Diferansiyel Denklemler

4. Hafta

Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

2.3 HOMOJEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bir denklem

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0 \qquad \textbf{(1)}$$

formunda ise $M(tx,ty)=t^nM(x,y)$ ve $N(tx,ty)=t^nN(x,y)$ özelliklerine sahiptir. Bu tür denklemelere homojen katsayıları olan veya homojen denklemler denir.

Tanım 1: n herhangi bir reel sayı olmak üzere $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$ oluyorsa f fonksiyonuna $n.$ dereceden homojendir denir.

Örnek 1: $f(x,y)=x-5\sqrt{xy}+3y$ denklemini ele alalım. Buna göre,

$$\begin{aligned} f(tx,ty)&=tx-5\sqrt{tx\cdot ty}+3ty\\ &=tx-5\sqrt{t^2xy}+3ty\\ &=tx-5t\sqrt{xy}+3ty\\ &=t\{x-5\sqrt{xy}+3y\}\\ &=t\cdot f(x,y)\end{aligned}$$

olduğundan verilen fonksiyon birinci dereceden homojendir.

Ödev: Aşağıda verilen fonksiyonların homojen olup olmadıklarını araştırınız?

a) $f(x,y)=\sqrt{x^3+y^3}$

b) $f(x,y)=x^2+y^2+1$

c) $f(x,y)=\dfrac{x}{y}+3$

Bir fonksiyonun homojen olup olmadığını göstermenin bir diğer yolu ise her bir teriminin derecesinin incelemesi ile de saptanabilir.

Örnek 2: $f(x,y)=x^3y-x^2y^2$ ise bu fonksiyon dördüncü dereceden homojendir.

$f(x,y)=x^2y-4y^2$ fonksiyonu ise her bir terimin derecesi farklı olduğundan dolayı homojen değildir.

Şayet $f(x,y)$ $n.$ dereceden homojen ise

$$f(x,y)=x^n f\left(1,\frac{y}{x}\right) \; ve \; f(x,y)=y^n f\left(\frac{x}{y},1\right)$$

eşitliklerini yazabiliriz. Burada $f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)$ ve $f\left(\dfrac{x}{y},1\right)$ …**(2)** fonksiyonları sıfır derecelidirler.

Örnek 3: $f(x,y)=x^2-3xy+y^2$ olmak üzere ikinci dereceden homojen bir fonksiyondur ve

$$f(x,y)=x^2-3xy+y^2=x^2\left\{1-\frac{3y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right\}=x^2f\left(1,\frac{y}{x}\right)$$

$$f(x,y)=y^2\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\frac{x}{y}+1\right\}=y^2f\left(\frac{x}{y},1\right)$$

yazılabilir.

ÇÖZÜM METODU: $M(x,y)$ ve $N(x,y)$ aynı homojen derecelerine sahip olmak üzere bir denklem $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0\cdots(1)$ formunda olsun. Bu formu u ve v yani bağımlı değişkenler olmak üzere $y=ux$ veya $x=vy$ değerleri (**1**) denkleminde yerine yazılmak suretiyle değişkenlerine ayrılabilir forma indigenebilir. Özel olarak $y=ux$ alalım. Bu takdirde $dy=udx+xdu$ bulunur. y'nin ve dy'nin bu değerleri (**1**) denkleminde yazılırsa:

$$\Rightarrow M(x,ux)dx+N(x,ux)[udx+xdu]=0$$
$$\Rightarrow xM(1,u)dx+xN(1,u)udx+xN(1,u)xdu=0$$
$$\Rightarrow x\{M(1,u)+uN(1,u)\}dx+x^2N(1,u)du=0$$
$$\Rightarrow \frac{dx}{x}+\frac{N(1,u)du}{M(1,u)+uN(1,u)}=0$$

Bu ise değişkenlerine ayrılabilir bir denklemdir.

Örnek 4: $(x^2+y^2)dx+(x^2-xy)dy=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $M(x,y)=x^2+y^2$ ve $N(x,y)=x^2-xy$ fonksiyonlarının her ikisi de homojen olup ikinci derecedendir. Buna göre $y=ux\Rightarrow dy=udx+xdu$ olduğundan

$$(x^2+u^2)dx+(x^2-xux)[udx+xdu]=0$$
$$x^2(1+u^2)dx+x^2(1-u)udx+x^2(1-u)xdu=0$$
$$x^2\{1+u^2+u-u^2\}dx+x^3(1-u)du=0$$
$$\Rightarrow \frac{dx}{x}+\frac{1-u}{1+u}du=0\Rightarrow \frac{dx}{x}+\left(-1+\frac{2}{1+u}\right)du=0$$
$$\Rightarrow \ln|x|-u+2\ln|1+u|+\ln|c|=0$$
$$\Rightarrow \ln|x|-\frac{y}{x}+2\ln\left|1+\frac{y}{x}\right|+\ln|c|=0$$
$$\Rightarrow c(x+y)^2=xe^{y/x}$$

Ödev: $x^2y'+y^2-xy=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

$(2\sqrt{xy}-y)dx-xdy=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

ALTERNATİF ÇÖZÜM YOLU: Homojen bir diferansiyel denklem daima $\frac{dy}{dx}=F\left(y/x\right)$ alternatif formunda olduğu gibi de yazılabilir. Bu formu biz $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ diferansiyel denklemini $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ şeklinde yazarak görebiliriz. Burada $f(x,y)=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ dir. Bu elde edilen $f(x,y)$ fonksiyonu $M(x,y)$ ve $N(x,y)$ fonksiyonları n. dereceden homojen oldukları zaman kesinlikle sıfırıncı dereceden homojen olmak zorundadır. Böylece (2) eşitliklerinden $f(x,y)=\frac{x^nM\left(1,\frac{y}{x}\right)}{x^nN\left(1,\frac{y}{x}\right)}=-\frac{M\left(1,\frac{y}{x}\right)}{N\left(1,\frac{y}{x}\right)}$ elde edilir. O halde elde edilen $f(x,y)$ fonksiyonunun en son ifadesi $F\left(\frac{y}{x}\right)$ formunun bir fonksiyonudur.

Örnek 5: $x\dfrac{dy}{dx}=y+xe^{y/x}$ denklemini $y(1)=1$ başlangıç şartı ile çözünüz.

Çözüm: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+e^{y/x}\rightarrow F\left(\dfrac{y}{x}\right)$ formundadır.

$$y=ux\Rightarrow u=\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=u+e^{u}$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{udx+xdu}{dx}$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}\Rightarrow u+x\frac{du}{dx}=u+e^{u}\Rightarrow\frac{dx}{x}-e^{-u}du=0$$

$$\Rightarrow\ln|x|+e^{-u}+c=0\Rightarrow\ln|x|+e^{-y/x}+c=0$$

$$y(1)=1\Rightarrow c=e^{-1}\Rightarrow\ln|x|=e^{-1}-e^{-y/x}$$

Homojen Diferansiyel Denkleme İndirgenebilir Diferansiyel denklemler

$$y'=f\left(\frac{ax+by+c}{Ax+By+C}\right)\tag{2}$$

diferansiyel denklemi verilmiş olsun. Burada $a,b,c,A,B,C\in IR$. Kabul edelim ki $f(z)$ fonksiyonu (a,b) aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyondur. (2) tipinde diferansiyel denkleme homojen diferansiyel denkleme indirgenebilir denklemler denir. Bu tip denklemlerin çözümlerini araştırmak için aşağıdaki durumları inceleyelim.

1. $c=C$ ise (4) diferansiyel denklemi $y'=f\left(\dfrac{ax+by}{Ax+By}\right)$ şeklinde yazılır. Verilen diferansiyel denkleme $\dfrac{y}{x}=u$ dönüşümü yapılırsa $xu'+u=f\left(\dfrac{a+bu}{A+Bu}\right)$ veya $xu'=f\left(\dfrac{a+bu}{A+Bu}\right)-u$ diferansiyel denklemi elde edilir. Buradan (4) denkleminin genel çözümü $x=ce^{\int\frac{du}{f\left(\frac{a+bu}{A+Bu}\right)-u}}$ verilen homojen diferansiyel denklemin genel çözümüdür.

2. $aB-Ab=0$ olsun. Buradan $A=ka$ ve $B=kb$ elde edilir. Bunları (2) denkleminde yerine yazarsak $y'=f\left(\dfrac{ax+by+c}{k(ax+by)+C}\right)$ denklemini elde ederiz. Eğer verilen diferansiyel denklemde $u=ax+by$ dönüşümü yapılırsa $y'=\dfrac{1}{b}(u'-a)$ olduğundan $u'=bf\left(\dfrac{u+c}{ku+C}\right)+a$ şeklinde basit diferansiyel denklem elde edilir. Buradan $x=ce^{\int\frac{du}{bf\left(\frac{u+c}{ku+C}\right)+a}}$ genel çözümü elde edilir.

3. Kabul edelim ki $aB-Ab\neq 0$ olsun. Bu durumda (2) diferansiyel denkleminde $x=X+h$ ve $y=Y+k$ dönüşümü yapalım. Burada h,k belirlenecek olan sayılar X,Y ise yeni koordinat sisteminin eksenleridir. Bu durumda (2) denklemi

$$\frac{dY}{dX}=f\left(\frac{aX+bY+ah+bk+c}{AX+BY+Ah+Bk+C}\right) \qquad 2'$$

şeklinde yazılır. Şimdi h,k sabitlerini öyle seçelim ki $ah+bk+c=0$ ve $Ah+Bk+C=0$ eşitliklerinden oluşan lineer denklem sistemini sağlasın. $aB-Ab\neq 0$ olduğundan bu sistemin bir tek çözümü vardır. O halde h,k sayılarını bu sistemin çözümü olarak seçersek $2'$ denklemi

$$\frac{dY}{dX}=f\left(\frac{aX+bY}{AX+BY}\right) \qquad 2''$$

şeklinde yazılır. Dikkat edilirse bu denklem 1. durumda incelenen denklem tipindedir ve bu denklemin genel çözümü $X=ce^{\int\frac{du}{f\left(\frac{a+bu}{A+Bu}\right)-u}}$ şeklinde bulunur. Buradan $X=x-h, Y=y-k$ olduğundan bu durumda $(2'')$ denkleminin genel çözümü

$x-h=ce^{\int\frac{du}{f\left(\frac{a+bu}{A+Bu}\right)-u}}=c\Phi(u)=c\Phi\left(\frac{Y}{X}\right)=c\Phi\left(\frac{y-k}{x-h}\right)$ şeklinde yazılır.

Örnek: $y'=\frac{1}{2}\left(\frac{x+y-2}{x-1}\right)^2$ diferansiyel denklemini ele alım.

Bu örnekte $f(x,y)=\frac{1}{2}\left(\frac{x+y-2}{x-1}\right)^2$ olmak üzere $c=-2\neq 0, C=-1\neq 0, a=b=A=1, B=0$ olmak üzere $aB-Ab=-1\neq 0$. O halde $\begin{cases}x=X+h\\ y=Y+k\end{cases}$ dönüşümü yapabiliriz. $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}$ olduğundan $\frac{dY}{dX}=\frac{1}{2}\left(\frac{X+Y+h+k-2}{X+h-1}\right)^2$. Burada $\begin{cases}h+k-2=0\\ h-1=0\end{cases}\Rightarrow h=1, k=1$ bulunur. O halde $\begin{cases}x=X+1\\ y=Y+1\end{cases}$ dönüşümü yaparsak $\frac{dY}{dX}=\frac{1}{2}\left(\frac{X+Y}{X}\right)^2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{Y}{X}\right)^2$ diferansiyel denklemini elde ederiz.

$Y=uX\Rightarrow Y'=u+Xu'$ olduğundan

$$Xu'+u=\frac{1}{2}(1+u)^2\Rightarrow Xu'=\frac{1}{2}(1+u)^2-u=\frac{1}{2}\left(1+u^2\right)\Rightarrow\frac{2du}{1+u^2}=\frac{dX}{X}\Rightarrow X=ce^{2\int\frac{du}{1+u^2}}$$

$$X=ce^{2\arctan u}=ce^{2\arctan\left(\frac{Y}{X}\right)}\Rightarrow x=1+ce^{2\arctan\left(\frac{y-1}{x-1}\right)}$$

bulunur.

Not: Kabul edelim ki $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ diferansiyel denklemi verilmiş olsun. Eğer $M(x,y)$ ve $N(x,y)$ fonksiyonları aynı dereceden homojen fonksiyonlar ise bu tip diferansiyel denklemler Homojen denklemdir.

$f(x,y,dx,dy)=M(x,y)dx+N(x,y)dy$ olarak alalım. Eğer herhangi l,m sayıları ve $\forall(x,y)\in D,(tx,ty)\in D$ noktaları için $F\left(tx,t^k y,dx,t^{k-1}dy\right)=t^l F(x,y,dx,dy)$ eşitliği sağlanırsa $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ diferansiyel denklemine genelleştirilmiş homojen diferansiyel denklem denir.

Örnek:

$3xy^2dx+\left(4x^2y-1\right)dy=0$

diferansiyel denklemini alalım. $f\left(x,y,dx,dy\right)=3xy^2dx+\left(4x^2y-1\right)dy$ olmak üzere $F\left(tx,t^ky,dx,t^{k-1}dy\right)=3t^{1+2k}xy^2dx+t^{k-1}\left(4t^{k+2}x^2y-1\right)dy\Rightarrow 3t^{1+2k}xy^2dx+\left(4t^{2k+1}x^2y\right)dy=t^{k-1}dy$

$1+2k=2k+1=k-1\Rightarrow k=-2$ bulunur. Dolayısıyla verilen diferansiyel denklem -2. dereceden homojen diferansiyel denklemdir ve bu denklem değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denkleme indirgenebilmesi için $y=x^{-2}z$ değişken değiştirmesi yapılması gerekir.

Örnek 6: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y-6}{x-y}$ denklemini çözelim.

Çözüm: $aB-bA\neq 0$ olduğundan $\begin{cases}x=X+h\\ y=Y+k\end{cases}$ dönüşümünü uygulayabiliriz.

$\begin{cases}h+k=6\\ h-k=0\end{cases}\Rightarrow h=3,\ k=3$ bulunur. Böylece kullanılacak dönüşüm $\begin{cases}x=X+3\\ y=Y+3\end{cases}$ olarak bulunur.

Bu değerler ilgili denklemde yerine yazılırsa, yeni denklem $\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{X+Y}{X-Y}$ şekline gelir ki bu ise bir homojen denklemdir. Dolayısıyla $Y=UX\Rightarrow dY=UdX+XdU$ değerleri yerine yazılırsa $U+X\dfrac{dU}{dX}=\dfrac{1+U}{1-U}$ veya $X\dfrac{dU}{dX}=\dfrac{1+U}{1-U}-U=\dfrac{1+U^2}{1-U}$ buradan da $\left(\dfrac{1-U}{1+U^2}\right)dU=\dfrac{dX}{X}$ elde edilir. Böylece çözüm $Arc\tan U-\dfrac{1}{2}\ln\left|1+U^2\right|=\ln\left|x\right|+\ln c$ olarak bulunur. Tekrar $U=\dfrac{Y}{X}$ alınırsa çözüm: $Arc\tan\dfrac{Y}{X}-\dfrac{1}{2}\ln\left|1+\left(\dfrac{Y}{X}\right)^2\right|=\ln\left|x\right|+\ln c$ bulunur. Tekrar $\begin{cases}X=x-3\\ Y=y-3\end{cases}$ alınırsa çözüm: $Arc\tan\dfrac{(y-3)}{(x-3)}-\dfrac{1}{2}\ln\left|1+\dfrac{(y-3)^2}{(x-3)^2}\right|=\ln\left|x-3\right|+\ln c$ şeklinde bulunur.