**Réponse**

## Exercice 1 : (6 points)

**1)** $p(\mathrm{D}) = p(\mathrm{A} \cap \mathrm{D}) + p(\mathrm{B} \cap \mathrm{D}) + p(\mathrm{C} \cap \mathrm{D})$.

**Comme** $p(\mathrm{D}) = 0,1$ ; $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{D}) = p(\mathrm{A}) \times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{D}) = 0,42 \times 0,05 = 0,021$ **et** $p(\mathrm{C} \cap \mathrm{D}) = p(\mathrm{C}) \times p_{\mathrm{C}}(\mathrm{D}) = 0,22 \times 0,03 = 0,0066$ **, on a**

$0,1 = 0,021 + p(\mathrm{B} \cap \mathrm{D}) + 0,0066$

$\Leftrightarrow p(\mathrm{B} \cap \mathrm{D}) = 0,1 - 0,021 - 0,0066 \Leftrightarrow p(\mathrm{B} \cap \mathrm{D}) = 0,0724$.

$\boxed{p(\mathrm{B} \cap \mathrm{D}) = 0,0724}$.

**2)** $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{D}) = \dfrac{p(\mathrm{B} \cap \mathrm{D})}{p(\mathrm{B})} = \dfrac{0,0724}{0,36}$ $\boxed{p_{\mathrm{B}}(\mathrm{D}) \approx 0,2011}$.

**3)** $p_{\overline{\mathrm{D}}}(\mathrm{C}) = \dfrac{p\left(\overline{\mathrm{D}} \cap \mathrm{C}\right)}{p\left(\overline{\mathrm{D}}\right)} = \dfrac{p\left(\overline{\mathrm{D}} \cap \mathrm{C}\right)}{1 - p(\mathrm{D})} = \dfrac{0,22 \times 0,97}{0,9}$ $\boxed{p_{\overline{\mathrm{D}}}(\mathrm{C}) \approx 0,2371}$.

### Partie B

**1)** ***X* suit *N* (6 ; 0,3).**

**À l'aide de la calculatrice on trouve** $p(5,5 \leq X \leq 6,5) \approx 0,9$.

**Lorsqu'un clou est déclaré apte pour la vente, celui-ci n'est pas défectueux,**

**donc** $p(5,5 \leq X \leq 6,5) = P\left(\overline{\mathrm{D}}\right)$.

**2) a)** ***Z* suit la loi normale centrée réduite *N*(0 ; 1)**

**b)** $p(5,5 \leq \mathrm{Y} \leq 6,5) = p(-0,5 \leq \mathrm{Y} - 6 \leq 0,5) = p\left(\dfrac{-0,5}{\sigma_2} \leq \dfrac{\mathrm{Y} - 6}{\sigma_2} \leq \dfrac{0,5}{\sigma_2}\right)$

$p(5,5 \leq \mathrm{Y} \leq 6,5) = p\left(\dfrac{-0,5}{\sigma_2} \leq Z \leq \dfrac{0,5}{\sigma_2}\right)$.

**À l'aide de la calculatrice on a** $\dfrac{0,5}{\sigma_2} \approx 2,0537 \Leftrightarrow \sigma_2 \approx \dfrac{0,5}{2,0537} \approx 0,2435.$ $\boxed{\sigma_2 \approx 0,2435}$

## Réponse

### Exercice 2 : ( 6 points)

**Partie A**

$g(x)=2x+\ln(x)-1$ **pour tout** $x\in\left]0,+\infty\right[$.

**1. a)** $\lim\limits_{x\to 0} 2x+\ln(x)-1=-\infty$ $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} 2x+\ln(x)-1=+\infty$ **donc** $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=+\infty$

**b)** $g'(x)=\dfrac{2x+1}{x}$ **. Comme** $x\in\left]0,+\infty\right[$ **, alors 2*x* + 1 >0 et donc** $g'(x)$ **>0 pour tout *x*>0.**

**Ainsi la fonction *g* est strictement croissante sur** $\left]0,+\infty\right[$.

| $x$ | $0$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ $0$ $\nearrow$ | $+\infty$ |

**2) D'après le tableau de variations et en utilisant l théorème des valeurs intermédiaires l'équation** $g(x)=0$ **admet une seule solution** $\alpha$ **dans l'intervalle** $\left]0,+\infty\right[$.

**3) À l'aide la calculatrice on trouve** $0,68\le\alpha\le 0,69$

**4)**

| $x$ | $0$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

**Partie B**

**1) a) On sait que** $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x)=-\infty$, **or** $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2=+\infty$**, par composition de limite on a** $\lim\limits_{x\to 0} \left[\ln(x)\right]^2=+\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to 0} -2\ln(x)+4x=+\infty$ **, enfin par somme de limite on a** $\lim\limits_{x\to 0} \left[\ln(x)\right]^2-2\ln(x)+4x=+\infty$. **Alors** $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty}$

**b) On écrit** $f(x)=\ln(x)\left[\ln(x)-2\right]+4x$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty} \ln(x)=+\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \ln(x)-2=+\infty\end{array}\right\}$$ **par produit de limite on a** $\lim_{x\to+\infty} \ln(x)\left[\ln(x)-2\right]=+\infty$ .

**De plus** $\lim_{x\to+\infty} 4x=+\infty$ **, enfin par somme de limite on a** $\lim_{x\to+\infty} \ln(x)\left[\ln(x)-2\right]+4x=+\infty$.

**Alors** $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

**2) a)** $f'(x)=\frac{1}{x}\times\left[\ln(x)-2\right]+\ln(x)\times\frac{1}{x}+4$

$$f'(x)=\frac{\ln(x)-2}{x}+\frac{\ln(x)}{x}+4 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{\ln(x)-2+\ln(x)+4x}{x}$$

$$f'(x)=\frac{4x+2\ln(x)-2}{x} \Leftrightarrow f'(x)=\frac{2\left(2x+\ln(x)-1\right)}{x}$$

$f'(x)=\frac{2g(x)}{x}$ **pour tout** $x>0$**.**

**b) Puisque** $x>0$ **et** $2>0$ **alors** $f'(x)$ **a le même signe que** $g(x)$**.**

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $f(\alpha)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**Partie C**

**1)** $I=\int_1^2\left(f(x)-h(x)\right)dx=\int_1^2 4x\,dx=\left[2x^2\right]_1^2=\left(2\times2^2-2\times1^2\right)$ **.** $I=6$**.**

**2)** ***I*** **est l'aire du domaine délimité entre les deux courbes et les droites d'équations**
***x*** **= 1 et** ***x*** **= 2 en unité d'aire.**

| Réponse |
| --- |

**Exercice 3: (4 points )**

**1. Réponse b )** $\mathrm{N} = \overline{3742}^{8}$

**2. Réponse b)** $|Z| = 1$ **car** $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$ et $\left|\dfrac{\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}\right| = 1.$

**3. Réponse c) 120 car On a :** $\overrightarrow{\mathrm{AC}}(-1;0;-1)$ **et** $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(3\,;-3\,;0)$ **.**

**Or,** $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} = -3$ **, AC =** $\sqrt{2}$ **et AB =** $\sqrt{18}$ **.** On a donc : $\cos \mathrm{BAC} = -0,5$ d'ou $\mathrm{BAC} = 120^{0}$.

**4. Réponse c) décroissant car** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2n+1}{2n+2} < 1$

| Réponse |
| --- |

**Exercice 4: (4 points )**

**1.** L'affixe de l'image du point O est $z' = \dfrac{0-1}{0+i} = i.$

L'affixe de l'image du point A est $z' = \dfrac{-1+i-1}{-1+i+i} = \dfrac{4+3i}{5}.$

**2.** $f(x+iy) = \dfrac{x+iy-1}{x+iy+i} = \dfrac{(x^2+y^2-x+y)+i(-x+y+1)}{x^2+(y+1)^2}.$

**3.** $a = \dfrac{x^2+y^2-x+y}{x^2+(y+1)^2}$ et $b = \dfrac{-x+y+1}{x^2+(y+1)^2}$

**4.a)**

$b = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x+y+1}{x^2+(y+1)^2} = 0.$ Ce qui revient à dire que $-x+y+1 = 0$. Donc l'ensemble

des points M cherché est la droite d'équation $-x+y+1=0$ privée du point d'affixe -i.

**b)**

$a = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+y^2-x+y}{x^2+(y+1)^2} = 0.$ Ce qui revient à dire que $x^2+y^2-x+y = 0$. Donc l'ensemble

des points M cherché est le cercle de centre d'affixe $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\mathrm{i}}{2}$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ privée du point d'affixe -i.