2. Геометрическая вероятность

Рассмотрим множество **Ω** на плоскости и представим себе, что есть возможность бросать в это множество точку, так чтобы она с равной возможностью попадала в любое место множества **Ω**.

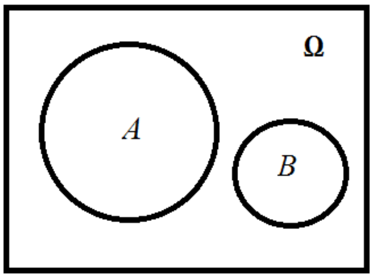

Рис. 1. Иллюстрация геометрической вероятности

Выделим в Ω некоторое подмножество A и попытаемся определить вероятность события

$$A = \{\text{случайно брошенная точка попала в множество } A\}.$$

Чему равна вероятность $P(A)$ этого события? Поскольку брошенная точка всегда попадает в множество Ω, следует считать Ω достоверным событием и положить $P(\Omega) = 1$. Если сравнить два события A и B (рис. 1.), то интуитивно выглядит очевидным, что должно быть

$$P(A) > P(B)$$

поскольку площадь множества A больше площади множества B, а значит случайно брошенная точка имеет больше возможностей попасть в множество A, чем в B.

Обозначая $S(A)$ площадь множества A, можно предположить, что вероятность $P(A)$ должна определяться отношением площадей $\mathrm{S}(A)/\mathrm{S}(\Omega)$:

$$P(A) = f\left(\frac{S(A)}{S(\Omega)}\right).$$

Какой должна быть функция $f(x)$, чтобы так определенная $P(A)$ обладала свойствами вероятности? Прежде всего, $f(x)$ определена на отрезке $[0,1]$, причем для нее выполнены условия $f(0) = 0, f(1) = 1$. Если множества A и B не пересекаются, то положив

$$x = \frac{S(A)}{S(\Omega)}, y = \frac{S(B)}{S(\Omega)},$$

получим уравнение для функции f:

$$f(x + y) = f(x) + f(y). \qquad (1).$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее нашим условиям, есть $f(x) = x$, таким образом, получаем ***геометрическое определение вероятности***:

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} \qquad (2).$$

Пример 1. Задача о встрече. Двое договорились встретиться в конкретном месте в интервале времени в 1 час. Моменты прихода каждого в течение этого часа случайны. Пришедший ждет другого в течение 10 минут и уходит. С какой вероятностью двое встретятся?

Обозначим моменты прихода через x и y, тогда пара чисел $\omega = (x, y)$ является элементарным исходом, а множество всех элементарных исходов есть квадрат со стороной 60 (если время измерять в минутах). Множество элементарных исходов, соответствующих случайному событию $A = \{\text{двое встретились}\}$, есть полоса $A = \{(x, y) \colon |x - y| \leq 10\}$, изображенная на рисунке 2.

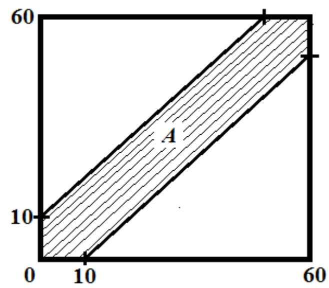

Рис. 2. Задача о встрече.

Наиболее простой способ вычислить площадь фигуры A – из площади квадрата вычесть площади двух треугольников, лежащих выше и ниже полосы; в сумме эти площади составляют 50^2, так что, в соответствии с формулой (2),

$$P(A) = \frac{60^2 - 50^2}{60^2} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 .$$

Пример 2. Задача Бюффона. Пусть имеется плоскость, разлинованная параллельными прямыми, находящимися на расстоянии $\boldsymbol{2l}$ друг от друга (Рис. 3). На эту плоскость случайным образом бросается отрезок (игла) длины 2 $\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{l} < \boldsymbol{a}$). С какой вероятностью отрезок пересечет какую-нибудь линию?

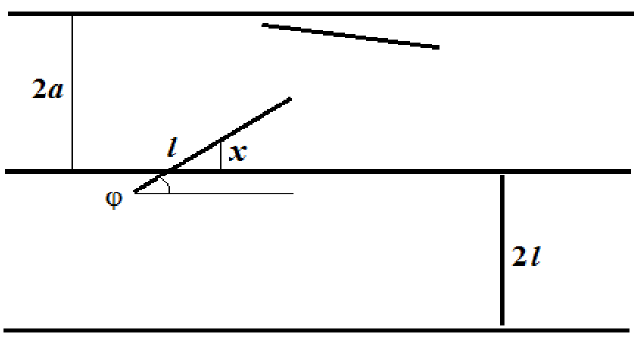

Рис. 3. Игла Бюффона

Чтобы привести задачу к геометрической вероятности, следует задать два параметра, которые бы однозначно определяли результат статистического эксперимента: будет ли иметь место пересечение. Например, такими параметрами могут служить угол наклона отрезка $\boldsymbol{\varphi}$ и расстояние от центра отрезка до ближайшей линии $\boldsymbol{x}$. Область изменения значений этих двух параметров изображена на Рис. 4. в виде прямоугольника, обозначенного $\boldsymbol{\Omega}$.

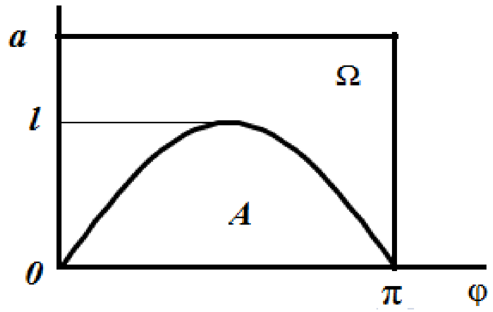

Рис. 4. Событие A (пересечение) в задаче Бюффона

Отрезок пересечет ближайшую линию в том случае, если расстояние от его центра до ближайшей линии меньше, чем длина вертикального катета у прямоугольного треугольника с гипотенузой длины $\boldsymbol{l}$ и углом при вершине **φ** (на Рис. 3), то есть, выполнено условие: $x \leq l \cdot sin\ \varphi.$ Таким образом, мы имеем случайное событие в виде подмножества в **Ω**:

$$A = \{(\varphi, x): x \leq l \cdot sin\ \varphi\},$$

вероятность которого равна

$$P(A) = \frac{S(A)}{a\pi}$$

вычисляя площадь $S(A)$, $S(A) = l \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = 2\,l$, получаем в результате

$$P(A) = 2l/a\pi \qquad (3)$$

Интересен этот эксперимент неожиданным поворотом в рассуждениях: из формулы (3) можно выразить π:

$$\pi = \frac{2l}{aP(A)}$$

Многократно повторяя эксперимент (n раз бросая отрезок), мы найдем оценку $\hat{p}$ вероятности $P(A)$ в виде частоты наступления события A:

$$\hat{p} = \frac{n_A}{n}$$

где n_A – число пересечений, наблюдавшихся в n бросаниях. Если действительно имеет место статистическая устойчивость, то при достаточно большом n частота $\hat{p}$ будет близка к истинной вероятности $P(A)$, но тогда выражение

$$\hat{\pi} = \frac{2l}{a\hat{p}}$$

представляет собой статистическую оценку числа π.

Упражнение. Задача о хорде (парадокс Бертрана). Наудачу берется хорда в круге. Чему равна вероятность того, что ее длина превосходит длину вписанного равностороннего тьреугольника?