Université Moulay Ismail -Meknès

Master
Intelligence Artificielle & Recherche Opérationnelle
Rapport

Analyse des Modèles Déterministes et Stochastiques en Temps Discret et Continu avec Horizon Fini et Infini

---

Élèves :
Hajar ZGAOUA

Enseignant :
Khalid EL YASSINI

6 juillet 2025

Introduction

Dans le cadre du **module stochastique**, ce rapport s'intéresse à l'étude comparative entre les **modèles déterministes** et les **modèles stochastiques**, deux approches fondamentales de la modélisation mathématique des systèmes dynamiques.

Les modèles déterministes supposent que les phénomènes étudiés évoluent selon des lois fixes, sans incertitude : à des conditions initiales données, les résultats sont parfaitement prévisibles. En revanche, les modèles stochastiques prennent en compte le **hasard** et l'**incertitude**, ce qui permet de mieux représenter des systèmes complexes ou soumis à des fluctuations imprévisibles.

Ce rapport est structuré autour de quatre grands axes :

— la présentation générale des modèles déterministes et stochastiques ;

— l'étude des modèles déterministes en temps discret ;

— l'analyse des modèles stochastiques en temps discret et sur un horizon fini ;

— l'introduction aux modèles stochastiques sur un horizon infini avec actualisation.

Chacune de ces parties inclut les **définitions théoriques**, des **formulations mathématiques** précises, ainsi que des **exemples concrets** pour illustrer leur utilité dans la modélisation de systèmes réels.

1 Modèles Stochastiques et Déterministes

1.1 Introduction générale

Les modèles sont généralement soit stochastiques, soit déterministes, bien que des modèles composites existent.

1.2 Modèles Déterministes

1.2.1 Définition

On dit qu'un modèle est déterministe lorsque les « sorties » du modèle sont entièrement déterminées par les « intrants » . Un modèle déterministe reproduit toujours le même comportement d'un système si les paramètres et les conditions initiales du modèle demeurent identiques

1.2.2 Formulation mathématique

Le modèle déterministe est exprimé sous forme d'équations mathématiques qui décrivent de manière précise les relations entre les variables d'entrée et les variables de sortie (résultats). la forme générale est :

$$Y = f(X) \tag{1}$$

où :
— X désigne le vecteur des **intrants** (paramètres, variables d'état, conditions initiales) ;
— Y représente les **sorties** du modèle ;
— f est une **fonction bien définie**, souvent dérivée des lois physiques, économiques ou techniques du système modélisé.

1.2.3 Exemples concrets

Dans cette partie, nous présentons plusieurs exemples concrets qui illustrent le modèle déterministe.

Exemple 1 : Modèle de croissance logistique Le modèle de croissance logistique définit la taille de la population N en fonction du temps t. Il s'agit d'un exemple classique de modèle déterministe fréquemment utilisé en écologie des populations. Ce modèle repose sur l'hypothèse que la croissance d'une population est limitée par la quantité de ressources disponibles dont elle dépend.

La fonction mathématique associée s'écrit :

$$N(t) = \frac{KN_0e^{rt}}{K + N_0\left(e^{rt} - 1\right)}$$

Dans cette équation :
— $N(t)$ est la taille de la population au temps t,
— N_0 est la taille initiale de la population au temps $t = 0$,

— r est le taux de croissance intrinsèque de la population, c'est-à-dire le taux auquel la population augmenterait si les ressources étaient illimitées,
— K représente la capacité de soutien du système, soit la quantité maximale de ressources disponibles.

Lorsque la population atteint la taille K (c'est-à-dire lorsque $N(t) = K$), elle cesse de croître. Ainsi, le modèle logistique prédit que la taille de la population plafonne autour de cette valeur maximale K.

Exemple 2 : Modèle de Wilson (Quantité Économique de Commande - QEC ou EOQ) La formule de Wilson, aussi connue sous le nom de Quantité Économique de Commande (EOQ), est un outil essentiel pour les entreprises cherchant à optimiser leur gestion des stocks. Elle aide à calculer la quantité optimale de commande, minimisant les coûts liés à la commande et au stockage.

La formule de Wilson s'écrit comme suit :

$$Q = \sqrt{\frac{2D \times CC}{CS}}$$

Dans cette formule, vous avez trois paramètres :
— D : Demande ou consommation,
— CC : Coût de passage de Commande,
— CS : Coût de possession du Stock.

1.3 Modèles Stochastiques

1.3.1 Définition

Contrairement à un modèle déterministe, un modèle stochastique peut produire des résultats différents même lorsque les conditions sont inchangées. Plusieurs « sorties » peuvent être générées par les mêmes « intrants »). Un modèle stochastique représente souvent un système dans lequel des processus, des interactions ou des évènements sont aléatoires. Nous présenterons brièvement deux exemples classiques de modèles stochastiques : les processus stochastiques, qui modélisent l'évolution probabiliste d'un système dans le temps, et les files d'attente, qui décrivent le comportement de systèmes soumis à une demande aléatoire.

1.3.2 Formulation mathématique

Le modèle stochastique est exprimé sous forme d'équations mathématiques qui intègrent des composantes aléatoires. Contrairement à un modèle déterministe, il ne garantit pas une sortie unique pour des données d'entrée identiques en raison de l'incertitude modélisée. la forme générale d'un modèle stochastique peut s'ecrire :

$$Y = f(X, \xi) \tag{2}$$

où :
— X représente le vecteur des **intrants déterministes** (paramètres connus, conditions initiales, etc.) ;
— ξ est une **variable aléatoire** ou un **bruit stochastique** représentant l'incertitude du système ;

— f est une **fonction** (ou une règle) combinant les intrants et l'aléa pour produire la sortie Y, qui est donc elle-même une variable aléatoire.

1.3.3 Exemples concrets

Exemple 1 : Chaînes de Markov Une **chaîne de Markov** est une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ permettant de modéliser l'évolution dynamique d'un système aléatoire. À chaque instant n, la variable X_n représente l'état du système.

La propriété fondamentale des chaînes de Markov, appelée **propriété de Markov**, stipule que l'évolution future du système dépend uniquement de son état actuel, et non de l'historique complet des états précédents. Autrement dit, le passé n'a plus d'influence une fois l'état présent connu. Cette propriété s'écrit mathématiquement :

$$\mathbb{P}\left[X_{t+1} = j \mid X_0 = k_0, X_1 = k_1, \ldots, X_t = i\right] = \mathbb{P}\left[X_{t+1} = j \mid X_t = i\right] \tag{3}$$

Cette propriété signifie que la probabilité d'un événement futur, étant donné des événements passés et un état au temps présent, ne dépend pas du passé, mais uniquement de l'état actuel.

La probabilité de transition entre les états i et j est définie par :

$$p_{ij} = \mathbb{P}[X_{t+1} = j \mid X_t = i]$$

Cette probabilité est dite *stationnaire* si :

$$\mathbb{P}[X_{t+1} = j \mid X_t = i] = \mathbb{P}[X_1 = j \mid X_0 = i], \quad \text{pour tout } t = 1, 2, \ldots$$

Étant des probabilités, elles vérifient les propriétés suivantes :

$$p_{ij} \geq 0, \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{M} p_{ij} = 1, \quad \text{pour tout } i \in \{0, 1, \ldots, M\}$$

À partir des probabilités de transition, on peut construire :

— **La matrice de transition** : une matrice de taille $(M+1) \times (M+1)$, dont l'entrée (i, j) correspond à p_{ij} ;

— **Le graphe de transitions** : un graphe orienté avec $M+1$ sommets où un arc est tracé de i vers j si $p_{ij} > 0$.

Exemple 2 : Précipitations à Meknès Considérons un modèle de chaîne de Markov représentant la probabilité de précipitations à Meknès.

On suppose que :

— La probabilité qu'il **n'y ait pas** de précipitations demain, sachant qu'il n'y en a pas aujourd'hui, est 0.8 :

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = 0 \mid X_t = 0) = 0.8$$

— La probabilité qu'il **n'y ait pas** de précipitations demain, sachant qu'il y en a aujourd'hui, est 0.6 :

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = 0 \mid X_t = 1) = 0.6$$

Ces probabilités sont indépendantes du passé, ce qui confirme la propriété de Markov :

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = 0 \mid X_0 = k_0, \ldots, X_t = 0) = \mathbb{P}(X_{t+1} = 0 \mid X_t = 0)$$

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = 0 \mid X_0 = k_0, \ldots, X_t = 1) = \mathbb{P}(X_{t+1} = 0 \mid X_t = 1)$$

Nous obtenons donc la matrice de transition suivante :

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

où :
— $p_{00} = 0.8$: probabilité de rester sans pluie,
— $p_{01} = 1 - 0.8 = 0.2$: probabilité de passer de sans pluie à pluie,
— $p_{10} = 0.6$: probabilité de passer de pluie à sans pluie,
— $p_{11} = 1 - 0.6 = 0.4$: probabilité de rester avec pluie.

Cette matrice permet de visualiser l'évolution probabiliste du climat à Meknès selon deux états : absence (0) ou présence (1) de précipitations.

Exemple 3 : Processus de Poisson Le processus de Poisson est un processus stochastique à temps continu utilisé pour modéliser l'occurrence d'événements discrets se produisant de manière aléatoire dans le temps ou l'espace. Il est caractérisé par le fait que les événements sont indépendants et que le nombre d'événements $N(t)$ dans un intervalle de temps t suit une loi de Poisson donnée par :

$$\mathbb{P}(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

où $\lambda > 0$ est le taux constant d'événements par unité de temps.

La version homogène du processus suppose ce taux constant λ, tandis que le processus de Poisson non homogène permet à ce taux de varier avec le temps, noté $\lambda(t)$.

Ce processus a de nombreuses applications, notamment dans la modélisation des appels téléphoniques, des pannes de systèmes, des arrivées de clients, ou des mutations génétiques. C'est aussi un point de départ pour des processus plus complexes comme les processus de comptage marqués et les processus ponctuels spatiaux. Le processus de Poisson est également utilisé comme base pour la construction d'autres processus comme les chaînes de Markov en temps continu.

Exemple 4 : Propagation d'une maladie infectieuse Un modèle stochastique est particulièrement adapté à la modélisation de la propagation des maladies infectieuses. En effet, la transmission d'une infection entre individus comporte une part d'incertitude.

Par exemple, on peut modéliser la situation suivante :

1.4 Comparaison synthétique

Comparaison entre modèles déterministes et stochastiques Lorsque l'on compare les modèles déterministes aux modèles stochastiques, la différence fondamentale réside dans la manière dont ils traitent l'incertitude. Les modèles stochastiques intègrent des variables aléatoires et des éléments probabilistes, permettant une compréhension plus nuancée des systèmes dans lesquels l'incertitude joue un rôle important.

Alors que les modèles déterministes fournissent un résultat unique basé sur des entrées fixes, les modèles stochastiques génèrent une gamme de résultats possibles, reflétant la variabilité inhérente du système.

Cette distinction est cruciale lors du choix de l'approche de modélisation appropriée, car le choix dépend du contexte spécifique et du degré d'incertitude présent dans les données.

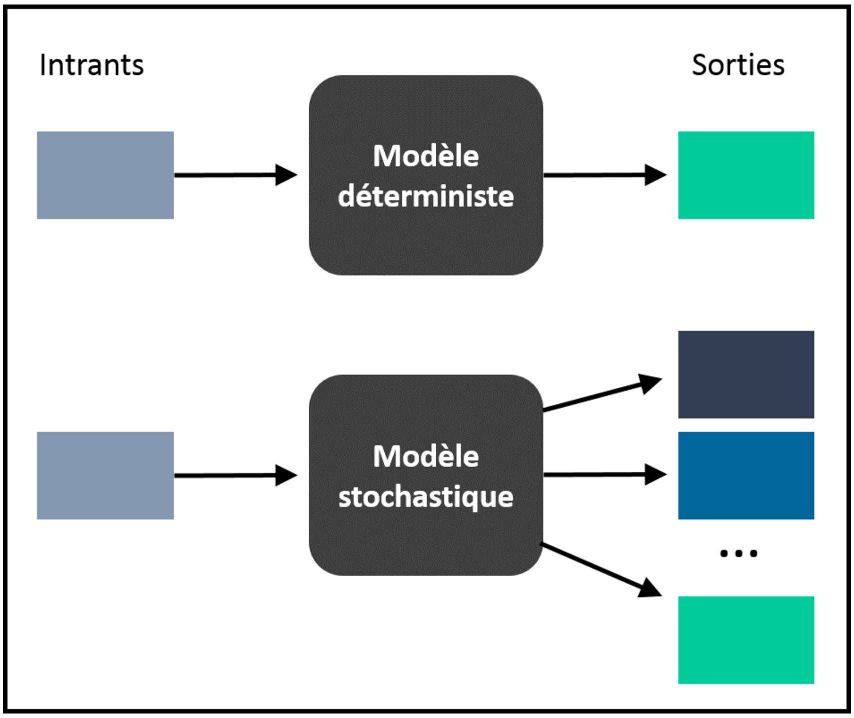

FIGURE 1 – Illustration de la différence entre modèles déterministes et stochastiques

2 Modèles Déterministes en Temps Discret

Les modèles déterministes en temps discret permettent de décrire l'évolution d'un système à des instants séparés par des intervalles réguliers. Contrairement aux modèles en temps continu, ces modèles prennent en compte l'état du système à des moments $t = 0, 1, 2, \ldots$. Ils sont largement utilisés dans divers domaines tels que l'économie, l'écologie, ou la gestion industrielle, où les observations ou décisions se prennent à intervalles fixes.

Ces modèles sont particulièrement adaptés aux situations dans lesquelles les changements d'état ne se produisent qu'à des moments précis, et où l'évolution du système dépend uniquement de ses états précédents de manière déterministe, c'est-à-dire sans influence d'aléas.

2.1 Définition

Un modèle déterministe en temps discret est un système d'équations où l'état à l'instant $t + 1$ est entièrement déterminé par une fonction appliquée à l'état à l'instant t :

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

où x_t est l'état du système à l'instant t, et f est une fonction bien définie décrivant la dynamique du système.

2.2 Formulation mathématique générale

La forme générale d'un tel modèle peut s'écrire comme :

$$x_{t+1} = Ax_t + b$$

où :
- x_t : vecteur d'état à l'instant t ;
- A : matrice représentant la dynamique du système ;
- b : vecteur constant (terme source ou contrôle externe).

2.3 Exemples concrets

Exemple 1 : Croissance économique discrète Considérons un modèle simplifié de croissance du capital où :

$$K_{t+1} = sY_t + (1 - \delta)K_t$$

avec K_t : capital à l'instant t, $Y_t = AK_t^{\alpha}$ la production, s le taux d'épargne, δ le taux de dépréciation. Ce modèle est couramment utilisé en macroéconomie.

Exemple 2 : Modèle logistique discret

$$N_{t+1} = rN_t(1 - \frac{N_t}{K})$$

où N_t est la population à l'instant t, r le taux de croissance, et K la capacité de soutien. Ce modèle décrit une croissance limitée et déterministe d'une population.