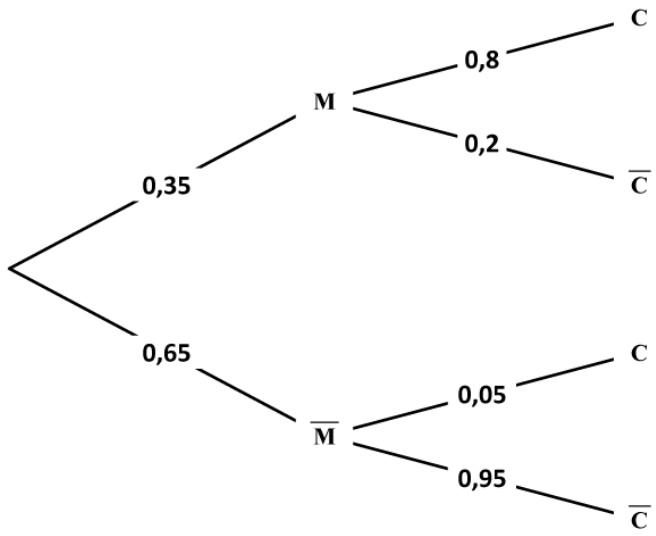
Réponses

Exercice 1 : 4 points

1. Voir l'arbre ci contre.



2. $p(\mathrm{C}) = p(\mathrm{M} \cap \mathrm{C}) + p(\bar{\mathrm{M}} \cap \mathrm{C}) = 0,35 \times 0,8 + 0,65 \times 0,05 = 0,3125.$

3. $p_{\mathrm{C}}(\mathrm{M}) = \dfrac{p(\mathrm{M} \cap \mathrm{C})}{p(\mathrm{C})} = \dfrac{0,35 \times 0,8}{0,3125} = 0,896.$

4. La proportion affirmée par l'association des parents est

***p* =0,65.**

On a *n*= *85* ≥ 30, *np* =85×0,65 = 55,25≥ 5 et *n* (1 − *p*) = 85 × (1–0,65)=29,75≥ 5.
Les conditions *n* ≥ 30, *n p* ≥ 5 et *n* (1 − *p*) ≥ 5 sont vérifiées.

La fréquence observée sur l'échantillon est $f=\dfrac{48}{85}\approx 0,56$ **.** $\mathrm{I}_{fluctuation}=\left[0,65-1,96\dfrac{\sqrt{0,65(1-0,65)}}{\sqrt{85}};0,65+1,96\dfrac{\sqrt{0,65(1-0,65)}}{\sqrt{85}}\right]$

$\mathrm{I}_{fluctuation}\approx[0,55\,;0,75]$**.** **On a** $f\in\mathrm{I}_{fluctuation}$.

Donc le proviseur peut donc accepter l'affirmation de l'association des parents d'élèves avec un risque d'erreur de 5%.

Exercice 2 : 4 points

1. $z_{B'}=\dfrac{z_B+3}{z_B+2-i}=-i$ **donc** $z_{B'}=-i$

2. $\dfrac{z_C+3}{z_C+2-i}=2$ **donc** $z_C=-1+2i$

3. a)

$$z'=\frac{x+iy+3}{x+iy+2-i}=\frac{x+3+iy}{(x+2)+i(y-1)}$$

$$z'=\frac{[x+3+iy]\,[(x+2)-i(y-1)]}{(x+2)^2+(y-1)^2}$$

$$z'=\frac{x^2+y^2+5x-y+6}{(x+2)^2+(y-1)^2}+i\frac{x-y+3}{(x+2)^2+(y-1)^2}=x'+iy'$$

b) $\dfrac{x-y+3}{(x+2)^2+(y-1)^2}=0 \iff x-y+3=0$ donc $y=x+3$

L'ensemble E est la droite d'équation $y=x+3$ **privée du point d'affixe –2 + i.**

c)

$$\frac{x^2+y^2+5x-y+6}{(x+2)^2+(y-1)^2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2+5x-y+6=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+6=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

L'ensemble F est le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$ **et de rayon** $r=\sqrt{\frac{1}{2}}$ **privé du point d'affixe –2 + i.**

Exercice 3 : 6 points

Partie A

1. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} 2\ln x=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^2-2=-2\end{array}\right\}$ $\begin{array}{c}\text{Par somme de limites}\\ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-\infty\end{array}$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} 2\ln x=+\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} x^2-2=+\infty\end{array}\right\}$ $\begin{array}{c}\text{Par somme de limites}\\ \lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=+\infty\end{array}$

2. $g'(x)=2\frac{1}{x}+2x=\frac{2+2x^2}{x}$ **.** ***g'*** **est positive sur** $]0\,;+\infty[$

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

Voir le tableau de variation ci-contre **.**

3. D'après le tableau de variations, l'équation $g(x)=0$ **admet une unique solution α sur** $]0\,;+\infty[$ **. On a :** $1,24\le\alpha\le 1,25$

4.

x	0		-2		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

1. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{2\ln x}{x} = +\infty\end{array}\right\}$ Par somme de limites $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} -\dfrac{2\ln x}{x} = 0\end{array}\right\}$ Par somme de limites $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

2. a) $f'(x) = 1 - \dfrac{2-2\ln(x)}{x^2} = \dfrac{x^2-2+2\ln(x)}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) Tableau de variation

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Comme $g(\alpha) = 0$ on a $2\ln(\alpha) + \alpha^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\ln(\alpha) = -\alpha^2 + 2$

c) Donc $f(\alpha) = \alpha - \dfrac{2\ln(\alpha)}{\alpha} = \alpha - \dfrac{-\alpha^2+2}{\alpha} = \dfrac{2(\alpha^2-1)}{\alpha}$

$f(\alpha) = \dfrac{2(\alpha^2-1)}{\alpha} = 2\alpha - \dfrac{1}{\alpha}$

On sait que α >1 donc $2\alpha > 2 \ et \ -\dfrac{1}{\alpha} > -1$ **d'où** $2\alpha - \dfrac{1}{\alpha} > 1$.

Alors $f(\alpha) > 0$

3. $F'(x) = x - 2\left(\dfrac{1}{x}\right)(\ln x) = x - \dfrac{2\ln x}{x} = f(x)$

4. $\int_1^e f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_1^e = \dfrac{e^2-3}{2} \approx 2.$

Exercice 4 : 6 points

1. Démonstration par récurrence

Initialisation :

$u_0 = 0$. **Donc** $u_0 \in [0;1]$. **La proposition est vraie au rang *n*=0.**

Hérédité **:**

Supposons que pour un rang *n*≥0, $u_n \in [0;1]$ **est vraie.**

$2 \le 2u_n + 4 \le 5$ **et** $\dfrac{1}{6} \le \dfrac{1}{u_n+5} \le \dfrac{1}{5}$ **donc** $\dfrac{1}{3} \le \dfrac{2u_n+4}{u_n+5} \le 1$

On a donc $0 \le u_{n+1} \le 1$

La proposition est donc héréditaire.

Conclusion :

La proposition étant vraie au rang initial *n*=0 et étant héréditaire, alors elle est vraie pour tout *n* entier naturel.

2. a) $u_1 = \dfrac{4}{5}$, $u_2 = \dfrac{28}{29}$, $u_3 = \dfrac{172}{173}$ et $u_4 = \dfrac{1036}{1037}$.

b) (u_n) **semble croissante et semble convergée vers 1.**

3. a) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-u_n{}^2 - 3u_n + 4}{u_n + 5}$

Pour $0 \le u_n \le 1$**, on a** $-u_n{}^2 - 3u_n + 4 \ge 0$. **Donc** $u_{n+1} - u_n \ge 0$

Alors la suite est (u_n) **croissante.**

b) Comme la suite (u_n) **est croissante et majorée par 1, alors la suite (*u*ₙ) est convergente.**

4. a) $w_{n+1} + 4 = \dfrac{20}{4 + u_{n+1}} = \dfrac{20}{4 + \dfrac{2u_n+4}{u_n+5}} = \dfrac{10}{3} + \dfrac{10}{3(u_n+4)}$

$w_{n+1}+4=\dfrac{10}{3}+\dfrac{10}{\dfrac{60}{w_n+4}}=\dfrac{1}{6}w_n+4$. **Donc** $w_{n+1}=\dfrac{1}{6}w_n$

(w_n) **est une suite géométrique de raison** $q=\dfrac{1}{6}$ **et** $w_0=1$.

b) $w_n=\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$. **Donc** $u_n+4=\dfrac{20}{4+w_n}$. $u_n=\dfrac{20}{4+\left(\dfrac{1}{6}\right)^n}-4$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n=0$. **Donc** $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$.

5. a) pour A = 0, 001, l'algorithme affiche *n* = 4

```
?→A↵
0→U↵
0→N↵
While U≤1-A↵
(2U+4)÷(U+5)→U↵
N+1→N↵
WhileEnd↵
N◢
```

```
?
0.001
                    4
           - Disp -
```

b) Pour un réel A saisi en entrée, l'algorithme affiche le plus petit entier *n* pour lequel, la valeur de u_n dépasse le seuil 1–A.