Diferansiyel Denklemler

13. Hafta

Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

VIII.11 SABİT KATSAYILI LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN BİR ÖZEL ÇÖZÜMÜNÜ BULMADA KULLANILAN KISA METOTLAR

D bir türev operatörünü temsil etmek üzere homojen olmayan sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemi $P(D)y = f(x)$ formunda yazalım. Bu takdirde denklemin bir özel çözümü $y_p(x) = \frac{1}{P(D)} f(x)$ şeklinde yazılabilir. Böylece özel çözüm y_p yi bulmak için $f(x)$ fonksiyonunun yapısına bakarak sırasıyla aşağıdaki kısa metotları kullanabiliriz.

1) Şayet $f(x) = e^{mx}$ şeklinde ise özel çözüm için aşağıdaki işlemler yapılır:

$$y = e^{mx} \Rightarrow De^{mx} = me^{mx}$$
$$D^2 e^{mx} = m^2 e^{mx}$$
$$\vdots$$
$$D^n e^{mx} = m^n e^{mx}$$

ayrıca,

$$P(D) = \left(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0\right) = \sum_{r=0}^{n} a_r D^r \text{ olmak üzere}$$

$$P(D)e^{mx} = \sum_{r=0}^{n} a_r D^r e^{mx} = \sum_{r=0}^{n} (a_r D^r) e^{mx} = \sum_{r=0}^{n} (a_r m^r) e^{mx} = P(m) e^{mx}.$$

Böylece $y_p = \frac{1}{P(D)} e^{mx} = \frac{1}{P(m)} e^{mx}, \left(P(m) \neq 0\right)$ ile bulunur.

Örnek1: $\left(D^3 - 2D^2 - 5D + 6\right) y = e^{4x}$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Verilen denklemi $(D-1)(D-3)(D+2)y = e^{4x}$ şeklinde düzenleyelim. İlk olarak ilgili denklemin homojen kısmının genel çözümünü bulursak, $y_c = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-2x}$ elde edilir. Özel çözüm $y_p = \frac{1}{(D-1)(D-3)(D+2)} e^{4x} = \frac{1}{(4-1)(4-3)(4+2)} e^{4x} = \frac{1}{18} e^{4x}$ olarak bulunur. Böylece genel çözüm $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-2x} + \frac{1}{18} e^{4x}$.

Ödev1: $\left(D^3 - 2D^2 - 5D + 6\right) y = \left(e^{2x} + 3\right)^2$ denklemini çözünüz.

Ödev2: $\left(D^3 - 2D^2 - 5D + 6\right) y = e^{3x}$ denklemini çözünüz.

Not: Eğer bu tip çözüm aramada polinomlardan biri sıfır ise bu takdirde yukarıdaki metot tatbik edilemez. Bu yüzden $P(D)y = e^{mx} w(x)$ alınarak

$y_p = \frac{1}{P(D)} e^{mx} w(x) = e^{mx} \frac{1}{P(D+m)} w(x)$ böylece de $P(D)e^{mx} w(x) = e^{mx} P(D+m) w(x)$ elde edilir.

2) Eğer $f(x) = \sin(mx+n)$ veya $\cos(mx+n)$ ise;

$y = \cos(mx+n)$ olmak üzere

$$D^2 y = -m^2 \cos(mx+n)$$
$$D^4 y = \left(-m^2\right)^2 \cos(mx+n)$$
$$\vdots$$

$$D^{2r}y=\left(-m^2\right)^r\cos\left(mx+n\right)$$

ve

$$P\left(D^2\right)=\sum_r a_r D^{2r} \text{ ise,}$$

$$P\left(D^2\right)\cos\left(mx+n\right)=\sum_r a_r D^{2r}\cos\left(mx+n\right)=\sum_r a_r\left(-m^2\right)^r\cos\left(mx+n\right)$$

$$=P\left(-m^2\right)\cos\left(mx+n\right).$$

Buradan

$$y_p=\frac{1}{P(D^2)}\cos(mx+n)=\frac{1}{P(-m^2)}\cos(mx+n) \text{ ile bulunur.}$$

Benzer şekilde $y=\sin\left(mx+n\right)\Rightarrow y_p=\dfrac{1}{P\left(-m^2\right)}\sin\left(mx+n\right)$ şeklindedir.

Örnek2: $\left(D^2+4\right)y=Sin3x$ denklemini çözünüz.

Çözüm: İlgili denklemin homojen kısmının genel çözümü $y_c=c_1Cos2x+c_2Sin2x$. Buna göre özel çözüm $y_p=\dfrac{1}{D^2+4}Sin3x=\dfrac{1}{-(3)^2+4}Sin3x=-\dfrac{1}{5}Sin3x$ bulunur. O halde genel çözüm

$$y_p=c_1Cos2x+c_2Sin2x-\frac{1}{5}Sin3x.$$

Ödev3: $\left(D^2+3D-4\right)y=Sin2x$ denklemini çözünüz.

Ödev4: $\left(D^3+D^2+D+1\right)y=Sin2x+Cos3x$ denklemini çözünüz.

Not: Eğer bu tip çözüm aramada polinomlardan biri sıfır ise yani $P(-m^2)=0$ ise, bu takdirde yukarıdaki metot tatbik edilemez.

Bu yüzden $P\left(D\right)y_p=Cos(mx+n)$ şeklinde çözüm ararken

$$Cos(mx+n)=\operatorname{Re}e^{imx}$$

ve $P\left(D\right)y_p=Sin(mx+n)$ şeklinde çözüm ararken de

$$Sin(mx+n)=\operatorname{Im}e^{imx}$$

alınarak işlem yapılır.

3) $f\left(x\right)=x^m\Rightarrow\dfrac{1}{P\left(D\right)}$, D'nin artan kuvvetlerine göre açılır ve D^n nin önündeki bütün terimler yazılır. Zira $n>m$ için $D^n.x^m=0$ olur. O halde özel çözüm

$$y_p=\frac{1}{P\left(D\right)}x^m=\left[a_0+a_1.D+a_2.D^2+\cdots+a_n.D^n\right]x^m.$$

Örnek3: $\left(2D^2+2D+3\right)y=x^2+x-1$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $y_c=e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1Cos\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+c_2Sin\dfrac{\sqrt{5}}{2}x\right)$ olmak üzere

$$y_p=\frac{1}{2D^2+2D+3}\left(x^2+x-1\right)=\frac{1}{3\left(1+\underbrace{\frac{2}{3}\left(D^2+D\right)}_{\varphi(D)}\right)}\left(x^2+x-1\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\varphi(D)+\left(\varphi(D)\right)^2-\left(\varphi(D)\right)^3+\cdots\right)\left(x^2+x-1\right)$$

$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{9}D-\frac{2}{27}D^2+\cdots\right)\left(x^2+x-1\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(x^2+x-1\right)-\frac{2}{9}(2x+1)-\frac{2}{27}2$$

$$=\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x-\frac{19}{27}$$

bulunur. Genel çözüm ise $y=e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1Cos\frac{\sqrt{5}}{2}x+c_2Sin\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x-\frac{19}{27}$ olarak bulunur.

Ödev5: $\left(D^3-2D+4\right)y=x^4+3x^2-5x+2$ denklemini çözünüz.

Ödev6: $\left(D^3-4D^2+3D\right)y=x^2$ denklemini çözünüz.

4) $f(x)=e^{mx}.V(x)$ şeklinde ise bir özel çözüm

$y_p=\frac{1}{P(D)}e^{mx}V(x)=e^{mx}\frac{1}{P(D+m)}V(x)$ formundan bulunur.

Örnek4: $\left(D^2-4\right)y=x^2e^{3x}$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $y_c=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$ olmak üzere

$$y_p=\frac{1}{D^2-4}x^2e^{3x}=e^{3x}\frac{1}{(D+3)^2-4}x^2=e^{3x}\frac{1}{D^2+6D+5}x^2$$

$$=e^{3x}\left(\frac{1}{5}-\frac{6}{25}D+\frac{31}{125}D^2\right)x^2=e^{3x}\left(\frac{1}{5}x^2-\frac{12}{25}x+\frac{62}{125}\right)$$

bulunur. Böylece genel çözüm $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+e^{3x}\left(\frac{1}{5}x^2-\frac{12}{25}x+\frac{62}{125}\right)$**.**

Ödev7: $\left(D^2+2D+4\right)y=e^xSin2x$ denklemini çözünüz.

Ödev8: $\left(D^2-4D+3\right)y=2xe^{3x}+3e^xCos2x$ denklemini çözünüz.

5) $f(x)=x.V(x)$ şeklinde ise;

$y_p=\frac{1}{P(D)}xV(x)=x\frac{1}{P(D)}V(x)-\frac{P'(D)}{\left[P(D)\right]^2}V(x)$ özel çözüm olur.

Ödev9: $\left(D^2+3D+2\right)y=xSin2x$ denklemini çözünüz.

Ödev: Aşağıda verilen diferansiyel denklemler için özel çözüm bulunuz.

1. $\left(D^2+D+1\right)y=e^{3x}+6e^x-3e^{-2x}+5$
2. $\left(D^2-1\right)y=e^x$
3. $\left(D^2-2\right)^2y=e^x+xe^{2x}$
5. $\left(D^2+2\right)y=x^3+x^2e^{-2x}+\cos 3x$
6. $\left(D^2-1\right)y=xe^{3x}$
7. $\left(D^2-2\right)^2y=x^2e^{2x}$

4. $\left(D^4+4\right)y=Sin2x$

8. $\left(D^2-2D-1\right)y=e^xCosx$

BÖLÜM IX: DEĞİŞKEN KATSAYILI DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Sabit katsayılı diferansiyel denklemlerdeki çözüm kolaylığını aynı şekilde değişken katsayılı diferansiyel denklemlerde göremeyiz. Gerçekten $y''-2xy=0$ şeklinde verilen basit bir lineer denklem çözümlerini bile alışılagelmiş sinüs, cosinüs, logaritma, üstel fonksiyonlar ve diğer basit fonksiyonlar cinsinden ifade etmek mümkün olmayabilir. Örneğin,

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+2y=0$$

ve

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0$$

denklemlerinin sırasıyla $y=x$ ve $y=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ gibi iki basit çözüme sahip olduğu gösterilmesine rağmen biz genellikle bu tip denklemlerin çözümlerinin bir sonsuz seri formunda olmasını bekleriz. Diğer yandan, genel çözümü her zaman basit fonksiyonlar cinsinden yazılabilen değişken katsayılı denklemlerin bir önemli çeşidi ile bu konuya başlayacağız.

IX.1 CAUCHY-EULER DENKLEMİ

$a_n, a_{n-1},\cdots,a_0 .a_0$ sabitler olmak üzere;

$$a_nx^n\frac{d^{(n)}y}{dx^n}+a_{n-1}x^{n-1}\frac{d^{(n-1)}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_2x^2\frac{d^2y}{dx^2}+a_1x^1\frac{dy}{dx}+a_0y=g(x)$$

formundaki her bir diferansiyel denklemine Couchy-Euler deklemi denir. Bu tip denklemlerin aşikar karakteristiği $m=1,2,\ldots,n$ için x^m polinom katsayıları $\dfrac{d^my}{dx^m}$ cinsinden yazılan diferansiyelin mertebesine denktir. Konunun daha iyi anlaşılması için ikinci mertebeden homojen $ax^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+bx\dfrac{dy}{dx}+cy=0$ denklemini ele alalım. Buradaki çözüm yöntemi bize yüksek mertebeli denklemler için yol gösterecektir. Ayrıca homojen denklemin y_c tamamlayıcı fonksiyonu bulunduktan sonra önceki konularda edindiğimiz bilgilerden yararlanarak, örneğin parametrelerin değişimi yöntemiyle homojen olmayan $ax^2y''+bxy'+cy=g(x)$ denklemi çözülebilir.

Not: $x=0$ noktasında $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ nin katsayısı sıfırdır. Böylece varlık-teklik teoreminin (**Teorem VIII.2**) temel sonuçlarını Couchy-Euler denklemine uygulanabilir olmasını garanti etmek için genel çözüm bulmayı $(0,\infty)$ da yapacağız. $(-\infty,0)$ aralığındaki çözümler ise diferansiyel denklemde $t=-x$ alarak yapılabilir.

ÇÖZÜM METODU

m tanımlı iken $y=x^m$ tipinde bir çözümü bulmaya çalışalım. Buna göre sırasıyla birinci ve ikinci türevler $y'=mx^{m-1}, y''=m(m-1)x^{m-2}$ bulunur. Bunlar denklemde yerine yazılırsa

$ax^2y''+bxy'+cy=ax^2m(m-1)x^2+bx.mx^{m-1}+cx^m$

$$= x^m \left[am(m-1) + bm + c \right] = 0$$

Böylece m yardımcı denklem olan $am(m-1)+bm+c=0$ veya $am^2+(b-a)m+c=0\ldots\mathbf{1}$ denkleminin bir çözümü olmak üzere $y=x^m$ 'de homojen diferansiyel denkleminin bir çözümü olacaktır. Burada yardımcı denklemin köklerine göre homojen denklemin genel çözümü için üç farklı durum söz konusudur. Yani kuadratik denklemin kökleri reel ve farklı, reel ve eşit, karmaşık eşlenik çiftleri olmasına bağlı olarak bu üç farklı durumu sırasıyla göz önüne alacağız.

1.DURUM: Kabul edelim ki m_1 ve $m_2, m_1 \neq m_2$ olacak şekilde **1**-nolu denklemin reel kökleri olsunlar. Bu takdirde $y=x^{m_1}$ ve $y=x^{m_2}$ temel çözüm kümesinin üyesidirler. Böylece denklemin genel çözümü $y=c_1x^{m1}+c_2x^{m2}\ldots\mathbf{2}$

Örnek1: $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}-4y=0$ denklemini çözünüz.

Çözüm1:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}-4y=x^2m(m-1)x^{m-2}-2xmx^{m-1}-4x^m$$
$$=x^m\left[m(m-1)-2m-4\right]$$
$$=x^m\left[m^2-3m-4\right]$$
$$=0$$

Böylece $m^2-3m-4=(m+1)(m-4)=0$ olduğundan $m_1=-1, m_2=4$ bulunur. O halde $y=c_1x^{-1}+c_2x^4$ bulunur.

2.DURUM: Eğer m_1 ve m_2, $m_1=m_2$ olacak şekilde **1**-nolu denklemin kökleri ise $y=x^{m_1}$ çözümünü buluruz. O halde $am^2+(b-a)m+c=0$ denkleminin kökleri eşit olduğu zaman katsayılar diskriminantı kesinlikle sıfırdır. Bu ise kuadratik formülden kökün $-\dfrac{(b-a)}{2a}$ olduğunu verir.

O halde birinci çözüm belli olduğundan biz ikinci çözümü oluşturalım: Bunun için ilk olarak Cauchy-Euler denklemini $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{b}{ax}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{c}{ax^2}y=0$ formunda yazalım ve $p(x)=\dfrac{b}{ax}$ alalım.

Böylece $y_2(x)=x^{m_1}\displaystyle\int\frac{e^{-\int\left(\frac{b}{ax}\right)dx}}{\left(x^{m_1}\right)^2}dx$ yazabiliriz. Buradan $y_2(x)=x^{m_1}\ln x$ şeklinde bulabiliriz.

Böylece genel çözüm $y=c_1x^{m_1}+c_2x^{m_1}\ln x\ldots\mathbf{3}$ olarak bulunur.

Örnek2: $4x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+8x\dfrac{dy}{dx}+y=0$ denklemini çözünüz.

Çözüm2:

$$4x^2\frac{d^2y}{dx^2}+8x\frac{dy}{dx}+y=4x^2m(m-1)x^{m-2}+8xmx^{m-1}+x^m$$
$$=x^m\left[4m(m-1)+8m+1\right]$$
$$=x^m\left[4m^2+4m+1\right]$$
$$=0$$

Böylece $4m^2+4m+1=(2m+1)=0$ olduğundan $m_{1,2}=-\frac{1}{2}$ bulunur. O halde genel çözüm $y=c_1x^{-1/2}+c_2x^{-1/2}\ln x$ bulunur.

Yüksek mertebeden denklemler için eğer m_1 n.mertebeden bir denklemin k-katlı bir kökü ise $x^{m_1}, x^{m_1}\ln x, x^{m_1}(\ln x)^2, \ldots, x^{m_1}(\ln x)^{\text{k-1}}$ çözümlerinin bu n. mertebeden denklemin lineer bağımsız çözümleri olduğu gösterilebilir.

3.DURUM: α ve β>0 reel sabitler olmak üzere şayet $m_1=\alpha+i\beta, m_2=\alpha-i\beta$ şeklinde karmaşık eşlenikler ise bu takdirde genel çözüm $y=c_1x^{\alpha+i\beta}+c_2x^{\alpha-i\beta}$. Fakat sabit katsayılı denklemlerde olduğu gibi burada da yardımcı denklemin kökleri karmaşık olduğu zaman biz çözümü yalnızca *reel* fonksiyonlar cinsinden arayacağız. Bu takdirde $x^{i\beta}=\left(e^{\ln x}\right)^{i\beta}=e^{i\beta\ln x}$ eşitliğini kullanarak Euler formülünü $x^{i\beta}=\cos(\beta\ln x)+i\sin(\beta\ln x)$ şeklinde yazabiliriz.

Böylece $y=c_1x^{\alpha+i\beta}+c_2x^{\alpha-i\beta}=x^{\alpha}\left[c_1x^{i\beta}+c_2x^{-i\beta}\right]$

$$=x^{\alpha}\left[c_1\cos(\beta\ln x)+i\sin(\beta\ln x)\right]+c_2\left[\cos(\beta\ln x)-i\sin(\beta\ln x)\right]$$
$$=x^{\alpha}\left[(c_1+c_2)\cos(\beta\ln x)+(c_{1i}-c_{2i})\sin(\beta\ln x)\right]$$

$(0,\infty)$ aralığında $x^{\alpha}\cos(\beta\ln x), x^{\alpha}\sin(\beta\ln x)$ diferansiyel denklemin lineer bağımsız çözümleri yani bir temel çözüm kümesi oluşturur. Böylece

$$y=c_1x^{\alpha}\cos(\beta\ln x)+c_2x^{\alpha}\sin(\beta\ln x)=x^{\alpha}\left[c_1\cos(\beta\ln x)+c_2\sin(\beta\ln x)\right]\ldots\mathbf{4}$$

elde edilir.

Örnek3: $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+3y=0$ denklemini çözünüz.

Çözüm3:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+3y=x^2m(m-1)x^{m-2}+3xmx^{m-1}+3x^m$$
$$=x^m\left[m(m-1)+3m+3\right]$$
$$=x^m\left[m^2+2m+3\right]$$
$$=0$$

Böylece $m^2+2m+3=0$ olduğundan $m_1=-1+\sqrt{2}i, m_2=-1-\sqrt{2}i$ bulunur. O halde genel çözüm $\alpha=-1, \beta=\sqrt{2}$ olduğundan $y=x^{-1}\left[c_1\cos(\sqrt{2}\ln x)+c_2\sin(\sqrt{2}\ln x)\right]$ bulunur.

ALTERNATİF ÇÖZÜM METODU

Her bir Couchy-Euler denklemi $x=e^t$ alınarak bir sabit katsayılı diferansiyel denkleme indirgenebilir. Bu metodu aşağıdaki örnekle açıklayalım:

Örnek: $x^2y''-xy'+y=\ln x$

Çözüm: $x=e^t$ alalım. Buradan $t=\ln x$ bulunur. Zincir kuralından $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$ ve

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)+\frac{dy}{dt}\left(\frac{-1}{x^2}\right)$$
$$=\frac{1}{x}\left[\frac{d^2y}{dt^2}.\frac{1}{x}\right]+\frac{dy}{dt}\left(\frac{-1}{x^2}\right)$$
$$=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

bulunur ve bu değerler yerine yazılırsa

$$x^2y^{''}-xy^{'}+y=x^2\left[\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}\right]-x\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}+y$$
$$=\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=t$$

sabit katsayılı diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem bilinen metotlardan biri ile çözülürse çözüm

$y_c=c_1e^t+c_2.t.e^t$ ve $y_p=2+t$ olmak üzere $y=c_1e^t+c_2.t.e^t+2+t$ şeklinde bulunur. Tekrar $t=\ln x$ alınırsa $y=c_1e^{\ln x}+c_2\ln x.e^{\ln x}+2+\ln x$ veya $y=c_1x+c_2x\ln x+2+\ln x$ bulunur.