Projeto 01: Rede Trófica

Hilário Fernandes de Araújo Júnior (92415)
Fernando Bandeira Soares (86281)

April 2, 2016

1 Objetivo

O objetivo deste projeto é modelar uma rede trófica em C através do modelo de Lotka-Volterra.

2 Construção do modelo

O sistema estudado possui uma espécie de vegetação, duas espécies herbívoras e duas espécies carnívoras (sendo que uma destas é onívora).

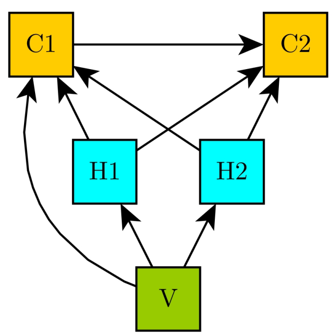

Figura 1: Representação gráfica da rede.

A seguir temos as equações diferenciais que descrevem as interações entre as espécies:

$$
\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= V(a_1 - \frac{b_1}{1000}V - \frac{c_1}{1000}H_1 - \frac{d_1}{1000}H_2 - \frac{e_1}{1000}C_2) \\
\frac{dH_1}{dt} &= H_1(-a_2 + b_2 V - c_2 C_1 - d_2 C_2) \\
\frac{dH_2}{dt} &= H_2(-a_3 + b_3 V - c_3 C_1 - d_3 C_2) \\
\frac{dC_1}{dt} &= C_1(-a_4 + b_4 H_1 + c_4 H_2 + d_4 V - e_4 C_2) \\
\frac{dC_2}{dt} &= C_2(-a_5 + b_5 H_1 + c_5 H_2 + d_5 C_1).
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Além disso, criamos duas maneiras de perturbar o sistema: Um desastre natural (que reduz em grande parte diversas populações em uma determinada iteração) e uma espécie de ruído (após o cálculo das quantias populacionais em cada iteração, utilizamos a função *rand ()* para acrescentar ou remover alguns indíviduos de cada população).

3 Simulações

3.1 Sistema estático com equilíbrio instável

É elementar que quando o critério $\frac{dV}{dt} = \frac{dH_1}{dt} = \frac{dH_2}{dt} = \frac{dC_1}{dt} = \frac{dC_2}{dt} = 0$ é satisfeito, obtemos um sistema estático (onde as quantias populacionais nunca variam).

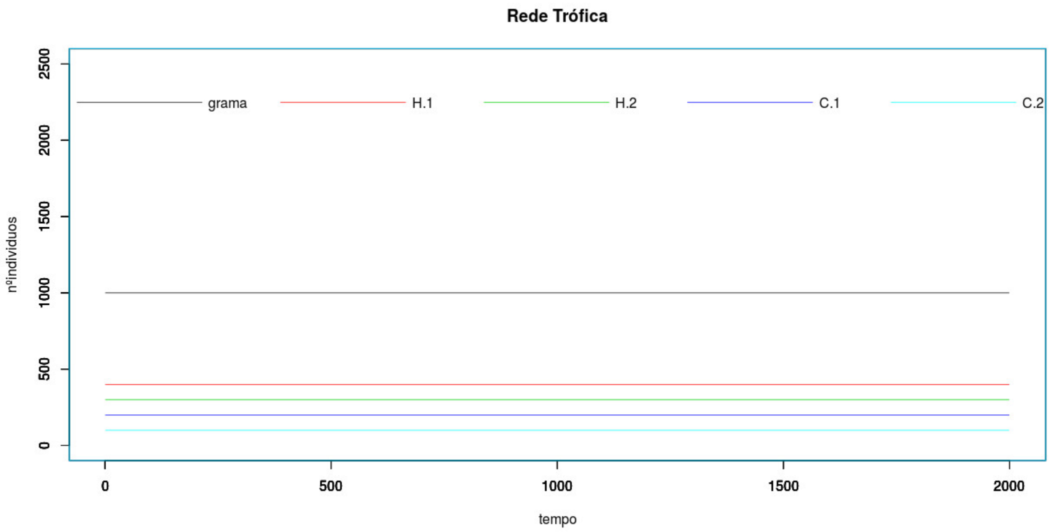

Figura 2: Sistema estático.

A figura 2 representa o sistema com as seguintes condições:

$$\begin{aligned}
[V(0), H_1(0), H_2(0), C_1(0), C_2(0)] &= [1000, 400, 300, 200, 100] \\
[a_1, b_1, c_1, d_1, e_1] &= [1900, 1000, 1000, 1000, 1000] \\
[a_2, b_2, c_2, d_2] &= [700, 1, 1, 1] \\
[a_3, b_3, c_3, d_3] &= [700, 1, 1, 1] \\
[a_4, b_4, c_4, d_4, e_4] &= [1600, 1, 1, 1, 1] \\
[a_5, b_5, c_5, d_5] &= [900, 1, 1, 1]
\end{aligned} \tag{2}$$

Todavia, qualquer alteração mínima neste sistema o destrói completamente após algumas iterações.

3.2 Sistema sem C_2 com equilíbrio estável

Foi possivel também encontrar parâmetros tais que o sistema permanecesse equilibrado de maneira estável, todavia sem a espécie C_2 (Fig. 3):

$$\begin{aligned}
[V(0), H_1(0), H_2(0), C_1(0), C_2(0)] &= [100, 40, 40, 8, 0] \\
[a_1, b_1, c_1, d_1, e_1] &= [0.071, 0.027, 0.086, 0.087, 0.01] \\
[a_2, b_2, c_2, d_2] &= [0.557, 0.00046, 0.0001, 0] \\
[a_3, b_3, c_3, d_3] &= [0.557, 0.00046, 0.0001, 0] \\
[a_4, b_4, c_4, d_4, e_4] &= [0.41, 0.00073, 0.00073, 0.00008, 0] \\
[a_5, b_5, c_5, d_5] &= [0, 0, 0, 0]
\end{aligned} \tag{3}$$

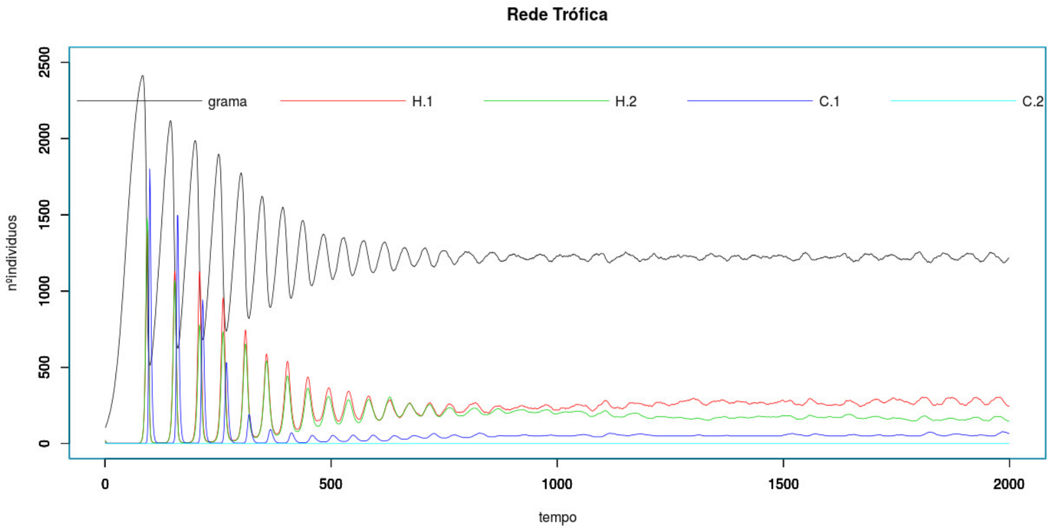

Figura 3: Sistema sem C_2 com equilíbrio estável.

Após inserirmos um desastre no sistema, percebemos que ele se manteve equilibrado:

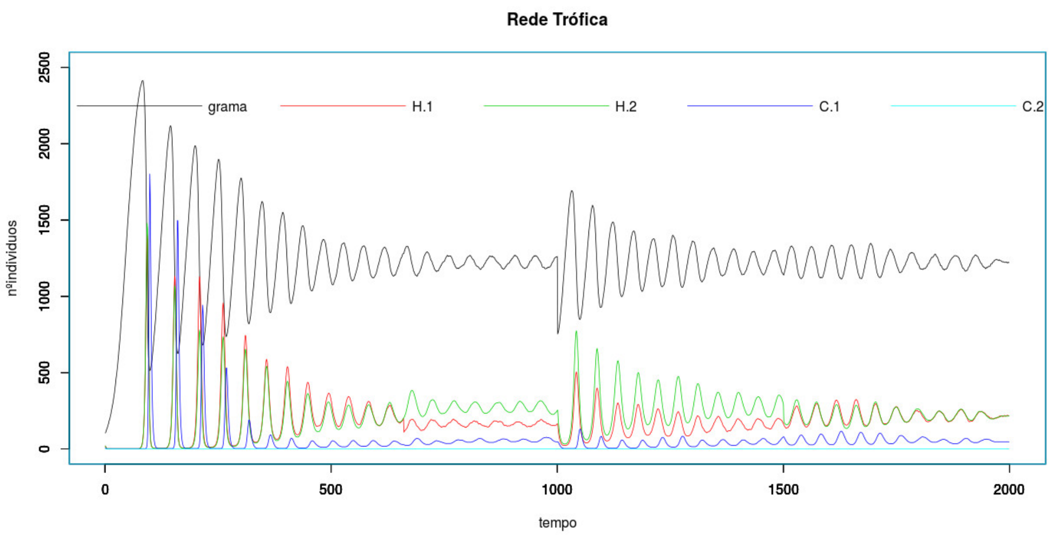

Figura 4: O sistema da Figura 3 com a inclusão de um desastre.

Alem disso, ao percebermos as quantias populacionais limites (quando o tempo tende a infinito), inserimos estes valores populacionais no início da simulação, como pode ser visto nas figuras 5 e 6 (sem e com ruídos, respectivamente):

$$\begin{aligned}
[V(0), H_1(0), H_2(0), C_1(0), C_2(0)] &= [1222, 219, 219, 91, 0] \\
[a_1, b_1, c_1, d_1, e_1] &= [0.071, 0.027, 0.086, 0.087, 0.01] \\
[a_2, b_2, c_2, d_2] &= [0.557, 0.00046, 0.0001, 0] \\
[a_3, b_3, c_3, d_3] &= [0.557, 0.00046, 0.0001, 0] \\
[a_4, b_4, c_4, d_4, e_4] &= [0.41, 0.00073, 0.00073, 0.00008, 0] \\
[a_5, b_5, c_5, d_5] &= [0, 0, 0, 0]
\end{aligned} \tag{4}$$

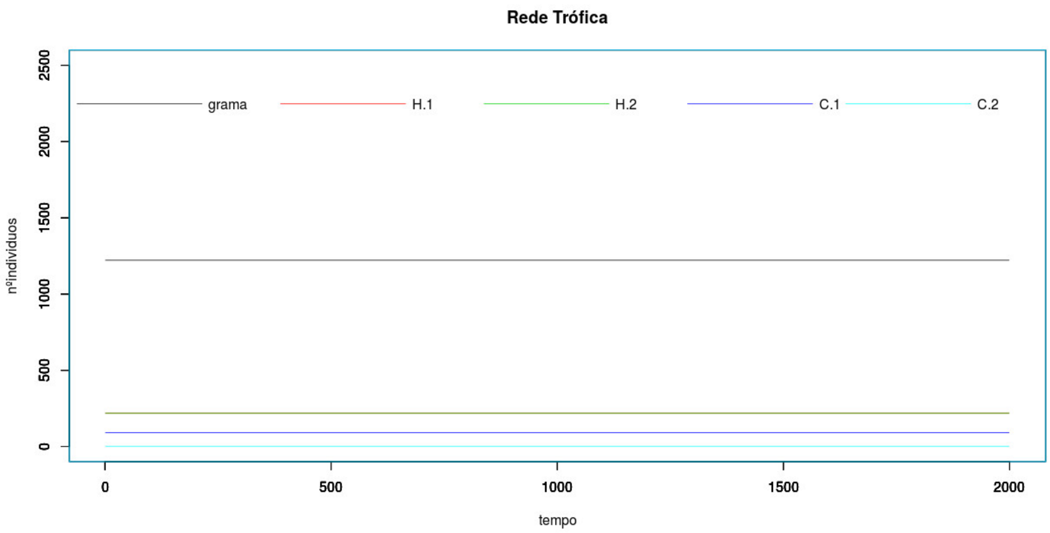

Figura 5: O sistema da Figura 3 com as populações iniciais alteradas.

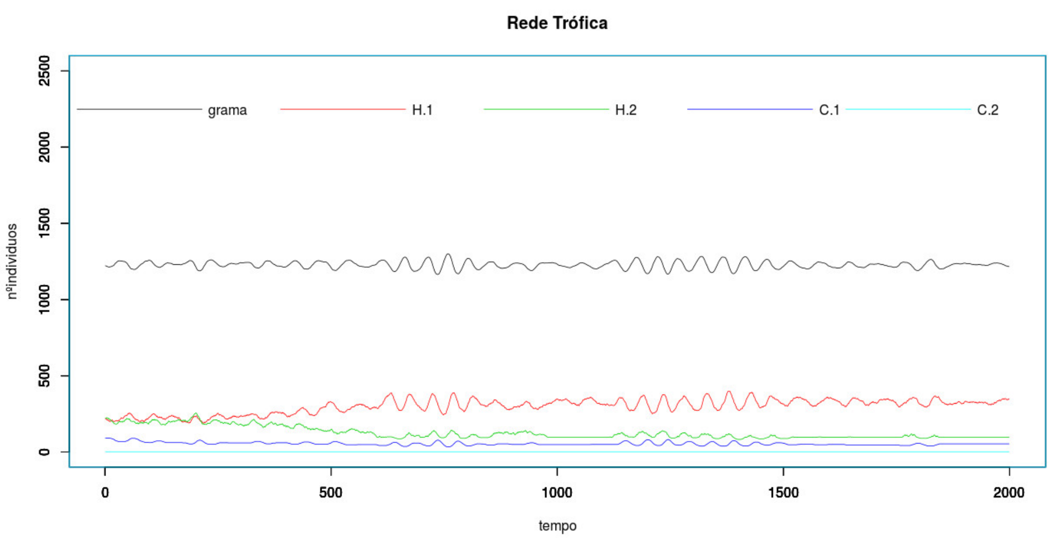

Figura 6: O sistema da figura 5 com a presença de perturbações.

3.3 Inserção de C_2

Partindo do sistema anterior, conseguimos incluir a espécie C_2. A solução foi fazer com que esta espécie não influenciasse nem fosse muito influenciada pelas outras. Como a espécie C_2 se estabiliza com 2 indivíduos neste sistema, o ruído que geramos apenas aumenta esse valor.

$$\begin{aligned}
[V(0), H_1(0), H_2(0), C_1(0), C_2(0)] &= [1222, 219, 219, 91, 5] \\
[a_1, b_1, c_1, d_1, e_1] &= [0.071, 0.027, 0.086, 0.087, 0.01] \\
[a_2, b_2, c_2, d_2] &= [0.557, 0.00046, 0.0001, 0.00001] \\
[a_3, b_3, c_3, d_3] &= [0.557, 0.00046, 0.0001, 0.00001] \\
[a_4, b_4, c_4, d_4, e_4] &= [0.41, 0.00073, 0.00073, 0.00008, 0.00001] \\
[a_5, b_5, c_5, d_5] &= [0.529, 0.0001, 0.0001, 0.0001]
\end{aligned} \tag{5}$$

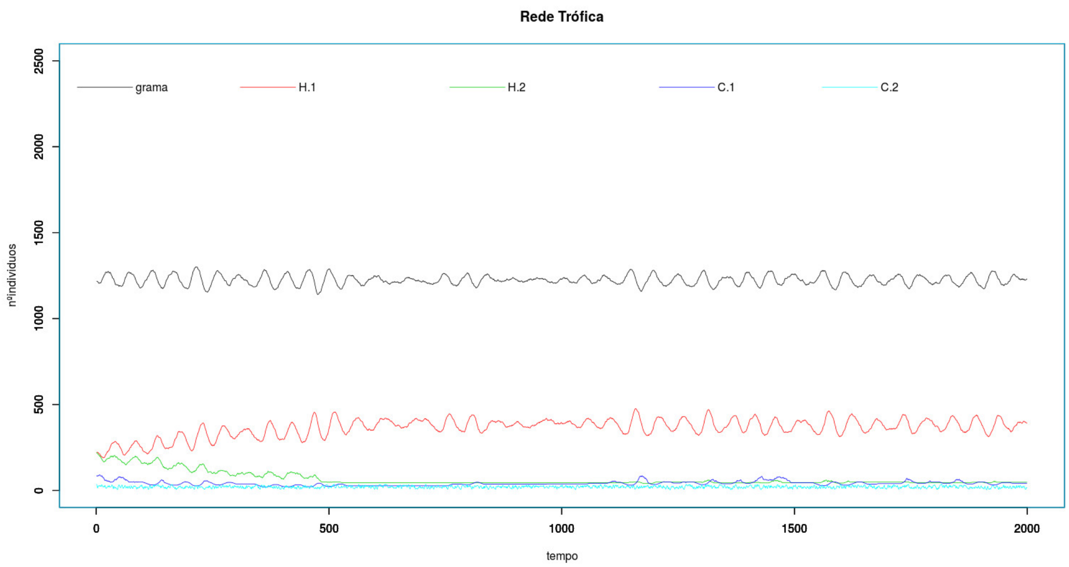

Figura 7: Comportamento do sistema após a inclusão de C_2.

3.4 Sistema oscilatório

Através da força bruta, conseguimos encontrar parâmetros que estabilizassem o sistema. Todavia, as quantias populacionais nesse sistema oscilam com altas amplitudes, embora as perturbações não afetassem o equilíbrio desse.

$$\begin{aligned}
[V(0), H_1(0), H_2(0), C_1(0), C_2(0)] &= [1050, 40, 40, 8, 10] \\
[a_1, b_1, c_1, d_1, e_1] &= [0.081, 0.027, 0.068, 0.068, 0.0047] \\
[a_2, b_2, c_2, d_2] &= [0.555, 0.000415, 0.00007, 0.0008] \\
[a_3, b_3, c_3, d_3] &= [0.555, 0.000415, 0.00007, 0.0008] \\
[a_4, b_4, c_4, d_4, e_4] &= [0.415, 0.000625, 0.000625, 0.000038, 0.00007] \\
[a_5, b_5, c_5, d_5] &= [0.57, 0.0009, 0.0009, 0.000011]
\end{aligned} \tag{6}$$

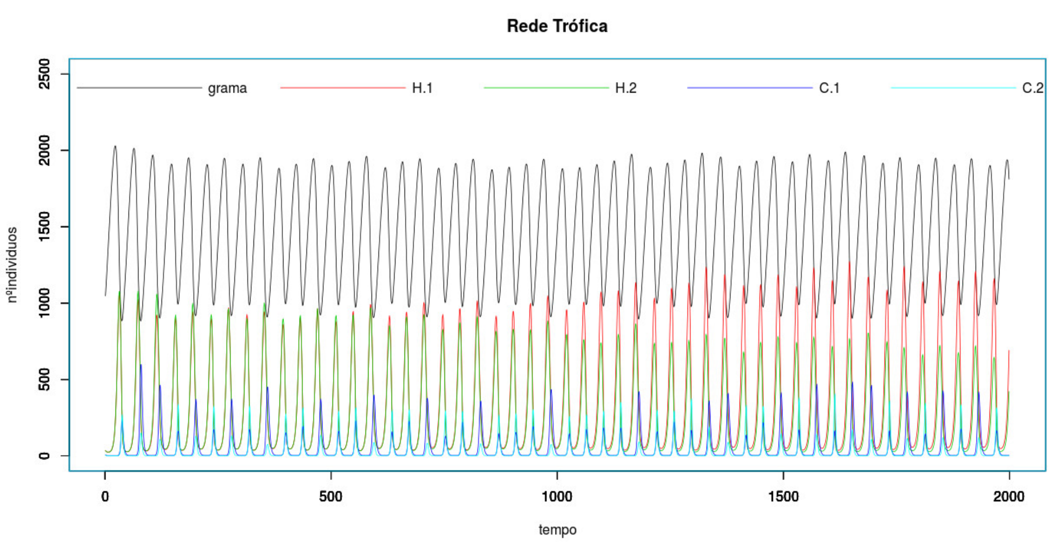

Figura 8: Sistema oscilatório.

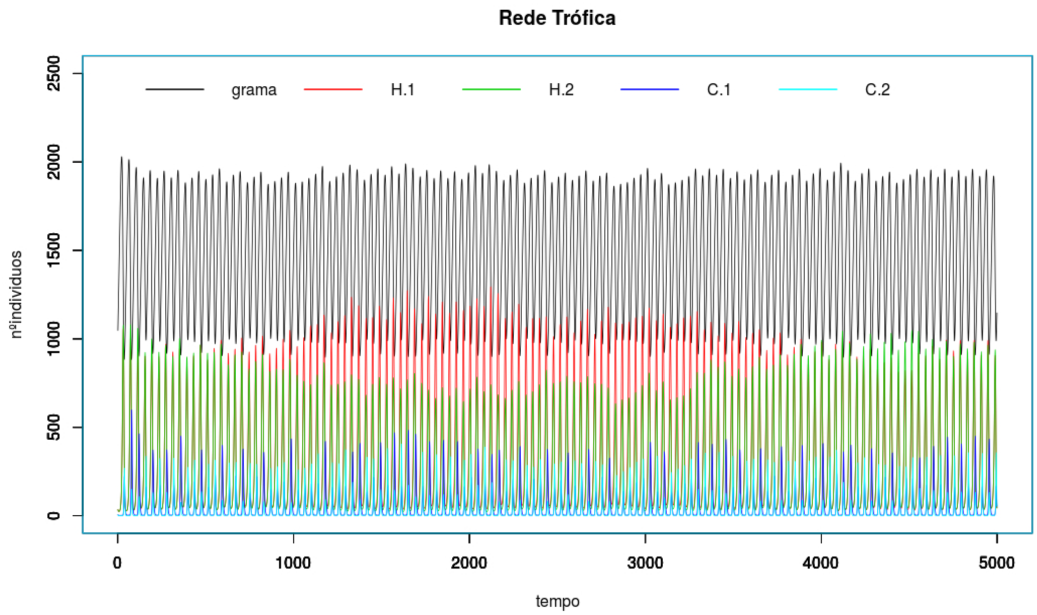

Figura 9: O sistema da figura 8 com um número maior de iterações.

4 Conclusão

Foi possível desenvolver 4 modelos de rede trofica neste projeto. Um deles é estático e possui equilíbrio instável, enquanto os outros 3 possuem equilíbro estável. Através de dois dos modelos com equilíbrio estável pudemos construir um sistema estático com equilíbrio estável.