

به نام خدا

تاریخ تحویل: جمعه ۲۴ آذر

هوش محاسباتی: تمرین سری چهارم

۱- یک الگوریتم تکاملی در نظر بگیرید که از کروموزوم‌هایی به شکل $x = abcdefgh$ با طول ثابت ۸ ژن استفاده می‌کند. هر ژن می‌تواند آلی بین ۰ تا ۹ داشته باشد. اگر تابع سازگاری متناظر با هر پاسخ x را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$f(x) = (a+b) - (c+d) + (e+f) - (g+h)$$

و هدف بیشینه کردن مقدار سازگاری باشد و جمعیت اولیه شامل چهار پاسخ با کروموزوم‌های زیر باشد:

$$x_1 = 65413532$$

$$x_2 = 87126601$$

$$x_3 = 23921285$$

$$x_4 = 41852094$$

الف) مقدار سازگاری را برای هر یک از پاسخ‌ها محاسبه کرده و آنها را بر اساس مقدار سازگاری‌شان مرتب کنید.

ب) فرض کنید از روش انتخاب Tournament Selection با تعداد ۲ پاسخ در هر مسابقه، استفاده می‌کنیم. دسته‌های زیر به طور تصادفی برای شرکت در مسابقه انتخاب شده‌اند:

$$(x_2, x_4)$$

$$(x_1, x_3)$$

$$(x_1, x_4)$$

$$(x_3, x_4)$$

پاسخ‌های منتخب برای تولید نسل بعدی را به ترتیب انجام مسابقات تعیین کنید.

پ) فرض کنید از crossover ۲ نقطه‌ای به عنوان عملگر ترکیب استفاده می‌کنیم و احتمال رخداد crossover برابر با ۱ است. در ترکیب اول، نقاط برش تصادفی را بین (d, e) و (g, h) در نظر گرفته و در ترکیب دوم، نقاط برش تصادفی را بین (b, c) و (f, g) در نظر بگیرید. پاسخ‌های (فرزند) تولید شده را نمایش داده و تابع سازگاری آنها را محاسبه کنید.

ت) فرض کنید پاسخ‌های فرزند تولید شده در قسمت (پ) را به عنوان پاسخ‌ها در نسل جدید در نظر بگیریم. میزان سازگاری (میانگین و مقدار بیشینه) را در نسل اولیه با نسل جدید مقایسه کنید. آیا نسل جدید نسبت به نسل قبلی بهتر است؟

ث) با توجه به تابع سازگاری تعریف شده و در نظر گرفتن اینکه هر ژن تنها می‌تواند رقمی بین ۰ تا ۹ داشته باشد، کروموزومی را که بیانگر پاسخ بهینه است تعیین کنید. مقدار سازگاری بیشینه را نیز تعیین کنید.

ج) با در نظر گرفتن جمعیت اولیه داده شده، آیا فقط با استفاده از عملگر crossover و بدون استفاده از عملگر "جهش" می‌توان در نسل‌های آینده به پاسخ بهینه رسید؟

د) اگر پاسخ‌های به دست آمده در قسمت (پ) توسط عملگر "جهش استاندارد" با احتمال جهش 0.1 دچار تغییر شوند، پاسخ‌های جدید (جهش یافته) را به گونه‌ای تعیین کنید که نسبت به پاسخ‌های قبل از اعمال عملگر جهش بیشترین افزایش سازگاری را داشته باشند.

برای مقادیر احتمالی که نیاز دارید، به ترتیب مقادیر زیر را در نظر بگیرید: (از بالا به پایین برای پاسخ ۱ تا ۴ و از چپ به راست برای هر ژن از هر کروموزوم)

0.24	0.05	0.48	0.20	0.37	0.19	0.45	0.01
0.24	0.12	0.10	0.25	0.15	0.38	0.43	0.27
0.46	0.34	0.38	0.24	0.04	0.08	0.49	0.49
0.19	0.41	0.29	0.32	0.41	0.05	0.43	0.25

۲- در الگوریتم تبرید شبیه‌سازی شده (Simulated Annealing):

$$\mathbf{x}^{(t+1)} = \begin{cases} \mathbf{x}' & \text{if } f(\mathbf{x}') \geq f(\mathbf{x}^{(t)}) \\ \mathbf{x}' \text{ with probability } p = e^{-\frac{\Delta f}{kT}} & \text{otherwise} \\ \mathbf{x}^{(t)} \text{ with probability } 1 - p \end{cases}$$

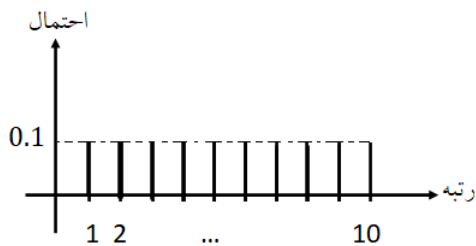
$$\Delta f = f(\mathbf{x}^{(t)}) - f(\mathbf{x}')$$

الف) پارامتر دما چه نقشی دارد؟ در دمای کم و دمای زیاد در مورد نحوه عملکرد الگوریتم توضیح دهید.

ب) اگر دما بسیار نزدیک به صفر باشد، الگوریتم تبرید شبیه‌سازی شده (تقریباً) به چه الگوریتم جستجوی دیگری تبدیل خواهد شد؟

ج) اگر دما بسیار زیاد باشد (یعنی $T \rightarrow \infty$)، الگوریتم تبرید شبیه‌سازی شده (تقریباً) به چه الگوریتم جستجوی دیگری تبدیل خواهد شد؟

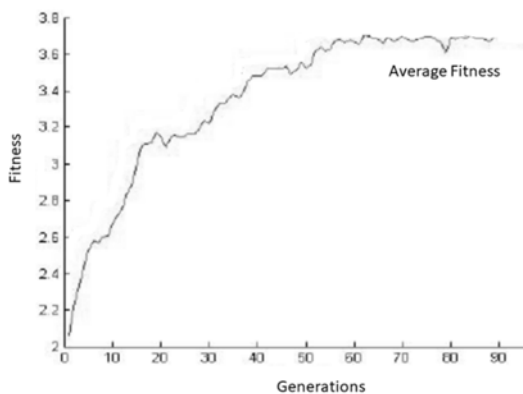
۳- در یک الگوریتم تکاملی از روش انتخاب Rank-based استفاده کرده‌ایم. تعداد اعضای جمعیت در هر نسل برابر با ۱۰ است.



الف) شخصی پیشنهاد می‌کند در نسل اول، احتمال انتخاب را به صورت روبه‌رو در نظر بگیریم. آیا انتخاب مناسبی است؟ چرا؟

ب) با در نظر گرفتن احتمال انتخاب در نسل اول مطابق (الف)، روشی (الگوریتم یا فرمولی) برای تعیین احتمال انتخاب در نسل‌های بعدی ارائه دهید.

۴- در پیاده‌سازی یک الگوریتم تکاملی (ژنتیک)، یک عضو از هر نسل بدون تغییر به نسل بعد انتقال داده شده است (نخبه‌گرایی یا elitism). "میانگین مقدار سازگاری" در اعضای هر نسل در نسل‌های مختلف به صورت زیر بوده است:



الف) نمودار "بهترین مقدار سازگاری هر نسل" را به طور تقریبی در شکل بالا رسم کنید.

ب) اگر در پیاده‌سازی الگوریتم از نخبه‌گرایی استفاده نکنیم، انتظار دارید چه تغییری در نمودارهای "مقدار سازگاری میانگین" و "بهترین مقدار سازگاری" هر نسل رخ دهد. نمودارهای تقریبی را در شکل بالا رسم کنید.

۵- در اجرای یک الگوریتم ژنتیک، با جمعیت شش کروموزوم در هر نسل، مقادیر تابع سازگاری در سه نسل پنجم، بیستم و چهارم به ترتیب $f_5 = \{4.3, 3.5, 7.9, 7.8, 3.1, 1.8\}$ ، $f_{20} = \{9.8, 9.1, 9.5, 8, 9.5, 7.8\}$ و $f_{40} = \{9.1, 9.5, 9.4\}$ بدست آمده است. تعداد کل نسل‌ها (تکرارهای الگوریتم ژنتیک) ۵۰ بوده و از روش انتخاب Roulette Wheel استفاده کرده‌ایم. در هر نسل برای برطرف کردن مشکل "سلطه" و "میرایی وزن انتخاب" به جای خود مقادیر سازگاری (f ها) از مقادیر $f + \theta_i$ استفاده کرده‌ایم که i شماره نسل بوده و θ_i یک مقدار مشخص برای هر نسل است. مقادیر پیشنهادی شما برای سه مقدار θ_5 ، θ_{20} و θ_{40} چقدر است؟ علت انتخاب خود را توضیح دهید.

۶- ۱۰ کار مشابه داریم که می‌خواهیم آنها را به ۴ کارگر تخصیص دهیم. زمان مورد نیاز برای انجام یک کار توسط کارگر J و دستمزد کارگر J است. می‌خواهیم با استفاده از الگوریتم ژنتیک (الگوریتم تکاملی) کارها را به گونه‌ای به کارگران تخصیص دهیم که مجموع دستمزد کمینه شود و زمان کل انجام کارها کمتر از T_{max} شود. نحوه رمزگذاری پیشنهادی به این صورت است که رشته‌ای به طول ۱۳ کاراکتر از دو کاراکتر ۱ و + در نظر می‌گیریم. تعداد اهای جداشده توسط + ها بیانگر تعداد کارهای تخصیص داده به هر کارگر است. مثلاً رشته ۱۱۱ + ۱۱ + ۱۱۱۱ نشان می‌دهد که به کارگر ۱ تا ۴ به ترتیب ۳، ۲، ۰ و ۵ کار تخصیص داده شده است.

الف) تابع سازگاری متناظر با یک تخصیص را بنویسید. قید حداکثر زمان را نیز در تابع سازگاری لحاظ کنید.

ب) یک عملگر cross-over مناسب برای رمزگذاری پیشنهادی ارائه دهید.

ج) یک عملگر جهش مناسب برای رمزگذاری پیشنهادی ارائه دهید.

۷- در یک مسئله تخصیص کار به کارگر، می‌خواهیم N کار متفاوت L_1 تا L_N را به M کارگر W_1 تا W_M تخصیص دهیم.

- برای افزایش سرعت انجام کارها، هر کار می‌تواند به حداکثر سه بخش تقسیم شود و به صورت موازی توسط حداکثر سه کارگر انجام شود.
- زمان انجام کامل کار n -ام توسط کارگر m -ام به صورت T_{nm} است و اگر قرار باشد فقط P درصد از کار توسط کارگر انجام شود، زمان به صورت خطی کاهش می‌یابد (یعنی زمان اجرای P درصد کار برابر $\frac{P}{100} \times T_{nm}$ خواهد شد).
- دستمزد انجام کامل کار n -ام توسط کارگر m -ام به صورت V_{nm} است و اگر قرار باشد فقط P درصد از کار توسط کارگر انجام شود، دستمزد به صورت خطی کاهش می‌یابد (یعنی دستمزد اجرای P درصد کار برابر $\frac{P}{100} \times V_{nm}$ خواهد شد).
- به یک کارگر ممکن است کاری تخصیص داده نشود یا اینکه بیش از یک کار تخصیص داده شود.
- بدیهی است کارها توسط کارگران به صورت موازی انجام خواهند شد اما اگر به یک کارگر بیش از یک کار سپرده شود، بایستی آنها را به صورت سری انجام دهد.

می‌خواهیم مسئله را به گونه‌ای حل کنیم (یعنی برای هر کار مشخص کنیم به کدام کارگرها و هر کدام چند درصد از کار تخصیص داده می‌شود) که زمان انجام کل کارها کمینه شود و مجموع دستمزدها نیز کمتر یا مساوی V_{max} شود.

مسئله را با استفاده از الگوریتم‌های تکاملی (ژنتیک) حل کنید. در پاسخ خود (الف) روش رمزگذاری، (ب) نحوه تولید جمعیت اولیه، (ج) تابع سازگاری مناسب، (د) عملگر crossover و (ه) عملگر جهش مناسب را به طور دقیق مشخص کنید.

۸- می‌خواهیم نقشه نشان دهنده N منطقه را با سه رنگ قرمز (R)، سبز (G) و آبی (B) رنگ‌آمیزی کنیم. یک رنگ‌آمیزی را معتبر می‌نامیم هرگاه هیچ دو منطقه همسایه‌ای رنگ یکسان نداشته باشند. دو منطقه را همسایه گوئیم اگر در یک یال یا بخشی از یک یال مشترک باشند. ماتریس همسایگی $D = [d_{ij}]$, $i = 1 \dots N$, $j = 1 \dots N$ به صورت زیر داده شده است:

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ 1 & i \text{ \& } j \text{ are neighbours} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(الف) نحوه حل مسئله را با استفاده از الگوریتم تکاملی توضیح دهید. (نحوه رمزگذاری، تابع سازگاری، نحوه تولید جمعیت اولیه، عملگر crossover، عملگر جهش)

(ب) در صورتی که نتوان نقشه را با سه رنگ به صورت معتبر رنگ‌آمیزی کرد، قسمت (الف) را به گونه‌ای تغییر دهید که حداقل رنگ‌های مورد نیاز برای رنگ‌آمیزی معتبر را نیز تعیین کند.
توجه: در هر قسمت سعی کنید فرمول تابع هزینه (یا سازگاری) را با استفاده از ماتریس همسایگی D و پاسخ نامزد در هر مرحله (کروموزوم معرفی شده) به فرم ساده (قابل پیاده‌سازی در محیط برنامه‌نویسی) بنویسید.

۹- در یک مرکز داده (Data center) فرض کنید تعداد نامتناهی سرور (server) وجود دارد که هر کدام دارای M پردازنده هستند. از طرفی صف درخواست کاربران برای در اختیار گرفتن منابع پردازشی شامل N درخواست است و هر درخواست نیاز پردازشی هر کاربر را به صورت یک عدد صحیح بین ۱ تا M نشان می‌دهد. به عنوان مثال درخواست اول برابر ۲ است یعنی کاربر اول به ۲ پردازنده نیاز دارد. می‌خواهیم این N درخواست را به گونه‌ای به سرورها نگاشت کنیم که کمترین تعداد سرور استفاده شود.

می‌خواهیم با استفاده از الگوریتم تکاملی (ژنتیک) این تخصیص بهینه را انجام دهیم. نحوه رمزگذاری، تابع سازگاری، نحوه تولید جمعیت اولیه، عملگر crossover و عملگر جهش را به طور دقیق مشخص کنید.