Réponses

Exercice 1 : 6 points

Partie A :

1. $$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-\infty} 4e^x = 0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} -2xe^x - 4 = -4\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Par somme de limites}\\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -4\end{array}$$

$$g(x) = e^x\left(4 - 2x - \frac{4}{e^x}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(4 - 2x - \frac{4}{e^x}\right) = -\infty\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Par produit de limites}\\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty\end{array}$$

2. $g'(x) = 2e^x(1-x)$, $2e^x$ **est positif, donc g' est du même signe que 1-** x **d'où le tableau de variation :**

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-4	$\nearrow$	$2e-4$	$\searrow$	$-\infty$

***g*(1) = -4+2e ≈ 1,43**

3.

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$g(x)$	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$2e-4$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

D'après le tableau des variations complété, l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions 0 et α sur R .

4. L'encadrement de α est : $1,59 < \alpha < 1,60$

5. Le signe de $g(x)$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$		$+$	0	$-$	

Partie B :

1. On pose pour $x \neq 0$; $f(x) = \dfrac{2 - \dfrac{2}{x}}{\dfrac{e^x}{x} - 2}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \dfrac{2}{x} = 2 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} - 2 = +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient de limites} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} 2 - \dfrac{2}{x} = 2 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x} - 2 = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient de limites} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1 \end{array}$$

La courbe C admet deux asymptotes horizontales d'équations $y = -1$ **et** $y = 0$ **au voisinage de** $+\infty$ **et** $-\infty$**.**

2.a) $f'(x)=\dfrac{2\left(e^x-2x\right)-(2x-2)\left(e^x-2\right)}{\left(e^x-2x\right)^2}=\dfrac{4e^x-2xe^x-4}{\left(e^x-2x\right)^2}=\dfrac{g(x)}{\left(e^x-2x\right)^2}$

b) f' **est du même signe que** g **d'où le tableau de variation de** f**.**

x	$-\infty$		0		a		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	0

Partie C

1. Pour tout réel x**, on a :** $\dfrac{e^x-2}{e^x-2x}-1=\dfrac{e^x-2-e^x+2x}{e^x-2x}=\dfrac{2x-2}{e^x-2x}=f(x)$

2. La primitive de la fonction f **est :** $F(x)=\ln\left(\mathrm{e}^x-2x\right)-x$

3. $\mathrm{I}=\int_0^4 f(x)dx=\left[F(x)\right]_0^4=\ln\left(\mathrm{e}^4-8\right)-4$

Exercice 2: QCM (5 points)

1. Réponse b) 13

2. Réponse b) 0,75

3. Réponse c) 3999

4. Réponse a) $-\infty$

5. Réponse c) Symétrique par rapport à l'axe des ordonnés.

Exercice 3 : (5 points)

1. $f'(x)=\dfrac{9}{(x+2)^2}$ **alors la fonction est croissante sur** $]-2;+\infty[$

2. Démonstration par récurrence

Initialisation :

$u_0=5.$ **Donc** $u_0=5\geq 1$ **La proposition est vraie au rang *n*=0.**

***Hérédité* :**

Supposons que pour un rang *n*, $u_n\geq 1$ **est vraie.**

Montrons que pour un rang *n*+1, $u_{n+1}\geq 1$ **est vraie.**

$u_n\geq 1$ **et** $f(u_n)\geq f(1)$ **car la fonction *f* est croissante**

donc $u_{n+1}\geq \dfrac{3}{3}$ **On a donc** $u_{n+1}\geq 1$

La proposition est donc héréditaire.

Conclusion :

La proposition étant vraie au rang initial *n*=0 et étant héréditaire, alors elle est vraie pour tout *n* entier naturel.

3. $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-u_n^{\;2}+2u_n-1}{u_n+2}$

Pour $u_n\geq 1$**, on a** $-u_n^{\;2}+2u_n-1\leq 0.$ $u_n+2\geq 0.$ **Donc** $u_{n+1}-u_n\leq 0$

Alors la suite est (u_n) **décroissante.**

4. Comme la suite (u_n) **est décroissante et minorée par 1, alors la suite** (u_n) **est convergente vers un réel** $\lambda\geq 1$**.**

5. a) $v_0=\dfrac{1}{u_0-1}=\dfrac{1}{4}.$

b) $v_{n+1}=\dfrac{1}{u_{n+1}-1}=\dfrac{1}{\dfrac{4u_n-1}{u_n+2}-1}=\dfrac{u_n+2}{3u_n-3}$ **et** $v_{n+1}-v_n=\dfrac{u_n+2}{3u_n-3}-\dfrac{1}{u_n-1}=\dfrac{1}{3}$

donc $\left(v_n\right)$ **est une suite arithmétique de raison** $r=\dfrac{1}{3}$ **et** $v_0=\dfrac{1}{4}.$

c) $v_n=v_0+n\times r=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}n$

$u_n=\dfrac{1}{v_n}+1=\dfrac{1}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}n}+1$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}n}+1=1.$

Exercice 4: (4 points)

1. $\dfrac{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{A}}}=i$

2. $\left|\dfrac{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{A}}}\right|=1 \quad \arg\left(\dfrac{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{A}}}\right)=\dfrac{\pi}{2}(2\pi)$

Alors le triangle ABC est isocèle rectangle en A

3. a) $z_D=4-2i$ **et** $z_E=1-i$

b) $\dfrac{z_{\mathrm{D}}-z_{\mathrm{E}}}{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{B}}}=\dfrac{1}{2}$

c) Comme $\dfrac{z_{\mathrm{D}}-z_{\mathrm{E}}}{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{B}}}=\dfrac{1}{2}$ **appartient à R et que** $\arg\left(\dfrac{z_{\mathrm{D}}-z_{\mathrm{E}}}{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{B}}}\right)=0$ **(2 π) alors les droites (ED) et (BC) sont parallèles.**