1.Классическая вероятность

Вероятности для экспериментов с конечным числом исходов

Пусть Ω - конечное множество, состоящее из элементов $\{\omega_1,\ \omega_2, \dots, \omega_N\}$, которые будем называть элементарными исходами. Число элементов в конечном множестве будем обозначать $|\Omega|$, так что для множества $\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2, \dots, \omega_N\}$ имеем $|\Omega| = N$.

Подмножества множества Ω будем обозначать большими латинскими буквами $A, B, C, \dots$ соответственно, если подмножество $A \subset \Omega$ состоит из N_A элементарных исходов, то пишем $|A| = N_A$.

Определение. Множество Ω назовем множеством всех элементарных исходов, его подмножества $A, B, C, \dots$ назовем случайными событиями. Вероятность $P(A)$ случайного события A равна

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{N_A}{N}\,. \tag{1}$$

Считаем, что подмножество, не содержащее ни одного исхода (пустое множество $\emptyset$) также является событием – невозможным событием, вероятность его равна нулю.

Важно, чтобы все элементарные исходы были ***равновозможными***, и именно - ***элементарными***, то есть любой элементарный исход нельзя представить как состоящий из некоторых более простых, элементарных исходов.

Несколько примеров, поясняющих смысл классического определения вероятности.

Пример 1. Правильная монета подбрасывается два раза. Обозначая орел как 1, а решку как 0, получаем множество всех возможных элементарных исходов, состоящее из четырех пар чисел: $\Omega = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$, $|\Omega| = 4$; пара (0,1) означает, что при первом подбрасывании выпала решка, а при втором – орел. Случайными событиями здесь являются, например, $A = \{(0,1), (1,0)\}$ – ровно один раз выпал орел; или $B = \{(0,1), (1,0), (1,1)\}$ – выпало не меньше одного орла. Вероятности этих событий $P(A) = 1/2$, $P(B) = 3/4$.

Пример 2. Подбрасываются случайным образом две правильные игральные кости. Обозначая (i, k) результат одного эксперимента, если на первой кости выпало число i , а на второй выпало k , записываем множество всех возможных исходов
$\Omega = \{\ \omega = (i, \mathrm{k}),\ i = 1, \dots, 6,\ k = 1, \dots, 6)\ \}$, очевидно, $|\Omega| = 36$.

Любое высказывание относительно исхода эксперимента определяет случайное событие. Например, “*сумма выпавших очков не меньше 10*” представляет случайное событие $A = \{(4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\}$. В результате проведения одного эксперимента (подбрасывания двух игральных костей) это событие может наступить (если выпадет один из перечисленных в фигурных скобках исходов), либо не наступить, и вероятность $P(A) = 6/36 = 1/6$ представляет меру ожидаемой частости наступления события A в большой серии таких экспериментов.

Упражнение 1. Найти в этой схеме вероятности событий:

$$B = \{\text{на обеих костях выпало одинаковое число очков}\}\ ,$$
$$C = \{\text{произведение } i * k \text{ четно}\}\ ,$$
$$D = \{i \text{ и } k \text{ отличаются не более чем на 2}\},$$
$$E = \{\text{выпала хотя бы одна пятерка}\}.$$

Пример 3. Имеется логическая схема, состоящая из четырех элементов (рис. 1.). Каждый элемент может находиться с равной возможностью случайно в одном из состояний: в состоянии, обозначаемом 1, он замкнут, то есть передает сигнал, а в состоянии 0 он разомкнут и сигнала не передает.

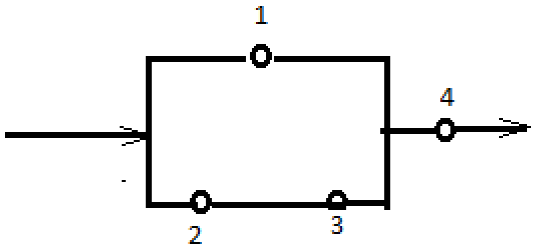

Рис. 1. Переключательная схема

С какой вероятностью эта схема будет замкнута?

Состояние сети можно задать с помощью набора (a_1, a_2, a_3, a_4), где a_i = 1, если i - й элемент замкнут и a_i = 0, если он разомкнут (i = 1,2,3,4). Такие наборы нулей и единиц представляют собой элементарные исходы ω ; всего этих исходов имеется 16 – количество двоичных четырехразрядных чисел, так что $|\Omega| = 16$. Обозначим A событие, заключающееся в том, что эта схема замкнута. Событие A , как легко проверить, включает следующие состояния: (1,1,1,1), (1,1,0,1), (1,0,1,1), (1,0,0,1), (0,1,1,1), то есть, $|A| = 5$ и $P(A) = 5/16$.

Комбинаторные формулы, наиболее часто используемые при вычислении вероятностей, связанных с конечными множествами элементарных исходов.

Число перестановок: если имеется n различных объектов, то их можно переставить в различном порядке числом способов, равным n-факториал:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Число сочетаний: если из n предметов извлекать случайным образом группы по k предметов (не возвращая извлеченные), то число таких групп равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

C_n^k называется **биномиальным коэффициентом**; **бином Ньютона** показывает роль этих коэффициентов:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} . \qquad (2)$$

С комбинаторной точки зрения, C_n^k есть число k – элементных подмножеств у множества, состоящего из n элементов. На языке теории вероятностей это означает, что в множестве элементарных исходов Ω (таком что $|\Omega| = n$), существует C_n^k различных случайных событий A таких, что $|\mathrm{A}| = k$. **Общее число случайных событий** получается суммированием по всем k от 0 до n , и согласно формуле (2),

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$$

При больших значениях n может быть полезной асимптотическая **формула Стирлинга** для факториала:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n,$$

знак $\sim$ обозначает, что отношение величин, стоящих слева и справа от него, стремится к 1.

Примеры решения задач с применением комбинаторных формул.

Пример 4. На полке случайным образом расставлено 10 книг, среди них – трехтомник Пушкина. Какова вероятность того, что эти три тома оказались рядом?

Множество Ω состоит из всех перестановок десяти книг, так что $|\Omega| = 10!$. Три тома могут быть расположены рядом в 8 положениях (на левом краю полки, на правом и на всех промежуточных). Кроме того, эти три тома могут быть переставлены между собой 3! способами, а также прочие книги могут быть переставлены между собой 7! способами; следовательно, искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{8 \cdot 3! \cdot 7!}{10!} = \frac{7!}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{1}{15}.$$

Пример 5. Из колоды в 52 карты наугад вынимается n карт ($2 \le n \le 13$) . С какой вероятностью среди них будет хотя бы две одинаковых ((одинаковых по старшинству, например, два короля, или две десятки). При каком n эта вероятность будет не менее 0,5?

В этом примере множество элементарных исходов Ω состоит из всех возможных наборов по n карт, число таких возможных элементарных исходов $|\Omega| = C_{52}^n$. В данном случае проще подсчитать число наборов из n карт, в которых нет одинаковых по достоинству. Поскольку каждая карта в колоде представлена четырьмя цветами, то таких наборов можно составить $4^n C_{13}^n$. Обозначая искомую вероятность *p(n)*, имеем,

$$p(n) = \frac{|\Omega| - 4^n C_{13}^n}{|\Omega|} = 1 - \frac{4^n C_{13}^n}{C_{52}^n} = 1 - 4^n \frac{13!\, n!\, (52-n)!}{n!\, (13-n)!\, 52!} =$$

$$= 1 - 4^n \frac{n(14-n)(15-n) \cdots (52-n)}{14 \cdot 15 \cdots 52} =$$
$$= 1 - 4^n \left(1 - \frac{n}{14}\right)\left(1 - \frac{n}{15}\right) \cdots \left(1 - \frac{n}{52}\right).$$

Непосредственные вычисления дают *p(5)* = 0,4929 и *p(6)* = 0,6548; поскольку *p(n)* растет с увеличением n , то это и есть ответ.

Упражнение 1. Вычислите в Excel все вероятности $p(n), n = 2,3, \dots, 13$ и постройте график зависимости p от n. Для вычисления биномиального коэффициента C_n^k используйте функцию ЧИСЛКОМБ(*n*,*k*).

Пример 6. Следующий пример, основанный на ошибочных рассуждениях (впрочем, достаточно типичных), может служить некоторым предостережением.

Некто утверждает, что согласно его наблюдениям, при подбрасывании трех игральных костей сумма 11 выпадает чаще, чем сумма 12. В то же время ему известно определение вероятности, согласно которому эти события должны быть равновероятными. В подтверждение он приводит следующие рассуждения: из трех чисел (от 1 до 6) сумму 11 можно составить 6 способами,

$$A = \{6+4+1, 6+3+2, 5+5+1\,, 5+4+2, 5+3+3, 4+4+3\ \},$$

аналогично, сумму 12,

$$B = \{6+5+1, 6+4+2, 5+5+2\,, 5+4+3, 4+4+4, 6+3+3\ \},$$

так что $|\mathrm{A}| = |\mathrm{B}|$.

В действительности перечисленные исходы не являются элементарными, как того требует классическое определение вероятности; в самом деле, например, $6+4+1$ является составным событием,

$$6+4+1 = \{(6,4,1), (6,1,4), (4,6,1), (4,1,6), (1,6,4), (1,4,6)\},$$

в то время как

$$4+4+4 = (4,4,4).$$

В литературе имеется упоминание о том, что с предложением растолковать такое противоречие действительно некто обратился в свое время к французскому естествоиспытателю Блезу Паскалю. Правильный подсчет элементарных исходов дает здесь $|\mathrm{A}| = 27,\ |\mathrm{B}| = 25$.

Пример этот поучителен еще в одном отношении: поскольку в рассматриваемом статистическом эксперименте $|\Omega| = 6^3\ = 216$, то отличие вероятностей составляет весьма небольшую величину

$$P(A) - P(B)\ = \frac{|\mathrm{A}|}{|\Omega|} - \frac{|\mathrm{B}|}{|\Omega|} = \frac{2}{216}\,.$$

Спрашивается: сколько времени надо посвятить данному увлекательному занятию, чтобы на основе жизненного опыта с достаточной уверенностью утверждать, что два события имеет значимо различающиеся вероятности? Позже, изучив теорию вероятностей, вы сможете ответить на этот вопрос.

Отметим основные свойства вероятности, следующие из классического определения:

1) $0 \le P(A) \le 1$
2) если события A и B не имеют общих элементарных исходов (то есть, множества A и B не пересекаются, и $A \cap B = \emptyset$), то вероятность того, что произойдет хотя бы одно из событий, A или B, равна

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Пример 7. В ящике находятся 8 белых и 4 черных шара. Из ящика случайным образом извлекаем два шара. Найти вероятности того, что оба шара белые (событие *A*), что оба шара черные (событие *B*) и вероятность того, шары разного цвета (событие *C*). Множество Ω всех возможных исходов данного эксперимента состоит из множества всех пар, которые можно составить из двенадцати шаров, следовательно

$$|\Omega| = C_{12}^2 = \frac{12!}{2!10!} = \frac{12\cdot 11}{2} = 66.$$

Событие A состоит из пар белых шаров, количество которых равно $|A| = C_8^2 = 28$, следовательно,

$$P(A) = \frac{28}{66}.$$

Аналогичным образом получаем

$$P(B) = \frac{6}{66}.$$

Число пар разноцветных шаров равно $|C| = 4 \cdot 8$, и $P(C) = \frac{32}{66}$. Обратите внимание, что сумма вероятностей трех событий равна 1: $P(A) + P(B) + P(C) = 1$.

Пример 8. **Гипергеометрическое распределение**.

В пруду имеется N рыб (неизвестное число). Чтобы оценить N, вылавливаем n штук и помечаем их, потом выпускаем. Через некоторое время вылавливаем K рыб (контрольная выборка) и считаем, какое число k среди них оказалось помеченных. Вопрос: с какой вероятностью среди K рыб контрольной выборки обнаружим k помеченных?

Всего может быть $|\Omega| = C_N^K$ вариантов выбрать K предметов из N. Из n помеченных объектов можно C_n^k способами выбрать какие-то k штук. Число вариантов выбрать оставшиеся $(K - k)$ непомеченных объектов контрольной выборки из общего числа $(N - n)$ непомеченных равно C_{N-n}^{K-k}. Таким образом, вероятность получить k помеченных объектов в контрольной выборке объема K равна

$$p(k) = \frac{C_n^k C_{N-n}^{K-k}}{C_N^K}.$$

Пусть $N = 1000$, $n = 50$, $K = 25$; вычислите в Excel значения $p(k)$ для всех возможных k и постройте график зависимости $p(k)$. Для вычисления биномиального коэффициента C_n^k используйте функцию ЧИСЛКОМБ(n,k).