BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2022

MATHÉMATIQUES

Série S

Corrigé détaillé

Exercice 1 : QCM (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, trois réponses sont proposées, une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse choisie ainsi que la justification de ce choix.

*Il est attribué **1 point si la réponse est exacte et justifiée**. **Une réponse exacte non justifiée rapporte 0,5point**. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.*

1. L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On considère la droite(d) passant par le point $A\left(2 ; 1 ; -3\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}$. Une équation cartésienne du plan (P) passant par le point A et perpendiculaire à la droite (d) est :

a) $2x + y - 3z = 0$ **b)** $4x + y - z = 12$ **c)** $4x + y + z - 3 = 0$

Réponse

Comme la droite (d) est perpendiculaire au plan (P) alors le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}$ de la droite (d) est un vecteur normale au plan (P).

L'équation cartésienne du plan (P) s'écrit alors $4x + y - z = d$. Le point $A\ (2\ ;1\ ;-3)$ étant un point du plan (P) on a $4x_A + y_A - z_A = d$. On en déduit que d= 12

Réponse b) $4x + y - z = 12$

2. Les solutions de l'équation $7x \equiv 9\ [13]$ dans l'ensemble **N** sont de la forme (avec k un entier naturel) :

a) $x = 7 + 13k$ **b)** $x = 11 + 18k$ **c)** $x = 5 + 13k$

$7 \times 5 = 35 = 2 \times 13 + 9$. Donc $7 \times 5 \equiv 9\ [13]$

Réponse c) $x = 5 + 13k$

3. La fonction dérivée de la fonction f définie sur **R** par $f(x) = \sin(4x - 10)$ est égale à :

a) $f'(x) = -4\sin(4x - 10)$ **b)** $f'(x) = 4\cos(4x - 10)$ **c)** $f'(x) = 4 + \cos(4x - 10)$

On sait que $\sin(u)' = u'\cos(u)$.

Réponse b) $f'(x) = 4\cos(4x - 10)$

4. On considère l'algorithme ci-dessous écrit en langage Python.

```python
def limite (r):
    u=1
    n=0
    while u <= 100-r:
        u=u+3*n-8
        n=n+1
    return n
```

Lorsqu'on saisit l'instruction `>>> limite(0.0001)` dans la console, on obtient :

a) 100 **b)** 10^{-4} **c)** 12

Réponse c) 12

5. Dans un échantillon de 450 élèves d'un lycée, 125 élèves utilisent une application de géométrie sur leurs téléphones portables.
Au seuil de 95%, on peut estimer pour ce lycée que la proportion d'élèves utilisant cette application sur leur téléphone portable appartient à l'intervalle :

a) $[0,231 ; 0,325]$ **b)** $[0,188 ; 0,368]$ **c)** $[0,236 ; 0,320]$

$n = 450$ et $f = \dfrac{125}{450} = \dfrac{5}{18}$.

$n \geq 30$, $nf \approx 8,33 \geq 5$ et $n(1-f) \approx 21,67 \geq 5$. Donc les conditions sont réunis pour calculer l'intervalle de confiance.

$$I_{confiance} = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[\frac{5}{18} - \frac{1}{\sqrt{450}} ; \frac{5}{18} + \frac{1}{\sqrt{450}} \right] \approx [0,2306 ; 0,3249].$$

Réponse a) $[0,231 ; 0,325]$

Exercice 2 : (6 points)

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

Partie A

Soit g la fonction définie sur **R** par : $g(x) = 2x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 5$.

1. Calculer la limite de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} 2x\mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 5$

$$g(x) = 2x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 5 = \mathrm{e}^x(2x-1) + 5$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x(2x-1) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 5 = 5 \end{array}\right\} \text{par somme des limites, } \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

2. a) Déterminer le tableau des variations de la fonction g sur **R**.

$g'(x) = 2\mathrm{e}^x + 2x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x = (1+2x)\mathrm{e}^x$

Le tableau des variations de la fonction g :

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	5	$\searrow$	$-2e^{(-1/2)}+5$	$\nearrow$	$+\infty$

b) En déduire le tableau de signe de la fonction g sur **R**.

Le minimum de la fonction g sur **R** est égale à $g\left(\dfrac{-1}{2}\right) = -2e^{-1/2} + 5 \approx 3{,}79 > 0$,

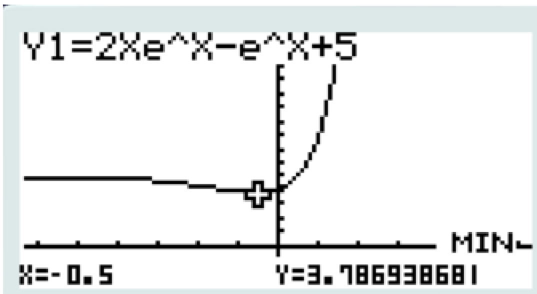
donc g est positive sur **R**.

x	$-\infty$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	

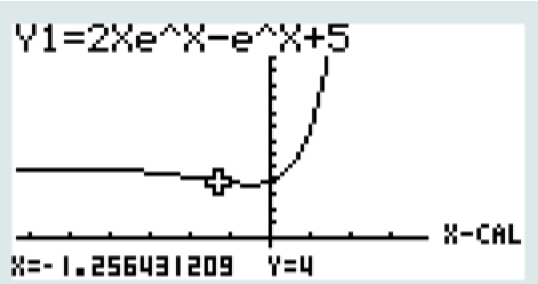
3. a) Montrer que l'équation $g(x) = 4$ admet deux solutions sur **R**. On note α et β ces deux solutions avec $\alpha < \beta$.

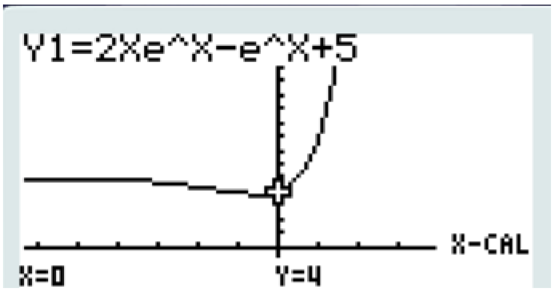
D'après le tableau de variation de la fonction g, l'équation $g(x) = 4$ admet deux solutions sur **R**.

x	$-\infty$	α		$-1/2$		β	$+\infty$
$g'(x)$			$-$	0	$+$		
$g(x)$	5	4	$\searrow$	$-2e^{(-1/2)}+5$	$\nearrow$	4	$+\infty$



b) Donner les valeurs approchées de α et β.





$\alpha \approx -1{,}256$ et $\beta = 0$.

Partie B
On souhaite calculer l'aire A délimitée par la courbe C_f, la droite d'équation $y=4$ et par les droites d'équations respectifs $x=\alpha$ et $x=0$.

1. Montrer que la fonction G définie par $G(x)=2x\mathrm{e}^x-3\mathrm{e}^x+5x+1$ est une primitive sur **R** de la fonction g.

$G'(x)=2\mathrm{e}^x+2x\mathrm{e}^x-3\mathrm{e}^x+5$
$G'(x)=2x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+5=g(x)$

Comme $G'(x)=g(x)$ alors G est une primitive de la fonction g.

2. On appelle h, la fonction définie sur **R** par : $h(x)=4-g(x)$.
a) Déterminer une primitive sur **R** de la fonction h.

$H(x)=4x-\mathrm{G}(x)$
$H(x)=4x-\left(2x\mathrm{e}^x-3\mathrm{e}^x+5x+1\right)$
$H(x)=-2x\mathrm{e}^x+3\mathrm{e}^x-x-1$

b) Montrer que l'aire A vaut : $A=e^{\alpha}(2\alpha-3)+\alpha+3$.

$A=\int_{\alpha}^{0}(4-g(x))\,dx=[H(x)]_{\alpha}^{0}$
$A=2-\left(-2\alpha e^{\alpha}+3e^{\alpha}-\alpha-1\right)$
$A=2\alpha e^{\alpha}-3e^{\alpha}+\alpha+3$
$A=e^{\alpha}(2\alpha-3)+\alpha+3$

c) En déduire une valeur approchée de l'aire *A*.

$A \approx 0{,}174$ *ua*.

Exercice 3 : (4 points)

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

Pour se préparer à un contrôle de mathématiques, un élève s'entraîne d'abord avec les exercices d'application puis passe aux exercices de synthèse de son manuel.

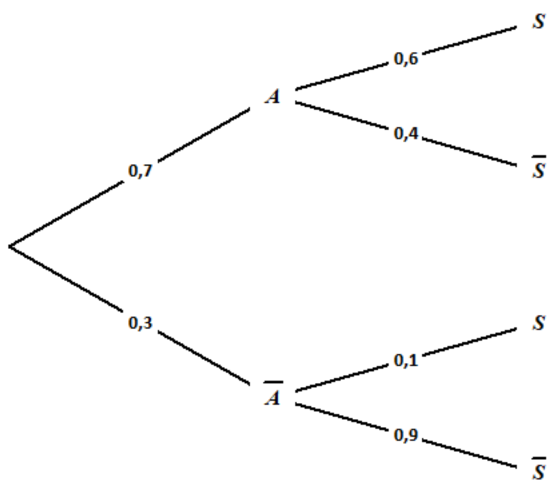
On a observé les deux conditions suivantes :

- S'il arrive à bien faire 70 % des exercices d'application, il réussit à bien faire 60% des exercices de synthèse ;
- sinon, il réussit à bien faire 10% des exercices de synthèse.

On considère les évènements suivants :
A : « L'élève arrive à bien faire les exercices d'application » ;

S : « L'élève réussit à bien faire les exercices de synthèse ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant cette situation.



2. Montrer que la probabilité que cet élève réussit à bien faire les exercices de synthèses est égale à 0,45.

$p(S) = 0,7 \times 0,6 + 0,3 \times 0,1 = 0,45$

3. Sachant que l'élève a réussi à bien faire les exercices de synthèses, déterminer la probabilité qu'il n'a pas pu bien faire les exercices d'application.

$$p_S(\overline{A}) = \frac{0,3 \times 0,1}{0,45} \approx 0,067$$

4. On constate que cet élève obtient une bonne note à un devoir de mathématiques lorsqu'il réussit à bien faire les exercices de synthèse.

Cet élève compose 13 contrôles de mathématiques au cours de l'année. On note X, la variable aléatoire égale aux nombres des contrôles où cet élève obtient une bonne note.

a) Calculer la probabilité qu'il obtienne une bonne note à exactement cinq contrôles.

X □ $(0,45\ ;13)$

Donc on a : $p(X=5) = \binom{13}{5}(0,45)^5(0,55)^8 \approx 0,199$.

b) Déterminer la probabilité qu'il obtienne une bonne note à au plus onze contrôles.

$$p(X \leq 11) = 1 - p(X = 12) - p(X = 13) \approx 0,999$$

Exercice 4 : (5 points)

Partie A :

Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z) = z^3 - 9z^2 + 28z - 20$.

1. Calculer $P(1)$.

$$P(1) = 1 - 9 + 28 - 20 = 0$$

2. Déterminer les réels a et b tels que pour tout nombre complexe z :
$P(z) = (z-1)(z^2 + a\,z + b)$.

$$P(z) = z^3 + az^2 + bz - z^2 - a\,z - b$$
$$P(z) = z^3 + (a-1)z^2 + (b-a)z - b$$

Donc par identification, on a :

$$\begin{cases} a-1=-9 \\ b-a=28 \\ -b=-20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-8 \\ b=28+a=28-8=20 \\ b=20 \end{cases}$$

$\mathrm{P}(z)=(z-1)(z^2-8z+20)$.

3. Résoudre l'équation $\mathrm{P}(z)=0$.

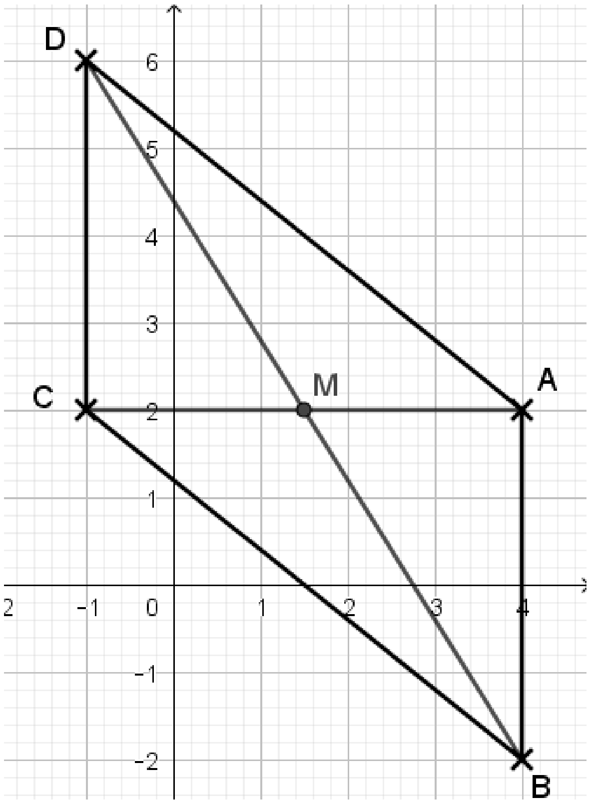
$\mathrm{P}(z)=0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2-8z+20)=0$.

$\mathrm{P}(z)=0 \Leftrightarrow z=1$ ou $z=4-2\mathrm{i}$ ou $z=4+2\mathrm{i}$

Partie B :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}}=4+2\mathrm{i}$, $z_{\mathrm{B}}=4-2\mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{C}}=-1+2\mathrm{i}$.

1. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v}\right)$.



2. a) Déterminer la forme algébrique du nombre $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{-5}{4}\mathrm{i}$.

b) En déduire la nature du triangle ABC.

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg\left(\dfrac{-5}{4}\mathrm{i}\right) = \dfrac{-\pi}{2}[\pi]$

Donc le triangle ABC est rectangle en A.

3. On considère le point D d'affixe $z_D = -1 + 6\,\mathrm{i}$.

Montrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

$z_{\overrightarrow{AB}} = (4 - 2\mathrm{i}) - (4 + 2\mathrm{i}) = -4\mathrm{i}$.

$z_{\overrightarrow{DC}} = (-1 + 2\mathrm{i}) - (-1 + 6\mathrm{i}) = -4\mathrm{i}$.

Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, ABCD est alors un parallélogramme.

4. Déterminer l'affixe du point M, centre du parallélogramme ABCD.

M, centre du parallélogramme ABCD, est le milieu des diagonales :

$z_M = \dfrac{z_C + z_A}{2} = \dfrac{-1 + 2\mathrm{i} + 4 + 2\mathrm{i}}{2} = \dfrac{3}{2} + 2\mathrm{i}$.