Diferansiyel Denklemler

11. Hafta

Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

VIII.5 : HOMOJEN OLMAYAN DENKLEMLER

Şimdi tekrar **1** nolu homojen olmayan

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

lineer diferansiyel denkleme geri dönelim. Keyfi parametreden tamamen bağımsız olan ve yukarıda verilen denklemi sağlayan çözüme özel çözüm denir.

Örnek1:, $y''+9y=27$ denklemi için özel çözüm, $y_p=3$. Gerçekten $y_p''=0$ olduğundan $0+9*3=27$

Teorem 7: Kabul edelim ki $y_1,y_2,\ldots,y_k$ bir I aralığında n. mertebeden homojen olmayan lineer diferansiyel denklemin homojen kısmının çözümleri ve y_p de homojen olmayan denklemin herhangi bir çözümü olsunlar. Bu takdirde her bir $c_1,c_2,\ldots,c_k$ sabiti için $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\ldots+c_ky_k(x)+y_p(x)$ verilen aralıkta homojen olmayan denklemin ayrıca bir çözümüdür.

Teorem 9: Kabul edelim ki n . mertebeden homojen olmayan lineer diferansiyel denklemin I aralığında bir özel çözümü $y_p(x)$ olsun ve aynı aralıkta ilgili denklemin homojen kısmının $y_1,y_2,\ldots,y_n$ çözümleri bir temel çözüm kümesi oluştursunlar. Bu takdirde I aralığındaki herhangi bir $Y(x)$ çözümü için $Y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n(x)+y_p(x)$ olacak şekilde $C_1,C_2,\ldots,C_n$ sabitleri bulunabilir.

İspat: Teoremin ispatını $n=2$ durumunda verelim.

Kabul edelim ki Y ve y_p her ikisi de $a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=g(x)$ diferansiyel denkleminin çözümü olsunlar. Eğer $u(x)=Y(x)-y_p(x)$ şeklinde bir u fonksiyonu tanımlarsak bu takdirde

$$\Rightarrow a_2(x)u''+a_1(x)u'+a_0(x)u=a_2(x)\left[Y''-y_p''\right]+a_1(x)\left[Y'-y_p'\right]+a_0(x)\left[Y-y_p\right]$$

$$\Rightarrow\left[a_2(x)Y''+a_1(x)Y'+a_0(x)Y\right]-\left[a_2(x)y_p''+a_1(x)y_p'+a_0(x)y_p\right]=g(x)-g(x)=0$$

Bu takdirde tanım 4 ve teorem 5 gereği

$$\Rightarrow u(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

yazabiliriz. Böylece

$$\Rightarrow Y(x)-y_p(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

veya

$$\Rightarrow Y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y_p(x).$$

Tanım5: Kabul edelim ki $y_p(x)$ homojen olmayan lineer, n. mertebeden diferansiyel denklemin bir I aralığındaki verilen bir çözümü olsun ve $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\ldots+c_ny_n(x)$ de aynı aralıkta ilgili denklemin homojen kısmının genel çözümünü oluştursun. Bu aralıkta homojen olmayan diferansiyel denklemin genel çözümü $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\ldots+c_ny_n(x)+y_p(x)=y_c(x)+y_p(x)$ ile tanımlıdır.

Bu tanımdaki $y_c(x)$ lineer kombinasyonu ilgili denklemin homojen kısmının genel çözümüdür ve homojen olmayan denklemin tamamlayıcı fonksiyonu olarak adlandırılır. Diğer bir deyişle homojen olmayan denklemin genel çözümü y =tamamlayıcı fonksiyon + herhangi bir özel çözüm ile tanımlıdır.

VIII.6: MERTEBE DÜŞÜREREK DİFERANSİYEL DENKLEMİN ÇÖZÜMÜNÜN BULUNMASI (BİLİNEN BİR ÇÖZÜMDEN İKİNCİ ÇÖZÜMÜN ELDE EDİLMESİ)

İkinci mertebeden denklemler konusunda bilinen bir çözümün kullanılarak diğer çözümün bulunması konusu belki de en ilgi çeken önemli kısımlardan birisidir.

Kabul edelim ki, $a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0\ldots\mathbf{1}$ denkleminin bir sıfır olmayan çözümü $y_1(x)$ olsun. İkinci çözüm $y_2(x)$ -i denklemin mertebesini bir düşürerek birinci mertebeden denklem için bulacağız. Örneğin, $y_1=e^x, y''-y=0$ denkleminin bir çözümü olduğunu göstermek oldukça kolaydır. Şayet biz $y(x)=u(x)y_1(x)$ formunda bir çözüm belirlemeye çalışırsak bu takdirde

$$\begin{aligned}&y=u(x)e^x \Rightarrow y'=u.e^x+u'.e^x \Rightarrow y''=u.e^x+2.u'.e^x+u''.e^x\\ &\Rightarrow y''-y=u.e^x+2u'.e^x+u''.e^x-u.e^x \Rightarrow e^x(u''+2.u')=0\end{aligned}$$

bulunur.

Burada $e^x\neq 0$ olduğundan $u''+2u'=0\ldots *$ olmak zorundadır. Böylece $w=u'$ dönüşümünü kullanırsak denklem $w'+2w=0$ haline gelir. Burada integral çarpanı e^{2x} olmak üzere

$\Rightarrow \dfrac{d}{dx}\left[e^{2x}w\right]=0 \Rightarrow w=c_1e^{-2x} \Rightarrow u'=c_1.e^{-2x} \Rightarrow u=-1/2.c_1e^{-2x}+c_2$ Elde edilir. Böylece

$y(x)=u(x).y_1(x)=(-\dfrac{1}{2}c_1e^{-2x}+c_2).e^x=-\dfrac{1}{2}c_1.e^{-x}+c_2e^x$ Bulunur. Burada $c_2=0$ ve $c_1=-2$ seçilirse $y_2=e^{-x}$ bulunur. Gerçekten $(-\infty,\infty)$ aralığında $W(e^x,e^{-x})\neq 0$ olduğundan bu çözümler lineer bağımsızdır. Ve gerçekten y verilen denklemin genel çözümüdür.

Ödev: $y_1=x^3$ Olmak üzere $x^2y''-6y=0$ denkleminin ikinci çözümünü bulunuz.

Genel Durum:

1 ile verilen denklemin her iki tarafını $a_2(x)$ ile bölerek denklemi

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \ \ldots\mathbf{2}$$

standart formunda yazalım. Burada $P(x)$ ve $Q(x)$'ler I aralığında süreklidir. Kabul edelim ki, $y_1(x)$ I aralığında **2** denkleminin bir çözümü olmak üzere $\forall x\in I$ için $y_1(x)\neq 0$ olsun. Eğer $y(x)=u(x).y_1(x)$ ile tanımlarsak o zaman $y'=u.y_1'+u'y_1$ ve $y''=u.y_1''+2.u'y_1'+u''y_1$ olur. Buradan da

$$\Rightarrow y''+P(x)y'+Q(x)y=uy_1''+2.u'.y_1'+u''y_1+P(x)\left[uy_1'+u'y_1\right]+Q(x).u.y_1$$

$$\Rightarrow u\left[\underbrace{y_1''+P(x)y_1'+Q(x)y_1}_{0}\right]+u''.y_1+(2.y_1'+P(x)y_1)u'$$

$$\Rightarrow u''y_1+(2y_1'+P(x)y_1)u'=0$$

bulunur. Bu denklem de $w=u'$ dersek $\Rightarrow w'y_1+(2.y_1'+P(x)y_1)w=0$ denklemi bulunur. Bu denklem hem lineer hem de değişkenlerine ayrılabilir olduğundan

$$\Rightarrow \frac{dw}{w}+\frac{2.y_1'}{y_1}dx+P(x)dx=0 \Rightarrow \ln|w|+2.\ln|y_1|=-\int P(x).dx+c$$

veya

$$\Rightarrow \ln\left|w.y_1^2\right|=-\int P(x)dx+c \quad \Rightarrow wy_1^2=\frac{c_1e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2} \Rightarrow u=\int\frac{c_1e^{-\int P(x)dx}}{(y_1(x))^2}dx+c_2$$ bulunur.

Bu sonucu $y = uy_1$ de yerine yazalım. Bu takdirde $y = y_1(x)\int \frac{c_1 e^{-\int P(x)dx}}{(y_1(x))^2}dx + c_2 y_1(x)$ çözümü elde edilir. Eğer $c_1 = 1, c_2 = 0$ seçilirse 2 denkleminin bir ikinci çözümü

$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{(y_1(x))^2}dx$ ...**3** olarak bulunur.

Ödev: $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ çözümlerinin lineer bağımsız olduklarını gösteriniz.

Sonuç: 3 formülünü kullanarak **2** formunda verilen denklemin genel çözümleri daha kısa yoldan bulunur.

Örnek1:

$y_1 = x^2, x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ denkleminin bir çözümü ise $(0,\infty)$ aralığında denklemin genel çözümünü bulunuz

Çözüm1:

$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0$ denklemini ilk önce standart forma getirelim. Böylece $P(x) = -\frac{3}{x}$ olmak üzere

$$y_2(x) = x^2\int \frac{e^{-\int(\frac{-3}{x})dx}}{x^4}dx = x^2.\ln x \Rightarrow y = c_1x^2 + c_2.x^2.\ln x$$

VIII.7 SABİT KATSAYILI LİNEER HOMOJEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Birinci dönemden gördüğümüz üzere a bir sabit katsayı olmak şartıyla $y' + ay = 0$ birinci mertebeden lineer denklemi $(-\infty,\infty)$ aralığında $y = c_1e^{-ax}$ formunda üstel çözüme sahiptir. Bu yüzden yüksek mertebeden

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0 \qquad \textbf{1}$$

tipindeki denklemin $(-\infty,\infty)$ aralığında üstel çözümlerinin varlığını a_i-ler $(0 \le i \le n)$ sabitler olmak üzere belirleyebiliriz. Burada **1** tipindeki denklemlerin bütün çözümleri üstel fonksiyonlardır. Bu durumu daha iyi anlayabilmek için ikinci mertebeden

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad \textbf{2}$$

özel durumunu göz önüne alalım. Şayet bu denklemin bir çözümü $y = e^{mx} \Rightarrow y' = me^{mx} \Rightarrow y'' = m^2e^{mx}$ bulunur ve bu değerler **2**'de yazılırsa $\Rightarrow am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0$ bulunur. e^{mx}, x'in bütün reel değerleri için sıfır olamayacağından açıktır ki üstel fonksiyonun diferansiyel denklemi sağlaması için tek bir yol m'nin $a.m^2 + b.m + c = 0$...**3** kuadratik denkleminin bir kökü olmasıdır. Yukarıda elde edilen **3** denklemi **2** nolu diferansiyel denklemin yardımcı denklemi veya karakteristik denklemi olarak adlandırılır. Burada sırası ile yardımcı denklemin reel köklerinin farklı olduğu ve eşit olduğu durumlar ile yardımcı denklemin çözümünde köklerin karmaşık olması hallerini inceleyeceğiz.

I. HAL

3 formundaki yardımcı denklemin farklı iki reel kökünün m_1 ve m_2 olduğunu varsayalım. Bu durumda iki çözüm $y_1 = e^{m_1x}, y_2 = e^{m_2x}$ bulunur. Buradaki fonksiyonlar $(-\infty,\infty)$ aralığında lineer bağımsız ve böylece bir temel çözüm sistemi oluştururlar. Bu takdirde **2** nolu diferansiyel denklemin bu aralıktaki genel çözümü $y = c_1e^{m_1(x)} + c_2e^{m_2x}$ ...**4**.

II. HAL

3 formundaki yardımcı denklemin reel köklerinin çakışık olması yani $m_1 = m_2$ olması halinde üstel çözüm bir tek $y_1 = e^{m_1 x}$ olarak bulunur. Bununla beraber bir önceki kısımda anlattıklarımıza göre bir ikinci çözüm $y_2 = e^{m_1 x}\int \frac{e^{-\frac{b}{a}x}}{e^{2.m_1 x}}dx$ …**5'**den bulunur. Fakat kuadratik formülden $m_1 = m_2$ olması için mutlaka $b^2 - 4ac = 0$ olmalıdır. Böylece $m_1 = -\frac{b}{2a}$ elde edilir.

O halde $2m_1 = -\frac{b}{a} \Rightarrow y_2 = e^{m_1 x}\int \frac{e^{2m_1 x}}{e^{2m_1 x}}dx = xe^{m_1 . x}$.

Bu takdirde **2** denkleminin genel çözümü $y = c_1 e^{m_1 . x} + c_2 x . e^{m_1 x}$ …**6.**

III. HAL

Eğer yardımcı denklemin kökleri olan m_1 ve m_2 karmaşık iseler o zaman $m_1 = \alpha + i\beta, m_2 = \alpha - i\beta$ yazabiliriz. Burada $\alpha, \beta > 0$, reel ve $i^2 = -1$. Esasında bu durum ile birinci durum arasında fark yoktur. Böylece **2**'nin genel çözümü $y = c_1 . e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 . e^{(\alpha - i\beta)x}$ …**7.**
Bununla birlikte uygulamada karmaşık üstel fonksiyonlar yerine reel fonksiyonlarla çalışmayı tercih ederiz. Şimdi θ herhangi bir reel sayı olmak üzere $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ Euler formülünü kullanarak **7**'yi daha pratik formda yazmaya çalışalım. Bunun için
$\cos(-\beta x) = \cos\beta x, \sin(-\beta x) = -\sin\beta x$
olmak üzere $e^{i\beta x} = \cos\beta x + i.\sin\beta x$, $e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x$ değerlerini **7**'de yerine yazalım.

$$y = e^{\alpha x}\left[c_1 e^{i.\beta x} + c_2 e^{-i.\beta x}\right] = e^{\alpha x}\left[c_1\left\{\cos\beta x + i\sin\beta x\right\} + c_2\left\{\cos\beta x - i\sin\beta x\right\}\right]$$

$$\Rightarrow e^{\alpha x}\left[\cos\beta x(c_1 + c_2) + \sin\beta x(c_1 i - c_2 i)\right]$$

bulunur. $e^{\alpha x}\cos\beta x$ ve $e^{\alpha x}\sin\beta x$ fonksiyonları verilen diferansiyel denklemin $(-\infty, \infty)$ aralığında bir temel çözüm sistemi olduklarından dolayı $c_1 + c_2 \to C_1$, $c_1 i - c_2 i \to C_2$ ile temsil edebiliriz.
Böylece genel çözüm
$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}\left[C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right]$ …**8** olarak tekrar yazılabilir.

Örnek1:

Aşağıdaki diferansiyel denklemleri çözünüz.

a) $2y'' - 5y' - 3y = 0$

b) $y'' - 10y' + 25y = 0$

c) $y'' + y' + y = 0$

Çözüm1:

a) Denkleme ilişkin yardımcı denklem:

$$2m^2 - 5m - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (2m + 1)(m - 3) = 0$$

$$\Rightarrow m_1 = -\frac{1}{2}, m_2 = 3$$

$$\therefore y_1 = e^{-\frac{x}{2}}, y_2 = e^{3x}, W(y_1, y_2) \neq 0$$

olup temel çözüm kümesi oluşturduklarından dolayı genel çözüm $y = c_1 e^{-\frac{x}{2}} + c_2 e^{3x}$

b)
$$y''-10y'+25y=0$$
$$\Rightarrow m^2-10m+25=0$$
$$(m-5)^2=0\Rightarrow m_{1,2}=5$$
$$\Rightarrow y_1=e^{5x}, y_2=xe^{5x}$$
Genel çözüm $y=c_1e^{5x}+c_2xe^{5x}$.

c)
$$m^2+m+1=0$$
$$\Rightarrow m_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\Rightarrow \alpha=-\frac{1}{2}, \beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow y=e^{-\frac{1}{2}x}\left[c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]$$

YÜKSEK MERTEBEDEN DENKLEMLER

$0\le i\le n$ İçin a_i *ler* farklı reel sabitler olmak üzere genelde

$$a_ny^{(n)}+a_{n-1}.y^{(n-1)}+\ldots+a_2.y''+a_1.y'+a_0.y=0 \qquad \mathbf{9}$$

şeklinde verilen n. mertebeden diferansiyel denklemi çözmek için bu denkleme ilişkin n. dereceden bir polinom denklemi olan $a_nm^n+a_{n-1}m^{n-1}+\ldots+a_2m^2+a_1m+a_0=0 \quad \ldots$**10** denklemini çözmeliyiz. **10** denkleminin bütün kuvvetleri reel ve farklı ise bu takdirde **9** denkleminin genel çözümü

$$y=c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}+\ldots+c_ne^{m_nx} \qquad \mathbf{11}$$

ile bulunur.

Burada yardımcı denklemin derecesi ikiden büyük olduğu için ikinci ve üçüncü hali incelemek bir çok durumda zor olabilir. Örneğin beşinci dereceden denklem beş farklı reel köke veya üç farklı reel ve iki karmaşık köke sahip olabilir veya beş tanesi reel kök fakat ikisi eşit kökler olabilirler. n. dereceden yardımcı denklemin bir kökü m_1'in k katı olduğu zaman lineer bağımsız çözümler $e^{m_1x}, x.e^{m_1x}, x^2.e^{m_1x},\ldots,x^{k-1}.e^{m_1x}$ oldukları gösterilebilir ve genel çözüm bunların lineer birleşimi ihtiva eder ve böylece genel çözüm

$$c_1e^{m_1x}+c_2xe^{m_1x}+c_3x^2e^{m_1x}+\ldots+c_kx^{k-1}e^{m_1x} \qquad \mathbf{12}$$

şeklindedir.

Örnek1:

$y'''+3y''-4y=0$ denklemini çözelim. Yardımcı denklem ve genel çözüm sırasıyla

$$m^3+3m^2-4=0\Rightarrow(m-1)(m^2+4m+4)=0\Rightarrow(m-1)(m+2)^2=0$$
$$\Rightarrow m_1=1, m_{2,3}=-2$$
$$\Rightarrow y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+c_3xe^{-2x}$$

olarak bulunur.

Son olarak katsayılar reel olduğu zaman yardımcı denklemin karmaşık kökleri karmaşık eşlenik çiftleri olarak görülürler. Böylece örneğin bir kübik polinom denklemi en fazla iki kompleks köke sahiptir.

Örnek2:

$3y'''-19y''+36y'-10y=0$ denklemini ele alalım.

$m_1=\frac{1}{3}, 3m^3-19m^2+36m-10=0$ yardımcı denkleminin bir köküdür. Böylece diğer kökler

$$3m^3-19m^2+36m-10=0 \Rightarrow (m-\frac{1}{3})(3m^2-18m+30)=(3m-1)(m^2-6m+10)=0$$

$$\Rightarrow m_2=3+i, m_3=3-i$$

olarak bulunur ve genel çözüm ise $y=c_1e^{\frac{1}{3}x}+e^{3x}\left[c_2\cos x+c_3\sin x\right]$.

Reel katsayılı bir yardımcı denklemin bir k- katlı karmaşık kökü $m_1=\alpha+i\beta$ olduğu zaman onun karmaşık eşleniği $m_2=\alpha-i\beta$ da k- katlı bir köktür. Dolayısıyla göz önüne alınan diferansiyel denklemin genel çözümü lineer bağımsız

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, x^2e^{\alpha x}\cos\beta x,\dots,x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, x^2e^{\alpha x}\sin\beta x,\dots,x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

çözümlerinin bir lineer kombinasyonunu içermek zorundadır.

Örnek3:

$y^{(4)}+2y''+y=0$ denklemini ele alalım. Yardımcı denklemin kökleri $m^4+2m^2+1=0 \Rightarrow (m^2+1)^2=0 \Rightarrow m_{1,2}=i, m_{3,4}=-i$ ve burada $k=2,\alpha=0,\beta=1$ olmak üzere genel çözüm

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x+c_3x\cos x+c_4x\sin x$$

veya II. Halden dolayı

$y=C_1e^{ix}+C_2xe^{ix}+C_3e^{-ix}+C_4xe^{-ix}$ yazılabilir.

Euler formülüne göre $\begin{array}{l} C_1e^{ix}+C_3e^{-ix}=c_1\cos x+c_2\sin x \\ x\left[C_1e^{ix}+C_2e^{-ix}\right]=c_3x\cos x+c_4x\sin x \end{array}$

yazılabileceğinden genel çözüm

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x+c_3x\cos x+c_4x\sin x$$

olarak bulunur.

Örnek4: $y_1=4e^{6x}, y_2=3e^{-3x}$ çözümlerine sahip sabit katsayılı homojen diferansiyel denklemini bulunuz.

Çözüm: Bunun için $W\left(y_1,y_2,y\right)=0$ olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} 4e^{6x} & 3e^{-3x} & y \\ 24e^{6x} & -9e^{-3x} & y' \\ 144e^{6x} & 27e^{-3x} & y'' \end{vmatrix}=4e^{6x}\left(-9e^{-3x}y''-27e^{-3x}y'\right)-3e^{-3x}\left(24e^{6x}y''-144e^{6x}y'\right)+y\left(648e^{3x}+1296e^{3x}\right)$$

$$W\left(y_1,y_2,y\right)=-36e^{3x}y''-108e^{3x}y'-72e^{3x}y''+432e^{3x}y'+\left(648+1296\right)ye^{3x}=0$$

$$\Rightarrow\left(-108y''+324y'+1944y\right)e^{3x}=0,\quad\left(e^{3x}\neq 0\right)$$

$$\Rightarrow y''-3y'-18y=0$$

bulunur.

Örnek5: $y_1=3, y_2=2x, y_3=-e^{7x}$ çözümlerine sahip sabit katsayılı homojen diferansiyel denklemini bulunuz.

Çözüm: Bunun için $W\left(y_1,y_2,y_3,y\right)=0$ olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2x & -e^{7x} & y \\ 0 & 2 & -7e^{7x} & y' \\ 0 & 0 & -49e^{7x} & y'' \\ 0 & 0 & -343e^{7x} & y''' \end{vmatrix}=3\left(2\left(-49e^{7x}y'''+343y''\right)\right)=0$$

$$W\left(y_1,y_2,y_3\ y\right)=0$$

$$\Rightarrow\left(-49y'''+343y''\right)e^{7x}=0,\quad\left(e^{7x}\neq 0\right)$$

$$\Rightarrow y'''-7y''=0$$

bulunur.

Örnek6: Karakteristik denkleminin kökleri $m_1 = 4, m_2 = m_3 = -5$ olan diferansiyel denklemi bulunuz.

Çözüm: Karakteristik denklemi yazarsak, buradan

$$(m-4)(m+5)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (m-4)(m^2+10m+25) = 0$$

$$\Rightarrow m^3+6m^2-15m-100 = 0$$

O halde karakteristik denkleme karşılık gelen ilgili diferansiyel denklem;

$$y'''+6y''-15y'-100y = 0.$$

Örnek7: $y^{(iv)} - y''' - 3y'' + 5y' - 2y = 0$ denkleminin $y = e^{ax}$ şeklinde iki lineer bağımsız çözümünün olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $y = e^{ax} \Rightarrow y' = ae^{ax} \Rightarrow y'' = a^2e^{ax} \Rightarrow y''' = a^3e^{ax} \Rightarrow y^{(iv)} = a^4e^{ax}$ ifadelerini denklemde yerine yazarsak,

$$a^4e^{ax} - a^3e^{ax} - 3a^2e^{ax} + 5ae^{ax} - 2e^{ax} = 0$$

$$\Rightarrow e^{ax}\left(a^4 - a^3 - 3a^2 + 5a - 2\right) = 0, \quad \left(e^{ax} \neq 0\right)$$

$$\Rightarrow a^4 - a^3 - 3a^2 + 5a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (a-1)^3(a+2) = 0$$

$$\Rightarrow a_{1,2,3} = 1,\ a_4 = -2$$

olmak üzere lineer bağımsız iki çözüm;

$y_1 = e^x$ ve $y_2 = e^{-2x}$ olacaktır. Gerçekten $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-2x} \\ e^x & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2e^{-x} - e^{-x} = -3e^{-x} \neq 0$.

Not: Diğer çözümlerde başka şekilde lineer bağımsız çözümlerdir.