3. Случайные события и операции над ними, элементарные свойства вероятности, условная вероятность

Множество Ω, состоящее из *всех элементарных случайных исходов*, в теории вероятностей называют **достоверным событием**. Вероятность события Ω равна 1,

$$P(\Omega) = 1,$$

то есть, она принимает наибольшее возможное значение, поскольку это событие происходит всегда. Элементарные исходы, составляющие множество Ω, будем обозначать малыми буквами ω; если множество Ω состоит из конечного числа элементов, $\Omega = \{\omega_1, \omega_{2,\dots,}\omega_N\}$, то $|\Omega|$ обозначает это число, $|\Omega| = N$.

Случайное событие *A* есть подмножество множества Ω: $A \subset \Omega$. Если множество Ω конечно, то любое его подмножество можно считать случайным событием. Пустое множество $\emptyset$ (множество, не содержащее ни одного элемента) также считается случайным событием (невозможным событием); ему присваивается вероятность 0

$$P(\emptyset) = 0.$$

Над случайными событиями можно совершать обычные операции, определенные для множеств. **Объединение событий *A* и *B***, обозначаемое

$$A \cup B = \{\omega\colon \omega \in A \text{ или } \omega \in B\},$$

состоит из элементарных исходов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B: событие $A \cup B$ наступает, когда происходит либо событие A, либо B (хотя бы одно из них), то есть, объединение - это сумма событий.

Пересечение событий *A и B* (совместное наступление A и B) обозначается

$$A \cap B = \{\omega\colon \omega \in A \text{ и } \omega \in B\},$$

состоит из элементарных исходов, принадлежащих обоим множествам A и B: событие $A \cap B$ наступает, когда происходит и событие A и B. События A и B называются **несовместными,** если пересечение событий A,B является пустым множеством (совместное наступление A и B невозможно):

$$A \cap B = \emptyset.$$

Дополнение события *A* (множество тех элементов ω, которые не входят в A)

$$\bar{A}=\{\omega\colon \omega \notin A\}$$

называется **противоположным событием** (если не наступило событие A, значит наступило $\bar{A}$). Иногда при выводе формул удобно использовать операцию **разность событий**:

$$A\backslash B = A \cap \bar{B}.$$

Часто бывают полезными **соотношения двойственности**:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Для несовместных событий A и B ($A \cap B = \emptyset$) имеет место **формула сложения вероятностей**:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

то есть, вероятность суммы событий равна сумме вероятностей – это **свойство аддитивности** вероятности. Действительно, для классического определения вероятности из $A \cap B = \emptyset$ следует

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

откуда

$$P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{|A| + |B|}{|\Omega|} = P(A) + P(B)$$

Аналогично свойство аддитивности получается и для геометрического определения вероятности.

Применяя аддитивность к паре событий $A, \bar{A}$ и учитывая, что $P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$, получаем **вероятность противоположного события**

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A);$$

фактически это свойство вероятности мы уже использовали ранее при решении некоторых примеров и задач.

Для двух произвольных событий A и B можем записать

$$A = (A \backslash B) \cup (A \cap B)$$
$$B = (B \backslash A) \cup (A \cap B)$$

представив каждое из них в виде суммы пары несовместных событий. Применяя свойство аддитивности вероятности, получим равенства

$$P(A) = P(A \backslash B) + P(A \cap B)$$
$$P(B) = P(B \backslash A) + P(A \cap B)$$

откуда,

$$P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$$
$$P(B \backslash A) = P(B) - P(A \cap B)$$

Аналогичным образом, представив объединение $A \cup B$ в виде суммы несовместных событий,

$$A \cup B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \cup (A \cap B),$$

применим свойство аддитивности,

$$P(A \cup B) = P(A \backslash B) + P(B \backslash A) + P(A \cap B)\ ,$$

тогда, подставляя сюда найденные выражения для вероятностей $P(A \backslash B)$ и $P(B \backslash A)$, получаем:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

это **формула включения и исключения**.

Эта формула справедлива для любых событий. Из нее, в частности, следует, что всегда

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B).$$

Отметим попутно, что если $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$ (**свойство монотонности вероятности**), это следует из представления события B в виде объединения двух несовместных событий, $B = (B \backslash A) \cup (A \cap B)$, которое в данном случае приобретает вид $B = (B \backslash A) \cup A$.

Замечание. В литературе по теории вероятностей в формулах с операциями над множествами часто используют “арифметические” обозначения:

$$A \cup B = A + B, A \cap B = AB.$$

Обычно это не создает неясностей, в то же время так формулы выглядят удобнее.

Упражнение. Выведите формулу включения-исключения для трех событий, $P(A \cup B \cup \mathrm{C}) = \cdots$. Как выглядит эта формула в общем случае (для n событий)?

Когда рассматриваются одновременно несколько разных событий, то очень часто обнаруживается некоторые зависимости между ними: тот факт, что наступило событие B, существенно влияет на вероятность наступления события A.

Пример 1. Из 30 билетов студент выучил билеты с 1 по 5 и с 26 по 30. Придя на экзамен, он обнаружил, что остались билеты с 1 по 20. Какова вероятность удачи (то есть, попадет знакомый билет)?

Обозначим A событие $A = \{\text{студенту попался хороший билет}\}$, а через B обозначим событие B = $\{\text{остались билеты } 1-20\}$, Ω – множество всех билетов. Предполагая, что билеты перемешаны случайным образом, A и B можно считать случайными событиями.

В исходном состоянии (все билеты на столе) вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

аналогично,

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

Если достоверно известно, что наступило событие B, то формула для вычисления вероятности должна измениться, поскольку учитывать надо только те элементарные исходы, которые входят в событие B. Отметим временно эту новую формулу значком события B, чтобы подчеркнуть, что теперь она определяется наступившим событием B:

$$P_B(A) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

это и есть условная вероятность. Эту вероятность, имеющую смысл вероятности A при условии, что известно о наступлении события B, можно переписать по-другому:

$$P_B(A) = \frac{|A \cap B|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{5/30}{20/30} = \frac{1}{4}$$

Теперь понятно, как следует определить условную вероятность.

Определение. **Условной вероятностью** события A при условии события B называется

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

(предполагаем, что событие B имеет положительную вероятность).

Пример 2. В ящике находятся 8 белых и 4 черных шара. Из ящика случайным образом извлекаем один шар. Обозначим A событие, состоящее в том, что извлеченный шар белый, тогда

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{8}{12} = 0{,}667$$

Предположим теперь, что сначала из ящика извлекается и удаляется шар, а затем извлекаем шар. Какова теперь вероятность того, что этот второй шар белый? Естественно, эта вероятность завит от того, какого цвета был удаленный шар. Обозначим два возможных варианта: *B* = {удален белый шар}, *C* = {удален черный шар}, тогда

$$P(A/B) = \frac{7}{11} = 0{,}636$$

$$P(A/C) = \frac{8}{11} = 0{,}727$$

Простой пример, чтобы показать, что условная вероятность это не часть вероятности – она может быть как меньше, так и больше исходной вероятности события.

Переписав определение условной вероятности в виде:

$$P(A \cap B) = P(A/B)P(B),$$

получаем так называемую **формулу умножения вероятностей**.

С ее помощью можно по-другому вычислить вероятности из **Примера 1.7**. (В ящике находятся 8 белых и 4 черных шара. Из ящика случайным образом извлекаем два шара. Найти вероятности того, что оба шара белые (событие *A*), что оба шара черные (событие *B*) и вероятность того, шары разного цвета (событие *C*)).

Событие *A* (вынуты два белых шара) можно представить в виде совместного наступления двух событий: сначала вынимаем один шар, он оказывается белым (событие A_1), потом вынимаем еще один шар, он белый (событие A_2), тогда $A = A_1 \cap A_2$ и по формуле умножения вероятностей,

$$P(A) = P(A_1A_2) = P(A_2/A_1)P(A_1) = P(A_1)P(A_2/A_1) = \frac{8}{12}\frac{7}{11} = \frac{28}{66}$$

Событие *C* (вынуты два шара разного цвета) можно представить в виде

$$C = \overline{A_1}A_2 + A_1\overline{A_2}$$

тогда

$$P(C) = P\left(\overline{A_1}A_2\right) + P(A_1\overline{A_2}) = P(A_2/\overline{A_1})\,P(\overline{A_1}) + P(\overline{A_2}/A_1)\,P(A_1) =$$

$$= P(\overline{A_1})P(A_2/\overline{A_1}) + P(A_1)P(\overline{A_2}/A_1) = \frac{4}{12}\frac{8}{11} + \frac{8}{12}\frac{4}{11} = \frac{32}{66}$$

С помощью условной вероятности можно, например, понять, как выглядит статистическое описание системы ”без памяти”. Представим себе систему, где в случайные моменты времени происходят некоторые события, а нас интересуют вероятности вида $P\{\tau > t\}$, где τ обозначает время ожидания следующего события, а *t* – заданное число. То есть, мы хотим иметь возможность вычислять вероятности того, что следующего события придется ждать не меньше, чем *t* единиц времени (например, *t* секунд). Предположим, эта гипотетическая система ведет себя следующим образом: если мы уже ждали не менее *s* секунд, то вероятность того, что придется ждать еще *t* секунд, не зависит от этого *s*. Мы предполагаем, что для любого *t* событие $\{\tau > t\}$ является случайным событием, поэтому на языке условных вероятностей это свойство отсутствия памяти выглядит так:

$$P\{\tau > s + t \ / \ \tau > s\} = \ P\{\tau > t\}$$

но

$$P\{\tau > s + t \ / \ \tau > s\} =$$

$$= \frac{P(\{\tau > s + t\} \cap \{\tau > s\})}{P\{\tau > s\}} = \frac{P\{\tau > s + t\}}{P\{\tau > s\}} = P\{\tau > t\}$$

следовательно,

$$P\{\tau > s + t\} = P\{\tau > s\}P\{\tau > t\}$$

Обозначим $P\{\tau > t\} = G(t)$, тогда для функции $G(t)$ мы получили уравнение

$$G(s + t) = G(s)G(t) \qquad (4.1)$$

которое имеет единственное решение $G(t) = e^{-\lambda t}$, λ – некоторое положительное число. Если предположить, что $G(t)$дифференцируема, то решение получить несложно.

Действительно, из функционального уравнения (4.1) получаем

$$\frac{G(t + s) - G(t)}{s} = G(t)\left(\frac{G(s) - 1}{s}\right);$$

очевидно, $G(0) = 1$, поэтому при переходе к пределу s → 0 выражение справа в скобках стремится к производной $G'(0)$, ее обозначим $G'(0) = a$ и получаем дифференциальное уравнение для нашей функции,

$$\frac{dG(t)}{dt} = aG(t)$$

Оно имеет решение $lnG = at + const$ ($const = 0$, так как $G(0) = 1$), тогда $G = e^{at}$, но при t → ∞ функция G стремится к 0, а потому константа a должна быть отрицательной, $a = -\lambda$.

Конструкция системы ”без памяти” применяется к моделированию таких процессов как радиоактивный распад атомных ядер, распад словарного состава языка и т.д.