной формуле,

$$P(A) = 1 - (1-p)^n = 0{,}9999.$$

Решая это уравнение относительно n, находим

$$n = \frac{\ln(1-0{,}9999)}{\ln(1-p)} = \ldots$$

Рассмотрим теперь эксперимент, заключающийся в последовательном повторении одного и того же испытания, причем испытания являются статистически независимыми. Возьмем некоторое случайное событие A, вероятность которого обозначим p. Если дважды проводим статистическое испытание, в результате которого событие может наступить (с вероятностью p), либо не наступить (вероятность чего обозначим $q = P(\bar{A}) = 1-p$), то возможные исходы с их вероятностями легко перечислить, предполагая, что наступление события A (“успех” обозначаем его единицей 1) или не наступление его (“неуспех”, обозначаем нулем 0) независимы:

$$P(00) = q^2, \qquad P(01) = pq, \qquad P(10) = pq, \qquad P(11) = p^2.$$

Если число последовательных испытаний взять равным 3, то получим 8 исходов (количество двоичных последовательностей длины 3), вероятности которых находим из того же свойства независимости, например, $P(101) = p^2 q,$ а вероятность того, что из трех испытаний в двух наступит успех, равна сумме вероятностей

$$P(011) + P(101) + P(110) = 3p^2 q = C_3^2 p^2 (1-p).$$

Обобщая эту формулу для *n* испытаний и *k* успехов, получим вероятность того, что в *n* последовательных независимых испытаниях наступит *k* успехов:

$$P\{k \text{ успехов в } n \text{ испытаниях}\} = P_k(n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \qquad 0 \le k \le n.$$

Такая модель последовательностей независимых испытаний в теории вероятностей носит название ***схемы Бернулли***. Вероятность успеха в одном испытании p и число испытаний n являются параметрами, определяющими конкретную схему Бернулли.

Применяя формулу бинома Ньютона,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^k b^{n-k},$$

убеждаемся, что сумма всех вероятностей в схеме Бернулли равна 1, как того требует ***условие нормировки*** $(P(\Omega) = 1)$:

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1.$$

Рисунок 4.1. показывает влияние вероятности успеха на распределение вероятностей $P_k(n)$ по индексам *k* для *n* = 8 (здесь слева направо вероятность *p* принимает значения 0,3 0,5 0,7).

Видно, что вероятности $P_k(n)$ вначале растут с увеличением *k*, но затем уменьшаются.

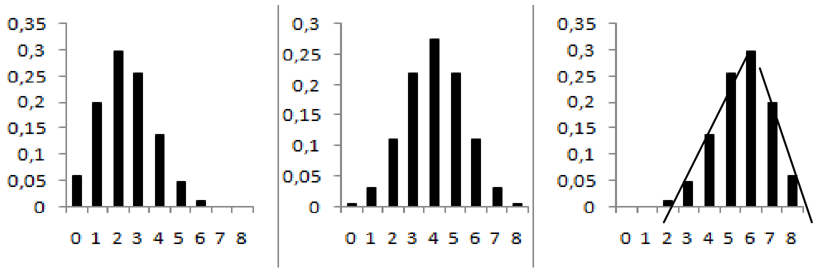

Рисунок 4.1. Вероятности в схеме Бернулли

Значение $k = k_{max}$, при котором достигается максимум $P_k(n)$ (наиболее вероятное число успехов), можно найти, рассмотрев отношение

$$\frac{P_k(n)}{P_{k-1}(n)} = \frac{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}{C_n^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}} = \frac{p}{1-p} \frac{n-k+1}{k} = \frac{p}{1-p}\left(\frac{n+1}{k} - 1\right),$$

которое вначале больше 1, а справа от k_{max} становится меньше 1.

Очень важный результат получается для схемы редких событий, когда вероятность успеха в одном испытании p мала, но число испытаний n велико.

Теорема 1. (теорема Пуассона) Пусть при $n \to \infty$ вероятность $p = p(n)$ стремится к нулю таким образом, что $np(n) \to \lambda$ (λ - фиксированное положительное число), тогда

$$\lim_{n\to\infty} P_k(n) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Доказательство. Преобразуем вероятность $P_k(n)$, подставив приближение для $p = \lambda/n$, справедливое при больших n,

$$P_k(n) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} \frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n-1)n}{n^k}.$$

Длинная дробь справа равна:

$$\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{k-2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\,,$$

а известная предельная формула

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

приводит в итоге к сформулированному утверждению теоремы.■

Эта асимптотическая теорема имеет большое значение в теории вероятностей. Ее можно также использовать для приближенного вычисления вероятностей в схеме Бернулли: при малых p (примерно $p \approx 0{,}1$) и для $np(1-p) \le 9$.