Diferansiyel Denklemler

10. Hafta

Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

BÖLÜM VIII: YÜKSEK MERTEBELİ LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Giriş: $F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0 \quad (n\geq 2)$ Şeklinde verilmiş denklemlere yüksek mertebeli diferansiyel denklem denir. $y^{(n)}=f(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)})\ldots$**(1)** şeklindeki denklemlere ise yüksek mertebeden türeve göre çözülmüş diferansiyel denklem denir. **1** nolu denklemin $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0', y''(x_0)=y_0'',\ldots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}\ldots$**(2)** şartlarını sağlayan çözümlerinin bulunması problemi ise Cauchy problemi olarak bilinir. Buna göre $y_0, y_0', y_0'',\ldots,y_0^{(n-1)}$ reel sayılar olmak üzere Cauchy probleminin çözümün varlığı ve tekliği hakkında aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 1:

$D=\left\{(x,y_1,y_2,\ldots,y_n):\left|x-x_0\right|\leq a,\left|y_i-y_0^{(i)}\right|\leq b_i\right\}\subset R^{n+1}$ dikdörtgeninde tanımlı her bir f_i fonksiyonu $i=1,2,\ldots,n$ için

a) Bütün değişkenlere göre sürekli olsunlar (O halde sınırlıdır: $\left|f_i\right|<M$ olacak şekilde $\exists M>0$ sayısı bulunur.)

b) f_i fonksiyonlarının her biri $y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)}$ değişkenlerinin her birine göre Lipsichitz şartını sağlasın. ($\left|f(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)-f(x,z_1,z_2,\ldots,z_n)\right|\leq\sum_{k=1}^{n}\left|y_k-z_k\right|$)

O halde, $h=\min(a,\frac{b_1}{M},\frac{b_2}{M},\ldots,\frac{b_n}{M})$ olmak üzere Cauchy probleminin $\left[x_0-h,x_0+h\right]$ aralığında tanımlanmış bir $\{y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)\}$ çözümü bulunur.

VIII.1 :TEMEL TEORİ ve KAVRAMLAR

VIII.1.1: BAŞLANGIÇ DEĞER PROPLEMİ

$n.$ mertebeden bir lineer diferansiyel denklem

$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)\ldots$**1** olsun.

$y_0, y_0', y_0'',\cdots,y_0^{(n-1)}$ keyfi sabitler olmak üzere

$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0', y''(x_0)=y_0'',\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}\ldots$**2** değerleri bir I aralığının $x=x_0$ noktasındaki başlangıç şartları olarak adlandırılırlar. Buna göre $x=x_0$ noktasını içeren I aralığında **2** başlangıç şartlı **1** denklemi başlangıç değer problemi olarak adlandırılır.

Şimdi, $n=2$ olması yani **1** denkleminin ikinci mertebeden olması halini inceleyelim. Bu durumda lineer diferansiyel denklem

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

$$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0'$$

şeklinde olup başlangıç değer probleminin bir çözümü I aralığında tanımlı bir fonksiyondur ve grafiği de (x_0,y_0) noktasından geçer. Ayrıca (x_0,y_0) noktasından geçen ve bu noktadaki eğimi y_0' olan bir eğriyi temsil eder.

Aşağıda vereceğimiz teorem başlangıç değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği hakkında yeterli şartları verir.

Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

Teorem 2: Kabul edelim ki $a_n(x), a_{n-1}(x), \cdots, a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ ve $g(x)$ bir I aralığında sürekli ve bu aralıktaki her bir x değeri için $a_n(x) \neq 0$ olsunlar. Şayet $x = x_0 \in I$ ise bu takdirde **1** ve **2** denklemlerinin oluşturduğu başlangıç değer probleminin bir çözümü olan $y(x)$ bu aralıkta tanımlı ve tektir.

Örnek 1:

$y = 3.e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ fonksiyonunun $\begin{cases} y'' - 4y = 12x \\ y(0) = 4, y'(0) = 1 \end{cases}$ başlangıç değer probleminin bir çözümü olduğu kolayca gösterilir. Diferansiyel denklem lineer ve katsayıları ile $g(x) = 12x$ fonksiyonu $x = 0$'ı içeren her bir aralıkta süreklidirler. Ayrıca yukarıdaki teorem gereği verilen fonksiyon tek çözümdür.

Örnek 2: $y = 0$ önemsiz çözümünü $\begin{cases} 3y''' + 5y'' - y' + 7y = 0 \\ y(1) = 0, y'(1) = 0, y''(1) = 0 \end{cases}$ başlangıç değer problemini sağlar. Sabit katsayılı 3. mertebeden diferansiyel denklem lineer olduğundan dolayı ve ayrıca teoremin bütün şartlarını sağladığından $x = 1$'i içeren her bir aralıkta tek çözümdür.

Verilen I aralığında her bir x değeri için teorem **2'**deki şartlardan $a_i(x)$'lerin sürekliliği ve $a_n(x) \neq 0$ olması çok önemlidir. Özellikle I aralığındaki bazı x değerleri için $a_n(x) = 0$ oluyorsa başlangıç probleminin çözümü tek hatta var olmayabilir.

VIII.2.2: SINIR-DEĞER PROBLEMİ

Farklı noktalarda bağımlı y değişkeni ve onun türevlerini ihtiva eden iki veya daha yüksek mertebeden diferansiyel denklem çözümleri başka bir tipte problem olarak adlandırılırlar. Bu problem

$$\begin{cases} a_2(x)\dfrac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\dfrac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \\ y(a) = y_0, y(b) = y_1 \end{cases}$$

şeklinde yazılmak üzere iki nokta sınır değer problemi veya kısaca sınır değer problemi olarak adlandırılır. Özel $y(a) = y_0$ ve $y(b) = y_1$ değerleri ise sınır şartları olarak adlandırılır. 2. mertebeden denklem için diğer sınır şartları

$$y(a) = y_0, y'(b) = y_1',$$
$$y'(a) = y_0', y(b) = y_1,$$
$$y'(a) = y_0', y'(b) = y_1'$$

şeklindedir. Burada y_0, y_1, y_0', y_1' keyfi sabitlerdir.

Örnek olarak;

$$\begin{cases} x^2y'' - 2xy' + 2y = 6 \\ y(1) = 0, y(2) = 3 \end{cases}$$

Sınır değer problemini ele alalım.

Bu problemin çözümü $x = 1$ ve $x = 2$ noktalarını içeren bir aralıkta tanımlı ve diferansiyel denklemi sağlayan bir fonksiyondur. Ayrıca bu fonksiyonun grafiği de (1,0) ve (2,3) noktalarından geçmektedir.

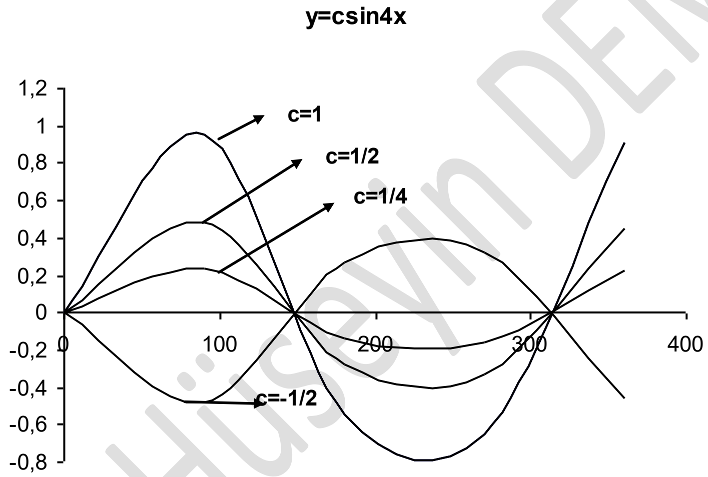
Aşağıda vereceğimiz örnekte ise teorem 2'nin bütün şartları sağlansa bile sınır değer problemi

- **a)** Birden çok çözüme
- **b)** Bir tek çözüme

Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

c) Hiçbir çözüme sahip olmayabilir

Örnek 1:
$y''+16y=0$ denklemini ele alalım. Bu denklem için iki parametreli çözüm ailesi $y=c_1\cos 4x+c_2\sin 4x$ idi. Farz edelim ki denklemin çözümü $y(0)=0$ ve $y(\frac{\pi}{2})=0$ şartlarını sağlayarak tanımlı olsun. Dolayısıyla 1. Şarttan: $0=c_1.\cos 0+c_2\sin 0 \Rightarrow c_1=0$ bulunur. O halde, $y=c_2\sin 4x$ dır. Fakat $x=\frac{\pi}{2}$ için $\sin 2\pi=0$ olduğundan $0=c_2\sin 2\pi$. Böylece yukarıdaki şart c_2 nin her bir seçimi için sağlanır. Böylece $y''+16y=0,\ y(\frac{\pi}{2})=0,\ y(0)=0$ sınır değer probleminin bir çözümü bir parametreli $y=c_2\sin 4x$ çözüm ailesidir.



Şekilden de görüldüğü gibi (0,0) ve $(\frac{\pi}{2},0)$ noktasından geçen ve diferansiyel denklemi sağlayan sonsuz sayıda fonksiyon vardır. Şayet sınır şartları y(0)=0, $y(\frac{\pi}{8})=0$ olsaydı bu durumda c_1 ve c_2 her ikisi de kesinlikle sıfır olurdu. Böylece $y=0$ bu yeni sınır değer probleminin bir çözümü olabilirdi. Gerçekten bu çözüm ilerde göreceğimiz gibi tek çözümdür.

Diğer yandan sınır şartları $y(0)=0,\ y(\frac{\pi}{2})=1$ olsaydı sınır değer problemi $y=c_1\cos 4x+c_2\sin 4x$ ailesinde bir çözüme sahip olmayacaktı. Çünkü $c_1=0$ ve 2. şarttan 0=1 çelişkisi elde edilirdi böylece sınır değer probleminin bu ailede hiçbir çözümü olmayacaktı.

VIII-3: LİNEER BAĞIMLILIK-LİNEER BAĞIMSIZLIK

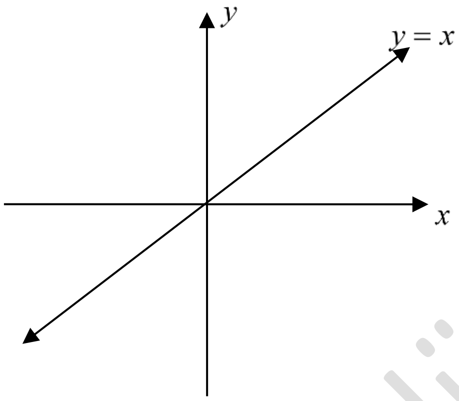
Tanım 1: Bir I aralığında $f_1(x), f_2(x),\cdots, f_n(x)$ fonksiyonları tanımlanıyor ve hepsi birden sıfır olmayan $c_1,c_2,\ldots,c_n$ sabitleri veriliyor olsun. Buna göre I aralığındaki her bir x değeri için $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\ldots+c_nf_n(x)=0\ldots\mathbf{1}$ eşitliği sağlanıyorsa $f_1(x), f_2(x),\ldots, f_n(x)$ fonksiyonlarına lineer bağımlıdır denir.
Şayet I aralığında her bir x değeri için $f_1(x), f_2(x),\ldots, f_n(x)$ fonksiyonları lineer bağımlı değil iseler bu fonksiyonlara lineer bağımsızdır denir.

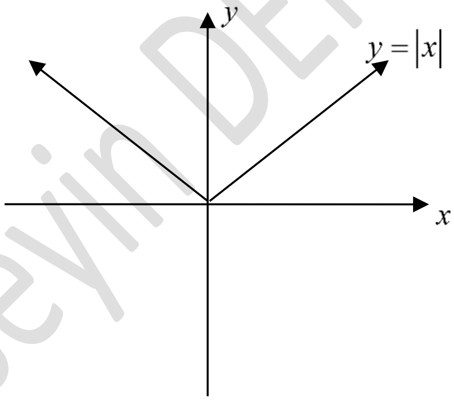
Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

Diğer bir deyişle aralıktaki her bir x değeri için $c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)+\ldots+c_n f_n(x)=0$ eşitliği yalnızca tüm sabitler sıfır iken sağlandığı takdirde, yani $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$ iken, sağlanıyorsa $f_1(x),\ldots, f_n(x)$ fonksiyonları lineer bağımsızdırlar. Şimdi $f_1(x), f_2(x)$ gibi iki fonksiyon alarak bu tanımları daha iyi anlamaya çalışalım. Eğer bu fonksiyonlar lineer bağımlı iseler her ikisi birden sıfır olmayan c_1 ve c_2 sabitleri vardır ve $\forall x \in I$ için $c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)=0$ Bu yüzden kabul edelim ki $c_1 \neq 0$ olsun. Böylece $f_1(x)=-\dfrac{c_2}{c_1} f_2(x)$ elde edilir. Yani bir I aralığında iki fonksiyon lineer bağımlı iseler o zaman biri diğerinin bir katına eşittir. Buna karşılık c_2 sabit olmak üzere eğer $f_1(x)=c_2 f_2(x)$ ise o zaman $\forall x \in I$ için $(-1) f_1(x)+c_2 f_2(x)=0$ Böylece bu iki fonksiyon lineer bağımlıdırlar. Çünkü en azından sabitlerden biri sıfırdan farklıdır. $(c_1=-1)$

Sonuç olarak, diyebiliriz ki, iki fonksiyondan biri diğerinin bir katına eşit değilse fonksiyonlar lineer bağımsızdırlar

Örnek1: $f_1(x)=x$ ve $f_2(x)=|x|$ fonksiyonları $(-\infty,\infty)$ aralığında lineer bağımsızdırlar.





Şekle dikkat edilirse her iki fonksiyondan hiçbiri diğerinin bir katına eşit değildir. O halde, tanım gereği $c_1=0$ ve $c_2=0$ iken $\forall x$ için $c_1 x+c_2|x|=0$. Lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık kavramlarının iyi anlaşılması açısından fonksiyonun tanımlandığı aralık önem arz eder. Örneğin, bir önceki örnekte verilen $f_1(x)=x, f_2(x)=|x|$ fonksiyonları $(0,\infty)$ aralığında lineer bağımlıdırlar. Çünkü $c_1 x+c_2|x|=c_1 x+c_2 x=0$ eşitliği c_1 ve c_2 nin sıfır olmayan her bir değeri $c_1=-c_2$ için sağlanır.

Şimdi, bir I aralığında n tane fonksiyonun lineer bağımsızlık şartlarını sağlayan aşağıdaki teoremi vereceğiz. Burada her fonksiyonun en az $(n-1)$ kere türevlenebilir olduğu varsayılır.

Teorem 2:

Kabul edelim ki $f_1(x),\cdots, f_n(x)$ ler en az $(n-1)$ kere türevlenebilir fonksiyonlar olsunlar. Şayet

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_2'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

determinantı I aralığının en az bir noktasında sıfırdan farklı ise $f_1(x),\ldots, f_n(x)$ fonksiyonları I ' da lineer bağımsızdır denir.

Not: Burada tanımlanan $W(f_1(x),\ldots f_2(x))$ fonksiyonuna $f_1(x),\ldots, f_n(x)$ fonksiyonlarının Wronski determinantı veya kısaca Wronskiyanı denir.

Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

İspat: Teoremin ispatını $n=2$ durumunda gösterelim. Varsayalım ki $\forall x_0 \in I$ için $W(f_1(x_0), f_2(x_0)) \neq 0$ ve $f_1(x), f_2(x)$ fonksiyonları lineer bağımlı olsunlar. Fonksiyonların lineer bağımlılığından dolayı $\forall x \in I$ için $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$ olacak şekilde her ikisi birden sıfır olmayan c_1 ve c_2 sabitleri vardır. Buradan $c_1 f_1'(x) + c_2' f_2'(x) = 0$ bulunur. Böylece

$$\begin{cases} c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0 \\ c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{2}$$

lineer denklem sistemi elde edilir.

Fakat f_1 ve f_2'nin lineer bağımlı olmaları **2**'nin bu aralıktaki her bir x değeri için bir sıfır olmayan çözümünün olmasını gerektirir. Böylece $\forall x$ için $W(f_1(x), f_2(x)) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = 0$ bulunur.

Hâlbuki bu sonuç $W(f_1(x_0), f_2(x_0)) \neq 0$ olmasıyla çelişir. Bu yüzden f_1 ve f_2 lineer bağımsızdırlar.

Sonuç:

Bir I aralığında $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ en az (n-1) kere türevlenebilir ve lineer bağımlı iseler $\forall x \in I$ için $W(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) = 0$.

Örnek2: $(-\infty, \infty)$ aralığında $f_1(x) = \sin^2(x)$, $f_2(x) = 1 - \cos 2x$ fonksiyonları bir önceki sonuca göre her bir reel sayı için lineer bağımlıdırlar.

$$W\left(f_1(x), f_2(x)\right) = W\left(Sin^2 x, 1 - Cos2x\right) = \begin{vmatrix} Sin^2 x & 1 - Cos2x \\ 2SinxCosx & 2Sin2x \end{vmatrix} = 0.$$

Örnek3: $(-\infty, \infty)$ aralığında $m_1 \neq m_2$ olmak üzere $f_1(x) = e^{m_1 x}$, $f_2(x) = e^{m_2 x}$ fonksiyonları da her bir reel sayı için lineer bağımsızdırlar.

$$W\left(f_1(x), f_2(x)\right) = W\left(e^{m_1 x}, e^{m_2 x}\right) = \begin{vmatrix} e^{m_1 x} & e^{m_2 x} \\ m_1 e^{m_1 x} & m_2 e^{m_2 x} \end{vmatrix} = (m_2 - m_1) e^{(m_1 + m_2)x} \neq 0.$$

VIII.4: LİNEER DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

Bir n. mertebeden lineer diferansiyel denklem

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = g(x) \qquad \mathbf{1}$$

formunda yazılır. Burada $g(x) = 0$ ise denkleme homojen; aksi takdirde homojen olmayan denklem denir. **1** nolu denklemde $i = 1, 2, \ldots, k$ olmak üzere $a_i(x)$-ler ve $g(x)$ sürekli $\forall x \in I$ için $a_n(x) \neq 0$ olmalıdır.

TOPLANABİLİRLİK KURALI

Teorem 4: $y_1 . y_2, \ldots, y_k$ 'lar bir I aralığında **1** nolu denkleminin homojen kısmının birer çözümü olsunlar. Bu takdirde $i = 1,2,\ldots,k$ için c_k -ler sabitler olmak üzere

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_k y_k(x)$$

lineer kombinasyonu da aynı aralıkta bir çözümdür.

İspat :

İspatı $n = k = 2$ için gösterelim. Buna göre $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ $a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0$ homojen denkleminin birer çözümü olsunlar. Şayet $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ ile tanımlıysa bu takdirde

$$\Rightarrow a_2(x)\left[c_1y_1'' + c_2y_2''\right] + a_1(x)\left[c_1y_1' + c_2y_2'\right] + a_0(x)\left[c_1y_1(x) + c_2y_2(x)\right]$$

$$= c_1\underbrace{\left[a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1\right]}_{0} + c_2\underbrace{\left[a_1(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2\right]}_{0}$$

$$= c_1.0 + c_2.0$$

$$= 0$$

Sonuç:

a) $y_1(x)$ homojen lineer denklemin bir çözümü ise bir sabitle çarpımı $y = c_1.y_1(x)$ ifadesi de bir çözümdür.

b) Bir homojen lineer diferansiyel denklemi daima $y = 0$ önemsiz çözümü sağlar.

Lineer Bağımsız Çözümler

Bu kısımda homojen lineer diferansiyel denklemin n tane $y_1, y_2, \ldots, y_n$ çözümlerinin lineer bağımsız olma durumlarını inceleyeceğiz. Buna göre bir I aralığında lineer bağımsızlık için n tane çözüm fonksiyonunun oluşturduğu Wronskianın incelenmesi gerek ve yeter şart olarak algılanmalıdır.

Teorem 5:

Kabul edelim ki bir I aralığında n. mertebeden homojen lineer diferansiyel denklemin çözümleri $y_1, y_2, \ldots, y_n$ olsunlar. Bu takdirde I aralığındaki her bir x değeri için bu çözümlerin lineer bağımsız olması için $\Leftrightarrow$ $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$.

İspat:

Teoremin ispatını $n = 2$ için gösterelim.

İlk olarak $\forall x \in I$ için eğer $W(y_1, y_2) \neq 0 \Rightarrow$ **Teorem 3** den dolayı y_1 ve y_2 lineer bağımsızdır. Diğer taraftan, şayet y_1 ve y_2 homojen lineer ikinci mertebeden denklemin lineer bağımsız çözümleri iseler göstermeliyiz ki, $\forall x \in I$ için $W(y_1, y_2) \neq 0$.

Bunu göstermek için y_1 ve y_2 lineer bağımsız $x_0 \in I$ için $W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = 0$ olsunlar. Böylece her ikisi birden sıfır olmayan c_1 ve c_2 sayıları için

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = 0 \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = 0 \end{cases} \ldots \mathbf{1}$$

yazabiliriz. Diğer taraftan $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ şeklinde tanımlanırsa **1**'e göre y fonksiyonu $y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0 \ldots \mathbf{2}$ başlangıç şartlarını sağlamalıdır. Fakat tanımsal olarak sıfır fonksiyonu, diferansiyel denklemi ve **2** nolu başlangıç şartlarının her ikisini de sağladığında **Teorem 2** gereği tek çözümdür. Diğer bir deyişle aralıktaki her bir x değeri için $y = 0$ veya $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0$.Bu ise seçilen aralıkta y_1 ve y_2-nin lineer bağımsız olması ile çelişir. Dolayısıyla $W = 0$ olmadığı sonucu ortaya çıkar.

Tanım3: Bir I aralığında n. mertebeden lineer homojen diferansiyel denklemin lineer bağımsız n tane çözümü $y_1, y_2, \ldots, y_n$-ler bu aralıkta bir temel çözüm kümesi oluştururlar.

Teorem 6: Kabul edelim ki, I aralığında lineer homojen diferansiyel denklemin $y_1, y_2, \ldots, y_n$ çözümleri bir temel çözüm kümesi oluştursunlar. Bu takdirde verilen aralıkta n. mertebeden homojen denklemin $Y(x)$ çözümü için $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sabitleri

$Y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots +, C_ny_n(x)$ olacak şekilde bulunabilirler.

İspat:

$n = 2$ için ispatı verelim.

Prof. Dr. Hüseyin DEMIR

Y, bir çözüm y_1 ve y_2 de $a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$ homojen diferansiyel denklemin I aralığında lineer bağımsız çözümleri olsunlar. Kabul edelim ki, $x=t$ bu aralıkta bir nokta olmak üzere $W(y_1(t),y_2(t))\neq 0$ sağlasın. Ayrıca kabul edelim ki $Y(t)$ ve $Y'(t)$ değerleri $Y(t)=k_1, Y'(t)=k_2$ değerleri ile verilsin.

Şayet $\begin{cases} C_1y_1(t)+C_2y_2(t)=k_1 \\ C_1y_1'(t)+C_2y_2'(t)=k_2 \end{cases}$ denklem sistemini incelersek $\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}\neq 0$ sağlanmak şartıyla C_1 ve C_2-yi tek türlü bulabiliriz. Açıkça bellidir ki, yukarıdaki determinant $x=t$ noktasında elde edilen Wronskiandır ve kabul gereği Wronskian sıfırdan farklıdır. Şimdi $G(x)$ fonksiyonunu $G(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ ile tanımlarsak

i) $G(x)$, y_1 ve y_2 gibi iki bilinen fonksiyonun toplanabilirlik kuralına göre elde edilen fonksiyon olduğundan diferansiyel denklemi sağlar.

ii) $G(x)$; $\begin{cases} G(t)=C_1y_1(t)+C_2y_2(t)=k_1 \\ G'(t)=C_1y_1'(t)+C_2y_2'(t)=k_2 \end{cases}$ başlangıç şartlarını sağlar.

iii) $Y(x)$ de aynı başlangıç şartlarını ve aynı diferansiyel denklemi sağlar. Bu lineer başlangıç değer probleminin çözümü tek olduğundan (**Teorem 2**) $Y(x)=G(x)$ veya $Y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$.

Aşağıdaki teorem ise n. mertebeden lineer homojen diferansiyel denklemin bir temel çözüm kümesinin olup olmadığı temel sorusuna cevap vermektedir.

Teorem 7. I aralığında n . mertebeden homojen lineer diferansiyel denklem için bir temel çözüm kümesi (daima) vardır.

Tanım4: Kabul edelim ki $y_1,y_2,\ldots,y_n$ çözümleri homojen lineer, n. mertebeden diferansiyel denklemin bir temel çözüm kümesini oluştursunlar. Bu takdirde $c_1,c_2,\ldots,c_n$-ler keyfi sabitler olmak üzere I aralığında homojen denklemin genel çözümü $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\ldots+c_ny_n(x)$ ile tanımlanır.

Örnek4:

$y''-9y=0$ denklemi $y=e^{3x}$ ve $y=e^{-3x}$ çözümlerini sağlar. $\forall x\in(-\infty,\infty)$, y_1 ve y_2 bir temel çözüm kümesi oluştururlar. Yani $W(y_1,y_2)\neq 0$, böylece $\begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3.e^{3x} & -3.e^{-3x} \end{vmatrix}=-6\neq 0$ olduğundan verilen denklemin bu aralıktaki genel çözümü $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}$.