Diferansiyel Denklemler

6. Hafta

Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

II.5 LİNEER DENKLEMLER

Birinci bölümde n. mertebeden bir lineer diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi genel bir formda tanımlamıştık.

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

Bu denklemde $n=1$ alınırsa

$$a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

birinci mertebeden lineer denklem bulunur. Bu denklemi $a_1(x)$ ile bölersek daha kullanışlı form olan

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x) \qquad \textbf{(1)}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde $P(x)$ ve $f(x)$ ler sürekli olmak üzere I aralığında denklemin çözümünü araştıracağız. Kabul edelim ki **(1)** denklemi

$$dy+\left[P(x)y-f(x)\right]dx=0 \qquad \textbf{(2)}$$

formunda yazılsın. Bu takdirde **(2)** denkleminin bir çarpanı olan $\mu(x)$ daima bulunabilir ve

$$\mu(x)dy+\mu(x)\left[P(x)y-f(x)\right]=0 \qquad \textbf{(3)}$$

tam diferansiyel denklemdir. Bölüm 2 kısım 4 Teorem 1'den biliyoruz ki şayet

$$\frac{\partial}{\partial x}\mu(x)=\frac{\partial}{\partial y}\mu(x)\left[P(x)-f(x)\right]$$

Veya **(4)**

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu(x)\left[P(x)\right]$$

ise **(3)** nolu denklemin sol tarafı tam diferansiyeldir. Bu denklem dikkat edilirse değişkenlerine ayrılabilir formdadır ve buradan $\mu(x)$ tanımlanabilir. Böylece

$$\frac{\partial\mu}{\mu}=P(x)dx\Rightarrow\ln\mu=\int P(x)dx \qquad \textbf{(5)}$$

$$\Rightarrow\mu=e^{\int P(x)dx} \qquad \textbf{(6)}$$

bulunur. **(6)** ile elde edilen $\mu(x)$ fonksiyonu bir integral çarpanı olarak adlandırılır.(Burada integral sabiti kullanmamızın sebebi **(3)** nolu denklemin bu sabitten etkilenmemesidir. Ayrıca I aralığında her bir x için $\mu(x)\neq 0$ sürekli ve diferansiyellenebilirdir.)

Çok ilginçtir ki **(3)** nolu denklem $f(x)$ fonksiyonu sıfır olduğu zaman da tam diferansiyeldir. Gerçekten **(4)** nolu denklem de $\frac{\partial}{\partial y}\mu(x)f(x)=0$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonu $\mu(x)$ integral çarpanının hesaplanmasında rol oynamaz. O halde her iki

$$e^{\int P(x)dx}dy+e^{\int P(x)dx}\left[P(x)y-f(x)\right]dx$$

veya

$$e^{\int P(x)dx}dy+e^{\int P(x)dx}P(x)ydx$$

denklemleri tam diferansiyeldir. Şimdi **(3)** nolu denklemi aşağıdaki formda yazarsak

$$e^{\int P(x)dx}dy+e^{\int P(x)dx}P(x)dxy=e^{\int P(x)dx}f(x)dx$$

bu denklemi sol tarafınına göre yeniden düzenlersek

$$d\left[e^{\int P(x)dx}y\right]=e^{\int P(x)dx}f(x)dx$$

şeklinde yazılabileceği kolayca görülebilir. Buradan her iki tarafı integre edersek

$$e^{\int P(x)dx}y=\int e^{\int P(x)dx}f(x)dx+c$$

veya

$$y=e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}f(x)\,dx+ce^{-\int P(x)dx} \qquad \textbf{(7)}$$

elde edilir. Diğer bir deyişle eğer **(1)** nolu denklem bir çözüme sahip ise bu çözüm **(7)** formunda olmalıdır. Tersine **(7)** nolu denklem **(1)** nolu denklemin bir çözümü için bir parametreli eğri ailesinin oluşumunu sağlar. Burada birinci mertebeden lineer denklemin çözümü için **(7)** nolu formülü ezberlemeye gerek yoktur. Bunun için aşağıdaki yol her zaman sıra ile izlenmelidir.

i. Birinci mertebeden lineer denklemi çözmek için denklemi **(1)** nolu forma getiriniz.

ii. $P(x)$'i tanımlayıp $\mu=e^{\int P(x)dx}$ çarpanını bulunuz.

iii. **(1)** nolu denklemi $\mu(x)$ integral çarpanı ile çarpınız.

$\mu(x)\dfrac{dy}{dx}+\mu(x)[P(x)y-f(x)]=0$ elde ediniz veya $\mu(x)\dfrac{dy}{dx}+\mu(x)P(x)y=\mu(x)f(x)$ şeklinde yazınız.

iv. **iii**.deki denklemin sol tarafı integral çarpanı ile bağımlı değişken y'nin türevine eşittir. Yani $\dfrac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right]=e^{\int P(x)dx}f(x)$

v. **iv**.ün her iki tarafının integralini alınız. Böylece $e^{\int P(x)dx}y=\int e^{\int P(x)dx}f(x)dx+c$ veya $y=e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}f(x)dx+ce^{-\int P(x)dx}$ bulunur.

Örnek 1: $x\dfrac{dy}{dx}-4y=x^6e^x$ denklemini çözünüz.

Çözüm:

i. $\dfrac{dy}{dx}-4\dfrac{y}{x}=x^5e^x$

ii. $\mu=e^{\int -\frac{4}{x}dx}=e^{-4\ln x}=x^{-4}$

iii. $x^{-4}\dfrac{dy}{dx}-4x^{-5}y=xe^x$ tam diferansiyel denklemdir.

iv. $\int\dfrac{\partial}{\partial x}\left[x^{-4}y\right]=\int xe^x dx+c$

v. $x^{-4}y=xe^x-e^x+c\Rightarrow y=x^5e^x-x^4e^x+x^4c$

Birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin çözümünde integral çarpanı yönteminden başka da çözüm metotları vardır. Bunlar sırasıyla

1. Sabitin Değişimi Metodu
2. Bağımlı Değişkenin Değiştirilmesi

metotlarıdır.

1. Sabitin Değişimi Metodu: Bunun için ilk önce $\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)$ şeklinde verilen **(1)** nolu lineer diferansiyel denklemin homojen kısmı yani $\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$ denklemi çözülmelidir. Homojen denklem değişkenlerine ayrılabilir formda olduğundan $\frac{dy}{y}=-P(x)dx$ şeklinde yazılır ve her iki tarafı integrallenirse $\ln y=-\int P(x)dx+\ln c \Rightarrow \ln\left(\frac{y}{c}\right)=-\int P(x)dx \Rightarrow y=ce^{-\int P(x)dx}\cdots(*)$ bulunur. Elde edilen bu çözümün türevini alırsak (Burada c 'ye x 'in bir fonksiyonu gibi bakacağız) O halde;

$$y=ce^{-\int P(x)dx}$$

$$y'=c''\cdot e^{-\int P(x)dx}-cP(x)e^{-\int P(x)dx}$$

y 'nin ve y' 'nün bu değerleri **(1)** denkleminde yerine yazılırsa;

$$c'e^{-\int P(x)dx}-cP(x)e^{-\int P(x)dx}+cP(x)e^{-\int P(x)dx}=f(x)$$

$$\Rightarrow c'e^{-\int P(x)dx}=f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{dc}{dx}=e^{\int P(x)dx}f(x)$$

$$\Rightarrow c=\int e^{\int P(x)dx}f(x)dx+c_1$$

bulunur. Bu değer (*) denkleminde yerine yazılırsa:

$$y=ce^{-\int P(x)dx}$$

$$y=\left(\int e^{\int P(x)dx}f(x)\,dx+c_1\right)e^{-\int P(x)dx}$$

$$y=e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}f(x)\,dx+ce^{-\int P(x)dx}$$

Dikkat edilirse elde edilen çözüm **(7)** nolu çözüm ile aynıdır.

3. Bağımlı Değişkenin Değiştirilmesi: Burada u ve v, x 'in iki keyfi fonksiyonu olmak üzere **(1)** denkleminde $y=uv$ dönüşümü uygulayalım. Buradan $y'=u'v+v'u$ değeri bulunur. y ve y' 'nün bu değerleri **(1)** nolu $y'+P(x)y=f(x)$ denkleminde yerine yazılırsa

$$u'v+uv'+P(x)uv=f(x)$$

buradan v parantezine alırsak

$$v(u'+P(x)u)+uv'=f(x)$$

denklemi bulunur. Bu denklemde u 'yu v 'nin katsayısı sıfır olacak şekilde seçersek yani u, $y'+P(x)y=0$ homojen denklemin her bir özel çözümü olarak seçilsin. O halde $u'+P(x)u=0$ ifadesi değişkenlerine ayrılabilir form olmak üzere $\frac{du}{u}=-P(x)dx \Rightarrow u=e^{-\int P(x)dx}$ elde edilir.

Daha sonra $uv'=f(x)$ eşitliğinden

$$e^{-\int P(x)dx}v'=f(x) \Rightarrow \frac{dv}{dx}=e^{\int P(x)dx}f(x)$$

$$\Rightarrow v=\int e^{\int P(x)dx}f(x)\,dx+c_1$$

Böylece,

$$y = uv$$

$$\Rightarrow y = e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(x)dx} f(x)\,dx + ce^{-\int P(x)dx}$$

elde edilir.

Elde edilen bu formülün de daha önceden bulduğumuz **(7)** formülü ile aynı olduğuna dikkat edilmelidir.

Birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemleri çözmenin bir diğer yolu da **(7)** nolu formülün direkt kullanılmasıdır. Bunun için denklemi **(1)** nolu formda yazarak $P(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonlarının uygun şekilde tespiti gerekir.

Örnek 2: $y' + \frac{2}{x}y = 6x^3$ denklemini çözünüz.

Çözüm: İntegral Çarpanı Yöntemi

$$y' + \frac{2}{x}y = 6x^3, P(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow \mu = e^{\int \frac{2}{x}dx} = x^2$$

$$\Rightarrow x^2\frac{dy}{dx} + 2xy = 6x^5$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[x^2 y\right] = 6x^5 \Rightarrow x^2 y = x^6 + c$$

$$\Rightarrow y = x^4 + x^{-2}c$$

Sabitin Değişimi Metodu:

$$y' + \frac{2}{x}y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} + 2\frac{y}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{-2y} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln x^{-2} + \ln c \Rightarrow y = x^{-2}c$$

$$y = x^{-2}c \Rightarrow y' = -2x^{-3}c + c'x^{-2}$$

$$-2x^{-3}c + c'x^{-2} + \frac{2}{x}x^{-2}c = 6x^3$$

$$-2x^{-3}c + c'x^{-2} + 2x^{-3}c = 6x^3$$

$$c' = \frac{6x^3}{x^{-2}} = 6x^5$$

$$\Rightarrow \frac{dc}{dx} = 6x^5 \Rightarrow \int dc = \int 6x^5 dx$$

$$\Rightarrow c = 6\frac{x^6}{6} = x^6 + c_1$$

$$\Rightarrow y = x^{-2}\left(x^6 + c_1\right) = x^4 + x^{-2}c_1$$

$$\Rightarrow y = x^4 + x^{-2}c_1$$

Bağımlı Değişkenin Değişimi Metodu:

$$y = uv \Rightarrow y' = u'v + v'u$$

$$u'v + v'u + \frac{2}{x}uv = 6x^3 \Rightarrow v\left(u' + \frac{2}{x}u\right) + v'u = 6x^3$$

$$u' + \frac{2}{x}u = 0$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{2}{x}u = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2\frac{u}{x}$$

$$\frac{du}{u} = -2\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln u = \ln x^{-2} \Rightarrow u = x^{-2}$$

$$uv' = 6x^3 \Rightarrow v' = 6x^5 \Rightarrow v = x^6 + c$$

$$y = x^{-2}\left(x^6 + c\right)$$

(7) Nolu Formülün Direkt Kullanılışı

$$y' + \frac{2}{x}y = 6x^3 \Rightarrow P(x) = \frac{2}{x},\ f(x) = 6x^3$$

$$y = e^{-\int \frac{2}{x}dx}\int e^{\int \frac{2}{x}dx} 6x^3 dx + ce^{-\int \frac{2}{x}dx} = x^{-2}\int 6x^5 dx + cx^{-2} = x^{-2}x^6 + cx^{-2}$$

$$\Rightarrow y = x^4 + cx^{-2}$$

Ödev: Aşağıdaki verilen denklemleri her üç metoda göre çözünüz.

1. $\left(x^2 + 9\right)\dfrac{dy}{dx} + xy = 0$
2. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = x, \quad y(0) = -3$
3. $x\dfrac{dy}{dx} + y = 2x, \quad y(1) = 0$