8. Математическое ожидание

I. Математическое ожидание дискретных случайных величин

Определение. Пусть дискретная случайная величина ξ принимает значения $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ с вероятностями $p_k = P\{\xi = x_k\}$. **Математическим ожиданием** ξ называется

$$E(\xi) = E\xi = \sum_{\mathrm{k}} x_k\, p_k$$

Математическое ожидание существует, если ряд сходится абсолютно.

Рассмотрим примеры вычисления математического ожидания.

$0\ 1\ \ p\ \ \ \xi\ \ 0\ 1\ \ P\{\xi = 1\} = p\quad\ P\{\xi = 0\} = 1 - p\ \ \ E\xi = 1 * p + 0 * (1 - p) = p$

Пример 1. Пусть ξ - случайная величина, соответствующая схеме Бернулли с параметрами p и n (см. Лекция 6, **Биномиальное распределение**):

$$P\{\xi = \mathrm{k}\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0,1,2, \dots, n.$$

Формулу для математического ожидания биномиального распределения

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\mathrm{n}} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

преобразуем, используя равенство

$$kC_n^k = k\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = nC_{n-1}^{k-1},$$

тогда получаем,

$$E\xi = np\sum_{k=1}^{\mathrm{n}} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k} =$$

$$= np\sum_{m=0}^{\mathrm{n-1}} C_{n-1}^{m} p^{m}(1-p)^{n-1-m} = np\,[p + (1-p)]^{n-1} = np.$$

Пример 2. Математическое ожидание геометрического распределения (см. Лекция 6, **Геометрическое распределение**):

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} p = p\big(1 + 2q + 3q^2 + \cdots\big)$$

Сумма в скобках представляет собой производную от суммы геометрической прогрессии

$$1 + 2q + 3q^2 + \cdots = \frac{d}{dq}(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots) = \frac{d}{dq}\frac{1}{1-q} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

поэтому,

$$E\xi = \frac{1}{p}.$$

Упражнение 1. Показать, что математическое ожидание распределения Пуассона (см. Лекция 6, **Распределение Пуассона**) равно λ.

Рассмотрим статистическое толкование математического ожидания. Пусть случайная величина ξ, в зависимости от выпавшего исхода ω некоторого статистического эксперимента, может принимать одно из двух значений, x_1или x_2; тем самым определены два случайных события: A_1и A_2.

Предположим, некто совершил n раз испытание, соответствующее этому статистическому эксперименту, в результате n_1 раз наблюдалось событие A_1 и n_2 раз - событие A_2. Пусть значения x_1и x_2 имеют смысл выигрыша, получаемого игроком в результате реализации соответствующего случайного события. Тогда средний выигрыш, приходящийся на одно наблюдение, равен суммарному выигрышу, деленному на число наблюдений,

$$\bar{X} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2}{n} = \frac{n_1}{n} x_1 + \frac{n_2}{n} x_2.$$

В соответствии со статистическим пониманием вероятности, мы ожидаем, что при большом n отношение $\frac{n_1}{n}$ будет близко к вероятности $p_1 = P(A_1)$, а $\frac{n_2}{n}$ - к вероятности $x_2 = P(A_2)$, таким образом, наблюдаемое среднее значение $\bar{X}$ (выборочное среднее) будет близко к математическому ожиданию

$$E\xi = P(A_1)\, x_1 + P(A_2)\, x_2 = p_1\, x_1 + p_2\, x_2.$$

Немного позже этим соображениям будет доставлен смысл точных математических теорем (см. **закон больших чисел** и **центральная предельная теорема**), пока же мы имеем в виду, что принятое в теории вероятностей определение математического ожидания вполне соответствует интуитивному пониманию среднего значения.

II. Математическое ожидание непрерывных случайных величин

Определение. Пусть абсолютно непрерывная случайная величина ξ имеет плотность распределения $p_\xi(x)$. **Математическим ожиданием** ξ называется

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p_\xi(x) dx$$

(предполагается, что этот интеграл сходится абсолютно).

Пример 3. Математическое ожидание равномерного распределения. Для равномерного распределения на интервале $[a,b]$ (см. Параграф 6)

$$E\xi = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{a+b}{2}$$

Пример 4. Математическое ожидание экспоненциального распределения:

$$E\xi = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx$$

Интеграл вычисляем по формуле интегрирования по частям, $\int u dv = uv - \int v du$, выбирая $u = x, dv = -xe^{-\lambda x} dx, v = e^{-\lambda x}$; в полученном выражении первое слагаемое будет равно 0, останется интеграл $\int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda x} d(\lambda x) = \frac{1}{\lambda}$, таким образом,

$$E\xi = \frac{1}{\lambda}.$$

Пример 5. ”Геометрическая” интерпретация математического ожидания. Рассмотрим дискретную случайную величину, принимающую два значения:

$$P\{\xi = x_1\} = p_1, \qquad P\{\xi = x_2\} = p_2$$

Для нее $E\xi = x_1 p_1 + x_2 p_2$; если представить вероятности $p_1,\ p_2$ как массы, расположенные в точках x_1 и x_2, то $E\xi$ будет центром масс этой системы.

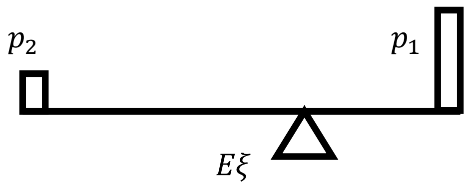

Рисунок 2. Математическое ожидание – центр тяжести

Особенно наглядно это при равных вероятностях, $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$, тогда $E\xi = \frac{x_1+x_2}{2}$.

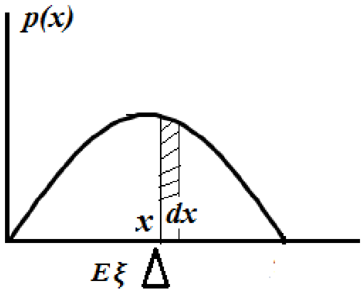

Рисунок 3. Геометрия математического ожидание в непрерывном случае

Для непрерывного распределения геометрия математического ожидания показана на Рисунке 3. Заштрихованный столбик на графике плотности распределения - аналог ”массы” величиной $p(x)dx$ если фигуру под графиком плотности представить равномерно распределенную по ней массу. Центр тяжести этой массивной фигуры получаем, просуммировав (проинтегрировав) $xp(x)dx$ и поделив на суммарную массу, равную $\int p(x)dx = 1$, то есть, центр тяжести фигуры $\int xp(x)dx$ и есть математическое ожидание.

Упражнение. Построение распределения случайной величины и вычисление ее математического ожидания.

Точка бросается случайным образом внутрь круга радиуса R. Случайная величина есть расстояние от точки до центра круга. Найти функцию распределения, плотность, математическое ожидание и медиану этой случайной величины.