Diferansiyel Denklemler

9. Hafta

Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

III. BÖLÜM DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN GEOMETRİK YORUM VE UYGULAMALARI

III.1. GEOMETRİK UYGULAMALAR

1. Merkezleri $x=\frac{1}{2}y$ doğrusu üzerinde ve yarıçapı 1 birim olan çmberlerin ailesinin diferansiyel denkleminin bulunuşu şöyledir.

$$M(a,2a),\quad r=1 \Rightarrow (x-a)^2+(y-2a)^2=1$$

$$\Rightarrow 2(x-a)+2(y-2a)y'=0 \Rightarrow 2x-2a+2yy'-4ay'=0$$

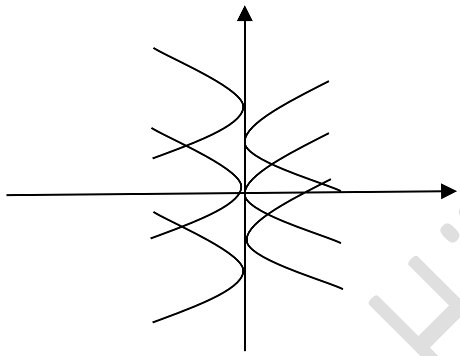
$$\Rightarrow a=\frac{x+yy'}{1+2y'} \Rightarrow \left(x-\frac{x+yy'}{1+2y'}\right)^2+\left(y-\frac{2(x+yy')}{1+2y'}\right)^2=1$$

Veya gerekli düzenlemelerden sonra

$$(2xy'-yy')^2+(y-2x)^2=(1+2y')^2$$

bulunur.

2. *Oy*-eksenine teğet olan paraboller ailesinin diferansiyel denklemi şu şekilde elde edilir.



$$x=a(y-y_0)^2 \Rightarrow 1=2a(y-y_0)y' \Rightarrow a(y-y_0)=\frac{1}{2y'}$$

$$0=2a(y-y_0)y''+2ay'^2 \Rightarrow 0=a(y-y_0)y''+ay'^2$$

$$\frac{x}{y-y_0}y''+ay'^2=0 \Rightarrow xy''+a(y-y_0)y'^2=0$$

$$xy''+\frac{1}{2y'}y'^2=0 \Rightarrow y''+\frac{1}{2x}y'=0$$

3. Orijinden geçen ve merkezi y ekseni üzerinde bulunan dairelerin denklemini çözüm kabul eden diferansiyel denklemi bulunuz.

Çözüm: Orijinden geçen ve merkezi y ekseni üzerinde bulunan dairelerin denklemi c_1 bir parametre olmak üzere: $x^2+(y-c_1)^2=c_1^2 \Rightarrow x^2+y^2-2yc_1+c_1^2=c_1^2$

$$\Rightarrow c=\frac{x^2+y^2}{y}$$

$$\Rightarrow 2x+2yy'=cy'$$

$$\Rightarrow 2x+2yy'=\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)y'$$

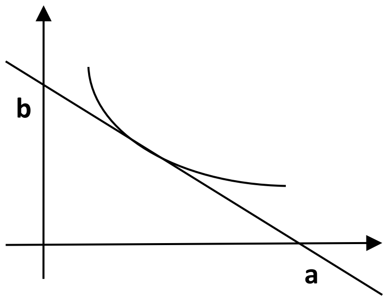
$$\Rightarrow 2xy+2y^2y'=x^2y'+y^2y'$$

$$\Rightarrow 2xy+y^2y'=x^2y'$$

$$\Rightarrow (x^2-y^2)\frac{dy}{dx}-2xy=0$$

4. Verilmiş bir eğrinin her bir noktasından çizilmiş teğetinin koordinat eksenlerinden ayırdığı parça uzunluklarının terslerinin toplamı 1 ise bu eğriyi bulunuz.

Şekildeki gibi verilen eğri denklemi ile çizilmiş teğetinin koordinat eksenlerinden ayırdığı parça uzunluklarının terslerinin toplamı 1 olmak üzere kullanılırsa



$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\quad \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\Rightarrow b=\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}}=1\Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}y=1$$

$$\Rightarrow x+y\sqrt{a^2-1}=a\Rightarrow 1+y'\sqrt{a^2-1}=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2-1}=-\frac{1}{y'}\Rightarrow a=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'}$$

$$\Rightarrow x-\frac{1}{y'}y=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'}\Rightarrow xy'-y=\sqrt{1+y'^2}$$

$$\Rightarrow y=xy'-\sqrt{1+y'^2}$$

Clairaut Diferansiyel denklemi elde edilir.

5. *Ox*-eksenine teğet olan paraboller ailesinin diferansiyel denklemi şu şekilde elde edilir.

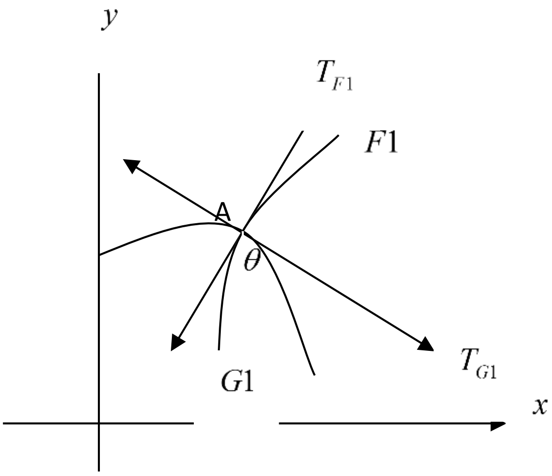
$$y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0\Rightarrow y=x^2+bx+c$$

$$\Delta=b^2-4ac=0\left(\textit{teğet olduğundan}\right)\Rightarrow c=\frac{b^2}{4}\Rightarrow y=x^2+bx+\frac{b^2}{4}$$

$$\Rightarrow y'=2x+b\Rightarrow b=y'-2x\Rightarrow y=x^2+\left(y'-2x\right)x+\frac{\left(y'-2x\right)^2}{4}$$

Bulunur.

III.2 EĞRİ AİLELERİNİN YÖRÜNGELERİ VE ÇEŞİTLERİ



xy düzleminin bir B bölgesinde verilen $F(x,y,a)=0$ eğri ailesini göz önüne alalım. B bölgesinin her bir noktasından F eğri ailesinin yalnız bir üyesinin geçtiğini ve bu üye eğrilerinin üzerindeki her bir noktada teğetlerinin varlığını kabul edelim. B bölgesindeki F eğri ailesinin bütün eğrilerini kesen ve F eğri ailesindeki eğrilerle aynı özellikte olan eğrilerin meydana getirdiği diğer bir eğri ailesinde $G(x,y,b)=0$ olsun. Bu iki aileden birer eğri şekilde görüldüğü gibi bir A noktasında kesişiyor olsun ve bu kesişme noktasında iki eğri arasındaki açı θ olsun. İşte $F(x,y,a)=0$ eğri ailesi ile θ açısı altında kesişen bu $G(x,y,b)=0$ eğri ailesine F eğri ailesinin yörüngesi denir.

Verilen bir eğri ailesinin diferansiyel denklemi yardımıyla bu eğrinin yörüngeleri bulunabilir. Böyle yörüngeleri dik ve eğik yörüngeler olmak üzere iki kısma ayırabiliriz. Bu durumu θ açısının aldığı değere göre aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

i. Eğer θ açısı için $\theta=90°$ ise yörüngelere dik yörüngeler ,
ii. Eğer θ açısı için $\theta\neq 90°$ ise yörüngelere eğik yörüngeler denir.

Dik Yörüngelerin Denklemi: Verilen $F(x,y,a)=0$ eğri ailesinin dik yörünge fonksiyonu elde etmek için $\theta=90°$ seçmek bir gerçektir. O halde dik yörünge fonksiyon ailesini bulabilmek için ilk önce verilen eğri ailesinin diferansiyel denklemini teşkil etmek gerekir. Bunun için verilen $F(x,y,a)=0\cdots(*)$ denklemi ile bundan türev alınarak elde edilen $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$ eşitliği arasında a parametresinin yok edilmesiyle (*) eğri ailesinin diferansiyel denklemi $f(x,y,y')=0$ olarak elde edilir. Daha sonra $\theta=90°$ olduğundan G ailesinin eğrileri F ailesinin eğrilerine dik olacağından $A(x,y)$ noktasındaki T_{F_1} ve T_{G_1} teğetlerinin eğimlerinin çarpımları (-1) olmalıdır. Yani:

$$m_{F_1}\cdot m_{G_1}=-1$$

$$\Rightarrow y_F{}'\cdot y_G{}'=-1$$

$$\Rightarrow m_G=-\frac{1}{m_F}\Rightarrow y_G{}'=\frac{1}{y_F{}'}$$

olmak zorundadır. Bu durumda F eğri ailesinin diferansiyel denklemi $f(x,y,y')=0$ da y' yerine $\left(\frac{-1}{y'}\right)$ alarak $G(x,y,b)=0$ dik yörünge fonksiyon ailesinin diferansiyel denklemi

$$f\left(x,y,\frac{-1}{y'}\right)=f\left(x,y,\frac{-1}{\frac{dy}{dx}}\right)=f\left(x,y,\frac{-dx}{dy}\right)=0\cdots(**)$$ bağıntısı olarak elde edilir. Bu yolla bulunan (**) diferansiyel denklemi birinci mertebeden adi türevli diferansiyel denklem olduğundan bilinen yöntemlerle bu denklem çözüldüğünde $G(x,y,b)=0$ dik yörünge fonksiyon ailesi bulunur.

Örnek 1: $y^2=4ax$ eşitliği ile verilen eğri ailesinin dik yörüngelerini temsil eden eğri ailesini bulalım.

Çözüm: İlk önce verilen eğri ailesinin diferansiyel denklemini bulalım.

$$y^2=4ax\Rightarrow a=\frac{y^2}{4x} \text{ ve } 2yy'=4a\Rightarrow 2yy'=4\frac{y^2}{4x}\Rightarrow 2yxy'=y^2\Rightarrow y'=\frac{y}{2x}$$

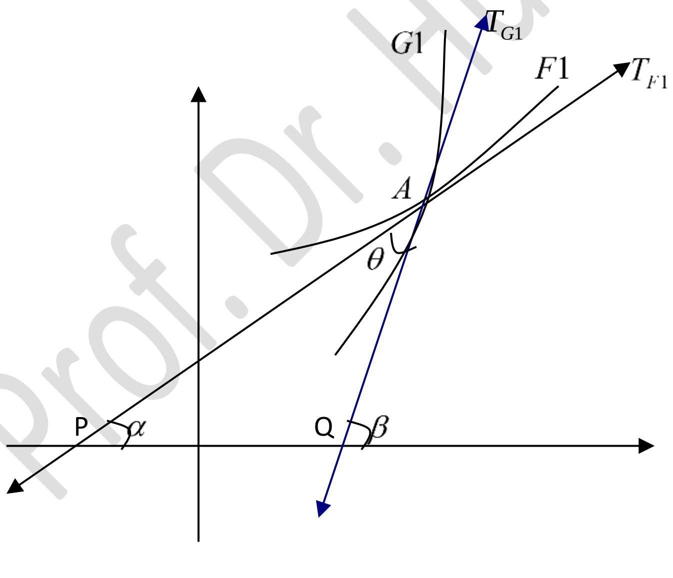
$y'=\dfrac{y}{2x}$ verilen eğri ailesinin diferansiyel denklemidir.

$y'=\dfrac{y}{2x}$ denkleminde $y'\to\dfrac{-1}{y'}$ alalım. $\dfrac{-1}{y'}=\dfrac{y}{2x}$ ise aradığımız dik yörünge ailesinin diferansiyel denklemidir.

$$-2x=yy'\Rightarrow -2x=y\frac{dy}{dx}\Rightarrow \int -2x\,dx=\int y\,dy$$

$$-2\frac{x^2}{2}=\frac{y^2}{2}+b\Rightarrow y^2+2x^2-2b=0$$

Eğik Yörüngelerin Denklemi:



Denklemi $F(x,y,a)=0$ olan F eğri ailesinin verildiğini kabul edelim. Bu eğri ailesi ile $A(x.y)$ noktasında $\theta\neq 90°$ lik açı altında kesişen eğik yörünge ailesinin denklemini bulmaya çalışalım. Farz edelim ki F eğri ailesindeki bir eğri ile $G(x,y,b)=0$ eğik yörünge ailesindeki bir eğri şekildeki gibi bir A noktasında $\theta \neq 90°$ lik açı altında kesişiyor olsunlar. F ailesine ait eğrinin A noktasındaki T_F teğetinin Ox ekseni ile yapmış olduğu açı α ve G ailesine ait eğrinin A noktasındaki T_G teğetinin Ox ekseni ile yapmış olduğu açı β olsun. Bu durumda APQ üçgeninden $\beta=\alpha+\theta$ veya $\alpha=\beta-\theta$ bulunur. O zaman buradan;

$Tan\alpha = Tan(\beta-\theta)=\dfrac{Tan\beta - Tan\theta}{1+Tan\beta Tan\theta}$ bulunur. Bu eşitlikte $Tan\alpha = y'_F$, $Tan\beta = y'_G$ ve $Tan\theta = k$ değerleri yerine yazılırsa $y'_F = \dfrac{y'_G - k}{1+ky'_G}$ diferansiyel denklemi elde edilir ki bu denklem eğik yörünge olan G eğri ailesinin diferansiyel denklemidir. Bu adi diferansiyel denklemin çözümünden $G(x,y,b)=0$ eğik yörünge fonksiyon ailesini elde ederiz.

Örnek 2: $y=ae^x$ eğri ailesi ile $45°$ lik açı altında kesişen eğri ailesini bulalım.

Çözüm: $y'=ae^x=y \Rightarrow y'=y$

$\Rightarrow y=\dfrac{y'-k}{1+ky'}$, $k=Tan45°=1 \Rightarrow y=\dfrac{y'-1}{1+y'}$ Aradığımız eğik yörünge ailesinin denklemidir.

$$\Rightarrow y+yy'=y'-1 \Rightarrow y'=\frac{-1-y}{y-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-1-y}{y-1}$$

$$\int dy\left(\frac{y-1}{-y-1}\right)=\int dx \Rightarrow -\int dy\left(\frac{y-1}{y+1}\right)=-\int du\left(\frac{u-1-1}{u}\right)=-\int\frac{u-2}{u}du\ ,\ \begin{pmatrix} y+1=u \Rightarrow dy=du \\ y=u-1 \end{pmatrix}$$

$$=-\int\left(1-\frac{2}{u}\right)du=-\int du+2\int\frac{1}{u}du=-u+2\ln u=-y-1+2\ln(y+1)$$

$$x+c=-y-1+2\ln(y+1) \Rightarrow y-2\ln(y+1)=-x+c$$

Örnek 3: $y=x^3$ ve $x^2+3y^2=4$ eğrilerinin kesim noktalarında ortogonal olduklarını gösteriniz.

Çözüm: $y'=3x^2$, $2x+6yy'=0 \Rightarrow x+3yy'=0$

$y=x^3$ eğrisi ile $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{\frac{4}{3}}=1$ elipsi $(-1,-1)$ ve $(1,1)$ noktalarında kesişirler.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)}=3(1)^2=3\ ,\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-1,-1)}=3(-1)^2=3$$

$$\Rightarrow x^2+3y^2=4 \Rightarrow 2x+6yy'=0 \Rightarrow y'=\frac{-x}{3y} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-1,-1)}=\frac{-1}{3}=m_2$$

$$m_1 \cdot m_2=-1$$

III.2. MATEMATİKSEL MODELLER

Diferansiyel denklemler fiziksel ve doğal olayların bir matematiksel modellemesidir. Bu kısımda bu tip bazı denlemlere ait örnekler vereceğiz.

Serbest düşme hareketi:

Bir cisim belli bir yükseklikten ilk hızı sıfır olacak şekilde bırakıldığında cisim yere doğru bir serbest düşme hareketi ile düşer. Bu serbest düşme hareketi

$$\begin{cases} ma = mg \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

veya

$$\begin{cases} a = g \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

problemi ile ifade edilir. Burada, m kütle, v hız, a ivme, g yerçekimi ivmesi ve t zaman parametresidir. Buradan da hız ile zaman arasında $v = gt$ ilişkisi bulunur.

Populasyon Modeli:

Bu model 1798 yılında Thomas Robert Mathus tarafından geliştirilmiştir. Model de $N(t)$ bir t anındaki nüfusu göstermek üzere

$$\begin{cases} N'(t) = kN(t) \\ N(t_0) = N_0 \end{cases}$$

problemi ile verilir. Açıkça bellidir ki bu problemin çözümü

$$N(t) = N_0 e^{k(t-t_0)}$$

ile tanımlıdır.

Elektrik Devreleri:

Doğru akımlı bir elektrik devresinde, elemanlar yalnızca dirençlerden oluşuyorsa devreden geçen akım şiddeti zamana göre değişmez, sabit kalır. Şayet devre de dirençlerden başka bir kondanstör veya bir bobin ya da her ikisi birlikte bulunuyorsa, bu takdirde akım şiddeti zamana bağlı olarak değişir. Bu takdirde Ohm ve Kirchoff kanunları kullanılarak birinci veya ikinci mertebeden diferansiyel denklemler elde edilir.

Örneğin bir devrede R ohm luk dirence sahip rezistansı, L Henry lik indüktanslara sahip indüktörü, C farad lık kapatisesi olan kapasitörü ve E voltajı temsil etsin. Bu devre RLC devresi adı verilir. Q kondanstör üzerindeki elektrik yükü ve I akım olmak üzere aralarında

$$I = \frac{dQ}{dt} \ldots (1)$$

ilişkisi vardır. Direnç, bobin ve kondanstör üzerindeki potansiyeller ise sırasıyla

$$E_R = RI,\ E_L = L\frac{dI}{dt},\ E_c = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} I dt$$

şeklinde modellenir. Kirchoff kanunu gereğince akım ve şarj içeren basit RLC devresi için

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t) \ldots (2)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Eğer (1) denklemini (2)-de yazarsak, Q elektrik yükü için, ikinci mertebeden

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t) \ldots (3)$$

Elde edilir. Bu denklemde voltaj E -nin bilindiğini varsayıyoruz. Şayet Q elektrik yükü yerine I akımını alarak işlem yaparsak, (3) denkleminin diferansiyelini alıp (1) eşitliğini kulanarak

$$LI''+RI'+\frac{1}{C}I=E'(t)\ldots(4)$$

denklemini elde ederiz.

Başlangıç Değer Problemi:
Geçici akımı bulmak istediğimizde, bize başlangıç değerleri $I(0)$ ve $Q(0)$ verilir. Dolayısıyla ilk önce bulunmalı. Bunun için, denklem (2)-de $t=0$ için $LI'(0)+RI(0)+\frac{1}{C}Q(0)=E(0)\ldots(5)$ denkleminden $I'(0)$ değerini akım, elektrik yükü ve voltaj cinsinden buluruz.

Örnek1: Bir RLC devresi $R=50\,ohm, L=0.1\,Henry, C=5*10^{-4}\ farad$ ve $I(0)=0$ ve $Q(0)=0$ başlangıç koşulları altında $t=0$ anında 110 voltluk bir pile bağlanmış olsun. Devredeki akımı bulunuz.

$E(t)=110$. Dolayısıyla (5)-den $I'(0)=\dfrac{E(0)}{L}=\dfrac{110}{0.1}=1100(A/s)$ bulunur.

Böylece diferansiyel denklem $(0.1)I''+50I'+2000I=E'(t)=0$. Genel çözüm bulunup, başlangıç şartlarını yerine yazarak

$$I(t)=c_1e^{-44t}+c_2e^{-456t}$$

$$I(0)=c_1+c_2=0$$

$$I'(0)=-44c_1-456c_2=1100$$

$$c_1=c_2=2.670$$

Bulunur. Böylece Devredeki akım $I(t)=(2.670)\left(e^{-44t}+e^{-456t}\right)$ olarak bulunur.

Örnek2: Bir RL devresi $L\dfrac{dI}{dt}+RI=E(t)\ldots(6)$ ile temsil edilir. Bu denklem $t=0$ anında devredeki akım $L\dfrac{dI}{dt}+RI=E(t)$, $t(0)=0\ldots(7)$ başlangıç değer problemi çözülerek bulunur.

Örnek3: Bir RC devresi Kirchoff kanunları uyarınca ve yukarıdaki denklemlerden $RI+\left(\dfrac{1}{C}\int Idt\right)=E(t)\ldots(8)$ ile temsil edilir. Bu denklemde integralden kurtulmak için t ye göre türev alarak $R\dfrac{dI}{dt}+\dfrac{1}{C}I=\dfrac{dE}{dt}\ldots(9)$ şeklinde de elde edilir. Böylece Devredeki akım $I(t)=e^{-\frac{t}{RC}}\left(\dfrac{1}{R}\int\left[e^{\frac{t}{RC}}\dfrac{dE}{dt}\right]dt+c\right)$ genel çözümü ile bulunur.

Navier-Stokes Denklemi:

Akışkanlar mekaniğinde v akışkanın hızı, ρ yoğunluk ve p basınç olmak üzereyapışkan maddelerin akımı

$$\frac{\partial v}{\partial t}+(v.\nabla)v+\frac{1}{\rho}\nabla p=\eta\triangle v$$
şeklindeki denklemler ile ifade edilir.

Isı Denklemi:

Burada u ısı degişkeni olmak üzere

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\triangle u,\quad (k>0)$$
ile verilen denkleme ısı denklemi denir ve bu denklem difüzyon denklemi olarak da bilinir.

Dalga Denklemi:

$u=u(x,t)$ olmak üzere bir boyutlu homojen ve homojen olmayan dalga denklemleri sırasıyla

$$u_{tt}=c^2u_{xx}$$
ve
$$u_{tt}-c^2u_{xx}=f(x,t)$$
şeklinde verilirler.

Radyoaktif Bozunma Denklemi:

Radyoaktif bozunmanın matematiksel ifadesi, bozunma ile orantılı olarak ifade edilir ve diferansiyel denklemi N maddenin herhangi bir t anındaki radyoaktiflik oranını göstermek üzere ortamda herhangi bir t anında N sayıda radyoaktif çekirdek mevcutsa ve numuneye yeni bir çekirdek ilave edilmiyorsa dt zaman aralığında bozunan dN çekirdek sayısının N ile orantılı olmasını modeller. Böylece bu fiziksel olaya ait diferansiyel denklem

$$\frac{dN}{dt}=-kN,\ (k=sbt>0)$$
ile ifade edilir. Eğer bir $t=t_0$ anında $N=N_0$ ise problem

$$\begin{cases}N'(t)=-kN(t)\\ N(t_0)=N_0\end{cases}$$
biçiminde olup, çözüm $N(t)=N_0e^{-k(t-t_0)}$ olacaktır.

Eğer herhangi bir t zaman aralığında çekirdek sayısı yarıya düşüyorsa bu zamana yarı ömür zamanı denir ve yarı ömür zamanı $t=t_{1/2}=\frac{\ln 2}{k}$ olarak bulunur.

Newton'un Soğutma Kanunu:

Havayı soğutma işlemleri, fırını ısıtma vb. Newton'un soğutma kuramı olarak adlandırılan model

$$\frac{du}{dt}=k(T-t),\ (k=sbt>0)$$
ile ifade edilir. Burada $T(t)$ soğutulan nesnenin hiçbir etki göstermediği sıcaklıktır. $u(t)$ herhangi bir t anındaki sıcaklık ve t zamanı temsil etmektedir.