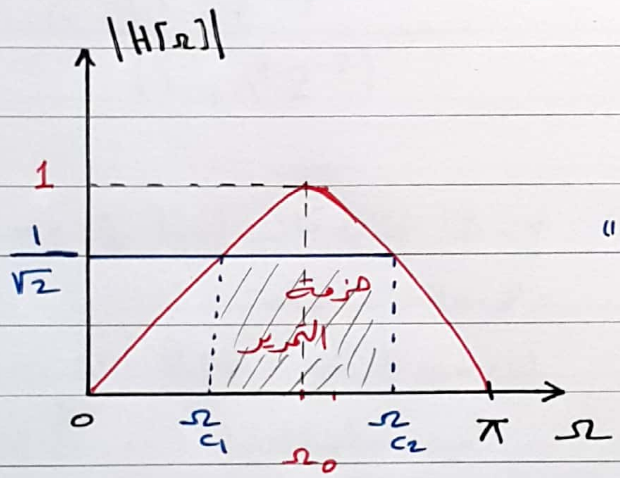
* BPF with IIR:

* قلنا سابقاً أنه في مرشح BPF (مرشح تمرير حزمة) لدينا مركز للحزمة وليكن Ω_{center} (Ω_0) يكون الاستجابة الترددية عنده أعظمية (1)

* $H[\pi] = H[0] = 0$

* ولدينا ترددين قطع Ω_{c_1} و Ω_{c_2}

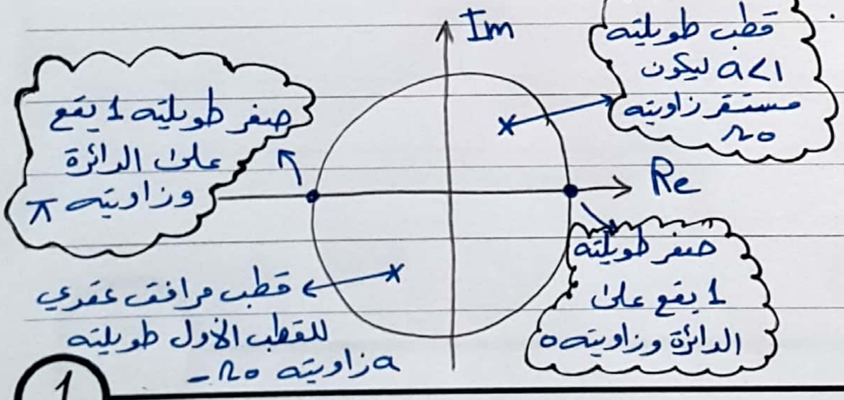
* لدينا صفرين في تابع تحويل Z .
صفر عند "0" و صفر عند "π"
وهذا يقابل ترددات المنع
$H[0]=0$ و $H[\pi]=0$



* بالنسبة للـ IIR يكون لدينا قطب عقدي طبعاً له (طويلة وله زاوية) وزاوية القطب في مجال Z يقابله بمستوي فورييه Ω_0 (التردد المركزي).

* وللتحكم بمجال التمرير نتحكم بمطال القطب (a).

* الأقطاب والأصفار مترافقة عقدياً.



*مثال:

أوجد $H[Z]$ لمرشح BPF التردد المركزي له ($\Omega_0 = \frac{\pi}{2}$)؟

الحل:

IIR لا ننسى G

* لدينا صفران: 1) طويلته 1 زاويته 0

2) طويلته 1 زاويته π

* لدينا قطب طويلته a زاويته تردد الحزمة أي $\frac{\pi}{2}$

وبما أن الأقطاب مترافقة عقدياً.

يوجد لدينا قطب آخر طويلته a

زاويته $-\frac{\pi}{2}$

*ملاحظة: الأصفار أيضاً مترافقة عقدياً ولكن هنا مرافق كل صفر لدينا نفسه.

* $(1-Z^{-1})(1+Z^{-1})$

مطابقة شهيرة مربع الأول - مربع الثاني.

$$H[Z] = G \frac{\prod_{K=0}^{M}(1 - Z_K Z^{-1})}{\prod_{K=0}^{N}(1 - P_K Z^{-1})}$$

$$H[Z] = G \frac{(1 - \underbrace{e^{J0}}_{=1} Z^{-1})(1 - \underbrace{e^{J\pi}}_{=-1} Z^{-1})}{(1 - a \underbrace{e^{J\frac{\pi}{2}}}_{=J} Z^{-1})(1 - a \underbrace{e^{-J\frac{\pi}{2}}}_{=-J} Z^{-1})}$$

$$H[Z] = G \frac{(1 - Z^{-1})(1 + Z^{-1})}{(1 - J a Z^{-1})(1 + J a Z^{-1})}$$

$$H[Z] = G \frac{(1 - Z^{-2})}{(1 + a^2 Z^{-2})}$$

في هذا المثال كانت لدينا $\Omega_0 = \frac{\pi}{2}$

وهي حالة خاصة ..

لندرس المرشح BPF بحالة عامة

أي القطب لدينا $a e^{J\theta}$

* In General بشكل عام

$$a = |a| e^{j\theta}$$

الحل:

* البسط عنا ما رح يتغير عن الحالة السابقة.

$$H[z] = G \frac{1 - z^{-2}}{(1 - a e^{j\theta} z^{-1})(1 - a e^{-j\theta} z^{-1})}$$

* القطب طويلته a زاويته θ و قطب مرافق عقدي طويلته a زاويته $-\theta$.

$$H[z] = G \frac{1 - z^{-2}}{1 - a e^{-j\theta} z^{-1} - a e^{j\theta} z^{-1} + a^2 z^{-2}}$$

* $-a e^{j\theta} z^{-1} \cdot -a e^{-j\theta} z^{-1} = a^2 z^{-2}$

* نخرج عامل مشترك $-a z^{-1}$

$$H[z] = G \frac{1 - z^{-2}}{1 - a z^{-1} \underbrace{(e^{-j\theta} + e^{j\theta})}_{2\cos\theta} + a^2 z^{-2}}$$

$$H[z] = G \frac{1 - z^{-2}}{1 - 2a\cos\theta\, z^{-1} + a^2 z^{-2}}$$

بلاحظ أنو إذا اعتبرت $\theta = \frac{\pi}{2}$ تبع المثال السابق صار المقام

$-2a\cos\frac{\pi}{2} z^{-1} = 0 \Leftarrow$ المقام صار $1 + a^2 z^{-2}$ يعني نفس الجواب.

* ملاحظات هامة:

* لما يكون مطلوب مني تصميم مرشح BPF ب IIR :

أول شي بحسب G الربح.

وبعدين حسب الطلب:

a) احسب عرض حزمة التمرير بيكون عاطيني a .

b) بحيث يكون عرض حزمة التمرير X معطى ⇐ بحسب a .

* مثال: صمم مرشح BPF بحيث تكون التردد المركزي $\Omega_0 = \frac{\pi}{2}$ ؟

وأوجد علاقة تردد القطع بمطال القطب ؟

الحل: نفس أول مثال $H[Z]$ ⇐

$$H[Z] = G \frac{1 - Z^{-2}}{1 + a^2 Z^{-2}}$$

$$H[\Omega] = G \frac{1 - e^{-J2\Omega}}{1 + a^2 e^{-J2\Omega}}$$

لدينا معلومة التردد المركزي ⇐

$H[\Omega_0] = 1$

ونحن نعلم أن الاستجابة الترددية

لتردد المركز أعظمية ⇐ 1 =

$\Rightarrow H[\frac{\pi}{2}] = 1$

$$H[\Omega]\Big|_{\Omega = \frac{\pi}{2}} = 1 \Rightarrow$$

$$H[\tfrac{\pi}{2}] \Rightarrow G \frac{1 - e^{-J2(\frac{\pi}{2})}}{1 + a^2 e^{-J2(\frac{\pi}{2})}} = 1$$

$$H[\tfrac{\pi}{2}] \Rightarrow G \frac{1 - \cancel{e^{-J\pi}}^{=-1}}{1 + a^2 \cancel{e^{-J\pi}}^{=-1}} = 1$$

Optimism

$$\Rightarrow G \frac{1+1}{1-a^2} = 1 \Rightarrow 2G = 1-a^2$$

$$\Rightarrow G = \frac{1-a^2}{2}$$

$$\Rightarrow H[\Omega] = \frac{1-a^2}{2} \cdot \frac{1-e^{-J2\Omega}}{1+a^2 e^{-J2\Omega}}$$

$$e^{-J2\Omega} = \cos 2\Omega - J\sin 2\Omega$$

* إيجاد علاقة تردد القطع
مطال القطب:

$$\Rightarrow H[\Omega] = \frac{1-a^2}{2} \cdot \frac{1-\cos 2\Omega + J\sin 2\Omega}{1+a^2\cos 2\Omega - Ja^2\sin 2\Omega}$$

$$|H[\Omega]|_{\Omega=\Omega c} = \frac{1}{\sqrt{2}} H\max$$

الطويلة = $\sqrt{\text{مربع الحقيقي + مربع التخيلي}}$

للتخلص من الجذر نربع.

$$|H[\Omega]|^2 = \frac{(1-a^2)^2}{4} \cdot \frac{(1-\cos 2\Omega)^2 + (\sin 2\Omega)^2}{(1+a^2\cos 2\Omega)^2 + (a^2\sin 2\Omega)^2}$$

$$|H[\Omega]|^2 = \frac{1-2a^2+a^4}{4} \cdot \frac{1-2\cos 2\Omega + \overbrace{\cos^2 2\Omega + \sin^2 2\Omega}^{=1}}{1+2a^2\cos 2\Omega + \underbrace{a^4\cos^2 2\Omega + a^4\sin^2 2\Omega}}$$

$$a^4(\underbrace{\cos^2 2\Omega + \sin^2 2\Omega}_{=1}) = a^2$$

$$|H[\Omega]|^2 = \frac{(1-2a^2+a^4)}{4} \cdot \frac{2-2\cos 2\Omega}{1+a^4+2a^2\cos 2\Omega}$$

$$|H[\Omega]|^2_{\Omega=\Omega_c} = \frac{1}{2} H_{max}$$

$H_{max}=1$ التردد الأعظمي

$$\frac{(1-2a^2+a^4)}{\cancel{4}\,\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}-2\cos 2\Omega_c}{1+a^4+2a^2\cos 2\Omega_c} = \frac{1}{\cancel{2}}$$

$$(1-2a^2+a^4)(1-\cos 2\Omega_c) = 1+a^4+2a^2\cos 2\Omega_c$$

$$\cancel{1} - \underline{\underline{\cos 2\Omega_c}} - 2a^2 + \cancel{2a^2\cos 2\Omega_c} + \cancel{a^4} - a^4\underline{\underline{\cos 2\Omega_c}} = \cancel{1} + \cancel{a^4} + \cancel{2a^2\cos 2\Omega_c}$$

$$-\cos 2\Omega_c(1+a^4) = 2a^2$$

$$\cos 2\Omega_c = \frac{-2a^2}{1+a^4}$$

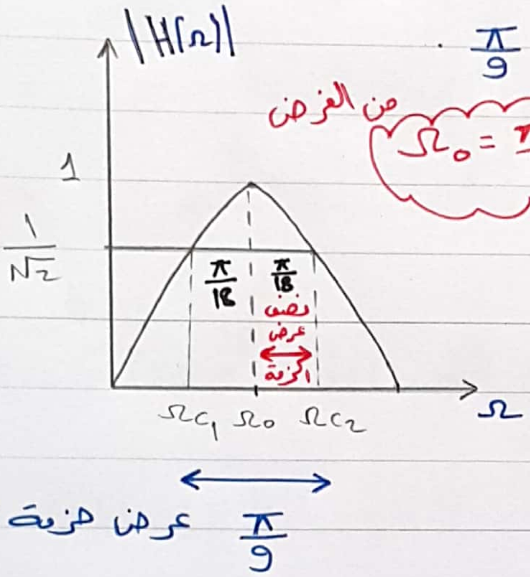
وبالتالي لدينا تردد القطع Ω_c تابع لطال القطب a .

ملاحظات هامة :

1) إذا عطاني عرض الحزمة نعوض بأخر علاقة لأحسب a وفي احتمال تطلع لـ a أكثر من قيمة بقبل بس الحلول لتكون أصغر من 1 (تداخل بالدائرة الواحدية) والباقي برفضو وإذا طلعو كلن أصغر من 1 بقبل الكل .

2) هام: إذا عطاني عرض حزمة التمرير مثلاً $\frac{\pi}{9}$.

من الفرض $\Omega_0 = \frac{\pi}{2}$



نحسب أولاً نصف عرض الحزمة :

$$\frac{\pi}{9} \div 2 = \frac{\pi}{18}$$

$$\Omega_0 - \Omega_{c_1} = \frac{\pi}{18} \quad (1)$$

$$\Omega_0 + \Omega_{c_2} = \frac{\pi}{18} \quad (2)$$

من (1)

$$\Omega_{c_1} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{18}$$

$$\Omega_{c_1} = \frac{8\pi}{18} \Rightarrow \Omega_{c_1} = \frac{4\pi}{9}$$

من (2)

$$\Omega_{c_2} = \frac{\pi}{18} - \frac{\pi}{2}$$

$$\Omega_{c_2} = -\frac{8\pi}{18} \Rightarrow \Omega_{c_2} = \frac{-4\pi}{9}$$

نعوض Ω_{c_1} أو Ω_{c_2} بالمعادلة الأخيرة ونحسب a .

3) أو في احتمال يعطيني قيمة مطال القطب a ويطلب مني عرض الحزمة .

نعوض عن a بآخر علاقة عندي بيطلع معي Ω_c ومعي من الفرض Ω_0

$\Omega_c + \Omega_0$ = نصف مجال التمرير.

نصف مجال التمرير $2X$ ← مجال التمرير.

★**مثال:** صمم مرشح غير عودي بحيث يمنع التردد $\frac{\pi}{2}$ ؟

الحل:

غير عودي ← FIR

لا يوجد أقطاب FIR

$$H[z] = G\,\frac{\prod_{k=0}^{M}(1-z_k z^{-1})}{\prod_{k=0}^{N}(1-p_k z^{-1})}$$

ما فيه أقطاب FIR

$$H[z] = G\,(1-\overset{j}{e^{j\frac{\pi}{2}}}\,z^{-1})(1-\overset{-j}{e^{-j\frac{\pi}{2}}}\,z^{-1})$$

يمنع $\frac{\pi}{2}$ عندي صفر طويلته 1 وزاويته $\frac{\pi}{2}$ وبما أن لكل صفر يوجد مرافق عقدي ← لدينا صفر آخر طويلته 1 زاويته $-\frac{\pi}{2}$

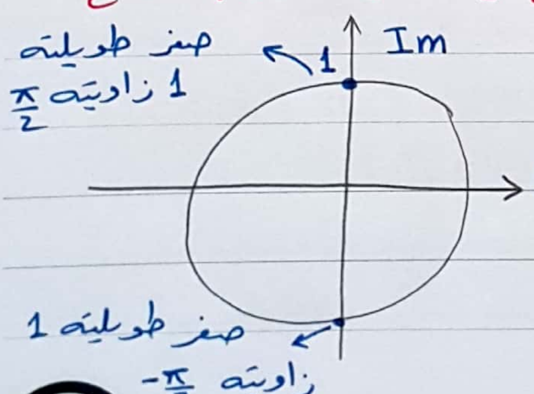
$$H[z] = G\,(1-jz^{-1})(1+jz^{-1})$$

$$H[\Omega] = G\,(1-je^{-j\Omega})(1+je^{-j\Omega})$$

وهنا يسمى Node filter مرشح لمنع تردد وحيد

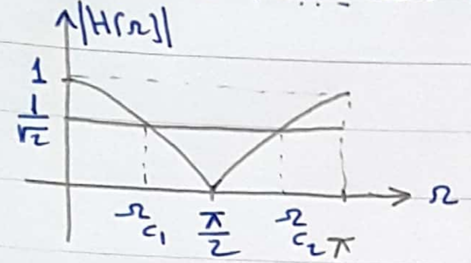
هام

والسؤال هنا: كيف يمكننا الانتقال من مرشح غير عودي FIR لمرشح عودي IIR ؟



وجدنا من مثالنا أنه لدينا صفران مترافقان عقدياً طويلة الصفر الأول 1 وزاويته $\frac{\pi}{2}$ وطويلة الصفر الثاني 1 وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

للانتقال من مرشح غير عودي FIR لمرشح عودي IIR يجب إضافة أقطاب لطويلة a وزاويته مركز الحزمة.

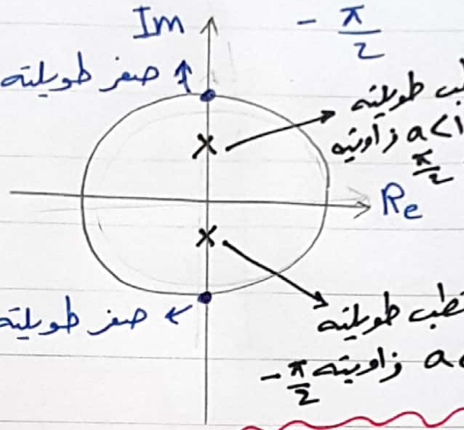


وبما أن الأقطاب مترافقة عقدياً

فيوجد لدينا قطب آخر طويلته a وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

مرشح FIR يمنع التردد $\frac{\pi}{2}$

فيصبح لدينا:



مرشح عودي IIR من مرشح غير عودي FIR

وبالتالي يصبح لدينا تابع التحويل لمرشح عودي IIR

$$H(z) = G\,\frac{\prod_{k=0}^{M}(1-z_k z^{-1})}{\prod_{k=0}^{N}(1-p_k z^{-1})}$$

$$H(z) = \frac{G\left(1-e^{j\frac{\pi}{2}}z^{-1}\right)\left(1-e^{-j\frac{\pi}{2}}z^{-1}\right)}{\left(1-a e^{+j\frac{\pi}{2}}z^{-1}\right)\left(1-a e^{-j\frac{\pi}{2}}z^{-1}\right)}$$

صار عندي صفرين:

الأول طويلته 1 زاويته $\frac{\pi}{2}$

الثاني طويلته 1 زاويته $-\frac{\pi}{2}$

متل قبل

وتم إضافة قطبين:

الأول طويلته $a<1$ زاويته مركز الحزمة $\Leftarrow \frac{\pi}{2}$

الثاني طويلته $a<1$ زاويته $-\frac{\pi}{2}$

وبالتالي وصلنا على Band Stop Filter with IIR

* ملاحظة: يُطلب منا تصميم مرشح غير عودي FIR وإيجاد الطلبات، ثم كيف نستطيع تحقيق هذا المرشح بالانتقال لـ IIR ؟

هيك بيجي السؤال

بس منضيف أقطاب عند مركز الحزمة بتكون زاويتهم.

في المثال السابق أخذنا حالة خاصة أن تكون التردد المطلوب منعه $\frac{\pi}{2}$
أما الآن سنأخذه θ

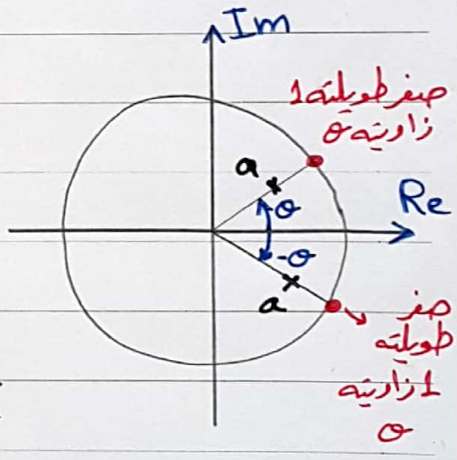
★ مثال: صمم مرشح غير عودي بحيث يمنع التردد θ ؟
وكيف يمكننا تحقيق ذلك بالانتقال لمرشح عودي؟

الحل: مثل قبل بالضبط
مرشح غير عودي ← FIR ←
ما عندي أقطاب.
عندي صفرين طويلتهم 1 واحد زاويته θ والثاني $-\theta$

$$H(z) = G\,\frac{\prod_{k=0}^{M}(1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=0}^{N}(1 - p_k z^{-1})}$$

$$H(z) = G\,(1 - e^{j\theta} z^{-1})(1 - e^{-j\theta} z^{-1})$$

$\boxed{\text{للانتقال لمرشح عودي IIR نضيف أقطاب بزاوية التردد المركزي } (\theta) \text{ وطويلة } a<1 \text{ ومرافق للقطب بزاوية } (-\theta) \text{ وطويلة } a<1}$



$$H(z) = G\,\frac{(1 - e^{j\theta} z^{-1})(1 - e^{-j\theta} z^{-1})}{(1 - a e^{j\theta} z^{-1})(1 - a e^{-j\theta} z^{-1})}$$

$$H(z) = G\,\frac{1 - e^{-j\theta} z^{-1} - e^{j\theta} z^{-1} + \underbrace{e^{j\theta} e^{-j\theta}}_{=1} z^{-2}}{1 - a e^{-j\theta} z^{-1} - a e^{j\theta} z^{-1} + a^2 \underbrace{e^{j\theta} e^{-j\theta}}_{=1} z^{-2}}$$

$$\boxed{-e^{-j\theta} z^{-1} - e^{j\theta} z^{-1} = -(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) z^{-1} = -2\cos\theta\, z^{-1}}$$

$$H[z] = G \frac{1-2\cos\theta z^{-1}+z^{-2}}{1-2a\cos\theta z^{-1}+a^2 z^{-2}}$$

وبالتالي حصلنا على BSF
عودي with IIR

ونتابع حسب الطلبات .

★ملاحظة

- دائماً بالمرشحات نسعى لتحقيق خطية الطور للمرشح أي عندما نأخذ استجابة ترددية للمرشح $H[\Omega]$ المطلوب أن تكون قيمة الطور لهذه الاستجابة خطية .
لانه عندما يكون الطور (علاقة الزاوية) خطية (يعني اشتقاقها = عدد ثابت) فعند استقبال هذه الاشارة ومعرفة قيمة هذا الثابت يمكن استقبالها بشكل صحيح (لعدم وجود أي تشوه للاشارة بالاستقبال).

لكي يكون نظام FIR (غير عودي) يحقق خطية الطور

FIR

$$h[n] \longleftrightarrow H[z]$$

$$H[z] = \sum_{n=0}^{N} h[n]\, z^{-n}$$

لجعل النظام سببي

$h[n] = 0 \quad ; n < 0$

لكي يحقق المرشح FIR خطية الطور يجب ان يتحقق أحد الشرطين :

① $h[n] = h[N-n]$ Symmetric "متناظر"

or

② $h[n] = -h[N-n]$ Non-Symmetric "غير متناظر"

Scanned by CamScanner

type 1 متناظر N زوجي

Symmetric , N even

For example $N=8$

$length = N+1 = 9$

نعوض بالعلاقة المتناظرة

$h[n] = h[N-n]$

$\Rightarrow h[0] = h[8]$
$h[1] = h[7]$
$h[2] = h[6]$
$h[3] = h[5]$
$h[4] = h[4]$

متناظر بالنسبة لنصف N
تناظر بالنسبة h[4]

إذا أخذنا $N=2$

$h[0] = h[2]$
$h[1] = h[1]$

لذلك كنا نقول

$h[n] = \{\alpha, B, \alpha\}$

متناظر بالنسبة ل B

type 2 متناظر N الفردي

Symmetric , N odd

For example $N=7$

$length = N+1 = 8$

نعوض بالعلاقة المتناظرة

$h[n] = h[N-n]$

$\Rightarrow h[0] = h[7]$
$h[1] = h[6]$
$h[2] = h[5]$
$h[3] = h[4]$

متناظر بالنسبة لنصف N
تناظر بالنسبة ل 3,5

Yara razzouk & Bassam alratta

Creativity ... is intelligence having fun

"Albert Einstein"

Optimism