Diferansiyel Denklemler

8. Hafta

Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

II.8 ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER: BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ

Birinci mertebeden bir diferansiyel denklem $y' = f(x,y)$ sonsuz sayıda bir çözüme sahip olabilir. Örneğin; $y(x) = ce^{\lambda x}$ fonksiyonu, c sabitinin her bir değeri için , $y' = \lambda y$ diferansiyel denkleminin bir çözümüdür. $y(a) = \eta$ bir başlangıç şartı gibi alınarak biz herhangi bir özel çözümü seçebiliriz. Böylece $y' = \lambda y$ nin özel çözümü bu başlangıç şartını sağlayan $y(x) = \eta e^{\lambda(x-a)}$. Başlangıç şartı ile birlikte diferansiyel denklem ikilisi bir başlangıç değer problemi oluştururlar ve

$$\left.\begin{array}{l} y' = f(x,y) \\ y(a) = \eta \end{array}\right\} \quad \ldots(*)$$

şeklinde gösterilirler.

VARLIK ve TEKLİK TEOREMİ:

$f(x,y)$ fonksiyonu , $a \le x \le b$, $-\infty \le y \le \infty$ ile belli olan bir D bölgesindeki her bir noktada tanımlı ve sürekli olsun, ve $f(x,y)$ fonksiyonu her $(x,y_1),(x,y_2) \in D$ için y-ye bağlı olarak

$$\left| f(x,y_1) - f(x,y_2) \right| \le L \left| y_1 - y_2 \right|$$

Lipschitz şartını sağlasın. Bu takdirde η verilen herhangi bir sayı ise (*) başlangıç değer probleminin D bölgesinde bütün (x,y) noktalarında sürekli ve diferansiyellenebilir en az bir tek $y(x)$ çözümü vardır.

Şayet $f(x,y)$, y-ye göre bir sürekli türeve sahip ise bu takdirde ortalama değer teoreminden $\tilde{y}$, y_1 *ve* y_2 arasında olmak üzere

$$f(x,y_1) - f(x,y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,\tilde{y})(y_1 - y_2)$$

Böylece $L = \sup\limits_{(x,y)\in D} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right|$ seçeriz.

Örnek1: Başlangıç değer problemi $y' = \dfrac{x^3}{1+y^2}$, $y(0) = y_0$ $[0,1]$ aralığında bir tek $y(x)$ çözümüne sahiptir.

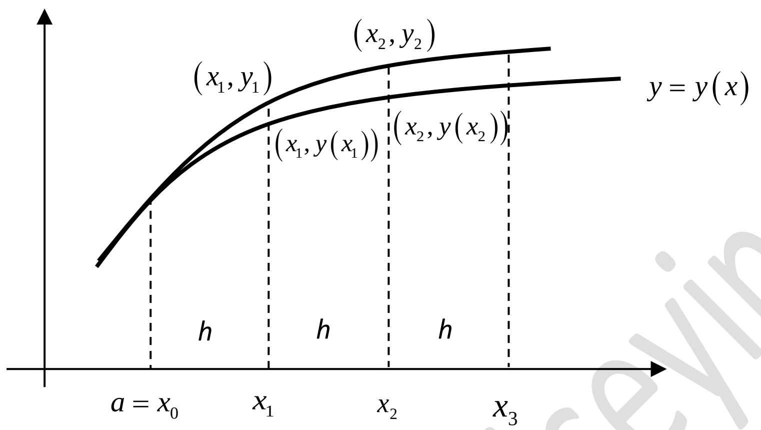
$$f(x,y) = \frac{x^3}{1+y^2} \quad \text{sürekli} , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2yx^3}{\left(1+y^2\right)^2}$$

$$L = \sup_{\substack{0\le x\le 1\\ -\infty\le y\le\infty}} \left| -\frac{2yx^3}{\left(1+y^2\right)^2} \right| = 2 \sup_{-\infty\le y\le\infty} \left| \frac{y}{\left(1+y^2\right)^2} \right|$$

$$g(y) = \frac{y}{\left(1+y^2\right)^2} \quad , \quad g'(y) = \frac{1-3y^2}{\left(1+y^2\right)^3} = 0 \qquad y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$g\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{16} \qquad \therefore \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le \frac{3\sqrt{3}}{16} = L$$

NÜMERİK METODUN TANIMLANMASI;



$(x_1, y_1), (x_2, y_2)\ldots$ noktalarını nümerik olarak $(x_1, y(x_1)), (x_2, y(x_2))\ldots$ yaklaşımlarını kullanarak hesaplayabiliriz.

Euler Metodu:

$y' = f(x, y)$ diferansiyel denklemini $[x_0, x_1]$ aralığında integre edelim.

$$\int_{x_0}^{x_1} y'dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y)\,dx$$

$$\therefore y(x_1) - y(x_0) = hf\left(x_0, y(x_0)\right) \quad , \quad h = x_1 - x_0 \quad , \quad y_1, y(x_1)$$

için

$$\therefore y_1 - y_0 = hf(x_0, y_0)$$

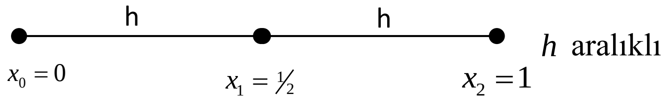
bir yaklaşım olmak üzere bu eşitliği genelleştirirsek $y_{n+1} - y_n = hf(x_n, y_n)$ elde edilir.

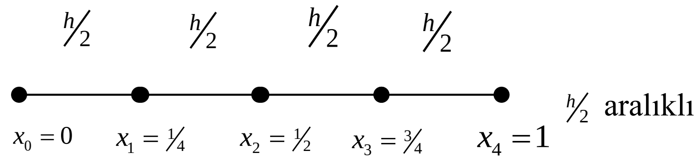
Burada $x_n = x_0 + xh$ ve h adım uzunluğudur. Şayet $y_0 = \eta$ ile başlarsak , $j \ge 1$ olmak üzere y_j lerin tüm ardışık değerlerini Euler Metodundan elde ederiz. Burada y_n , $y(x_n)$ için bir sayısal yaklaşık değeri temsil eder.

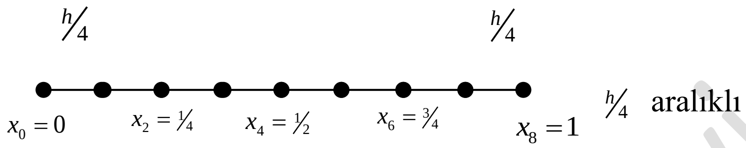
Şayet ;

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ n \to \infty \\ nh \to sbt}} y_n = y(x_n)$$

oluyorsa sayısal metodun yakınsak olduğunu söyleriz.







Örnek2: $y' = -xy^2$, $y(0) = 2$ başlangıç değer problemi için $y\left(\frac{1}{2}\right)$ ye yaklaşımının yakınsaklığını $h = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ ve $\frac{1}{8}$ alarak Euler metodu ile araştırınız.

Başlangıç değer probleminin çözümü $y(x) = \frac{2}{1+x^2}$ ve $y\left(\frac{1}{2}\right) = 1,6$ dır.

$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$, $y_0 = 2$

$x_n = x_0 + nh \to x_0 = 0$ için $x_n = nh$, $f(x, y) = -xy^2$

$h = \frac{1}{2}$ için

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) \\ &= 2 + \frac{1}{2}(0) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$h = \frac{1}{4}$ için

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 2$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 2 + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)(2)^2$$

$$= 1,75$$

$h = \frac{1}{8}$ için

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 2$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 2 + \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{8}\right)(2)^2$$

$$= 1,9375$$

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 1,9375 + \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{4}\right)(1,9375)^2$$

$$= 1,8202$$

$$y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) = 1,8202 + \frac{1}{8}\left(-\frac{3}{8}\right)(1,8202)^2$$

$$= 1,6649$$

Yerel Kesim Hatası ;

Euler Metodunun yerel kesim hatası nümerik yaklaşım formülünden bulduğumuz y_i çözümü ile, Euler formülünde y_i yerine analitik çözüm olan $y(x_i)$ konulduğunda elde edilen kalandır. Yani formülün her iki tarafının farkıdır. Euler metodu;

$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$. Dolayısıyla $x_{n+1} = x_n + h$ olduğundan ;

$$Y.K.H. = y(x_{n+1}) - y(x_n) - hf(x_n, y_n)$$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + O(h^3)$$

$$Y.K.H. = \cancel{y(x_n)} + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + O(h^3) - \cancel{y(x_n)} - hf(x_n, y(x_n))$$

$$= h\left[y'(x_n) - f(x_n, y(x_n))\right] + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + O(h^3)$$

$$= \frac{1}{2!}h^2 y''(x_n) + O(h^3)$$

($y' = f(x, y)$ olduğundan)

Global Kesim Hatası;

Global kesim hatası verilen noktadaki analitik çözüm ile nümerik çözümün farkıdır. Yani ;

$$G_n = y(x_n) - y_n$$