Diferansiyel Denklemler

1. Hafta

Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

1.BÖLÜM: DİFERANSİYEL DENKLEMLERE GİRİŞ

I.1. DİFERANSİYEL DENKLEMLERLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR

Mühendislikte, fiziki ve sosyal bilimlerde ve daha birçok bilim dalında çeşitli konulardaki problemi çözümleyebilmek için önce bu problemleri matematiksel ifadelerle formüle etmek ve sonrada bunlarla ilgili bazı sınır ve başlangıç şartlarını kullanarak problemlerin çözümlerini oluşturacak fonksiyonları bulup ortaya koymak gerekir. Bilinen bir problemi ifade eden bu matematiksel ifadeler bazen aranan fonksiyonun en azından birinci mertebeden veya daha yüksek mertebeden türevlerini içermektedir. İşte bu çeşit bir matematiksel ifadeye diferansiyel denklem denir.

Diferansiyel denklemler, özellikle birinci ve ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemler, teorik ve pratik bakımdan büyük önem taşımakta ve bütün fen ve mühendislik bilim dallarında çok geniş bir uygulama yeri bulmaktadır.

Bu derste diferansiyel denklemler çözümleri ve uygulamaları ile birlikte ele alınacaktır.

Bir diferansiyel denklem

$$f(x,y,y')=0 \quad \left(f\left(x,y,\frac{dy}{dx} \right)=0 \right)$$

veya daha genel olarak

$$F\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right)=0 \quad \left(F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\ldots,\frac{d^ny}{dx^n} \right)=0 \right) \qquad \textbf{(1)}$$

Şeklinde yazılır.

Bu denklemlerden birincisi birinci mertebeden, ikincisi ise n. mertebeden birer diferansiyel denklemdir. Bir diferansiyel denklemin en yüksek mertebeden türevi o denklemin mertebesini belirler.

Verilen bir $y=f(x)$ fonksiyonu için bu fonksiyonun türevi x'in bir fonksiyonu olmak üzere bazı uygun kurallar ile bulunur ve $\frac{dy}{dx}=f'(x)$, $y'=f'(x)$ veya $D=\frac{d}{dx}$ olmak üzere Dy şeklinde gösterilir.

Örnek 1: $y=e^{x^2}$ ise bu takdirde; $\frac{dy}{dx}=2xe^{x^2}=2xy$. **(2)**

Bu derste bizim amacımız $y=f(x)$ fonksiyonunun türevini bulmaktan ziyade $\frac{dy}{dx}=2xy$ ile verilen denklemin $y=f(x)$ şeklinde çözümünü sağlayan fonksiyonu bulmaktır.

Tanım 1: Eğer bir denklem bir veya birden fazla sayıda bağımlı değişkeni, bağımlı değişkenin türevlerini, bir veya daha fazla bağımsız değişkene göre içeriyorsa bu denkleme bir diferansiyel denklem denir.

Bir diferansiyel denklemi biz aşağıdaki üç özelliğe göre sınıflandırabiliriz.

I.1.1 Türüne (Tipine) Göre Sınıflandırma:

Eğer bir denklemde yalnızca bir veya daha fazla sayıda bağımlı değişken olmasına karşın yalnız bir bağımsız değişken varsa bu denkleme adi diferansiyel denklem denir.

$$F\left(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), \ldots, y_n'(x)\right) = 0$$

şeklinde gösterilir. Örneğin

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 1$$

ve

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} = 0$$

denklemleri birer adi diferansiyel denklemdir.

Bir denklem bir veya birden fazla bağımlı değişkeni ve (kısmi) türevlerini en az iki bağımsız değişkenin cinsinden içeriyorsa bu denklem kısmi diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Örneğin

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y},$$

Ve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

denklemleri birer kısmi diferansiyel denklemdir.

I.1.2 Mertebesine Göre Sınıflandırma:

Bir diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden türeve bu diferansiyel denklemin mertebesi denir. En yüksek mertebeden türevin değerine de diferansiyel denklemin derecesi denir.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 2y = 0$$

diferansiyel denklemi 2. mertebe 1 dereceden adi diferansiyel denklemdir. Aynı şekilde a bir sabit olmak üzere $a\frac{\partial T^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = 0$ 4. mertebe 1. dereceden bir kısmi diferansiyel denklemdir.

Kısmi diferansiyel denklemler konusu çok önem arz etmesine rağmen bu konuyu iyi anlayabilmek için öğrencinin iyi bir derecede adi diferansiyel denklemler konusunda temel edinmesi gerekir. Ancak bu sayede kısmi diferansiyel denklem konusu daha iyi anlaşılabilecektir.

I.1.3 Lineer Olup Olmamasına Göre Sınıflandırma:

Bir diferansiyel denklem aşağıda verilen formda yazılabiliyorsa bu denklem lineerdir denir.

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

Bu formda görüldüğü gibi bir lineer diferansiyel denklem aşağıdaki iki özellik ile karakterize edilir:

- Denklemde bağımlı değişken y ve y'nin bütün türevleri 1. derecedendir.
- Denklemdeki bütün katsayılar bağımsız değişken x'e bağlıdırlar.

Eğer bir denklem lineer değilse lineer olmayan olarak adlandırılır.

Örnek 2:

$$xdy+ydx=0,$$

$$y''-2y'+y=0,$$

ve

$$\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-2y=0$$

denklemleri sırasıyla 1. 2. ve 3. mertebeden lineer diferansiyel denklemlerdir.

Diğer yandan $yy''+3y'=0$ ve $\frac{d^2y}{dx^2}-3xy^2=0$ denklemleri ise lineer olmayan denklemlerdir. Çünkü 1. de katsayı y'ye bağlıdır, 2. de derece ikidir.

Tanım 2: Bir I aralığında herhangi bir f fonksiyonu tanımlanmış olsun. Eğer f fonksiyonu diferansiyel denklemde yerine konulduğu zaman denklem sağlanıyorsa f fonksiyonu bu aralıkta diferansiyel denklemin bir çözümüdür. Başka bir deyişle (1) nolu denklemin bir çözümü n. mertebeden ve daha düşük mertebelerden türevi bulunan ve (1) denklemini sağlayan $f(x)$ fonksiyonu olsun. O halde I aralığındaki herhangi bir x elemanı için $F\left(x, f(x), f'(x), f''(x),\ldots, f^n(x)\right)=0$.

Örnek 3: $y=\frac{x^4}{16}$ fonksiyonu $\frac{dy}{dx}-xy^{1/2}=0$ lineer olmayan denklemin $(-\infty,+\infty)$ aralığında bir çözümdür. Gerçekten;

$$y'=\frac{4}{16}x^3=\frac{x^3}{4}$$

$$\frac{dy}{dx}-xy^{1/2}=\frac{x^3}{4}-x\left(\frac{x^4}{16}\right)^{1/2}=\frac{x^3}{4}-x\frac{x^2}{4}=0$$

Örnek 4: $y''-2y'+y=0$ denkleminin $(-\infty,+\infty)$ aralığında bir çözümünün $y=xe^x$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $y'=e^x+xe^x$ ve $y''=e^x+e^x+xe^x$ olmak üzere bu ifadeler denklemde yazılırsa

$$y'' - 2y' + y = 2e^x + xe^x - 2e^x - 2xe^x + xe^x = 2e^x - 2e^x + 2xe^x - 2xe^x = 0$$

elde edilir.

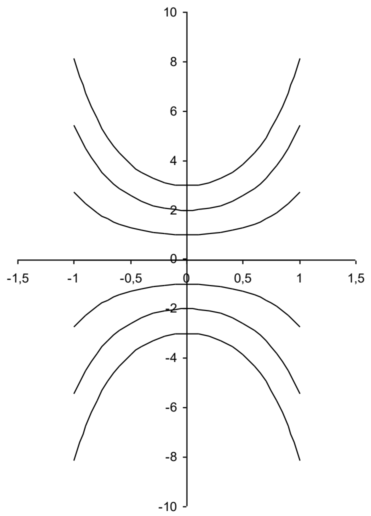
NOT: Örnek 3 ve 4 de sabit y=0 fonksiyonu da $(-\infty,+\infty)$ aralığında verilen diferansiyel denklemin bir çözümüdür. Eğer bir diferansiyel denklemin çözümü bir I aralığında tanımsal olarak sıfır ise bu çözüm genellikle önemsiz(Trivial) çözüm olarak adlandırılır.

Diferansiyel denklemlerin çözümleri kapalı ve kapalı olmayan (açık) çözümler diye ayrılabilir. Başlangıçtaki örnekte tartıştığımız üzere $\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$ diferansiyel denkleminin bir çözümü $y = e^{x^2}$ idi ve bu çözüm bir açık çözümdür. Aynı şekilde $y = \frac{x^4}{16}$ ve $y = xe^x$ çözümleri de sırası ile $y' - xy^{1/2} = 0$ ve $y'' - 2y' + y = 0$ diferansiyel denklemlerinin birer açık çözümleridir. Diğer yandan bir I aralığında bir veya birden fazla sayıda açık çözümü kapsayan bir $G(x, y) = 0$ bağıntısı I aralığında verilen diferansiyel denklem için kapalı bir çözümdür.

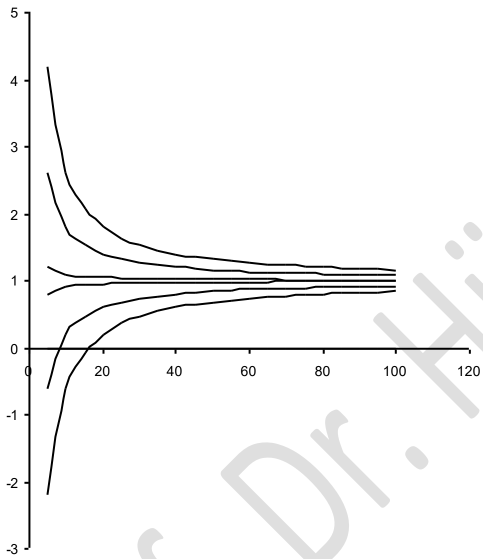
Örnek 6: $-2 < x < 2$ aralığında $x^2 + y^2 - 4 = 0$ bağıntısı $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ diferansiyel denkleminin kapalı bir çözümüdür. Gerçekten kapalı fonksiyonun türevinin tanımı gereğince;

$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) - \frac{d}{dx}(4) = 2x + 2yy' \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$ elde edilir. Diğer yandan $x^2 + y^2 - 4 = 0$ bağıntısı $(-2,2)$ açık aralığında $y = -\sqrt{4 - x^2}$, $y = \sqrt{4 - x^2}$ gibi iki fonksiyonu tanımlar. Bununla beraber herhangi bir sabit c sayısı için $x^2 + y^2 - c = 0$ bağıntısı da aynı diferansiyel denklemi yani $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ denklemini sağlar. Bu yüzden doğal olarak bağıntının reel sayılar sisteminde anlaşılabilir olması gerekmektedir. Hâlbuki $x^2 + y^2 + 1 = 0$ bağıntısının diferansiyel denklemin bir çözümünü tanımladığını söyleyemeyiz

Kapalı ve kapalı olmayan çözümler arasındaki farklılık açıkça belli olduğundan biz her zaman elde edilen çözüm açıktır veya kapalıdır demeyeceğiz. Genelde verilen bir diferansiyel denklemin sonsuz sayıda çözümünün olduğu hususuna alışılmalıdır. Bu kavramı aşağıdaki iki örnekle inceleyelim.



Örnek 7: Bir parametreli eğriler ailesi $y = ce^{x^2}$ olmak üzere bu fonksiyonda $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$ diferansiyel denklemini sağlar. Yani bu çözüm ailesi c sabit olmak üzere sonsuz sayıda çözüm üretir. Ayrıca şekilden görüldüğü gibi $y = 0$ önemsiz çözümü de çözüm ailesinin bir üyesidir ve $c = 0$'a tekabül eder.



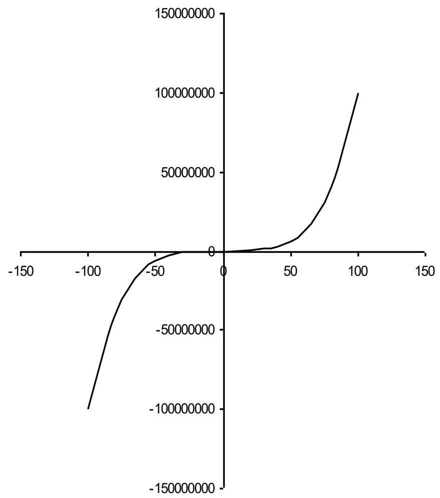
Örnek 8: c'nin bütün değerleri için $y = \dfrac{c}{x} + 1$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında $x\dfrac{dy}{dx} + y = 1$ diferansiyel denkleminin çözümüdür. Gerçekten;

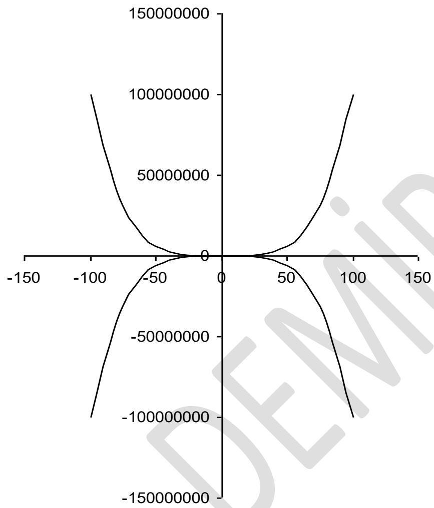
$$x\frac{dy}{dx}\left(\frac{c}{x}+1\right)+\frac{c}{x}+1 = x\left(\frac{-c}{x^2}\right)+\frac{c}{x}+1 = 1 \text{ dir.}$$

Dikkat edilirse c herhangi bir reel sayı olmak üzere sonsuz sayıda çözüm üretebiliyoruz. Özel olarak da $c = 0$ için $y = 1$ sabit çözümünü bulabiliriz

NOT: Burada dikkat edeceğimiz husus orijin hariç tüm aralıkta $y = \dfrac{c}{x} + 1$ çözüm sağlar. Çünkü $x = 0$ da fonksiyon türevlenemez. Ayrıca bir diferansiyel denklemin çözümü parçalı tanımlıda olabilir.

Örnek 9: Bir parametreli eğriler ailesi $y = cx^4 \rightarrow xy' - 4y = 0$ diferansiyel denkleminin çözümüdür. Gerçekten $y' = 4cx^3 \therefore\ x(4cx^3) - 4cx^4 = 0$ eğriler ailesi diferansiyel denklemini sağlar. Diğer yandan $y = \begin{cases} x^4, x > 0 \\ -x^4, x < 0 \end{cases}$ parçalı fonksiyonu da verilen diferansiyel denklem için bir çözümdür. Ayrıca kolayca gösterilebilir ki bu fonksiyon *c* parametresinin tek bir seçimi ile $y = cx^4$ bulunamaz.





Ödev: Aşağıda verilen fonksiyonların $y'' - y = 0$ diferansiyel denkleminin çözümleri olduğunu gösteriniz.

a) $y = e^{x}$ **b)** $y = e^{-x}$ **c)** $y = c_1 e^{x}$ **d)** $y = c_2 e^{-x}$ **e)** $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$

Diferansiyel denklemler konusunda $n.$ mertebeden bir diferansiyel denklemi çözerken çözümde n tane sabit olmasını bekleriz. Örneğin birinci mertebeden diferansiyel $F(x, y, y') = 0$ ise, biz genellikle birinci mertebeden diferansiyel denklemin çözümünde bir parametreli $G(x, y, c) = 0$ çözüm kümesi fonksiyonunu veya eğrilerini bulmayı bekleriz. Dolayısıyla $n.$ mertebeden $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ denklemini çözersek $G(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$ n parametreli çözüm ailesidir ve genel çözüm olarak adlandırılır.

Elde edilen bu çözüm ailesinde sabitlere özel değer vererek bulunan çözümlere ise özel çözümler denir. Örneğin, $y = ce^{x^2}$ basit bir denklem olmak üzere $c = 1, c = 5, c = -3$ için sırasıyla $y = e^{x^2}, y = 5e^{x^2}, y = -3e^{x^2}$ şeklinde özel çözümleri buluruz. Bazen de genel çözümden elde edilemeyen ve özel değer vererek bulunamayan çözümler vardır. Bunlara da tekil çözümler denir.

Tanım 3: Bir I aralığında $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ denkleminin her bir çözümü $i = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere c_i'lerin uygun bir seçimi ile $G(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$ çözüm ailesinden bulunabiliyorsa n parametreli eğriler (çözüm) ailesi diferansiyel denklemin genel çözümü olarak adlandırılır.

Bölüm 1 özeti:

Biz diferansiyel denklemi türüne göre (adi veya kısmi), mertebesine göre ve lineer olup olmamasına göre sınıflandırırız. Bir diferansiyel denklemin bir çözümü yeterli sayıda türevi içeren denklemi tanımladığı aralıkta sağlayan herhangi bir fonksiyondur. $n.$ Mertebeden bir diferansiyel denklem çözülürken biz n parametreli çözüm ailesini bulmayı bekleriz. Bir özel çözüm keyfi parametrelerden bağımsız diferansiyel denklemi sağlayan herhangi bir çözümdür. Tekil çözüm ise n parametreli çözüm ailesinde parametrelere değer verilerek bulunamayan çözümlerdir. Tanımlı aralık üzerinde bir m parametreli çözüm ailesi diferansiyel denklemin herhangi bir çözümünü verdiğinde bu çözüm genel çözüm olarak adlandırılır. Buna karşılık düzlemde n parametreli bir eğriler ailesini temsil eden $n.$ mertebeden bir diferansiyel denklem buluruz.