Diferansiyel Denklemler

3. Hafta

Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

2.BÖLÜM: BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

2.1 BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ

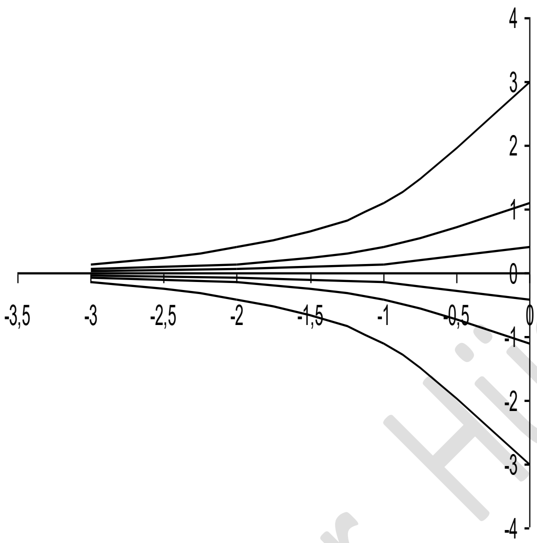
$y(x_0)=y_0$ yan şartı ile verilen birinci mertebeden diferansiyel denklem

$$\frac{dy}{dx}=f^{*}(x,y)$$

olmak üzere bu denklem çözümü ile sık sık ilgilenilmektedir. Buna göre $x_0\in I$ aralığında herhangi bir sayı ve $y_0\in R$ de herhangi bir reel sabit olmak üzere

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

ikilisi bir başlangıç değer problemi olarak adlandırılır ve yan şart ise başlangıç şartı olarak bilinir.



Örnek 1: Şekilden görülmektedir ki $(-\infty,+\infty)$ aralığında $y=ce^{x}\Rightarrow y'=y$ birinci mertebeden diferansiyel denklemin bir parametreli çözüm ailesidir. Eğer özel olarak $y(0)=3$ alırsak ve denklemde $x_0=0$ ve $y(0)=3$ değerini yerine yazarsak $\Rightarrow 3=ce^{0}\Rightarrow c=3$ bulunur. Böylece $y=3e^{x}$ çözümü $\begin{cases} y'=y \\ y_0=3 \end{cases}$ başlangıç değer probleminin bir çözümüdür. $(0,3)$ noktası yerine $(1,3)$ noktasını alırsak bu taktirde; $y(1)=3$ ve buradan da $3=ce^{1}$ $\Rightarrow c=3e^{-1}$ bulunur. Dolayısıyla çözüm $y=3e^{x-1}$ olacaktır. Bu fonksiyonun çözümü de yukarıdaki şekilde grafik olarak gösterilmiştir.

Bir başlangıç değer problemini çözerken iki temel soru aklımıza gelmektedir. Bunlardan birincisi problemin bir çözümü var mıdır? İkincisi ise eğer varsa bu çözüm tek midir? Bu soruların cevabını ilerdeki konularda vermek üzere bu konuya tekrar döndüğümüzde vereceğiz.

2.2 DEĞİŞKENLERİNE AYRILABİLEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bu kısımda birinci mertebeden basit diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemleriyle başlıyoruz. Şayet $g(x)$ sürekli bir fonksiyon ise birinci mertebeden diferansiyel denklem

$$\frac{dy}{dx}=g(x). \qquad \textbf{(1)}$$

Bu ifade integrasyon yolu ile kolayca çözülebilir ve çözüm

$$y=\int g(x)dx+c\ .$$

Örnek 2:

$$\frac{dy}{dx}=1-e^{3x}\Rightarrow y=x-\frac{1}{3}e^{3x}+c$$

$$\frac{dy}{dx}=\sin x\Rightarrow y=-\cos x+c$$

Tanım 5: $\frac{dy}{dx}=\frac{g(x)}{h(y)}$ formundaki bir diferansiyel denkleme değişkenlerine ayrılabilen veya ayrılabilir değişkenlere sahiptir denir. Buna göre değişkenlerine ayrılabilir bir denklem

$$h(y)\frac{dy}{dx}=g(x) \qquad \textbf{(2)}$$

formunda da yazılabilir. Burada özel olarak $h(y)=1$ alındığı zaman **(2)** formunun **(1)** formuna indirgendiğini açıkça görürüz. Şimdi eğer $y=f(x)$ ise y, **(2)** denkleminin bir çözümünü tanımlamak üzere bu durumda

$$h(f(x))f'(x)=g(x)$$

bulunur ve bundan dolayı

$$\int h(f(x)f'(x))dx=\int g(x)dx+c \qquad \textbf{(3)}$$

veya $dy=f'(x)dx$ olduğundan

$$\int h(y)dy=\int g(x)dx+c \qquad \textbf{(4)}$$

elde edilir.

Kolayca görülmektedir ki **(3)** ile **(4)** aslında aynı denklemlerdir ve **(4)** denklemi değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemini göstermektedir. O halde çözümü tanımlayan bir parametreli eğriler ailesi genellikle $h(y)dy=g(x)dx$ denklemin her iki tarafını integralini almak suretiyle bulunur.

Örnek 3: $(1+x)dy-ydx=0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{(1+x)}\Rightarrow \ln|y|=\ln|1+x|+\ln c\Rightarrow y=c(1+x)$

Örnek 4:

$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y}\\ y(4)=3\end{cases}$ başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm: $xdx+ydy=0\Rightarrow \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+c_1=0\Rightarrow x^2+y^2=c^2$ ve $y(4)=3$ olduğundan

$$16+9=c^2\Rightarrow x^2+y^2=5^2$$

Bu ise merkez orijinli yarıçapı 5 olan ve (4,3) noktasından geçen bir çemberi tanımlar.

Ödev: Aşağıda verilen diferansiyel denklemlerini çözünüz.

a) $x\sin xe^{-y}dx-ydy=0$

b) $xy^4dx+(y^2+2)e^{-3x}dy=0$

c) $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=y^2-4\\ y(0)=-2\end{cases}$

Değişkenlerine Ayrılabilen Diferansiyel Denklemler Aşağıdaki Formlardan Biri Şeklinde Olabilir:

1. $y' = f(x) \Rightarrow y = \int f(x)dx + c$

2. $y' = f(y) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = f(y) \Rightarrow dx = \dfrac{dy}{f(y)} \Rightarrow x = \int \dfrac{dy}{f(y)} + c$

3. $y' = f\left(\underbrace{ax+b}_{u}\right) \Rightarrow u = ax+b \Rightarrow du = a\cdot dx \Rightarrow a = \dfrac{du}{dx}$

   $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx} = a\cdot\dfrac{dy}{du} \Rightarrow a\cdot\dfrac{dy}{du} = f(u)$

   $\Rightarrow dy = \dfrac{1}{a}\cdot f(u)du \Rightarrow y = \dfrac{1}{a}\int f(u)du + c$

4. $y' = f\left(\underbrace{ay+b}_{u}\right) \Rightarrow u = ay+b \Rightarrow u' = ay' \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{a} = \dfrac{1}{a}\cdot u'$

   $\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{du}{dx} = f(u) \Rightarrow dx = \dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{du}{f(u)} \Rightarrow x = \dfrac{1}{a}\int\dfrac{du}{f(u)} + c$

5. $y' = f\left(\underbrace{ax+by+c}_{u}\right)$ ve $u = ax+by+c \Rightarrow u' = a+by'$

   $\Rightarrow y' = \dfrac{u'-a}{b} \Rightarrow \dfrac{u'-a}{b} = f(u) \Rightarrow u' = a+bf(u)$

   $\dfrac{du}{dx} = a+bf(u) \Rightarrow dx = \dfrac{du}{a+bf(u)} \Rightarrow x = \int\dfrac{du}{a+bf(u)} + c$

6. $y' = \dfrac{y}{x} + g(x)\cdot f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $u = \dfrac{y}{x}$

7. $M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$ her tarafı $N(y)P(x)$ ile böleceğiz. Bu takdirde $\dfrac{M(x)}{P(x)}dx + \dfrac{Q(y)}{N(y)}dy = 0$ elde edilir. Buradan da integral alınır.

Örnek 5: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x+y+1}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $y' = f(ax+by+c) \Rightarrow u = x+y+1 \Rightarrow u' = 1+y' \Rightarrow y' = u'-1$

$$u'-1 = \frac{1}{u} \Rightarrow u' = \frac{1}{u}+1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1+u}{u} \Rightarrow \int dx = \int\frac{du\cdot u}{u+1} \Rightarrow x = \int\frac{u}{u+1}du$$

$$x = \int\left(1-\frac{1}{u+1}\right)du + c \Rightarrow x = u - \ln|u+1| + \ln c \Rightarrow x = (x+y+1) - \ln|x+y+2| + \ln c$$

$$-y-1 = -\ln|x+y+2| + \ln c \Rightarrow -y-1 = -\ln|x4y+2| + \ln c \Rightarrow -y-1 = \ln\left(\frac{c}{x+y+2}\right)$$

$$\frac{c_1}{x+y+2} = e^{-y-1} \Rightarrow x+y+2 = c_1e^{y+1} = ce^{y}$$

Ödev:

1. $(y')^2 = x$
2. $y' = y^2 - 3y + 2$
3. $y' = (x + y + 1)^2$
4. $x(y^2 - 1)dx + y(x^2 - 1)dy = 0$
5. $y' = y$
6. $xy' - y = xy^2 \ln x$