Diferansiyel Denklemler

12. Hafta

Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

VIII.8 BELİRSİZ KATSAYILAR METODU

VIII.8.1 DİFERANSİYEL OPERATÖRÜ

Analizde D^n sembolü genellikle bir fonksiyonun n. mertebeden türevini tanımlamak için kullanılır ve herhangi bir y fonksiyonu için $D^n y = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ şeklinde yazılır. Böylece sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem

$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x)$ olmak üzere D operatörü yardımıyla

$a_n D^n y + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_2 D^2 y + a_1 Dy + a_0 y = g(x)$ veya

$(a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0)y = g(x)$ olarak yazılabilir. Burada

$a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0 \ldots$**(1)** ifadesine n. dereceden bir lineer diferansiyel operatör diyeceğiz **1** polinomu D formunda olduğundan dolayı $P(D)$ şeklinde kısaltılarak verilebilir. Ayrıca $0 \le i \le n$ için a_i-ler sabitler olduğu zaman $P(D)$ diferansiyel operatörü aşağıdaki özelliklere sahiptir

1. $P(D)$ diferansiyel operatörleri cinsinden en düşük dereceden çarpımlarına ayrılabilir
2. $P(D)$-nin çarpımları değişmelidir

Örnek1:

a) $D^2 + D$ ve $D^2 - 1$ operatörleri $D(D+1)$ ve $(D+1)(D-1)$ şeklinde çarpanlarına ayrılabilir.

b) $D^2 + 1$ operatörü reel sayılar kullanılarak çarpanlarına ayrılamaz.

c) $D^2 + 5D + 6$ operatörü $(D+3)(D+2)$ veya $(D+2)(D+3)$ şeklinde çarpanlarına ayrılabilir.

Ödev: $y = f(x)$ fonksiyonu en az iki kere türevlenebilir olmak üzere $(D^2 + 5D + 6)y = (D+3)(D+2)y = (D+2)(D+3)y$ olduğunu gösteriniz.

SIFIRLAYAN OPERATÖR: $y = f(x)$ en az n kere türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Şayet

$$(a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0) f(x) = 0$$

ise $a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0$ diferansiyel operatörü $f(x)$ fonksiyonunun sıfırlayanıdır. Örneğin şayet $f(x) = k$ (k sabit) ise bu takdirde $Dk = 0$. Bununla beraber $D^2 x = 0, D^3 x^2 = 0, \ldots$ elde edilir. Böylece D^n operatörü her bir $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1} \ldots$**2** fonksiyonlarını sıfırlar. Böylece bunun bir sonucu olarak denilebilir ki $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{n-1}x^{n-1}$ polinomunun sıfırlayan operatörü en yüksek dereceden kuvvetini sıfırlayacak şekilde terim terim türevi alınarak bulunabilir.

Örneğin, $1 - 5x + 3x^2 + 7x^3$ polinomunun sıfırlayanı (**2**'den) $D^4 x^3 = 0$ olduğundan $D^4(1 - 5x + 3x^2 + 7x^3) = 0$. Böylece D^4 diferansiyel operatör sıfırlayandır.

$(D-\alpha)^n$ operatörü her bir $e^{\alpha x}, x.e^{\alpha x}, x^2.e^{\alpha x}, \ldots, x^{n-1}.e^{\alpha x} \ldots$**3** fonksiyonlarını sıfırlar. Bunu görmek için $(D-\alpha)^n y = 0$ homojen denklemini ele alalım. Bu denklemin yardımcı denklemi $(m-\alpha)^n = 0$ olduğundan α bir n katlı kök olmak üzere genel çözüm $y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 x e^{\alpha x} + c_3 x^2 e^{\alpha x} + \ldots + c_n x^{n-1} e^{\alpha x}$ $\ldots$**4** bulunur.

Örnek1:

a) e^{2x} fonksiyonunun sıfırlayanını bulalım. $\alpha = 2, n = 1$ İçin $(D-2)$ diferansiyel operatörü sıfırlayandır. Gerçekten $(D-2)e^{2x} = 0$.

b) $e^{3x}-2xe^{3x}$ in sıfırlayanını bulalım. $\alpha=3, n=2$ için $(D-3)^2$ sıfırlayan operatördür. Gerçekten $(D-3)^2\left(e^{3x}-2.x.e^{3x}\right)=0$.

$\alpha,\beta>0\in R$ olmak üzere $\left[m^2-2\alpha m+(\alpha^2+\beta^2)\right]^n=0$ gösterimindeki kuadratik formül $\alpha+i\beta$ ve $\alpha-i\beta$ şeklinde n katlı kompleks köklere sahiptir. Buna göre aşağıdaki sonuç yazılabilir. $\left[D^2-2\alpha D+(\alpha^2+\beta^2)\right]^n$ diferansiyel operatörü

$$\left.\begin{array}{l} e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ldots,x^{n-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \\ e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ldots,x^{n-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \end{array}\right\}\ldots\mathbf{5}$$

fonksiyonlarının her birini sıfırlar. Örneğin;

a) $\alpha=\ 1,\beta=2,n=1$ için $\left(D^2+2D+5\right)$ diferansiyel operatörü $e^{-x}\cos 2x$ ve $e^{-x}\sin 2x$ fonksiyonlarının her birini sıfırlar.

b) $\alpha=0,\beta=1,n=2$ için $[D^2+1]^2$ veya $[D^4+2D^2+1]$ diferansiyel operatörü **5**-e göre $Cosx, xCosx, Sinx, xSinx$ fonksiyonlarını, bunların her bir lineer kombinasyonunu sıfırlar

Ayrıca $\alpha=0,n=1$ için… **5**-in özel bir durumu $\left(D^2+\beta^2\right)\begin{cases}\cos\beta x\\ \sin\beta x\end{cases}=0\ldots\mathbf{6}$.

VIII.9: HOMOJEN OLMAYAN SABİT KATSAYILI LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM ÇÖZÜMLERİ

Sabit katsayılı homojen olmayan bir diferansiyel denklemin genel çözümünü bulmak için mutlaka aşağıdaki yol izlenmelidir. İlk olarak denklemin tamamlayıcı fonksiyonu olan y_c bulunmalıdır ve daha sonra da homojen olmayan denklemin bir özel çözümü bulunmalıdır. Daha önceki bilgilerimizden özel çözümün keyfi sabitlerden tamamen bağımsız olduğunu biliyoruz. O halde homojen olmayan denklemin çözümü tamamlayıcı fonksiyon ile özel çözümün toplamından ibarettir.

BELİRSİZ KATSAYILAR METODU

Şayet, $P(D)$ **1** nolu diferansiyel operatörü belirtiyorsa o zaman bir sabit katsayılı homojen olmayan lineer diferansiyel denklem basitçe $P(D)y=g(x)\ldots\mathbf{7}$ şeklinde yazılır. Burada $g(x)$ fonksiyonu

- **i)** Bir k sabiti
- **ii)** x-in bir polinomu
- **iii)** e-nin bir fonksiyonu $(e^{\alpha x})$
- **iv)** $\cos\beta x, \sin\beta x$

şeklinde olduğunda veya buradaki fonksiyonların sonlu toplamı veya çarpımı durumunda $g(x)$ fonksiyonunun bir sıfırlayan operatör olan $P_1(D)$ diferansiyel operatörünü bulmak her zaman mümkündür. $P_1(D)$ diferansiyel operatörünü **7** eşitliğine uygularsak $P_1(D)P(D)y=P_1(D)g(x)=0$ veya $P_1(D).P(D)y=0$ denklemi bulunur. Elde edilen bu son denklemi çözerek **7** ile verilen homojen olmayan denklem için bir özel çözüm bulmak mümkündür. Bundan sonra vereceğimiz birçok örnekte y_p-yi bulmak için belirsiz katsayılar metodunun nasıl kullanıldığını vereceğiz. Ve her bir denklemin genel çözümü $(-\infty,\infty)$ aralığında tanımlanmıştır.

Örnek1:

$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y=4x^2\ldots\mathbf{8}$ denklemini ele alalım.

Çözüm

I.Adım:

İlk önce verilen denklemin $\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y=0$ homojen kısmının genel çözümünü bulalım. Yardımcı denklem $m^2+3m+2=(m+1)(m+2)=0$ olmak üzere denklemin kökleri $m_1=-1, m_2=-2$ olarak bulunur. Buradan $y_1=e^{-x}, y_2=e^{-2x}$ ve $W(e^{-x},e^{-2x})\neq 0$ olduğundan tamamlayıcı çözüm $y_c=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$.

II. Adım:

8 denkleminin her tarafının 3 kez türevi alınarak, denklem homojen hale getirilir. Diğer bir deyişle $D^3x^2=0$ olduğundan $D^3(D^2+3D+2)y=D^3(4x^2)=0\Rightarrow D^3(D^2+3D+2)y=0\ \ldots\mathbf{9}$ homojen denklemi bulunur. Buradan ise $m^3(m^2+3m+2)=m^3(m+1)(m+2)=0$ ve $m_{1,2,3}=0, m_4=-1, m_5=-2$ olmak üzere $y=\underbrace{c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}}_{y_c}+\underbrace{c_3+c_4x+c_5x^2}_{y_p}\ \ldots\mathbf{10}$ bulunur.

8 nolu denklemin her bir çözümü **9** nolu denklemin ayrıca çözümüdür. Tamamlayıcı fonksiyon $y_c=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$ **10** nolu çözümün bir kısmını oluşturduğundan dolayı **10** nolu ifadenin kalan kısmı y_p özel çözümünün temel yapısını oluşturmalıdır. Dolayısıyla c_3,c_4,c_5 i sırasıyla A,B,C ile yer değiştirerek özel çözümü $y_p=A+Bx+Cx^2\ \ldots\mathbf{11}$ ile tanımlayabiliriz. **11** denklemi **8**'in özel çözümünü oluşturur ve mutlaka A,B,C değerleri bulunmalıdır. O halde **11**-in türevlerini alıp denklem'de yazarsak

$$y''+3y'+2y=2C+3B+6Cx+2A+2Bx+2Cx^2$$

$$\Rightarrow(2A+3B+2C)+(2B+6C)x+2Cx^2=4x^2$$

$$\begin{cases} 2C=4\Rightarrow C=2 \\ 2B+6C=0\Rightarrow B=-6 \\ 2A+3B+2C=0\Rightarrow A=7 \end{cases}$$

$$y_p=7-6x+2x^2$$

$$\Rightarrow y=c_1.e^{-x}+c_2.e^{-2x}+7-6x+2x^2$$

Ödev1: $y''-3y=8e^{3x}+4\sin x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

VIII.10 PARAMETRELERİN DEĞİŞİMİ METODU

Birinci dönemde gördüğümüz üzere birinci mertebeden $\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)\ldots\mathbf{1}$ şeklinde verilen lineer diferansiyel denklemin genel çözümü $P(x), f(x)$ I aralığında sürekli olmak üzere; $y=e^{-\int P(x).dx}\int e^{\int P(x).dx}f(x)\,dx+c_1e^{-\int P(x).dx}\quad\ldots\mathbf{2}$ şeklindeydi. Burada $y_c=c_1e^{-\int P(x).dx}$ olup, $\frac{dy}{dx}+P(x)y=0\ \ldots\mathbf{3}$ homojen denkleminin genel çözümüdür.

$y_p = e^{-\int P(x).dx} \int e^{\int P(x).dx} f(x)\,dx \ldots$**4** ise **(1)** nolu homojen olmayan denklemin bir özel çözümüdür. Yani **(2)** formülü $y = y_c + y_p$ formundadır.

Homojen olmayan lineer yüksek mertebeli denklemin çözümü için yeni bir metot olarak parametrelerin değişimi yöntemiyle **(4)** denklemini yeniden elde edeceğiz. Temel olarak buradaki düşünceyi **8.6'**de kullanmıştık. Kabul edelim ki y_1, **3** denkleminin bilinen bir çözümü olsun. Yani $\frac{dy_1}{dx} + P(x)y_1 = 0$ olsun. Açıkça bellidir ki $y_1 = e^{-\int P(x)dx}$ bu denklemin bir çözümüdür ve diferansiyel denklem lineer olduğundan onun genel çözümü $y = c_1 y_1(x)$. Parametrelerin değişimi bir u_1 fonksiyonunun bulunmasını içerir öyle ki $y_p = u_1(x)y_1(x)$. Yani y_p **1** denkleminin bir özel çözümüdür. Diğer bir deyişle c_1 parametresini u_1 değişkeni ile değiştireceğiz. Böylece $y_p = u_1 y_1$'i **(1)** denkleminde yerine yazarsak;

$$\frac{d}{dx}[u_1 y_1] + P(x)u_1 y_1 = u_1 \frac{dy_1}{dx} + y_1 \frac{du_1}{dx} + P(x)u_1 y_1$$

$$= u_1\left[\underbrace{\frac{dy_1}{dx} + P(x)y_1}_{=0}\right] + y_1 \frac{du_1}{dx}$$

$$\Rightarrow y_1 \frac{du_1}{dx} = f(x)$$

$$\Rightarrow du_1 = \frac{f(x)}{y_1(x)}dx \Rightarrow u_1 = \int \frac{f(x)}{y_1(x)}dx$$

Böylece $y_p = u_1 y_1 = y_1(x)\int \frac{f(x)}{y_1(x)}dx$ elde edilir. y_1'in tanımından dolayı bu sonuç **(4)** ile aynıdır.

YÜKSEK MERTEBEDEN DENKLEMLER

Yukarıdaki düşünceyi ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemine uygularsak; önce

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \qquad \textbf{5}$$

ile verilen denklemi

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \qquad \textbf{6}$$

şeklinde yazmalıyız. Burada $P(x), Q(x), f(x)$ I 'da süreklidirler. Bilindiği üzere $P(x), Q(x)$ ler sabitler olduğu zaman y_c'yi bulmak hiçte zor değildir. Kabul edelim ki y_1 ve y_2, **(6)** denkleminin homojen kısmının bir I aralığında temel çözüm kümesini oluştursunlar. Yani

$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0$, $y_2'' + P(x)y_2 + Q(x)y_2 = 0$.

Burada karşımıza çıkan soru şudur:

$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ olacak şekilde $u_1(x), u_2(x)$ fonksiyonları bulunabilir mi?(Burada not etmeliyiz ki y_p için yaptığımız kabul $y_c = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ ile aynıdır. Yani biz c_1, c_2 ile değişken parametreler u_1, u_2 yi yer değiştirdik.

Kural gereği $y_p' = u_1 y_1' + u_1' y_1 + u_2 y_2' + u_2' y_2 \ldots$**7.**

Eğer biz u_1 ve u_2 yi $u_1'y_1+u_2'y_2=0$ ...**8** denklemini sağlayacak şekilde seçersek **(7)** nolu denklem $y_p'=u_1y_1'+u_2y_2'$ haline gelir. Buradan da $y_p''=u_1'y_1'+u_1y_1''+u_2'y_2'+u_2y_2''$ bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} y_p''+P(x)y_p'+Q(x)y_p &= u_1'y_1'+u_1y_1''+u_2'y_2'+u_2y_2'' \\ &\quad +P(x)u_1y_1'+P(x)u_2y_2' \\ &\quad +Q(x)u_1y_1+Q(x)u_2y_2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p''+P(x)y_p'+Q(x)y_p &= u_1\left[y_1''+P(x)y_1'+Q(x)y_1\right] \\ &\quad +u_2\left[y_2''+P(x)y_2'+Q(x)y_2\right] \\ &\quad +u_1'y_1'+u_2'y_2' \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Ve buradan

$y_p''+P(x)y_p'+Q(x)y_p=u_1'y_1'+u_2'y_2'=f(x)$ ...**9** elde edilir.

Diğer bir deyişle u_1 ve u_2 fonksiyonları **(9)** şartını sağlayacak şekilde fonksiyonlar olmalıdır. **(8)** ve **(9)** denklemleri u_1' ve u_2' türevlerini tanımlamak üzere;

$$\begin{cases} y_1u_1'+y_2u_2'=0 \\ y_1'u_1'+y_2'u_2'=f(x) \end{cases}$$

şeklinde bir lineer denklem sistemi oluştururlar. Cramer kuralı gereği bu denklem sisteminin çözümü W determinantı cinsinden

$$u_1'=\frac{W_1}{W},\; u_2'=\frac{W_2}{W} \quad \ldots\mathbf{10}$$

şeklindedir. Biliyoruz ki $W; y_1, y_2$' nin Wronskiyanları olarak tanımlanır ve I aralığındaki her bir x değeri için y_1 ve y_2 nin lineer bağımsızlığından dolayı $W\neq 0$. Ayrıca,

$$W_1=\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}=-y_2(x)f(x),\quad W_2=\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}=y_1(x)f(x) \qquad \mathbf{11}$$

ve $W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ şeklindedir. Buna göre **(11), (10)** denkleminde yerine yazılırsa;

$$u_1'=\frac{-y_2f(x)}{W},\; u_2'=\frac{y_1f(x)}{W} \qquad \mathbf{12}$$

elde edilir.

Böylece **(12)** ile bulunan eşitlikler hesaplanırsa özel çözüm $y_p=u_1y_1+u_2y_2$ formuna getirilir.

Örnek1: $y''-4y'+4y=(x+1)e^{2x}$ denklemini çözünüz.

Çözüm: İlk önce ilgili denklemin homojen kısmının genel çözümünü bulalım**.** Buna göre yardımcı denklem $m^2-4m+4=(m-2)^2=0$ olup tamamlayıcı fonksiyon $y_c=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$ şeklinde bulunur. Bu çözümde $y_1(x)=e^{2x}$ ve $y_2(x)=xe^{2x}$ ile tanımlarsak $W(y_1,y_2)=e^{4x}$ bulunur. Verilen diferansiyel denklem standart formda olduğundan dolayı $f(x)=(x+1)e^{2x}$ olarak alınabilir. O halde **12**'den dolayı

$$u_1' = -\frac{xe^{2x}(x+1)e^{2x}}{e^{4x}}$$
$$= -x^2 - x$$

ve

$$u_2' = -\frac{e^{2x}(x+1)e^{2x}}{e^{4x}}$$
$$= x+1$$

bulunur. Buradan da $u_1 = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ ve $u_2 = \frac{1}{2}x^2 + x$ elde edilir. Böylece

$$y_p = \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)e^{2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)xe^{2x}$$
$$= \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)e^{2x}$$

ve

$$y = y_c + y_p$$
$$= c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)e^{2x}$$ bulunur.

n.MERTEBEDEN DENKLEMLER

İkinci mertebeden homojen olmayan denklemler için incelediğimiz metot aşağıdaki formda verilen n.mertebeden lineer diferansiyel denklemler için genelleştirilebilir.

$$y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_1(x)y' + P_0(x)y = f(x) \qquad \mathbf{13}$$

Şayet $y_c = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$ ...**14** nolu denklem **13** nolu denklemin tamamlayıcı fonksiyonu ise o zaman $y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x)$ elde edilir ve **(13)**de yerine yazılırsa aşağıdaki n bilinmeyenli lineer denklem sistemi elde edilir.

$$y_1u_1' + +y_2u_2' + \cdots + y_n.u_n' = 0$$
$$y_1'u_1' + y_2'u_2' + \cdots + y_n'.u_n' = 0$$
$$\vdots$$
$$y_1^{n-1}u_1' + y_2^{n-1}u_2' + \cdots + y_n^{n-1}.u_n' = f(x)$$

Burada $k = 1,2\ldots,n$ için u fonksiyonunun türevlerini u_k' ile tanımlarsak bu durumda Gramer kuralından; $u_k' = \frac{W_k}{W}$, $k = 1,2,\cdots,n$ ile hesaplanır.

Burada $W; y_1, y_2, \cdots, y_n$ fonksiyonlarının Wronskiyanı W_k ise $\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{matrix}$ kolonunun W'nun k. kolonu ile yer değiştirmesi ile hesaplanan determinanttır. Yukarıda $n=2$ alınırsa biz (10) ve (11) formüllerini buluruz.