BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2020

MATHÉMATIQUES

Série *S*

Durée : 4 heures **Coefficient : 9**

Le sujet comporte 4 pages numérotés de 1/4 à 4/4.

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (4 points)

Dans un établissement scolaire, une étude est menée auprès des élèves sur l'influence de faire les exercices à faire à la maison sur la compréhension des notions étudiées. Cette étude montre que si un élève fait ses exercices à la maison, la probabilité qu'il comprenne bien les notions étudiées est de 80%.

En revanche, si un élève ne fait pas ses exercices à la maison, la probabilité qu'il comprenne bien les notions étudiées est de 5%.

On admet que dans cet établissement, la probabilité qu'un élève fasse ses exercices à la maison est de 35%.

On considère les événements suivants :

- M : "L'élève fait ses exercices à la maison " ;
- C : "L'élève comprend bien les notions étudiées ".

1. Traduire la situation par un arbre de probabilités.

2. Montrer que la probabilité que l'élève comprenne bien les notions étudiées est 0,3125.

3. On choisit un élève ayant bien compris les notions étudiées, quelle est la probabilité que cet élève ait fait ses exercices à la maison.

4. Suite à une campagne de sensibilisation qu'elle a menée aux près des parents, l'association des parents d'élèves, affirme que 65% des élèves font désormais les exercices donnés à faire à la maison. Pour vérifier cette affirmation, le proviseur interroge au hasard 85 élèves. Parmi ces élèves, seuls 48 répondent avoir fait leurs exercices à la maison. Quelle conclusion peut-il en tirer ?

Exercice 2 (4 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\ \vec{u},\ \vec{v})$. On note A le point d'affixe – 2+ i.

À tout point M d'affixe $z \neq -2 + i$, on associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{z+3}{z+2-\mathrm{i}}$$

1. Déterminer l'affixe du point B' image du point B d'affixe – 3 + i.

2. Le point C' d'affixe 2 est l'image du point C. Déterminer l'affixe du point C.

3. On pose $z = x + \mathrm{i}\,y$ et $z' = x' + \mathrm{i}\,y'$ où x, y, x' et y' sont des réels.

a) Montrer que l'on a : $x' = \dfrac{x^2+y^2+5x-y+6}{(x+2)^2+(y-1)^2}$ et $y' = \dfrac{x-y+3}{(x+2)^2+(y-1)^2}$

b) Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que z' soit un réel.

c) Déterminer l'ensemble F des points M d'affixe z tels que z' soit un imaginaire pur.

Exercice 3 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x-\dfrac{2\ln x}{x}$. On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle I = $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=2\ln(x)+x^2-2$.

1. Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de g.

2. Étudier les sens de variations de g sur I.

3. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur I puis donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .

4. En déduire les signes de la fonction g sur I.

Partie B

1. Déterminer la limite de f en 0 et en $+\infty$.

2. a) Montrer que, pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) En déduire le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.

c) Monter que $f(\alpha)=\dfrac{2(\alpha^2-1)}{\alpha}$ et justifier que $f(x)>0$ pour tout $x\in]0\,;+\infty[$.

3. On désigne par F la fonction définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2-(\ln x)^2+1$.

a) Démontrer que la fonction F est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

b) Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Exercice 4 (6 points)

On considère la suite (u_n) définie sur pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 4}{u_n + 5} \end{cases}$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \in [0;1]$.

2. a) Calculer les valeurs exactes de u_1, u_2, u_3 et u_4.

b) À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation et la limité de la suite (u_n).

3. a) Montrer que la suite est (u_n) croissante.

b) La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier votre réponse.

4. Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n + 4 = \dfrac{20}{4 + u_n}$.

a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique

b) En déduire que $u_n = \dfrac{20}{4 + \left(\dfrac{1}{6}\right)^n} - 4$

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

5. On considère l'algorithme ci-dessous.

Variables
    n est un entier naturel
    A et u sont des réels
Entrée
    Saisir A
Traitement
    $0 \rightarrow$ u
    $0 \rightarrow$ n
    Tant que u $\leq$ 1–A
      $\dfrac{2\mathrm{u}+4}{\mathrm{u}+5} \rightarrow \mathrm{u}$
      n + 1$\rightarrow$ n
    Fin de tant que
Sortie
    Afficher n

a) Exécuter cet algorithme pour A = 0, 001.

b) Que fait cet algorithme ?