7. Вероятностное пространство, общее определение вероятности. Свойства случайных величин и функций распределения.

Дадим теперь более полное определение вероятности, добавив некоторые важные понятия к тому, что мы уже знаем о вероятности.

Построение вероятности начинается с задания множества Ω всех возможных элементарных исходов ω. В этом множестве Ω мы выбираем различные подмножества, например $A \subset \Omega, B \subset \Omega, \dots$, которые называем случайными событиями. Если множество Ω конечно ($|\Omega| = N$), то никаких ограничений на выбор событий нет: всякое подмножество в Ω можно объявить случайным событием. Иначе говоря, любой высказывание относительно элементарных исходов образует случайное событие

Но если множество Ω бесконечно, например оно является подмножеством на плоскости, то необходимо наложить определенные ограничения на выбор событий. Скажем, геометрическую вероятность определили через площадь, однако хорошо известно, что не всякое множество на плоскости имеет площадь. Поэтому здесь мы будем рассматривать в качестве случайных событий только те множества, которые имеют площадь. Второе требование к выбору событий следует из того, что над событиями будут совершаться операции, поэтому если A и B события, то $A \cap B,\ A \cup B, A \setminus B$ также должны быть событиями.

Определение. Пусть задано множество элементарных исходов Ω. **Алгеброй событий** называется такое множество $\mathfrak{F}$ (элементами которого являются подмножества из Ω), в котором выполнены условия:

$$\Omega \in \mathfrak{F} \text{; если } A \in \mathfrak{F} \text{ и } B \in \mathfrak{F}, \text{ то } A \cup B \in \mathfrak{F},\ A \cap B \in \mathfrak{F},\ A \setminus B \in \mathfrak{F},$$

то есть, само множество Ω – это событие, и вместе с любой парой событий A и B, их сумма, пересечение и дополнение также являются событиями. Строго говоря, достаточно потребовать, чтобы сумма событий была опять событием, так как для пересечения это следует из соотношений двойственности.

Таким образом, алгебра событий замкнута относительно операций с конечными наборами событий. Но во многих ситуациях этого не достаточно, поскольку приходится совершать операции с бесконечными наборами событий (переходить к пределу). Чтобы теория была справедлива и в таких случаях, надо потребовать замкнутости при операциях над счетными множествами событий.

Определение. Алгебра $\mathfrak{F}$ называется σ-алгеброй, если для любой последовательности событий $\{A_n\}$ их объединение есть событие: $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$.

Теперь все готово для того чтобы сформулировать полное определение вероятности.

Определение. Вероятностью (вероятностной мерой) называется вещественная функция P, определенная на σ-алгебре событий $\mathfrak{F}$, обладающая свойствами:

1). $P(A) \geq 0$ для всякого $A \in \mathfrak{F}$,
2). $P(\Omega) = 1$ (свойство нормировки) ,
3). если последовательность $\{A_n\}$ событий такова, что $A_i A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

(свойство счетной аддитивности).

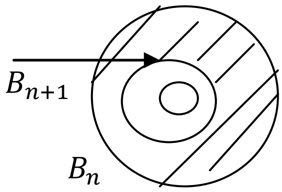
Набор из трех объектов $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ называется **вероятностным пространством**. Это определение вероятности называется аксиоматикой Колмогорова А.Н.

Сразу отметим очевидные следствия из определения: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$; пустое множество $\emptyset$ является событием ($\emptyset \in \mathfrak{F}$ так как $\emptyset = \Omega \setminus \Omega$), причем $P(\emptyset) = 0,$ так как $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 0.$

Теорема 1. Следующее свойство (**непрерывность вероятности**) является эквивалентным аксиоме 3): пусть имеет место **аддитивность вероятности для конечного набора событий**, а для бесконечной последовательности событий $\{B_n\}$ такой, что $B_{n+1} \subset B_n$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = B$, имеет место предел $P(B_n) \to P(B)$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Предположим, имеет место **аксиома 3**). Из последовательности вложенных событий $\{B_n\}$ составим последовательность B, $C_k = B_k \bar{B}_{k+1}$ (*k = 1,2,…*); она состоит из попарно несовместных событий, причем $B_n = B + \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k$. Согласно аксиоме 3) тогда $P(B_1) = P(B) + \sum_{k=1}^{\infty} P(C_k)$, следовательно, ряд здесь сходится, а значит, при $n \to \infty$,

$P(B_n) = P(B) + \sum_{k=n}^{\infty} P(C_k) \to P(B).$



Теперь наоборот, пусть имеет место сформулированное свойство непрерывности вероятности и $\{A_n\}$ - некоторая последовательность несовместных событий, тогда

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) + P(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k)$$

и переходя к пределу, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \lim_{n \to \infty} P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \{P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) - P(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k)\} = P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k),$$

что и требовалось.■

Аддитивность вероятности для бесконечных последовательностей событий называется σ-аддитивностью, в отличие от обычной аддитивности, которой мы ранее пользовались, рассматривая только конечные наборы событий. Следующий пример показывает необходимость именно такого определения вероятности; без него могут возникать проблемы при решении даже простых задач.

Пример 1. В единичный квадрат случайным образом бросается точка; ω_1 - горизонтальная координата точки, ω_2 – вертикальная координата, единичный квадрат есть множество всех элементарных исходов Ω . В качестве алгебры событий примем множество прямоугольников вида $\{a < \omega_1 \le b\} \times \{c < \omega_2 \le d\}$, а вероятностную меру зададим в соответствии с геометрическим определением вероятности: вероятность попадания случайной точки в некоторое множество равна площади этого множества, тогда

$$P(\{a < \omega_1 \le b\} \times \{c < \omega_2 \le d\}) = (b - a)(d - c)$$

Предположим, необходимо найти вероятности событий:

$$A = \{\text{наибольшее из двух чисел } (\omega_1, \ \omega_2) \le \tfrac{1}{2}\},$$

$$B = \left\{ \text{наименьшее из двух чисел } (\omega_1, \omega_2) \ \le \frac{1}{2} \right\},$$
$$C = \left\{ \text{сумма двух чисел } \omega_1 + \ \omega_2 \ \le \frac{3}{4} \right\}.$$

В силу определения вероятностной меры, вероятности первых двух событий легко находятся на основе независимости событий $A_1 = \{\text{первое число } \le \frac{1}{2}\}$, $A_2 = \{\text{второе число } \le \frac{1}{2}\}$:

$$P(A) = P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$
$$P(B) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) =$$
$$= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2)$$

Прибавляя здесь и отнимая 1, преобразуем это выражение:

$$P(B) = 1 - 1 + P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) =$$
$$= 1 - (1 - P(A_1)) + P(A_2)(1 - P(A_1)) = 1 - \big(1 - P(A_1)\big)\big(1 - P(A_2)\big) = \frac{3}{4}.$$

Но вычислить $P(C)$ так просто не удается: как видно из Рисунка 1, множество C не сводится к прямоугольникам вида $(a, b) \times (c, d)$, для которых вероятности считаются как для A и B. Однако множество C можно с любой степенью точности представить в виде суммы таких непересекающихся прямоугольников, аксиома 3) тогда гарантирует, что в пределе, когда сумма прямоугольников стремится к множеству C, сумма их вероятностей стремится к $P(C) = \frac{9}{32}$.

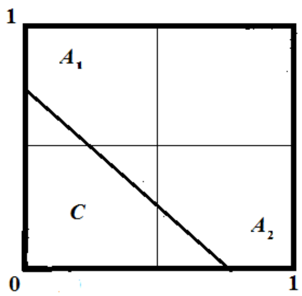


Рисунок 1. Вероятностное пространство Примера 1.

Изложенные понятия позволяют нам решать первую часть задач теории вероятностей: зная вероятности одних событий, мы можем правильным образом вычислять вероятности других интересующих нас событий. Но обычно случайные события интересуют нас не сами по себе, а в связи с тем, что с каждым событием связан некоторый числовой результат (физическая величина – вес, размер, заряд …, или финансовый результат – выигрыш, доход, убыток и т.д.). Поскольку событие является случайным, может наступить или не наступить, то и числовой результат становится случайным и нужны математические правила для действий с такими случайными наблюдениями.

Так появляется понятие случайной величины, которое мы определили в предыдущем параграфе. Здесь сформулируем точное определение случайной величины в общем виде.

Определение. Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ – **вероятностное пространство** и на множестве Ω задана числовая функция $\xi: \Omega \to R$ (R – множество вещественных чисел). Функция ξ

называется случайной величиной, если для любого $x \in R$ множество $\{\omega: \xi(\omega) < x\} \in \mathfrak{F}$, то есть это множество является событием.

Иначе говоря, случайной величиной мы называем такую функцию от элементарного исхода, для которой существуют вероятности $P\{\omega: \xi(\omega) < x\}$. Этого определения достаточно чтобы задать вероятности любых событий вида $\{\omega: \xi(\omega) \leq x\}$, $\{\omega: y < \xi(\omega) \leq x\}$, $\{\omega: \xi(\omega) > x\}$ и т.д., действительно,

$$\{\omega: \xi(\omega) \leq x\} = \bigcap_{n>1} \left\{\omega: \xi(\omega) < x + \frac{1}{n}\right\},$$

$$\{\omega: \xi(\omega) > x\} = \overline{\{\omega: \xi(\omega) \leq x\}},$$

$$\{\omega: y < \xi(\omega) \leq x\} = \{\omega: \xi(\omega) \leq x\} \cap \overline{\{\omega: \xi(\omega) \leq y\}}.$$

Далее для краткости такие множества будем записывать в виде $\{ \xi \leq x\}$, $\{ y < \xi \leq x\}$ и т.д..

Свойства случайных событий (σ-алгебр событий) и вероятности как функции множеств показывают, что для задания конкретной случайной величины достаточно задать вероятности событий вида $\{ \xi \leq x\}$, все прочие вероятности тогда можно будет найти с помощью соответствующих операций. Но при заданной вероятностной мере P множество вероятностей $P\{ \xi \leq x\}$, зависящих от переменной x, определяет некоторую функцию аргумента x. Это и есть функция распределения:

$$F(x) = F_\xi(x) = P\{\xi \leq x\}$$

Теорема 2. Функция распределения $F(x)$ непрерывна справа; а также

$$F(+\infty) = 1, \qquad F(-\infty) = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность событий $B_n = \left\{x < \xi \leq x + \frac{1}{n}\right\}$, удовлетворяющую условиям Теоремы 1.: $\{B_n\}$ – последовательность вложенных событий с предельным множеством $B = \emptyset$, следовательно

$$P(B_n) = F\left(x + \tfrac{1}{n}\right) - F(x) \to 0,$$

то есть $F(x + 0) = F(x)$.

Для доказательства свойства 2), воспользуемся аксиомой счетной аддитивности и доказанным равенством из Теоремы 6.1

$$P\{ x_1 < \xi \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

Определим последовательность несовместных событий

$$A_n = \{\omega: n - 1 < \xi(\omega) \leq n\};$$

поскольку $\Omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n$, то

$$1 = P(\Omega) = \textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} P(A_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N+1}^{N} P(A_n) = \lim\limits_{N\to\infty} [F(N) - F(-N)],$$

следовательно, $F(+\infty) = \lim\limits_{N\to\infty} F(N) = 1,\ F(-\infty) = \lim\limits_{N\to\infty} F(-N) = 0$. ■

Сделаем одно замечание, касающееся устройства независимых событий. На самом деле в решении Примера 4.2. была допущена некоторая неточность: мы знаем, что означает независимость двух событий, но там рассматривались несколько событий вместе, и возможно, это другое свойство, чем попарная независимость

Определение. События $A_1, A_2, \dots, A_n$ назовем независимыми в совокупности, если для любого набора $i_1, i_2, \dots, i_k$

$$P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) P\left(A_{i_2}\right) \dots P\left(A_{i_k}\right).$$

Решение Примера 4.2. будет корректным, если рассматриваемые там события предположить независимыми в совокупности.

Возникает вопрос: если события независимы попарно, то обязательно ли они независимы в совокупности? Известный пример Бернштейна наглядно показывает, что это не так.

Пример 2. Пример Бернштейна. Представим тетраэдр, три грани которого покрашены соответственно – в красный, синий и зеленый цвета, а на четвертой грани – все три цвета. При случайном бросании тетраэдра на плоскость вероятности обнаружить на нижней грани каждый из цветов одинаковы:

$$P(\text{К}) = P(\text{З}) = P(\text{С}) = \frac{1}{2}.$$

Совместные вероятности

$$P(\text{КЗ}) = P(\text{ЗС}) = P(\text{КС}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\frac{1}{2},$$

так что события попарно независимы, однако,

$$P(\text{КЗС}) = \frac{1}{4} \neq P(\text{К})P(\text{З})P(\text{С}).$$

Вот еще простая иллюстрация на ту же тему.

Пример 3. Подбрасываются две правильные игральные кости (см. Пример 1.2.), рассмотрим три события: $A = \{i = 4\}, B = \{k = 4\}, C = \{i = k\}$. Легко проверить следующие соотношения,

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{6}, P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{36},$$

то есть, события попарно независимы; однако,

$$P(ABC) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6},$$

следовательно, события не являются независимыми в совокупности.

Пример 4. Оказывается, и в обратную сторону та же проблема: из $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ не следует попарная независимость. Действительно, рассмотрим теперь такие события:

$$A = \{i = 1,2,3,\}, \qquad B = \{k = 3,4,,5\}, \qquad C = \{i + j = 9\}.$$

Вычислив вероятности $P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{1}{2},\ P(C) = \frac{1}{9},\ P(ABC) = \frac{1}{36}$, убеждаемся, что

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C),$$

но $AB = \{31, 32, 33\ , 34, 35, 36\},\ AC = \{36\},\ BC = \{36, 45, 34\},\ ABC = \{36\}$,

$$P(AB) = \tfrac{1}{6} \neq \tfrac{1}{4} = P(A)P(B),$$

$$P(AC) = \tfrac{1}{36} \neq \tfrac{1}{18} = P(A)P(C),\ P(BC) = \tfrac{1}{12} \neq \tfrac{1}{18} = P(B)P(C).$$

и значит события не являются попарно независимыми.