# Некоторые распределения случайных величин
# (выборочные распределения математической статистики)

В задачах математической статистики придется часто иметь дело с функциями от случайных величин. Набор измерений, который получается в результате эксперимента (выборку), мы рассматриваем как случайные величины и затем строим некоторую конструкцию на основе этой выборки. Тем самым мы получаем оценку - случайную величину, являющуюся функцией от случайной выборки.

Возникает вопрос: каково распределение вероятностей построенной оценки? Здесь мы рассмотрим некоторые распределения, полезные для задач математической статистики.

***Гамма-функцией*** называется

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty x^{u-1} e^{-x} dx, \ \ u > 0.$$

Рассмотрим основные свойства гамма-функции.

1) $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1;$
2) интегрируя по частям, находим,

$$\Gamma(u) = x^{u-1}(-e^{-x})\Big|_0^\infty + (u-1)\int_0^\infty x^{u-2} e^{-x} dx = (u-1)\Gamma(u-1);$$

3) из этих двух свойств следует, что для целого $n$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

4) для $u$ = ½ с помощью замены переменной $x = t^2$ приводим к интегралу Пуассона,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = 2\int_0^\infty e^{-x} d(\sqrt{x})\, dx = 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi},$$

отсюда можно вывести различные полезные соотношения, например,

$$\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \ .$$

**Определение.** Гамма-распределением называется непрерывное распределение с плотностью

$$p(x) = \frac{\lambda^u}{\Gamma(u)} x^{u-1} e^{-\lambda x}, \ \ x \geq 0, \qquad \lambda > 0, \qquad u > 0.$$

Гамма-распределение зависит от двух параметров $\lambda$ и $u$ , при различных значениях параметров получаются разнообразные распределения вероятнгостей. Например, при $u$ = 1 имеем экспоненциальное распределение.

**Теорема 1.** Характеристическая функция гамма-распределения равна,

$$\varphi(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^u;$$

отсюда, в частности, следует, что если случайные величины $\xi, \eta$ независимы и имеют гамма-распределения со своими параметрами $u_1$ и $u_2$ (и с одинаковыми $\lambda$), то их сумма имеет опять же гамма-распределение с параметрами $\lambda,\ u_1 + u_2$ .

**Доказательство**. Непосредственными преобразованиями получаем после замены переменной $y = (\lambda - it)x$,

$$\varphi(t) = \int_0^\infty e^{itx} p(x) dx = \frac{\lambda^u}{\Gamma(u)} \int_0^\infty e^{-(\lambda - it)x} x^{u-1} dx =$$

$$= \frac{\lambda^u}{\Gamma(u)(\lambda - it)^u} \int_0^\infty e^{-y} y^{u-1} dx = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^u . \blacksquare$$

**Упражнение 1.** Найти математическое ожидание, дисперсию и эксцесс для гамма-распределения.

**Определение.** Хи-квадрат распределение с $n$ степенями свободы есть распределение суммы квадратов $n$ независимых случайных величин, имеющих стандартное гауссовское распределение. Будем символически обозначать это распределение как $\chi_n^2$ .

**Теорема 2.** Распределение $\chi_n^2$ имеет плотность

$$p(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x \geq 0.$$

Доказательство. Согласно определению, берем $n$ независимых случайных величин $X_k \sim \mathcal{N}(0,1)$ и составляем сумму, которую обозначим $\mathcal{X}_n$ , $\mathcal{X}_n = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$, ее распределение и следует построить. Для одной случайной величины $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$ имеем, согласно Примеру 9.3.,

$$p_{X_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$$

но это есть плотность гамма-распределения с параметрами $\lambda = \frac{1}{2}, u = \frac{1}{2}$ и соответственно, с характеристической функцией

$$\varphi_{X_1}(t) = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - it}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Суммирование $\mathcal{X}_n = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ приводит к умножению характеристических функций:

$$\varphi_{\mathcal{X}_n}(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - it\right)^{\frac{n}{2}}}$$

то есть мы получили характеристическую функцию гамма-распределения с параметрами $\lambda = \frac{1}{2}, u = \frac{n}{2}$, соответствующая ей плотность и представлена в формулировке Теоремы. ■

**Определение.** Распределение Стьюдента с $n$ степенями свободы есть распределение случайной величины

$$T = \sqrt{n} \frac{\xi}{\sqrt{\eta}},$$

где $\xi, \eta$ независимы, $\xi$ имеет стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0,1)$, а $\eta$ - хи-квадрат распределение с $n$ степенями свободы

**Теорема 3.** Распределение Стьюдента с $n$ степенями свободы имеет плотность

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, -\infty < x < \infty.$$

**Доказательство**. Запишем дробь $T$ следующим образом:

$$T = \sqrt{n} \frac{\xi}{\sqrt{\eta}} = \frac{\sqrt{n}\xi}{\sqrt{\eta}} = \frac{\xi_1}{\xi_2}.$$

Случайная величина $\xi_1$ имеет плотность

$$p_{\xi_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{x^2}{2n}},$$

для случайной величины $\xi_2 = \sqrt{\eta}$ имеем,

$$F_{\xi_2}(x) = P\{\sqrt{\eta} \le x\} = P\{\eta \le x^2\} = F_\eta(x^2),$$

следовательно,

$$p_{\xi_2}(x) = 2x p_\eta(x^2) = \frac{x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}}}{2^{n/2-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Плотность распределения для дроби $\frac{\xi_1}{\xi_2}$ имеет вид:

$$p_T(x) = \int_0^\infty v p_1(vx) p_2(v) dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\, 2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty v e^{-\frac{x^2 v^2}{2n}} v^{n-1} e^{-\frac{v^2}{2}} dv =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\, 2^{n/2-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty v^n e^{-\frac{v^2}{2}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)} dv.$$

Сделаем замену переменной $y = \frac{v^2}{2}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)$, так что $v = \frac{\sqrt{2y}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{n}}}$, $dv = \frac{dy}{v\sqrt{1+\frac{x^2}{n}}}$, тогда

$$p_T(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\, 2^{n/2-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)} \int_0^\infty v^{n-1} e^{-y} dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\, 2^{n/2-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}+1}} \int_0^\infty y^{\frac{n-1}{2}} e^{-y} dy.$$

Оставшийся в этой формуле интеграл равен $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$, поэтому сокращая и преобразуя прочие члены формулы, а также учитывая выражения для гамма-функции, получаем в точности искомую формулу распределения Стьюдента. ■

Распределение Стьюдента с $n$ степенями свободы будем далее символически обозначать как $\mathcal{S}_n$.