Diferansiyel Denklemler

14. Hafta

Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

IX.2.KUVVET SERİSİ ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümdeki tartışmalarımıza kuvvet serisinin kullanımına ait analizdeki bilgilerimizi hatırlayarak başlayacağız. Bu bilgiler kısaca aşağıdaki gibidir:

1) $(x-a)$ da ki kuvvet serisi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ formunda bir sonsuz seridir.

2) Bütün kuvvet serileri bir yakınsaklık aralığına sahiptir, yakınsaklık aralığı serilerin yakınsadığı bütün sayıların kümesidir.

3) Şayet $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n||x_1 - a|^n$ yakınsak ise bu takdirde kuvvet serisi bir x_1 sayısına mutlak yakınsaktır.

4) Her bir yakınsaklık aralığı bir R yakınsaklık yarıçapına sahiptir.

5) Bir kuvvet serisi $|x-a| < R$ ise mutlak yakınsak, $|x-a| > R$ ise ıraksak ve $R=0$ iken yakınsaklık aralığı tekbir a sayısını içerir. $R=\infty$ iken kuvvet serileri tüm x değerleri için yakınsaktır.

6) Yakınsaklık yarıçapı genellikle oran testinden hesap edilir. Yani $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right||x-a| = L$. Burada $L<1$ ise seriler her bir x değeri için mutlak yakınsaktır.

7) Şayet R sıfır ve ∞'dan farklı ise bu takdirde yakınsaklık aralığı $a-R$ ve $a+R$ uç noktalarını içerebilir.

8) Şayet yakınsaklık aralığındaki her bir x değeri için $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = 0$ ise bu takdirde her bir n için $c_n = 0$.

9) Yakınsaklık aralığı sınırları içinde bir kuvvet serisi sürekli bir fonksiyon oluşturur.

10) Yakınsaklık aralığı sınırları içinde bir kuvvet serisi terim terim diferansiyellenebilir.

11)Yakınsaklık aralığı sınırları içinde bir kuvvet serisi terim terim integrallenebilir.

12) Ortak bir yakınsaklık aralığına sahip iki kuvvet serisi terim terim toplanabilir.

IX.2.1 BİR DİFERANSİYEL DENKLEMİN ÇÖZÜMÜ

Açıkça bellidir ki $y = e^{x^2}$ fonksiyonu birinci mertebeden lineer $\frac{dy}{dx} - 2xy = 0 \ldots\mathbf{1}$ denkleminin bir açık çözümüdür. Fakat e^x en iyi bilinen kuvvet serisini temsil etmek üzere $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \ldots\mathbf{2}$ şeklindedir ve böylece (**1**) nolu diferansiyel denkleminin çözümünü (**2**)'ye bağlı olarak yeniden düzenlersek $y = e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!} \ldots\mathbf{3}$ şeklinde yazabiliriz. (**2**) ve (**3**) nolu serilerin her ikisi de her x için yakınsaktır. Diğer bir deyişle biz ilk aşamada (**1**) nolu denklemin çözümünü bildiğimizden dolayı diferansiyel denklemin sonsuz seri çözümünü kolayca bulabildik. Şimdi (**1**) denkleminin seri çözümünü direkt olarak bulmaya çalışalım. Burada kullanacağımız metot belirsiz katsayılar tekniğiyle benzer olduğuna dikkat etmeliyiz. Şayet $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \ldots\mathbf{4}$ çözümünün x'in kuvvet serisi formunda bulunduğunu kabul edersek burada karşımıza şu soru çıkar. (**1**) denklemini sağlayan bir fonksiyona yakınsayan (**4**) formunu oluşturan c_n katsayılarını tanımlayabilir miyiz? Bu aşamada yakınsaklık aralığı bilinmemekle beraber (**4**)'ü terim terim diferansiyellersek;

$$\frac{dy}{dx}=\sum_{n=0}^{\infty}nC_nx^{n\text{-}1}=\sum_{n=1}^{\infty}nC_nx^{n\text{-}1}$$

elde edilir. Burada $n=0$ `a karşılık gelen serinin ilk teriminin sıfır olduğuna dikkat edelim. Elde edilen bu son sonuç ve (**4**)'den

$$\frac{dy}{dx}-2xy=\sum_{n=1}^{\infty}nC_nx^{n\text{-}1}-\sum_{n=0}^{\infty}2C_nx^{n+1} \qquad \mathbf{5}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ taraftaki iki seriyi toplamak istiyoruz. Bunu yapmak için iki serinin de toplam indislerinin aynı değerden başlaması gerekir. Toplamada x'in kuvvetinin sayısal değerleri her toplamda ayrı ayrı değerlendirilmelidir. Yani eğer bir seri bir çarpımla başlıyorsa örn: ilk seri x ile başlıyorsa bu takdirde diğer serilerde x'in aynı kuvveti ile başlamalıdır. Buna göre (**5**) eşitliğini

$$\frac{dy}{dx}-2xy=1.C_1x^0+\sum_{n=2}^{\infty}nC_nx^{n\text{-}1}-\sum_{n=0}^{\infty}2C_nx^{n+1} \qquad \mathbf{6}$$

gibi yazabiliriz. İlk seride $k=n-1$ ve ikinci seride ise $k=n+1$ olsun. Bu takdirde **(6)** denkleminin sağ tarafı

$$C_1+\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)C_{k+1}x^k-\sum_{k=1}^{\infty}2C_{k-1}x^k$$

olacaktır. Serileri terim terim toplarsak;

$$\frac{dy}{dx}-2xy=C_1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+1)C_{k+1}-2C_{k\text{-}1}\right]x^k=0 \qquad \mathbf{7}$$

elde edilir. **(7)** denkleminin özdeş olarak sıfır olması için katsayıların $C_1=0$ ve

$$(k+1)C_{k+1}-2C_{k\text{-}1}=0 \quad k=1,2,3,\dots \qquad \mathbf{8}$$

olmalıdır. (**8**) denklemi C_k katsayılarını ardışık tekrar olarak tanımlayan bir bağıntıyı sağlamaktadır. k-nın bütün değerleri için $k+1\neq 0$ olduğundan (**8**) i;

$$C_{k+1}=\frac{2C_{k\text{-}1}}{k+1} \qquad \mathbf{9}$$

şeklinde yazabiliriz. Son formülün ardışık tekrarından;

$k=1$ için $\quad C_2=\frac{2C_0}{2}=C_0$

$k=2$ için $\quad C_3=\frac{2C_1}{3}=0$

$k=3$ için $\quad C_4=\frac{2C_2}{4}=\frac{1}{2}C_0=\frac{1}{2!}C_0$

$k=4$ için $\quad C_5=\frac{2C_3}{5}=0$

$k=5$ için $\quad C_6=\frac{2C_4}{6}=\frac{1}{3.2!}C_0=\frac{1}{3!}C_0$

$k=6$ için $\quad C_7=\frac{2C_5}{7}=0$

$k=7$ için $\quad C_8=\frac{2C_6}{8}=\frac{1}{4.3!}C_0=\frac{1}{4!}C_0$

Bu şekilde devam edilirse esas kabul (**4**)'ten dolayı

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n=C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4+C_5x^5+C_6x^6+C_7x^7+C_8x^8+\cdots$$

$$=C_0+0+C_0x^2+0+\frac{1}{2!}C_0x^4+0+\frac{1}{3!}C_0x^6+0+\frac{1}{4!}C_0x^8+\cdots$$

$$=C_0\left[1+x^2+\frac{1}{2!}x^4+\frac{1}{3!}x^6+\frac{1}{4!}x^8+\cdots\right]$$

$$=C_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!} \qquad \textbf{10}$$

Böylece (**9**)'un iterasyonunda C_0 tamamen belirsiz kalmasına rağmen biz gerçekten (**1**) nolu denklemin çözümünü bulmuş olduk.

IX.2.2 ADİ NOKTALAR ETRAFINDAKİ ÇÖZÜMLER

Adi ve Tekil Noktalar: $P(x)=a_1(x)/a_2(x)$, $Q(x)=a_0(x)/a_2(x)$ olmak üzere lineer ikinci mertebeden

$$a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0 \qquad \textbf{11}$$

diferansiyel denklemini

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \qquad \textbf{12}$$

formunda yazalım. Buna göre aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım1: Şayet $P(x)$ ve $Q(x)$ katsayıları x_0 noktasında analitik iseler yani $P(x)$ ve $Q(x)$ katsayılarının her ikisi de pozitif yakınsaklık yarıçapı ile $(x-x_0)$'da bir kuvvet serisine sahip iseler, $x=x_0$ noktasına (**11**) denkleminin bir adi (düzgün) noktası denir. Bir nokta eğer adi nokta değil ise denklemin tekil noktası olarak adlandırılır.

Örnek1: x'in bütün sonlu değerleri

$$y''+\left(e^x\right)y'+\left(\sin x\right)y=0$$

Denkleminin bir adi noktasıdır. x'in bütün sonlu değerler için

$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\cdots$ ve $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots$ yakınsak olduğundan özellikle $x=0$ noktasının bir adi nokta olduğu görülmektedir.

Örnek2: $Q(x)=(\sin x)/x$ fonksiyonu x'in bütün sonlu değerleri için $Q(x)=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots$ kuvvet serisi açılımına sahip olduğu gösterilebilirse bu takdirde $xy''+\left(\sin x\right)y=0$ diferansiyel denklemi $x=0$'da bir adi noktası vardır.

Örnek3: $x=0$'da $y''+\left(\ln x\right)y=0$ diferansiyel denklemi bir tekil noktaya sahiptir çünkü $Q(x)=\ln x$, x'de bir kuvvet serisine sahip değildir.

Polinom katsayıları: Öncelikle (11) in polinom katsayılarına sahip olduğu durumla ilgileneceğiz. Tanım 6.1 in bir sonucu olarak $a_2(x)$, $a_1(x)$ ve $a_0(x)$ ler ortak çarpanı olmayan polinomlar iken $x=x_0$ noktası için

(i) Eğer $a_2(x)\neq 0$ ise bir bayağı nokta

(ii) Eğer $a_2(x)=0$ ise bir tekil nokta

olduğunu söyleyebiliriz.

Örnek 4: (a) $(x^2-1)y''+2xy'+6y=0$ denkleminin tekil noktaları $x^2-1=0$ ın çözümüdür yani $x=\mp 1$ dir. x in diğer bütün sonlu değerleri bayağı noktalardır.
(b) Tekil noktaların reel sayılara ihtiyacı yoktur.
$(x^2+1)y''+xy'-y=0$ denkleminin tekil noktaları $x^2+1=0$ ın çözümüdür yani $x=\mp i$ dir. x in diğer bütün sonlu değerleri, reel veya kompleks, bayağı noktalardır.
Örnek 5: a, b ve c sabit iken $ax^2y''+bxy'+cy=0$ Cauchy-Euler denkleminin $x=0$ da bir tekil noktası vardır. x in diğer bütün değerleri, reel veya kompleks, bayağı noktalardır.
Bu bölümün geri kalan kısmında katsayıları polinom olan (11) şeklindeki diferansiyel denklemlerin bayağı noktalar etrafındaki kuvvet serisi çözümlerini bulmaya çalışacağız.
NOT: Bizim için bayağı ve tekil noktaların her zaman sonlu olmaları uygundur fakat bir diferansiyel denklemin bir tekil noktasının sonsuzda olması da mümkündür (Alıştırmalar 6.3'e bakınız).
Aşağıdaki teoremin ispatını yapmayacağız sadece ifadesini kullanacağız.
Teorem 6.1: Eğer $x=x_0$, (11) denkleminin bir bayağı noktası ise her zaman

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$$

şeklinde iki farklı kuvvet serisi çözümü bulabiliriz. R_1, en yakın tekil noktaya olan uzaklık iken en azından $|x-x_0|\le R_1$ için bir serinin çözümü yakınsaktır.
(11) gibi lineer ikinci dereceden denklemi çözmek için iki farklı c_n katsayıları cümlesi buluruz. Böylece ikisi de aynı $x=x_0$ bayağı noktası etrafında genişleyen $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ lineer bağımsız kuvvet serilerini elde ederiz. Orijini içermeyen ortak yakınsaklık aralığında denklemin genel çözümü $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ dir. Bir ikinci derece denklemi çözmede kullandığımız prosedür $y'-2xy=0$ ı çözmede kullandığımızın aynısıdır; yani biz bir çözümü $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$ kabul edip daha sonra da c_n i tanımlayabiliriz. Buradan c_0 ve c_1 keyfi iken $c_1=c_0$ ve $c_2=c_1$ bulabiliriz.
NOT: Kolaylık olması açısından eğer $t=x-x_0$ alındığında $x=x_0$ değeri $t=0$ a dönüşmezse $x=0$ da her zaman bir bayağı nokta bulunabileceğini kabul edebiliriz.
Örnek 6: $y''-2xy=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.
Çözüm: $x=0$ ın denklemin bir bayağı noktası olduğu açıkça görülüyor. Bu nedenle sonlu tekil noktalar yoktur. Teorem 6.1 den $|x|\le\infty$ iken $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ şeklindeki denklemin iki çözümünün de yakınsak olduğunu söyleyebiliriz. Buradan her serideki ilk terim yani sırasıyla $n=0$ ve $n=1$ e tekabül eden terimler sıfır olduğundan

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}nc_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}$$

$$y''=\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}$$

yazabiliriz. Buradan

$$y''-2xy=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty}2c_nx^{n+1}$$

$$=2.1.c_2x^0+\sum_{n=3}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty}2c_nx^{n+1}$$

Birinci seride $k=n-2$ ve ikinci seride $k=n+1$ kabul edersek

$$y''-2xy=2c_2+\sum_{k=1}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k-\sum_{k=1}^{\infty}2c_{k-1}x^k$$

$$=2c_2+\sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)c_{k+2}-2c_{k-1}\right]x^k=0$$

bulunur. Buradan $2c_2=0$ ve $(k+2)(k+1)c_{k+2}-2c_{k-1}=0$ elde ederiz. Son ifade

$c_{k+2}=\dfrac{2c_{k-1}}{(k+2)(k+1)}$, $k=1,2,3,\ldots$ ile aynı anlama gelir. k ya değerler verirsek

$$c_3=\frac{2c_0}{3.2}$$

$$c_4=\frac{2c_1}{4.3}$$

$$c_5=\frac{2c_2}{5.4}=0$$

$$c_6=\frac{2c_3}{6.5}=\frac{2^2}{6.5.3.2}c_0$$

$$c_7=\frac{2c_4}{7.6}=\frac{2^2}{7.6.4.3}c_1$$

$$c_8=\frac{2c_5}{8.7}=0$$

$$c_9=\frac{2c_6}{9.8}=\frac{2^3}{9.8.6.5.3.2}c_0$$

$$c_{10}=\frac{2c_7}{10.9}=\frac{2^3}{10.9.7.6.4.3}c_1$$

$$c_{11}=\frac{2c_8}{11.10}=0$$

$\vdots$

ve böyle devam eder. Burada c_0 ve c_1 in her ikisinin de keyfi olduğu açıktır. Şimdi

$$y=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+c_5x^5+c_6x^6+c_7x^7+c_8x^8+c_9x^9$$
$$+c_{10}x^{10}+c_{11}x^{11}+\ldots$$

$$=c_0+c_1x+0+\frac{2}{3.2}c_0x^3+\frac{2}{4.3}c_1x^4+0+\frac{2^2}{6.5.3.2}c_0x^6$$
$$+\frac{2^2}{7.6.4.3}c_1x^7+0+\frac{2^3}{9.8.6.5.3.2}c_0x^9+\frac{2^3}{10.9.7.6.4.3}c_1x^{10}+0+\ldots$$

$$=c_0\left[1+\frac{2}{3.2}x^3+\frac{2^2}{6.5.3.2}x^6+\frac{2^3}{9.8.6.5.3.2}x^9+\ldots\right]$$
$$+c_1\left[x+\frac{2}{4.3}x^4+\frac{2^2}{7.6.4.3}x^7+\frac{2^3}{10.9.7.6.4.3}x^{10}+\ldots\right]$$

bulunur.

Buna rağmen yukarıdaki örnekteki katsayıların açılımları kullanılmıştır, bazen çözümleri toplama notasyonlarının terimleri cinsinden yazmak daha kullanışlıdır. Faktöriyelin özelliklerinden

$$y_1(x)=c_0\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k(1.4.7.....(3k-2))}{(3k)!}x^{3k}\right]$$
ve
$$y_2(x)=c_1\left[x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k(2.5.8.....(3k-1))}{(3k+1)!}x^{3k+1}\right]$$
yazabiliriz. Bu şekilde oran testi bütün serilerin $|x|\leq\infty$ için yakınsak olduğunu göstermekte kullanabiliriz.

Örnek 7: $(x^2+1)y''+xy'-y=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $x=\mp i$ tekil noktalar iken en azından $|x|\leq 1$ için bir kuvvet serisi çözümü yakınsaktır.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \text{ kabulü } (x^2+1)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^n+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$
$$=2c_2x^0-c_0x^0+6c_3x+c_1x-c_1x+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^n$$
$$+\sum_{n=4}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+\sum_{n=2}^{\infty}nc_nx^n-\sum_{n=2}^{\infty}c_nx^n$$
$$=2c_2-c_0+6c_3x+\sum_{k=2}^{\infty}[k(k-1)c_k+(k+2)(k+1)c_{k+2}+kc_k-c_k]x^k$$
$$=2c_2-c_0+6c_3x+\sum_{k=2}^{\infty}[(k+1)(k-1)c_k+(k+2)(k+1)c_{k+2}]x^k=0$$
verir. Böylece
$$2c_2-c_0=0$$
$$c_3=0$$
$$(k+1)(k-1)c_k+(k+2)(k+1)c_{k+2}=0$$
veya $(k+2)(k+1)$ e bölündükten sonra
$$c_3=0$$
$$c_2=\frac{1}{2}c_0$$
$$c_{k+2}=\frac{1-k}{k+2}c_k \quad , \quad k=2,3,4,...$$
bulunur. Son formülde k ya değerler verelim
$$c_4=-\frac{1}{4}c_2=-\frac{1}{2.4}c_0=-\frac{1}{2^2 2!}c_0$$
$$c_5=-\frac{2}{3}c_3=0$$
$$c_6=-\frac{3}{6}c_4=\frac{3}{2.4.6}c_0=\frac{1.3}{2^3.3!}c_0$$
$$c_7=-\frac{4}{7}c_5=0$$
$$c_8=-\frac{5}{8}c_6=-\frac{3.5}{2.4.6.8}c_0=-\frac{1.3.5}{2^4.4!}c_0$$

$$c_9 = -\frac{6}{9}c_7 = 0$$

$$c_{10} = -\frac{7}{10}c_8 = \frac{3.5.7}{2.4.6.8.10}c_0 = \frac{1.3.5.7}{2^5.5!}c_0$$

$\vdots$

ve böyle devam eder. Bu yüzden

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 + c_7x^7 + c_8x^8 + \ldots$$

$$= c_1x + c_0\left[1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2^2 2!}x^4 + \frac{1.3}{2^3 3!}x^6 - \frac{1.3.5}{2^4 4!}x^8 + \frac{1.3.5.7}{2^5 5!}x^{10} + \ldots\right]$$

dır. Çözümler

$$y_1(x) = c_0\left[1 + \frac{1}{2}x^2 + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1.3.5.....(2n-3)}{2^n n!}x^{2n}\right], \quad |x| \le 1$$

$$y_2(x) = c_1x$$

bulunur.

Örnek 8: Eğer

$y'' - (1+x)y = 0$ denklemi için $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ çözümünü araştırırsak $c_2 = c_0/2$ ve üç terimli tekrarlayan bağıntı

$$c_{k+2} = \frac{c_k + c_{k-1}}{(k+1)(k+2)}, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

bulunur. k ya değerler vermek kolay olsun diye önce $c_0 \neq 0$ ve $c_1 = 0$ seçebiliriz; bu bir tane çözüm verir. $c_0 = 0$ ve $c_1 \neq 0$ seçtiğimizde de diğer bir çözümü buluruz. İlk kabulümüzden

$$c_2 = \frac{1}{2}c_0$$

$$c_3 = \frac{c_1 + c_0}{2.3} = \frac{c_0}{2.3} = \frac{1}{6}c_0$$

$$c_4 = \frac{c_2 + c_1}{3.4} = \frac{c_0}{2.3.4} = \frac{1}{24}c_0$$

$$c_5 = \frac{c_3 + c_2}{4.5} = \frac{c_0}{4.5}\left[\frac{1}{2.3} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{30}c_0$$

$\vdots$

ve bu şekilde devam eder. Bu bir çözüm

$$y_1(x) = c_0\left[1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{30}x^5 + \ldots\right].$$

Aynı şekilde $c_0 = 0$ seçersek

$$c_2 = 0$$

$$c_3 = \frac{c_1 + c_0}{2.3} = \frac{c_1}{2.3} = \frac{1}{6}c_1$$

$$c_4 = \frac{c_2 + c_1}{3.4} = \frac{c_1}{3.4} = \frac{1}{12}c_1$$

$$c_5 = \frac{c_3 + c_2}{4.5} = \frac{c_1}{2.3.4.5} = \frac{1}{120}c_1$$

$\vdots$

ve bu şekilde devam eder. Bu takdirde diğer bir çözüm de

$$y_2(x) = c_1\left[x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \ldots\right]$$

dır. x in bütün sonlu değerleri için bütün seriler yakınsaktır.

Örnek 9: $y'' + (\cos x)y = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$ iken $x = 0$ ın bir bayağı nokta olduğu aşikardır.

$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ kabulünden

$$y'' + (\cos x)y = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$= (2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + \ldots)$$

$$+\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots\right)(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots)$$

$$= 2c_2 + c_0 + (6c_3 + c_1)x + \left(12c_4 + c_2 - \frac{1}{2}c_0\right)x^2 + \left(20c_5 + c_3 - \frac{1}{2}c_1\right)x^3 + \ldots = 0$$

bulunur. Buradan da

$$2c_2 + c_0 = 0$$

$$6c_3 + c_1 = 0$$

$$12c_4 + c_2 - \frac{1}{2}c_0 = 0$$

$$20c_5 + c_3 - \frac{1}{2}c_1 = 0$$

$\vdots$

olur ve böyle devam eder. c_0 ve c_1 keyfi iken

$$y_1(x) = c_0\left[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \ldots\right]$$

$$y_2(x) = c_1\left[x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{30}x^5 + \ldots\right]$$

buluruz. x in bütün sonlu değerleri için iki seri de yakınsaktır.