Diferansiyel Denklemler

5. Hafta

Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

2.4 TAM DENKLEMLER

$ydx + xdy = 0$ şeklinde verilen denklem hem değişkenlerine ayrılabilir hem de homojendir. Ayrıca bu denklem x ve y değişkenlerinin çarpımının türevine eşdeğerdir. Yani $xdy + ydx = d(xy) = 0$ ve çözümü ise integrasyon yolu ile kolayca bulunabilir ve de $xy = c$ kapalı çözümü şeklinde bulunur. Analizden hatırlanacağı üzere xy düzleminin bir R bölgesinde sürekli birinci mertebeden kısmi türevlere sahip bir fonksiyon $z = f(x,y)$ ise bu takdirde bu fonksiyonun toplam diferansiyeli $dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \ldots$**(1)** şeklinde olur. Eğer $f(x,y) = c$ ise **(1)** den $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \ldots$**(2)** bulunur. Başka bir deyişle bir $f(x,y) = c$ eğriler ailesi verildiğinden toplam diferansiyel hesabı ile birinci mertebeden bir diferansiyel denklem elde ederiz.

Örnek1 : $x^2 - 5xy + y^3 = c$ ise **(2)** den $(2x - 5y)dx + (-5x + 3y^2)dy = 0$

veya $\frac{dy}{dx} = \frac{5y - 2x}{3y^2 - 5x}$ ...**(3)** elde edilir.

Burada bizim amacımız bu problemi nasıl çözebiliriz olmaktan ziyade $\frac{dy}{dx} = \frac{5y - 2x}{3y^2 - 5x}$ şeklinde verilen denklemin $d(x^2 - 5xy + y^3) = 0$ formunda eşdeğer olarak yazabilir miyiz? Sorusudur. Dikkat edilirse **(3)** nolu denklem ne değişkenlerine ayrılabilir ne de homojendir.

Tanım1 : $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ diferansiyel gösterimi xy düzleminin bir R bölgesinde $f(x,y)$ fonksiyonunun toplam diferansiyeline karşılık geliyorsa bu takdirde bir tam diferansiyeldir.
Böylece $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ diferansiyel denkleminin sol tarafı bir tam diferansiyel ise bu denklem bir tam denklemdir.

Örnek2 : $x^2y^3dx + x^3y^2dy = 0$ denklemini göz önüne alalım.

Bu denklem tamdır. Çünkü $d\left(\frac{1}{3}x^3y^3\right) = x^2y^3dx + x^3y^2dy = 0$.

Aşağıdaki teorem tam diferansiyel için iyi bir testtir.

Teorem1 : $a < x < b$, $c < y < d$ ile tanımlı bir R bölgesinde $M(x,y)$ ve $N(x,y)$ ler sürekli ve sürekli birinci mertebeden kısmi türeve sahip olsunlar. Bu takdirde; $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ ifadesinin bir tam diferansiyel olabilmesi için $\Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ...**(4)** olmasıdır.

İspat : İspatın basit olması açısından bütün x ve y ler için kabul edelim ki $M(x,y)$ ve $N(x,y)$ ler sürekli birinci mertebeden kısmi türevlere sahip olsunlar.
$\Rightarrow$: Şayet $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ ifadesi tam ise R deki tüm x ve y ler için; $M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ olacak şekilde $\exists f(x,y)$ bulunur. Buradan $M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$ ve $N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$ yazılabilir.

Böylece $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial N}{\partial x}$ yani $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ bulunur. Bunu karışık kısmi türevlerin eşitliği ve $M(x,y)$ ve $N(x,y)$ lerin birinci kısmi türevlerinin sürekliliğinin bir sonucu olarak yazdık.

Teoremin içerdiği yeterliliğin gösterilmesi ise **(4)** nolu denklemin olduğu her zaman $\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$ şartlarını sağlayan en az bir f fonksiyonunun varlığının olmasıdır. Bu f fonksiyonunun bulunabilmesi ise tam denklemlerin çözümü için izlenecek temel yoldur .

ÇÖZÜM YÖNTEMİ: $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0\ldots$**(5)** denklemi verildiğinde ilk olarak $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ olduğunu göstermeliyiz. Daha sonra $\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)$ alarak x'e göre $M(x,y)$'yi integre ediniz ve f fonksiyonunu bulunuz. (Bu işlemde y değişkenini sabit alırız.) Böylece $f(x,y)=\int M(x,y)dx+g(y)$ …**(6)** bulunur. Burada sabit $g(y)$ fonksiyonu integrasyon sabitidir. Şimdi **(6)** denkleminin y'ye göre türevini alıp $\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$ kabul edersek;

$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx+g'(y)=N(x,y)$; buradan da $g'(y)=N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\ldots$**(7)** bulunur.

(7) ile bulunan eşitliğin sağ tarafının x den bağımsız olduğunu görmek son derece önemlidir. Çünkü $\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right]=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=0$.

Son olarak (7) denkleminde y'ye göre integral alıp ve sonucu **(6)** da yerine yazarsak denklemin çözümü $f(x,y)=c$ olarak bulunur.

NOT: Yukarıdaki işlemler $\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$ alarak da başlanılabilir. Bu durumda **(6)** ve **(7)** nolu denklemler benzerleri ile sırası ile $f(x,y)=\int N(x,y)dy+h(x)\ldots$**(6')** ve $h'(x)=M(x,y)-\frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)dy$ …**(7')**.

Örnek2 : $2xydx+(x^2-1)dy=0$ denklemini çözünüz.

Çözüm :

$\left.\begin{aligned}M(x,y)&=2xy\\N(x,y)&=x^2-1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}My&=2x\\Nx&=2x\end{aligned}\right\}\Rightarrow My=Nx$ ve dolayısıyla bu denklem tamdır yani

$\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$ olacak şekilde $\exists f(x,y)$ fonksiyonu vardır.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)=2xy\Rightarrow f(x,y)=\int 2xydx+g(y)=x^2y+g(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2+g'(y)=x^2-1\Rightarrow g'(y)=-1\Rightarrow g(y)=-y$$

$$\Rightarrow f(x,y)=x^2y-y=c$$

Ödev:

1. $(\cos x \cdot \sin x - xy^2)dx + y(1-x^2)dy = 0$ denklemini $y(0)=2$ başlangıç şartı ile çözünüz.

2. $(x+y)(x-y)dx + x(x-2)dy = 0$

3. $\dfrac{2x}{y}dx - \dfrac{x^2}{y^2}dy = 0$

TAM HALE GETİRİLEBİLEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER (İNTEGRAL ÇARPANI)

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ biçiminde verilen ve tam diferansiyel olmayan ifadeleri $\mu(x,y)$ gibi bir çarpanla çarpmak suretiyle tam diferansiyel hale getirmek mümkündür. Burada denklemi tam diferansiyel hale getiren $\mu(x,y)$ çarpanına **integral çarpanı** denir. Şimdi $\mu(x,y)$ bir integral çarpanı olsun. O halde $\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$ denklemi tam diferansiyel olur. Tam diferansiyel şartından;

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x,y)M(x,y)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x,y)N(x,y)\right]$$

$$\Rightarrow \mu\frac{\partial}{\partial y}M + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$\Rightarrow N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\ldots(1)$$

Bu ise bir kısmi türevli diferansiyel denklemdir. Ancak μ nün sadece x'in ya da y'nin fonksiyonu olması halinde denklem adi diferansiyel denkleme dönüşür. Bu nedenle μ'nün bu özel halleri için integral çarpanının nasıl bulunacağını gösterelim.

a) $\mu = \mu(x)$ yani μ sadece x'in fonksiyonu olsun. O halde $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ olacağından **(1)** denklemi

$\dfrac{\partial \mu}{\partial x}N = \mu\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right)$ haline dönüşür. Burada kısaca $\dfrac{\partial M}{\partial y} = My, \dfrac{\partial N}{\partial x} = Nx$ kullanılırsa:

$$\Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial x}N = \mu(My - Nx)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mu}{\mu} = \frac{My - Nx}{N}dx$$

$$\Rightarrow \ln \mu = \int \frac{My - Nx}{N}dx$$

$$\Rightarrow \mu = e^{\int \frac{My-Nx}{N}dx}\cdots(2)$$

b) $\mu = \mu(y)$ yani μ sadece y'nin fonksiyonu olsun. O halde $\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ olacağından **(1)** nolu denklem $-\dfrac{\partial \mu}{\partial y}M = \mu(My - Nx)$ haline dönüşür.

$$\Rightarrow \int \frac{\partial \mu}{\mu} = \int \left(\frac{My - Nx}{-M} \right) dy$$

$$\Rightarrow \ln \mu = \int \frac{My - Nx}{-M} dy$$

$$\Rightarrow \mu = e^{\int \frac{My - Nx}{-M} dy} \cdots (3)$$

şeklinde bulunur. Burada karşımıza çıkan sorun μ 'nün x yada y 'ye bağlı oduğunu nasıl anlayacağımızdır. Bunun için izlenecek yol aşağıdaki gibidir.

- Eğer $\frac{My - Nx}{N} \cdots (4)$ ifadesi sadece x 'e bağlı ise μ integral çarpanı da x 'e bağlı olur. Bu durumda μ 'yü bulmak için **(2)** nolu formül kullanılır.
- Eğer $\frac{My - Nx}{-M} \cdots (5)$ ifadesi sadece y 'ye bağlı ise μ 'de y 'ye bağlı olur. Bu durumda μ 'yü bulmak için **(3)** nolu formül kullanılır.
- Eğer **(4)** ve **(5)** ifadeleri hem x hem de y 'ye bağlı iseler **(1)** nolu formül kullanılır.

Örnek3 : $(x^2 + y^2)dx + xydy = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial y} = 2y \\ \frac{\partial N}{\partial x} = y \end{array}\right\} \Rightarrow My \neq Nx$$

. O halde $\frac{My - Nx}{N} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}$ olduğundan integral çarpanını bulmak için (2) nolu eşitliği kullacağız.

$$\mu = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

$$\Rightarrow (x^3 + xy^2)dx + x^2ydy = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} My = 2xy \\ Nx = 2xy \end{array}\right\} \Rightarrow My = Nx$$

olduğundan denklem tamdır. O halde $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y), \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$ olacak şekilde $\exists f(x,y)$ mevcuttur.

$$f(x,y) = \int (x^3 + xy^2)dx + g(y) = \frac{x^4}{4} + y^2 \frac{x^2}{2} + g(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x^2y + g'(y) = x^2y \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + c$$

Ödev :

1. $6xydx + (4y + 9x^2)dy = 0$

2. $y(x + y + 1)dx + (x + 2y)dy = 0$

3. Gösterinizki her bir değişkenlerine ayrılabilir birinci mertebeden diferansiyel denklem aynı zamanda tamdır.