Условные распределения, условные математические ожидания

Рассмотрим две дискретные случайные величины: ξ со значениями $x_1, x_2, \dots, x_N$, и η , принимающую значения $y_1, y_2, \dots, y_M$. Совместное распределение этих случайных величин есть набор вероятностей

$$p_{ik} = P\{\xi = x_i, \eta = y_k\}$$

а их распределения по отдельности задаются вероятностями

$$p_i = P\{\xi = x_i\} \quad \text{и} \quad q_k = P\{\eta = y_k\}.$$

Здесь удобно будет использовать следующее представление дискретной случайной величины ξ,

$$\xi(\omega) = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{I}_{A_i}(\omega) x_i,$$

где $\mathcal{I}_{A_i}$ обозначает индикатор множества $A_i = \{\omega : \xi(\omega) = x_i\}$,

$$\mathcal{I}_{A_i}(\omega) = \begin{cases} 1, \omega \in A_i \\ 0, \omega \notin A_i \end{cases};$$

поскольку $E\mathcal{I}_{A_i}(\omega) = P(A_i) = p_i$, то математическое ожидание случайной величины:

$$E\xi = \sum_{i=1}^{N} x_i P(A_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i p_i.$$

Зафиксируем некоторое событие $B_k = \{\eta = y_k\}$ и рассмотрим условные вероятности $P(A_i/B_k),\ i = 1,2, \dots, N$; эти вероятности составляют распределение, поскольку

$$\sum_{i=1}^{N} P(A_i/B_k) = P\left(\sum\nolimits_{i=1}^{N} A_i\,/B_k\right) = P(\Omega/B_k) = 1.$$

Если в математическом ожидании случайной величины ξ заменить p_i на эти условные вероятности, то получим конструкцию $\sum_{i=1}^{N} x_i\, P(A_i/B_k)$, которую естественно назвать условным математическим ожиданием.

Определение. Условное математическое ожидание случайной величины $\boldsymbol{\xi}$ при условии $\boldsymbol{\eta = y_k}$ равно

$$E(\xi/\eta = y_k) = \sum\nolimits_{i=1}^{N} x_i\, P(\xi = x_i/\eta = y_k) = \sum\nolimits_{i=1}^{N} x_i \frac{p_{ik}}{q_k}. \qquad (1)$$

Легко проверить, что при фиксированном k это выражение действительно дает математическое ожидание. Если случайные величины ξ и η независимы, то условное математическое ожидание совпадает с обычным: $E(\xi/\eta = y_k) = E\xi$. Таким образом, мы получили условное распределение случайной величины ξ и ее условное математическое ожидание.

Выражение для $E(\xi/\eta = y_k)$ определяет некоторую функцию от случайной величины η; обозначим эту функцию τ: $\tau(\omega) = E(\xi/\eta = y_k) \Leftrightarrow \eta(\omega) = y_k$. Иначе это можно записать в виде равенства, определяющего дискретную случайную величину:

$$\tau = \sum_{k=1}^{M} \mathcal{I}_{B_k} E(\xi/\eta = y_k).$$

Определение. Условное математическое ожидание $\boldsymbol{\xi}$ относительно η есть дискретная случайная величина

$$E(\xi/\eta) \ = \sum_{k=1}^{M} \mathcal{I}_{B_k} E(\xi/\eta = y_k) = \sum_{k=1}^{M} \mathcal{I}_{B_k} \sum_{i=1}^{N} x_i \frac{p_{ik}}{q_k}.$$

Основные свойства условного математического ожидания $E(\xi/\eta)$ сформулируем в следующей теореме.

Теорема 1. Справедливы следующие свойства условного математического ожидания:

1) Если случайные величины ξ и η независимы, то $E(\xi/\eta)$ является вырожденной случайной величиной, $E(\xi/\eta) = E\xi$.
2) Повторное математическое ожидание равно обычному: $E(E(\xi/\eta)) = E\xi$.
3) Если f – некоторая заданная функция, то

$$E(f(\eta)\xi/\eta)) = f(\eta)\, E(\xi/\eta)).$$

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Второе следует из свойств математического ожидания и условной вероятности,

$$E(E(\xi/\eta)) = \sum_{k=1}^{M} q_k \sum_{i=1}^{N} x_i \frac{p_{ik}}{q_k} = \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{k=1}^{M} p_{ik} = E\xi.$$

Третье свойство также получается непосредственно:

$$E(f(\eta)\xi/\eta)) = E\tau = \sum_{k=1}^{M} q_k\, E(f(\eta)\xi/\eta = y_k) = \sum_{k=1}^{M} q_k \sum_{i=1}^{N} f(y_k) x_i \frac{p_{ik}}{q_k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{M} q_k\, f(y_k) \sum_{i=1}^{N} x_i \frac{p_{ik}}{q_k} = \sum_{k=1}^{M} \mathcal{I}_{B_k} f(y_k) E(\xi/\eta = y_k) = f(\eta)\, E(\xi/\eta)). \blacksquare$$

Условное распределение для непрерывного распределения построим, исходя из аналогии с дискретным случаем. Пусть ξ и η имеют плотность совместного распределения $p_{\xi,\eta}(x, y)$, соответственно, $p_\xi(x)$ - плотность для ξ, а $p_\eta(y)$ - для η. В определении условного математического ожидания (1) заменим формально p_{ik} на $p_{\xi,\eta}(x, y)dxdy$, q_k на $p_\eta(y)dy$, тогда, выполняя вместо суммирования интегрирование, получим выражение $\int x \frac{p_{\xi,\eta}(x,y)dxdy}{p_\eta(y)dy}$, которое естественно принять в качестве определения условного математического ожидания.

Определение. Если ξ и η имеют плотность совместного распределения $p_{\xi,\eta}(x, y)$, то **условным математическим ожиданием случайной величины $\boldsymbol{\xi}$ при условии $\boldsymbol{\eta = y}$** назовем

$$E(\xi/\eta = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{p_{\xi,\eta}(x, y)}{p_\eta(y)} dx.$$

Функцию

$$p_{\xi/\eta}(x/y) = \frac{p_{\xi,\eta}\,(x,y)}{p_\eta\,(y)}$$

назовем **плотностью условного распределения $\boldsymbol{\xi}$ при условии $\boldsymbol{\eta = y}$**; тогда **условное математическое ожидание $\boldsymbol{\xi}$ при условии $\boldsymbol{\eta = y}$** можно записать в виде интеграла от условной плотности:

$$E(\xi/\eta = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_{\xi/\eta}(x/y)\,dx.$$

Полученное таким образом условное математическое ожидание есть некоторая функция $\tau(y)$ переменной y.

Определение. Условным математическим ожиданием непрерывной случайной величины $\boldsymbol{\xi}$ относительно непрерывной $\boldsymbol{\eta}$ называется случайна величина $E(\xi/\eta) = \tau(\eta)$, где функция $\tau(y) = E(\xi/\eta = y)$.

Упражнение 1. Доказать утверждения Теоремы 1 для условного математического ожидания непрерывных случайных величин.

Пример 1. Рассмотрим важный для будущего пример вычисления условного математического ожидания: пусть случайные величины ξ, η имеют двумерное нормальное распределение (11.3).

Для краткости будем считать, что математические ожидания a_1, a_2 равны 0, выполнив очевидное линейное преобразование. Подставляя формулы $p_{\xi,\eta}\,(x,y)$ и $p_\eta\,(y)$ в выражение для условной плотности, запишем

$$p_{\xi/\eta}(x/y) = \frac{\exp(Q)}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-r^2}},$$

где квадратичная форма

$$Q = -\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\left(\frac{x}{\sigma_1}\right)^2 - 2r\frac{x}{\sigma_1}\frac{y}{\sigma_2} + \left(\frac{y}{\sigma_2}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma_2}\right)^2.$$

Выделив в квадратных скобках полный квадрат относительно переменной x,

$$Q = -\frac{1}{2(1-r^2)\sigma_1^2}\left[\left(x - r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}y\right)^2 + \left(\frac{y}{\sigma_2}\right)^2(1-r^2)\sigma_1^2\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma_2}\right)^2,$$

получаем

$$Q = -\frac{1}{2(1-r^2)\sigma_1^2}\left(x - r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}y\right)^2.$$

Поставляя полученное выражение в формулу для условной плотности и возвращая ненулевые математические ожидания a_1, a_2, убеждаемся в том, что получена плотность гауссовского распределения

$$p_{\xi/\eta}(x/y) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2(1-r^2)\sigma_1^2}\left(x - (a_1 + r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-a_2)\right)^2\right]}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}\sigma_1}.$$

Итак, для случайных величин, имеющих совместное нормальное распределение, условное распределение также является нормальным с математическим ожиданием

$$E(\xi/\eta) = a_1 + r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\eta - a_2)$$

(условное математическое ожидание ξ относительно η) и дисперсией

$$D(\xi/\eta) = (1 - r^2)\sigma_1^2.$$

Полученные соотношения в математической статистике будут упоминаться как **уравнения нормальной регрессии**.