5. Формула полной вероятности, формула Байеса

Определение. Набор случайных событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ назовем **полной системой событий**, если события попарно несовместны, $A_i \cap A_k = \emptyset \ (i \neq k)$ и в сумме составляют достоверное событие, $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$.

Заметим, что из определения следует, $P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$.

Теорема 1. (**формула полной вероятности** и **формула Байеса**). Пусть A – некоторое событие, $\{A_k, k = 1, \dots, n\}$ – полная система событий. Тогда справедлива формула полной вероятности

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A/A_k)P(A_k)$$

и формула Байеса

$$P(A_i/A) = \frac{P(A/A_i)P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A/A_k)P(A_k)}$$

Доказательство. Поскольку $\{A_k\}$ – полная система событий, то

$$A = A \cap \Omega = A \cap (A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \textstyle\sum_k (A \cap A_k),$$

поскольку

$$P(\textstyle\sum_k (A \cap A_k)) = \sum_k P(A \cap A_k),$$

причем справа здесь – сумма несовместных событий, так что в силу аддитивности вероятности, $P(A) = \sum_k P(A \cap A_k)$; подставляя сюда выражение для совместной вероятности

$$P(A \cap A_k) = P(A/A_k)P(A_k),$$

получаем формулу полной вероятности.

Для вывода формулы Байеса отметим, что формулу для совместной вероятности можно равным образом записать так:

$$P(A \cap A_k) = P(A/A_k)P(A_k) = P(A_k/A)P(A);$$

выразим из второго равенства условную вероятность

$$P(A_i/A) = \frac{P(A/A_i)P(A_i)}{P(A)}$$

и подставив сюда $P(A)$ из формулы полной вероятности, получим формулу Байеса.■

Вероятности $p_i = P(A_i)$ называют априорными вероятностями, а $P(A_i/A)$ - апостериорными вероятностями A_i , которые обычно называют гипотезами.

Пример 1. В первом ящике находятся 5 белых и 3 черных шара, во втором – 2 белых и 4 черных. Из первого ящика во второй переносятся два шара, затем из второго вынимается шар. С какой вероятностью этот шар будет белым (событие A)? При условии, что этот шар оказался белым, какова вероятность того, что были перенесены два шара разного цвета?

Обозначим:

$$A_1 = \{\text{перенесены два белых шара}\}$$

$$A_2 = \{\text{перенесены два черных шара}\}$$

$$A_3 = \{\text{перенесены шары разного цвета }\}$$

эти события составляют полную группу. Найдем их вероятности:

$$p_1 = P(A_1) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{5 \cdot 4}{8 \cdot 7} = \frac{5}{14} = 0{,}357$$

$$p_2 = P(A_2) = \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{3 \cdot 2}{8 \cdot 7} = \frac{3}{28} = 0{,}107$$

$$p_3 = P(A_3) = \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{28} = 0{,}536$$

Первые две вероятности вычислены непосредственно согласно определению классической вероятности, а третья с применением формулы умножения вероятностей. Легко проверить условие нормировки: $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$.

Для события $A = \{\text{вынутый из второго ящика шар} - \text{белый}\}$ составим условные вероятности:

$$P(A/A_1) = \frac{1}{2}, \qquad P(A/A_2) = \frac{1}{4}, \qquad P(A/A_3) = \frac{3}{8},$$

по формуле полной вероятности,

$$P(A) = P(A/A_1)P(A_1) + P(A/A_2)P(A_2) + P(A/A_3)P(A_2) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{28} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{28} + \frac{3}{8} \cdot \frac{15}{28} = 0{,}406$$

Ответ на второй вопрос дает формула Байеса:

$$P(A_3/A) = \frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{15}{28}}{0{,}406} = 0{,}494$$

Таким же образом можно найти $P(A_1/A) = 0{,}440$, $P(A_2/A) = 0{,}066$.

Пример 2. Задача о разорении. Рассмотрим пример применения формулы полной вероятности к анализу процессов.

На одном шаге игры с вероятностью ½ игрок получает выигрыш 1 и с вероятностью ½ проигрыш -1. Начальный капитал игрока обозначим X. Правила игры: игра заканчивается, если $X = 0$ (разорение), или $X = S$ (победа); здесь $S > X$. Найти вероятность разорения игрока.

Обозначим A событие, заключающееся в разорении игрока при начальной сумме его капитала X, через $f(X)$ обозначим вероятность такого исхода; она является, естественно, некоторой функцией начального капитала. Пусть событие B заключается в том, что на первом шаге имел место выигрыш, тогда

$$P(B) = \frac{1}{2}, \qquad P(A/B) = f(X+1), \qquad P(A/\bar{B}) = f(X-1)$$

подставив эти значения в формулу полной вероятности,

$$P(A) = P(A/B)P(B) + P(A/\bar{B})P(\bar{B}),$$

получим уравнение

$$f(X) = \frac{1}{2}[f(X+1) + f(X-1)], \quad (1 \le X \le S-1)$$

к которому следует добавить естественные граничные условия

$$f(0) = 1, \qquad f(S) = 0.$$

Уравнение для функции f можно переписать в виде

$$f(X+1) - f(X) = f(X) - f(X-1),$$

это есть уравнение с постоянными приращениями, а значит, функция $f(X)$имеет вид

$$f(X) = a + bX;$$

константы находим из граничных условий,

$$a = 1, \qquad a + bS = 0,$$

и получаем решение:

$$f(X) = 1 - \frac{X}{S}, \quad (0 \le X \le S)$$

Пример 3. В ящике находятся n белых и черных шаров. Сколько шаров того и иного цвета неизвестно, есть основания предполагать, что все сочетания цветов равновероятны. В ящик опускаем белый шар, затем случайным образом вынимаем из него один шар. С какой вероятностью этот шар будет белым?

Обозначим $A_i = \{$в ящике i белых шаров$\}$ (i = 0,1,…, n), A = {вынут белый шар}. Составляем формулу полной вероятности:

$$P(A_i) = \frac{1}{n+1}, \qquad P(A/A_i) = \frac{i+1}{n+1},$$

$$P(A) = \sum_{i=0}^{n} \frac{i+1}{n+1}\frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)^2}\frac{1+n+1}{2} = \frac{1}{2}\frac{n+2}{n+1}.$$

По формуле Байеса найдем вероятности

$$P(A_i/A) = 2\frac{i+1}{(n+1)(n+2)}, \qquad i = 0,1,\dots,n.$$

Обратите внимание, как изменились вероятности событий A_i. Вначале эти вероятности одинаковы, но после того как был произведен эксперимент и наступило событие A, вероятности приняли новые значения. Следовательно, формула Байеса позволяет учесть результат опыта при пересчете вероятностей событий. Исходные вероятности $P(A_i)$ принято называть априорными (известными заранее, до опыта), а вероятности $P(A_i/A)$ – апостериорными, после эксперимента.

Решите эту задачу для события B = {вынут черный шар} = $\bar{A}$.