Diferansiyel Denklemler

2. Hafta

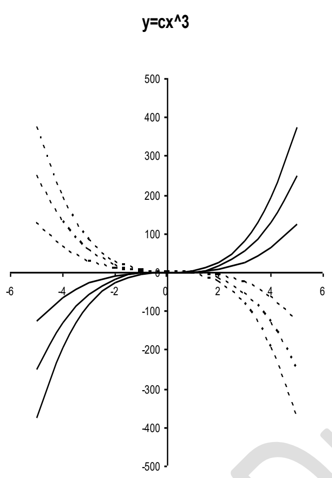
Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

I.2. DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN BAZI GEOMETRİK YORUM VE UYGULAMALARI

Diferansiyel denklemlerin fizik ve mühendislik alanlarının temelini oluşturduğu hatta biyoloji ve ekonomi gibi farklı alanlarda da önemli bir işlem vasıtası teşkil ettiğini ifade edebiliriz.

I.2.1 EĞRİLER AİLESİNİN DİFERANSİYEL DENKLEMİ:

Önceki bölümden $n.$ mertebeden bir diferansiyel denklemin n parametreli bir çözüm ailesinin bulunabileceğini belirtmiştik. Bununla birlikte her zaman $n.$ mertebeden bir diferansiyel denklem için n parametreli bir çözüm ailesi bulunabilir diye düşünülmemelidir. Diğer taraftan farz edilen problemi tersinden düşünelim yani n parametreli bir eğriler ailesi ile işleme başlarsak biz verilen eğriler ailesini temsil eden bir diferansiyel denklem bulabilir miyiz? Çoğu durumda bu sorunun cevabı 'evet' tir. Örneğin; özel çözümler kısmında da tartıştığımız üzere $y = ce^x$ bir parametreli eğriler ailesinin her bir fonksiyonu aynı birinci mertebeden $y' - y = 0$ diferansiyel denklemini sağlıyordu. Şimdi $y = c_1e^x + c_2$ iki parametreli eğriler ailesini göz önüne alalım. Burada $y' = c_1e^x$ ve $y'' = c_1e^x$ olduğundan verilen eğriler ailesini çözüm kabul eden diferansiyel denklem $y'' - y' = 0$ olarak bulunur.



Örnek 10:

Şekilde gösterilen eğrileri temsil eden bir parametreli eğriler ailesi $y = cx^3$ ün tanımladığı diferansiyel denklemi bulalım. Eğriler ailesi bir parametreli olduğundan biz birinci mertebeden diferansiyel denklem bulmayı bekliyoruz. O halde $y' = 3cx^2 \cdots *$ ve $c = \dfrac{y}{x^3}$ olduğundan bu değeri (*) da yazarsak $y' = 3\left(\dfrac{y}{x^3}\right)x^2 = 3\dfrac{y}{x}$ veya $xy' - 3y = 0$ bulunur.

Örnek 11: $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$ iki parametreli eğriler ailesinin diferansiyel denklemini bulalım.

Çözüm: $y' = 2c_1e^{2x} - 2c_2e^{-2x}$

$$y'' = 4c_1e^{2x} + 4c_2e^{-2x} = 4\left(c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}\right) = 4y$$

$$y'' = 4y \Rightarrow y'' - 4y = 0$$

Tanım 4: $i = 1,2,\ldots,n$ olmak üzere n tane bağımsız parametre $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ve x, y ve c_i'ler arasındaki bir bağıntı $y = f(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \cdots (3)$ olsun. Bu fonksiyon x'e göre türevlenirse $x, y', \ldots, y^{(n)}$ ler arasında $(n+1)$ tane bağıntı elde edilir. Bu $(n+1)$ tane bağıntı arasında $c_1, c_2, \ldots, c_n$ parametreleri yok edilirse $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$ arasında bir denklem elde edilir. Bu denklem (3) fonksiyonunu genel çözüm kabul eden diferansiyel denklemdir.

Örnek 12: $y = ce^{2x}$ bir parametreli eğriler ailesini çözüm kabul eden diferansiyel denklemi bulmaya çalışalım.

Çözüm: $y' = 2ce^{2x} = 2y \Rightarrow y' - 2y = 0$

Örnek 13: Merkezi x ekseni üzerinde bulunan r yarıçapındaki dairelerin denklemini çözüm kabul eden diferansiyel denklemi bulalım.

Çözüm: Merkezi x ekseni üzerinde bulunan r yarıçapındaki dairelerin denklemi $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ dir.

$$(x-a)^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow 2(x-a) + 2yy' = 0 \Rightarrow (x-a) + yy' = 0 \Rightarrow (x-a) = -yy'$$

$$\Rightarrow y^2 (y')^2 + y^2 = r^2$$

Örnek 14: Orijinden geçen ve merkezi y ekseni üzerinde bulunan dairelerin denklemini çözüm kabul eden diferansiyel denklemi bulunuz.

Çözüm: Orijinden geçen ve merkezi y ekseni üzerinde bulunan dairelerin denklemi c_1 bir parametre olmak üzere: $x^2 + (y-c_1)^2 = c_1{}^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2yc_1 + c_1{}^2 = c_1{}^2$

$$\Rightarrow c = \frac{x^2 + y^2}{y}$$

$$\Rightarrow 2x + 2yy' = cy'$$

$$\Rightarrow 2x + 2yy' = \left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right) y'$$

$$\Rightarrow 2xy + 2y^2 y' = x^2 y' + y^2 y'$$

$$\Rightarrow 2xy + y^2 y' = x^2 y'$$

$$\Rightarrow (x^2 - y^2)\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$$

Örnek 15: $y = \sin x - 1 + ce^{-\sin x}$ bir parametreli eğriler ailesini çözüm kabul eden diferansiyel denklemi bulunuz.

Çözüm: $y' = \cos x - \cos x \cdot ce^{-\sin x} = \cos x\left(1 - ce^{-\sin x}\right)$ ve $ce^{-\sin x} = y + 1 - \sin x$ olduğundan

$$y' = \cos x\left(1 - ce^{-\sin x}\right) = \cos x - \cos x(y + 1 - \sin x) = \cos x - y\cos x - 1 + \cos x \sin x$$

$$y' = \cos x(1 - y - 1 + \sin x)$$

$$y' = \cos x(-y + \sin x) = -\cos x \cdot y + \frac{1}{2}\sin 2x$$

Örnek 16: $y = c_1 \cos 4x$ ve $y = c_2 \sin 4x$ fonksiyonlarının $y'' + 16y = 0$ diferansiyel denkleminin çözümleri olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $y = c_1 \cos 4x$ olmak üzere

$y' = -4c_1 \sin 4x$ ve $y'' = -16c_1 \cos 4x$ elde edilir ve denklemde bunlar yerine yazılırsa

$$y'' + 16y = -16c_1 \cos 4x + 16c_1 \cos 4x$$
$$y'' + 16y = 0$$

bulunur.

$$y = c_2 \sin 4x$$
$$y' = 4c_2 \cos 4x \qquad \Rightarrow \quad y'' + 16y = -16c_2 \sin 4x + 16c_2 \sin 4x = 0$$
$$y'' = -16c_2 \sin 4x$$

$$y = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x$$
$$y' = -4c_1 \sin 4x + 4c_2 \cos 4x \qquad \Rightarrow$$
$$y'' = -16c_1 \cos 4x - 16c_2 \sin 4x$$
$$y'' + 16y = -16c_1 \cos 4x - 16c_2 \sin 4x + 16c_1 \cos 4x + 16c_2 \sin 4x = 0$$

Örnek 17: $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ denklemi verilsin.

a) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$ fonksiyonunun verilen diferansiyel denklemin bir çözümü olduğunu gösteriniz.

b) $x = 0$ için $y = 1, y' = 0, y'' = -1$ şartlarını sağlayan özel çözüm bulunuz.

Çözüm:

a) $y' = c_1 e^{x} + c_2\left(-e^{-x}\right) + 2c_3 e^{2x}$

$$y'' = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + 4c_3 e^{2x}$$

$$y''' = c_1 e^{x} - c_2 e^{-x} + 8c_3 e^{2x}$$

$$= c_1 e^{x} - c_2 e^{-x} + 8c_3 e^{2x} - 2c_1 e^{x} - 2c_2 e^{-x} - 8c_3 e^{2x} - c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} - c_3 2e^{2x} + 2c_1 e^{x} + 2c_2 e^{-x} + 2c_3 e^{2x} = 0$$

olduğundan verilen fonksiyon diferansiyel denklemin çözümüdür.

b)
$$y(0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 + c_3 \cdot 1 = 1$$
$$\Rightarrow c_1 + c_2 + c_3 = 1 \qquad *$$

$$y'(0) = c_1 \cdot 1 - c_2 \cdot 1 + 2c_3 \cdot 1 = 0$$
$$\Rightarrow c_1 - c_2 + 2c_3 = 0 \qquad **$$

$$y''(0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 + 4c_3 \cdot 1 = -1$$
$$\Rightarrow c_1 + c_2 + 4c_3 = -1 \qquad ***$$

$(*), (**)\, ve (***)$ ifadelerinden $c_3 = \dfrac{-2}{3}, c_2 = \dfrac{1}{6}, c_1 = \dfrac{3}{2} \Rightarrow y = \dfrac{3}{2}e^{x} + \dfrac{1}{6}e^{-x} - \dfrac{2}{3}e^{2x}$ olarak bulunur. Bu ise $x = 0$ noktasındaki verilen başlangıç şartlarına bağlı özel çözümdür.

Örnek 18: $y'' = \dfrac{1}{2y'}$ diferansiyel denklemi verilsin. Buna göre;

a) $y = \dfrac{2}{3}(x + c_1)^{3/2} + c_2$ fonksiyonun genel çözüm olduğunu gösteriniz.

b) A$(1,2)$ noktasından geçen ve bu noktadaki teğeti x ekseni ile $45°$'lik açı yapan özel çözümü bulunuz.

Çözüm:

a) $y' = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3}{2} \cdot 1 \cdot (x + c_1)^{1/2} = (x + c_1)^{1/2}$

$$y'' = \frac{1}{2} \cdot (x + c_1)^{-1/2}$$

$$y'' \cdot 2y' = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}(x + c_1)^{-1/2} \cdot 2 \cdot (x + c_1)^{1/2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

b) $y' = \tan 45° = 1$

$$y' = (x + c_1)^{1/2} = 1 \Rightarrow x + c_1 = 1 \Rightarrow 1 + c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = 0$$

$A(1,2)$ Noktası denklemi sağlayacağından;

$2 = 2(1 + c_1\ )^{3/2} + c_2$ ve $c_1 = 0$ olduğundan $c_2 = \dfrac{4}{3}$ olur. Buradan özel çözüm: $y = \dfrac{2}{3}(x)^{3/2} + \dfrac{4}{3}$ olur.

I.2.2 GEOMETRİK UYGULAMALAR

1. Merkezleri $x = \dfrac{1}{2}y$ doğrusu üzerinde ve yarıçapı 1 birim olan çmberlerin ailesinin diferansiyel denkleminin bulunuşu şöyledir.

$$M(a, 2a), \quad r = 1 \Rightarrow (x - a)^2 + (y - 2a)^2 = 1$$

$$\Rightarrow 2(x - a) + 2(y - 2a)y' = 0 \Rightarrow 2x - 2a + 2yy' - 4ay' = 0$$

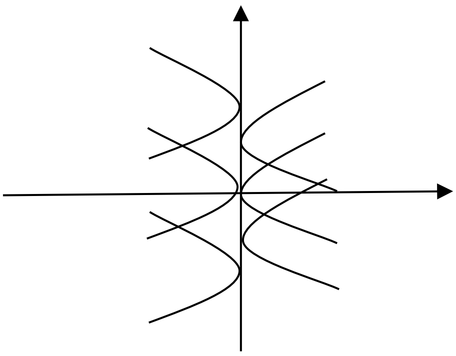
$$\Rightarrow a = \frac{x + yy'}{1 + 2y'} \Rightarrow \left(x - \frac{x + yy'}{1 + 2y'}\right)^2 + \left(y - \frac{2(x + yy')}{1 + 2y'}\right)^2 = 1$$

Veya gerekli düzenlemelerden sonra

$$(2xy' - yy')^2 + (y - 2x)^2 = (1 + 2y')^2$$

bulunur.

2. *Oy*-eksenine teğet olan paraboller ailesinin diferansiyel denklemi şu şekilde elde edilir.



$$x=a\left(y-y_0\right)^2 \Rightarrow 1=2a\left(y-y_0\right)y' \Rightarrow a\left(y-y_0\right)=\frac{1}{2y'}$$

$$0=2a\left(y-y_0\right)y''+2ay'^2 \Rightarrow 0=a\left(y-y_0\right)y''+ay'^2$$

$$\frac{x}{y-y_0}y''+ay'^2=0 \Rightarrow xy''+a\left(y-y_0\right)y'^2=0$$

$$xy''+\frac{1}{2y'}y'^2=0 \Rightarrow y''+\frac{1}{2x}y'=0$$

3. Orijinden geçen ve merkezi y ekseni üzerinde bulunan dairelerin denklemini çözüm kabul eden diferansiyel denklemi bulunuz.

Çözüm: Orijinden geçen ve merkezi y ekseni üzerinde bulunan dairelerin denklemi c_1 bir parametre olmak üzere: $x^2+\left(y-c_1\right)^2=c_1{}^2 \Rightarrow x^2+y^2-2yc_1+c_1{}^2=c_1{}^2$

$$\Rightarrow c=\frac{x^2+y^2}{y}$$

$$\Rightarrow 2x+2yy'=cy'$$

$$\Rightarrow 2x+2yy'=\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)y'$$

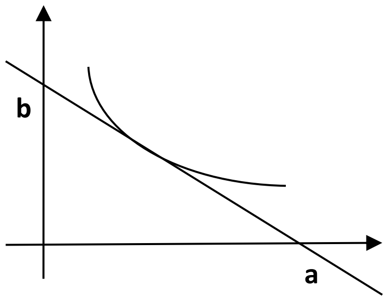
$$\Rightarrow 2xy+2y^2y'=x^2y'+y^2y'$$

$$\Rightarrow 2xy+y^2y'=x^2y'$$

$$\Rightarrow \left(x^2-y^2\right)\frac{dy}{dx}-2xy=0$$

4. Verilmiş bir eğrinin her bir noktasından çizilmiş teğetinin koordinat eksenlerinden ayırdığı parça uzunluklarının terslerinin toplamı 1 ise bu eğriyi bulunuz.

Şekildeki gibi verilen eğri denklemi ile çizilmiş teğetinin koordinat eksenlerinden ayırdığı parça uzunluklarının terslerinin toplamı 1 olmak üzere kullanılırsa



$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\quad \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\Rightarrow b=\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{\dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}}}=1\Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}y=1$$

$$\Rightarrow x+y\sqrt{a^2-1}=a\Rightarrow 1+y'\sqrt{a^2-1}=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2-1}=-\frac{1}{y'}\Rightarrow a=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'}$$

$$\Rightarrow x-\frac{1}{y'}y=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'}\Rightarrow xy'-y=\sqrt{1+y'^2}$$

$$\Rightarrow y=xy'-\sqrt{1+y'^2}$$

Clairaut Diferansiyel denklemi elde edilir.

5. *Ox*-eksenine teğet olan paraboller ailesinin diferansiyel denklemi şu şekilde elde edilir.

$$y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0\Rightarrow y=x^2+bx+c$$

$$\Delta=b^2-4ac=0\left(\textit{teğet olduğundan}\right)\Rightarrow c=\frac{b^2}{4}\Rightarrow y=x^2+bx+\frac{b^2}{4}$$

$$\Rightarrow y'=2x+b\Rightarrow b=y'-2x\Rightarrow y=x^2+\left(y'-2x\right)x+\frac{\left(y'-2x\right)^2}{4}$$

bulunur.