BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2021

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée : 4 heures Coefficient : 9

Ce sujet comporte 5 pages numérotés de 1/5 à 5/5.

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : (6 points)

Une usine fabrique des clous qui proviennent de trois machines différentes : la machine A ,la machine B et la machine C.

Partie A

42 % de la production de l'usine provient de la machine A tandis que 36 % provient de la machine B et le reste de la machine C.

10 % de clous fabriqués par l'usine sont déclarés défectueux. La machine A produit 5 % de clous défectueux et la machine Cquant à elle produit 3 % de clous défectueux.

On choisit un clou au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les évènements suivants :

A : « le clou estproduit par la machine A » ;

B : « le clouest produit par la machine B » ;

C : « le clouest produit par la machine C » ;

D : « le clou est défectueux » et $\overline{\text{D}}$ son événement contraire.

Les résultats seront arrondis à 10^{-4} *près.*

1.Montrer que la probabilité que le clou choisi soit défectueux et provienne de la machine B est égale à 0,0724.

2. En déduire la probabilité que le clou choisi soit défectueux sachant qu'il provient de la machine B.

3. Le clou choisi n'est pas défectueux,déterminer la probabilité qu'il provienne de la machine C.

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse à la longueur,en centimètre, des clous produits par les trois machines. Un clou est dit « apte pour la vente » lorsqu'il mesure entre 5,5 cm et 6,5 cm.Sinon il est jugé défectueux.

1.Lalongueur d'un clou prélevé au hasard dans la production des trois machines est modélisée par une variable aléatoire Xqui suit une loi normale d'espéranceμ= 6 et d'écart-type $\sigma_1 = 0,3$.

Calculer la probabilité qu'un clou soit apte pour la vente. Donner une interprétation du résultat obtenu par rapport à la Partie A.

2.Le responsable de l'usine souhaite modifier les réglages des machines pour diminuer le nombre de clous défectueux. Il souhaite obtenir 96 % de clous aptes pour la vente, sans changer la longueur moyenne de clous. On suppose alors que la longueur Yde clous suit une loi normale d'espérance μ = 6 et d'écart-type σ_2.

a) Soit $Z = \frac{\text{Y} - 6}{\sigma_2}$. Quelle loi suit Z ?

b) Montrer que $p(5,5 \leq \text{Y} \leq 6,5) = p\left(\frac{-0,5}{\sigma_2} \leq Z \leq \frac{0,5}{\sigma_2}\right)$. En déduire la valeur de σ_2.

Exercice 2 : (6 points)

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=2x+\ln(x)-1$.

1. Justifier que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2. a) Déterminer les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$.

b) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0\,;+\infty[$.

3. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

4. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=[\ln(x)]^2-2\ln(x)+4x$.

On appelle C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1)a) Déterminer la limite de la fonction f en 0.

b) En remarquant que $f(x)=\ln(x)[\ln(x)-2]+4x$, déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. a) Démontrer que, pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x}$ où g est la fonction définie dans la **Partie A**.

b) En déduire le sens de variations de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

Partie C

On considère la fonction h définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x)=[\ln(x)]^2-2\ln(x)$ et C′ sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. Calculer $I=\int_1^2\left(f(x)-h(x)\right)dx$.

2. Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 3 : (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, trois réponses sont proposées, une seule est exacte. Le candidat portera sur la copiele numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse choisie ainsi que la justification dece choix.

Il est attribué ***1pointsi la réponse est exacte et justifiée****.**Une réponse exacte non justifiée rapporte 0,5point**.Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.*

1.On considère le nombre $\mathrm{N} = 2018$ L'écriture du nombre N en base 8 est :

a) $\mathrm{N} = \overline{11001}^{8}$ **b)** $\mathrm{N} = \overline{3742}^{8}$ **c)** $\mathrm{N} = \overline{10710701}^{8}$

2. On considère le nombre complexe $Z = \dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}}$.

a) $\dfrac{-\pi}{12}$ est un argument de Z **b)** Le module de Z est égale à 1**c)** $Z = \mathrm{e}^{\frac{11\pi}{12}}$

3. On considère les points A (1; 1 ; 1), B (4 ; -2 ; 1) et C (0 ; 1 ; 0).

Une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$ est :

a)60 **b)** $\dfrac{2\pi}{3}$ **c)** 120

4. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times.......\times\dfrac{2n-1}{2n}$.

Alors la suite (u_n) est :

a)non monotone **b)**croissante **c)**décroissante.

Exercice 4 :(4 points)

On considère l'application f du plan complexe qui à tout point M d'affixe $z \neq -\mathrm{i}$ associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = f(z) = \dfrac{z-1}{z+\mathrm{i}}$.

1. Calculer les affixes des images des points O et A d'affixes respectives $z_A = -1 + i$ et $z_O = 0$ par l'application f.

2. On pose $z = x + iy$. Vérifier qu'on a alors $f(z) = \dfrac{(x^2+y^2-x+y)+\mathrm{i}(-x+y+1)}{x^2+(y+1)^2}$

3. On pose $f(z) = a + \mathrm{i}b$. Exprimer a et b en fonction de x et y.

4. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ du plan tels que

a) $f(z)$ est un nombre réel.

b) $f(z)$ est imaginaire pur.