Diferansiyel Denklemler

7. Hafta

Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

II.6 BAZI ÖZEL TİP DENKLEMLER (LİNEER HALE GETİRİLEBİLEN DENKLEMLER)

II.6.1 Bernoulli Denklemleri: $n \in R$ ve P, f 'de x 'in sürekli fonksiyonları olmak üzere

$$y' + P(x)y = f(x)y^n \qquad \textbf{(1)}$$

şeklinde verilen denklemlere Bernoulli Denklemleri denir. Bu denklemde $n = 0$ için

$$y' + P(x)y = f(x)$$

homojen olmayan lineer diferansiyel denklemi elde edilir. $n = 1$ için ise

$$y' + P(x)y = 0$$

şeklindeki lineer homojen diferansiyel denklemi elde edilir.

Şimdi **(1)** nolu Bernoulli denklemini çözmek için denklemin her iki tarafını y^{-n} ile çarpalım. Böylece

$$y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = f(x) \qquad \textbf{(2)}$$

elde edilir. **(2)** denkleminde $n \neq 0$ ve $n \neq 1$ olmak üzere $w = y^{1-n} \cdots (*)$ dersek

$$\frac{dw}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow y^{-n}y' = \frac{1}{1-n}w' \cdots (**)$$

elde edilir.

Şimdi (*) ve (**) denklemlerini **(2)** denkleminde yerine yazarsak:

$$\frac{1}{1-n}w' + P(x)w = f(x)$$

veya

$$w' + (1-n)P(x)w = (1-n)f(x) \qquad \textbf{(3)}$$

elde edilen bu **(3)** nolu denklem ise homojen olmayan lineer diferansiyel denklemdir. O halde **(1)** ile verilen Bernoulli denklemini çözmek için $w = y^{1-n}$ kullanılır.

Örnek 1: $y' + x^2y = y^2x^5$ denklemini çözelim.

Çözüm : $n = 2$ için y^{-2} ile çarpalım.

$$y^{-2}y' + x^2y^{-1} = x^5$$

denkleminde $w = y^{-1}$ kullanmalıyız.

$$w' = -y^{-2}y' \Rightarrow y^{-2}y' = -w'$$

$$-w' + x^2w = x^5$$

veya

$$w' - x^2w = -x^5$$

homojen olmayan diferansiyel denklemi elde edilir.

$$P(x) = -x^2,\ f(x) = -x^5$$

$$y = e^{-\int -x^2 dx} \int e^{\int x^2 dx}\left(x^5\right)dx + ce^{\frac{x^3}{3}}$$

$$\Rightarrow y = e^{\frac{x^3}{3}\left(\underbrace{\int e^{-\frac{x^3}{3}} \cdot -x^3 x^2 dx + c}_{t=\frac{-x^3}{3},\, dt = x^2 dx}\right)} \Rightarrow y = -e^{\frac{x^3}{3}} \int e^t 3t dt + ce^{\frac{x^3}{3}} \Rightarrow y = -3e^{\frac{x^3}{3}}\left\{te^t - e^t\right\} + ce^{\frac{x^3}{3}}$$

$$\Rightarrow y = -3e^{\frac{x^3}{3}}\left\{-\frac{x^3}{3} e^{-\frac{x^3}{3}} - e^{-\frac{x^3}{3}}\right\} + ce^{\frac{x^3}{3}} \Rightarrow y = x^3 + 3 + ce^{\frac{x^3}{3}}$$

2.Yol: $w' - x^2 w = -x^5 \Rightarrow w' - x^2 w = 0 \Rightarrow \dfrac{dw}{w} = x^2 dx \Rightarrow \ln|w| = \dfrac{x^3}{3} + \ln c \Rightarrow w = ce^{\frac{x^3}{3}}$

$$w' = c'e^{\frac{x^3}{3}} + cx^2 e^{\frac{x^3}{3}}$$

$$-x^5 = c'e^{\frac{x^3}{3}} + cx^2 e^{\frac{x^3}{3}} - cx^2 e^{\frac{x^3}{3}}$$

$$\Rightarrow c' = -x^5 e^{\frac{-x^3}{3}} \Rightarrow c = \int -x^5 e^{\frac{-x^3}{3}} dx + c_1 = -x^3 e^{\frac{-x^3}{3}} - 3e^{\frac{-x^3}{3}} + c_1$$

$$\Rightarrow w = e^{\frac{x^3}{3}}\left(-x^3 e^{\frac{-x^3}{3}} - 3e^{\frac{-x^3}{3}} + c_1\right) = x^3 + 3 + c_1 e^{\frac{x^3}{3}}$$

Örnek 2: $xy' + y = y^2 \ln x$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $n = 2$

$$y' + \frac{y}{x} = y^2 \ln x\, x^{-1} = \frac{\ln x}{x} y^2 \Rightarrow y^{-2} y' + \frac{1}{x} y^{-1} = \frac{\ln x}{x}$$

$y^{-1} = w$ ise $y^{-2} y' = -w'$ ise ve yerine yazarsak:

$-w' + \dfrac{1}{x} w = \dfrac{\ln x}{x}$ veya $w' - \dfrac{1}{x} w = \dfrac{-1}{x} \ln x$

$$w' - \frac{1}{x} w = 0 \Rightarrow \frac{dw}{w} = \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow \ln|w| = \ln|x| + \ln c$$

$$\Rightarrow w = cx$$

$$\Rightarrow w' = c'x + c \Rightarrow c'x + c - \frac{1}{x} cx = -\frac{1}{x} \ln x \Rightarrow c' = \frac{1}{x^2} \ln x$$

$$c = -\int \frac{1}{x^2} \ln x dx + c_1 \Rightarrow u = \ln x \to du = \frac{1}{x} dx,\ dv = \frac{-1}{x^2} dx \to v = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{x} \ln x - \int \frac{1}{x} \frac{1}{x} dx + c_1 = \frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{x} + c_1$$

$$w = \left(\frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{x} + c_1\right) x \Rightarrow w = \ln x + 1 + cx \Rightarrow y^{-1} = \ln x + 1 + cx$$

II.6.2 Ricatti Diferansiyel Denklemleri:

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \qquad \textbf{(1)}$$

şeklinde verilen denklemler **Ricatti Denklemi** olarak adlandırılır. Burada P,Q ve R x'in sürekli ve türevlenebilir fonksiyonlarıdır. Bu denklem $P(x)=0$ ise denklem **lineer**, $R(x)=0$ ise denklem **Bernoulli**, $P(x)=0$ ve $Q(x)=0$ denklem **değişkenlerine ayrılabilir** diferansiyel denklem olarak karşımıza çıkar.

Ricatti denklemi genel halde çözülemez onun için daha ziyade bir özel çözüm belli iken genel çözümü bulmak için çalışacağız.

Örneğin, **(1)** nolu Ricatti denkleminin bir özel çözümü y_1 ise $y = y_1 + z$ gibi genel çözüm elde edilir. $y = y_1 + z$ olduğundan $y' = y' + z'$ ve böylece

$$\begin{aligned}(y' + z') &= P(y_1 + z)^2 + Q(y_1 + z) + R \\ &= P\left(y_1^{\,2} + 2y_1 z + z^2\right) + Qy_1 + Qz + R \\ &= \underbrace{Py_1^{\,2} + Qy_1 + R}_{=y'} + (Q + 2y_1 P)z + Pz^2\end{aligned}$$

Buradan

$$\frac{dz}{dx} - (Q + 2y_1 P)z = Pz^2 \qquad \textbf{(2)}$$

Bernoulli denklemi elde edilir.

Yani Ricatti denkleminin genel çözümünün bir kısmı olan z aslında **(2)** nolu Bernoulli denkleminin bir çözümüdür. Gerçekten **(2)** nolu denklem $n = 2$ için bir Bernoulli denklemi olup $w = z^{-1}$ kullanılarak

$$\frac{dw}{dx} + (Q + 2y_1 P)w = -P$$

homojen olmayan lineer diferansiyel denklemine indirgenebilir.

Örnek 1: $y' = -y^2 + 2x^2 y + 2x - x^4$ Ricatti denkleminin $y_1 = x^2$ bir özel çözümü olduğuna göre genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $y_1 = x^2 \Rightarrow y = y_1 + z = x^2 + z \Rightarrow y' = 2x + z'$

$$\begin{aligned}2x + z' &= -\left(x^2 + z\right)^2 + 2x^2\left(x^2 + z\right) + 2x - x^4 \\ &= -x^4 - 2x^2 z - z^2 + 2x^4 + 2x^2 z + 2x - x^4\end{aligned}$$

$$z' = -z^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -z^2 \Rightarrow \frac{dz}{-z^2} = dx \Rightarrow \frac{1}{z} = x + c \Rightarrow z = \frac{1}{x + c}$$

$$\Rightarrow y = y_1 + z = x^2 + \frac{1}{x + c}$$

Ayrıca verilen denklemde $P = -1, Q = 2x^2, R = 2x - x^4$ **(2)** nolu denklemde yerine yazılırsa:

$$\frac{dz}{dx} - \left(2x^2 - 2x^2\right)z = -z^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -z^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -z^2 \Rightarrow \frac{dz}{-z^2} = dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z} = x + c \Rightarrow z = \frac{1}{x + c} \Rightarrow y = y_1 + z = x^2 + \frac{1}{x + c}$$

bulunur.

Örnek 2: $y' = 2 - 2xy + y^2$ denklemini $y_1 = 2x$ alarak çözünüz.

Çözüm: $y' = y^2 - 2xy + 2, y = y_1 + z \Rightarrow y = 2x + z \Rightarrow y' = 2 + z'$

$$2 + z' = (2x + z)^2 - 2x(2x + z) + 2$$

$$2 + z' = 4x^2 + 4xz + z^2 - 4x^2 - 2xz + 2$$

$$z' = z^2 + 2xz$$

Bu ise bir Bernoulli Denklemidir. Böylece,

$$z^{-2} / z^{-2} z' = 1 + 2xz^{-1}$$

$$w = z^{-1} \Rightarrow w' = -z^{-2} z' \Rightarrow -w' = 1 + 2xw \Rightarrow -w' - 2xw = 1$$

$$-w' - 2xw = 0 \Rightarrow w' = -2xw$$

$$\frac{dw}{dx} = -2xw \Rightarrow \int \frac{dw}{w} = \int -2x dx \Rightarrow \ln|w| = -2\frac{x^2}{2} + \ln c$$

$$\ln w = -x^2 + \ln c \Rightarrow w = ce^{-x^2}$$

$$\Rightarrow w' = c'e^{-x^2} - 2xce^{-x^2}$$

$$\Rightarrow w' + 2xw = -1 \Rightarrow -c'e^{-x^2} - 2xce^{-x^2} + 2xce^{-x^2} = -1$$

$$c' = -e^{-x^2} \Rightarrow c = -\int_{x_0}^{x} e^{t^2} dt + c_1$$

elde edilir.

Böylece $z = \dfrac{1}{w} = \dfrac{e^{x^2}}{c - \int_{x_0}^{x} e^{t^2} dt}$ bulunur. O hale Ricatti denkleminin genel çözümü $y = 2x + z$

olarak bulunur.

II.7 YERİNE KOYMA METODU

Önceki bölümlerde bir diferansiyel denklemin yerine koyma metodu ile kullandığımız standart formlardan birisine dönüştürülerek çözülebildiğini gördük. Bir diferansiyel denklem tanıdığımız denklemlerden farklı gözükebilir. Fakat değişken değiştirmek suretiyle zor olan denklem kolayca çözülebilir. Bu yöntem için kesin bir kural yoktur. Yalnızca biraz dikkat ve beceri sayesinde değişken değiştirmek suretiyle denklemler kolaylıkla çözülebilir.

Örnek 1: $y(1+2xy)dx + x(1-2xy)dy = 0$ denklemini inceleyelim.

Çözüm: Bu denklem ne değişkenlerine ayrılabilir, ne homojen, ne tam, ne lineer ne de Bernoulli denklemidir. Buna göre $u = 2xy$ veya $y = \dfrac{u}{2x}$ alırsak:

$$dy = \frac{2xdu - 2udx}{4x^2} \Rightarrow \frac{u}{2x}(1+u)dx + x(1-u)\left(\frac{xdu - udx}{2x^2}\right) = 0$$ elde edilir.

$$\frac{u}{2x}dx + \frac{u^2}{2x}dx + \frac{du}{2} - \frac{u}{2x}dx - \frac{u}{2}du + \frac{u^2}{2x}dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{u^2}{x}dx + \left(\frac{1}{2} - \frac{u}{2}\right)du = 0$$

$$\Rightarrow 2u^2dx + (1-u)xdu = 0$$

$$\Rightarrow 2\frac{dx}{x} + \frac{(1-u)}{u^2}du = 0$$

elde edilir.

Böylece $2\dfrac{dx}{x} + \dfrac{1-u}{u^2}du = 0$ denkleminde her iki tarafın integralini alırsak:

$$2\ln x - \frac{1}{u} - \ln|u| = c \Rightarrow \ln\left(\frac{x^2}{2xy}\right) = c + \frac{1}{2xy}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2y} = e^{\frac{1}{2xy}}e^c \left(c > 0, e^c = c_1\right)$$

$$\Rightarrow x = 2c_1ye^{\frac{1}{2xy}}$$

bulunur.