# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

## Session 2023

## MATHÉMATIQUES

## Série S

**Durée : 4 heures** **Coefficient : 9**

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

**L'utilisation de la calculatrice est autorisée.**

*Le candidat doit traiter tous les exercices.*

*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*

*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.*

**Exercice 1 : (6 points)**

## Partie A

Soit $g$ la fonction définie sur **R** par $g(x) = 4e^x - 2xe^x - 4$.

**1.** Déterminer les limites de la fonction $g$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

**2.** Étudier les variations de la fonction $g$.

**3.** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions 0 et $\alpha$.

**4.** Donner un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-2}$.

**5.** En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de $x$.

## Partie B

Soit $f$ la fonction définie sur **R** par $f(x) = \dfrac{2x-2}{e^x - 2x}$.

On appelle C la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,; \vec{i}, \vec{j})$.

**1.** Déterminer la limite de la fonction $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$. Préciser les asymptotes éventuelles.

**2. a)** Démontrer que, pour tout réel $x$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{\left(e^x - 2x\right)^2}$.

**b)** En déduire le sens de variations de la fonction $f$ sur **R**.

## Partie C

**1.** Montrer que pour tout réel $x$, $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{e^x - 2x} - 1$.

**2.** En déduire une primitive de $f$ sur **R**. On admet que $e^x - 2x$ est strictement positif pour tout $x \in \mathbf{R}$.

**3.** On considère le nombre $\mathrm{I} = \int_0^4 f(x)\,dx$. Montrer que $\mathrm{I} = \ln\left(e^4 - 8\right) - 4$.

**Exercice 2 : (5 points)**

*Pour chacune des questions, une seule des trois réponses est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie.*

***Aucune justification n'est demandée.***

**1.** On considère une pièce truquée telle que la probabilité d'obtenir pile est égal à $p = 0,65$.

On note X la variable aléatoire qui, à l'issue de 20 lancers indépendants de cette pièce, associe le nombre de piles obtenus. L'espérance de la variable aléatoire X est :

**a)** 0, 35 **b)** 13 **c)** 7

**2.** La variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne $\mu = 50$ et d'écart-type $\sigma = 0,25$.
Le nombre réel $t$ tel que $p(50 - t < X < 50 + t) = 0,997$ est :

**a)** 12,5 **b)** 0,75 **c)** 0,25.

**3.** Le programme ci-dessous détermine le plus petit entier naturel A tel que pour tout, $x \geq \text{A}$, la distance $\text{MP} = \left|\frac{4}{x+1}\right| < 0,001$. La valeur affichée est :

```
x=0
while abs(4/(x+1))>=0.001:
    x=x+1
print(x-1)
```

**a)** 0,01 **b)** 39 **c)** 3999

**4.** La limite de la fonction $f$ définie par $f(x) = 3x + 2 - \sqrt{3x^2 + x + 1}$ en $-\infty$ est:

**a)** $-\infty$ **b)** 3 **c)** $+\infty$

**5.** On considère la fonction $g$ définie sur $[-\pi ; \pi]$ par $g(x) = \cos(2x) - 2\cos(x)$.

La courbe représentative de la fonction $g$ est symétrique par rapport à :

**a)** l'origine **b)** l'axe des abscisses **c)** l'axe des ordonnés.

**Exercice 3 :(5 points)**

On considère la suite $(u_n)$ définie sur pour tout entier naturel *n* par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} \end{cases}$

**1.** On considère la fonction *f* définie sur $\left]-2;+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$.

Dresser le tableau de variation de la fonction $f$ définie sur $\left]-2;+\infty\right[$ .

**2.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, $u_n > 1$.

**3.** Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)$.

**4.** En déduire la convergence de la suite $(u_n)$.

**5.** On considère la suite $(v_n)$ définie, pour tout entier naturel *n*, par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

**a)** Calculer $v_0$.

**b)** Montrer que $(v_n)$ est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$.

**c)** Exprimer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de *n*.

**d)** En deduire la limite de la suite $(u_n)$.

**Exercice 4 :(4 points)**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points

A, B et C les points d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 2 - 3\mathrm{i}$, $z_{\mathrm{B}} = \mathrm{i}$ et et $z_{\mathrm{C}} = 6 - \mathrm{i}$.

**1.** Calculer le quotient $\dfrac{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}}$ et donner le résultat sous forme algébrique.

**2.** En déduire la nature du triangle ABC.

**3.** On considère les points D et E les milieux respectifs des segments [AC] et [AB].

**a)** Déterminer les affixes des points D et E.

**b)** Calculer $\dfrac{z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{E}}}{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{B}}}$.

**c)** En déduire que les droites (ED) et (BC) sont parallèles.