Intégrales impropres et intégrale dépendant d'un paramètre

AA3: Intégrale impropre des fonctions à signe constant

Mathématiques de Base 4 - $2^{\text{ème}}$ année

Critère de comparaison

Théorème de comparaison

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle de la forme $[a,b[$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (**respectivement** $]a,b]$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$) telles que:

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a;b[\quad (\textbf{respectivement} \;\;]a,b])$$

Alors,

- Si $\int_a^b g(x)\,dx$ **converge,** alors $\int_a^b f(x)\,dx$ **converge**
- Si $\int_a^b f(x)\,dx$ **diverge,** alors $\int_a^b g(x)\,dx$ **diverge,**

Exercice 1

Soit l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1}\,dx$

1. Vérifier que $0 \leq \dfrac{1}{e^x+1} \leq e^{-x}, \quad \forall x \in [0,+\infty[$.

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ est convergente.

3. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1}\,dx$ converge.

Exercice 1

Soit l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1}\,dx$

① Vérifier que $0 \le \dfrac{1}{e^x+1} \le e^{-x}, \quad \forall x \in [0, +\infty[$.

Exercice 1

Soit l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1}\,dx$

① Vérifier que $0 \leq \dfrac{1}{e^x+1} \leq e^{-x}, \quad \forall x \in [0,+\infty[$.

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ e^x+1 \geq e^x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{e^x} = e^{-x} \quad \forall x \in [0,+\infty[$$

Exercice 1

Soit l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1}\,dx$

① **Vérifier que** $0 \leq \dfrac{1}{e^x+1} \leq e^{-x}, \quad \forall x \in [0,+\infty[$.

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ e^x+1 \geq e^x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{e^x} = e^{-x} \quad \forall x \in [0,+\infty[$$

② **Montrer que** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ **est convergente.**

Exercice 1

Soit l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1}\,dx$

① Vérifier que $0 \leq \dfrac{1}{e^x+1} \leq e^{-x}, \quad \forall x \in [0,+\infty[$.

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ e^x+1 \geq e^x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{e^x} = e^{-x} \quad \forall x \in [0,+\infty[$$

② Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ est convergente.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ est une intégrale géométrique convergente ($\alpha = 1 > 0$).

③ En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1}\,dx$ converge.

Exercice 1

Soit l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1}\,dx$

① Vérifier que $0 \leq \frac{1}{e^x+1} \leq e^{-x}, \quad \forall x \in [0,+\infty[$.

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ e^x+1 \geq e^x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{e^x} = e^{-x} \quad \forall x \in [0,+\infty[$$

② Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ est convergente.

$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ est une intégrale géométrique convergente ($\alpha = 1 > 0$).

③ En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1}\,dx$ converge.

- $0 \leq \frac{1}{e^x+1} \leq e^{-x}, \quad \forall x \in [0,+\infty[$

Exercice 1

Soit l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1}\,dx$

① **Vérifier que** $0 \leq \dfrac{1}{e^x+1} \leq e^{-x}, \quad \forall x \in [0,+\infty[$.

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ e^x+1 \geq e^x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{e^x} = e^{-x} \quad \forall x \in [0,+\infty[$$

② **Montrer que** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ **est convergente.**

$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ est une intégrale géométrique convergente ($\alpha = 1 > 0$).

③ **En déduire que l'intégrale** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1}\,dx$ **converge.**

- $0 \leq \dfrac{1}{e^x+1} \leq e^{-x}, \quad \forall x \in [0,+\infty[$

Et

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ est convergente

Exercice 1

Soit l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1}\,dx$

① Vérifier que $0 \leq \dfrac{1}{e^x+1} \leq e^{-x}, \quad \forall x \in [0,+\infty[$.

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ e^x+1 \geq e^x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{e^x} = e^{-x} \quad \forall x \in [0,+\infty[$$

② Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ est convergente.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ est une intégrale géométrique convergente ($\alpha = 1 > 0$).

③ En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1}\,dx$ converge.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \quad 0 \leq \dfrac{1}{e^x+1} \leq e^{-x}, \quad \forall x \in [0,+\infty[\\ \text{Et} \\ \bullet \quad \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx \text{ est convergente} \end{array}\right\} \Longrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1}\,dx \ \text{ converge}$$

Exercice 2

Soit l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(x)}\, dx$$

1. Vérifier que $0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\ln(x)} \quad \forall x \in [2, +\infty[$.

2. Montrer que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}$ est divergente.

3. En déduire que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(x)}\, dx$ diverge.

Exercice 2

Soit l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(x)}\, dx$$

① **Vérifier que** $0 \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{\ln(x)} \quad \forall x \in [2, +\infty[.$

Exercice 2

Soit l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(x)}\,dx$$

① **Vérifier que** $0 \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{\ln(x)} \quad \forall x \in [2,+\infty[$.

$$\forall x \in [2,+\infty[, \quad x \geq \ln x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\ln x}, \quad \forall x \in [2,+\infty[$$

Exercice 2

Soit l'intégrale
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(x)}\, dx$$

① **Vérifier que** $0 \le \dfrac{1}{x} \le \dfrac{1}{\ln(x)} \quad \forall x \in [2, +\infty[$.

$$\forall x \in [2, +\infty[, \quad x \ge \ln x \ge 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{\ln x}, \quad \forall x \in [2, +\infty[$$

② **Montrer que** $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}$ **est divergente.**

Exercice 2

Soit l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(x)}\, dx$$

① **Vérifier que** $0 \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{\ln(x)} \quad \forall x \in [2, +\infty[$.

$$\forall x \in [2, +\infty[, \quad x \geq \ln x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\ln x}, \quad \forall x \in [2, +\infty[$$

② **Montrer que** $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}$ **est divergente.**

$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ est une intégrale de Riemann divergente ($p = 1$).

Exercice 2

Soit l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(x)}\,dx$$

① **Vérifier que** $0 \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{\ln(x)} \quad \forall x \in [2,+\infty[$.

$$\forall x \in [2,+\infty[, \quad x \geq \ln x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\ln x}, \quad \forall x \in [2,+\infty[$$

② **Montrer que** $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}$ **est divergente.**

$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ **est une intégrale de Riemann divergente** ($p = 1$)**.**

③ **En déduire que l'intégrale** $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(x)}\,dx$ **diverge.**

Exercice 2

Soit l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(x)}\, dx$$

① Vérifier que $0 \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{\ln(x)} \quad \forall x \in [2, +\infty[$.

$$\forall x \in [2,+\infty[, \quad x \ge \ln x \ge 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{\ln x}, \quad \forall x \in [2,+\infty[$$

② Montrer que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}$ est divergente.

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ est une intégrale de Riemann divergente ($p = 1$).

③ En déduire que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(x)}\, dx$ diverge.

- $0 \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{\ln x}, \quad \forall x \in [2,+\infty[$

Exercice 2

Soit l'intégrale

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(x)}\, dx$$

① **Vérifier que** $0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\ln(x)} \quad \forall x \in [2, +\infty[$.

$$\forall x \in [2, +\infty[, \quad x \geq \ln x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\ln x}, \quad \forall x \in [2, +\infty[$$

② **Montrer que** $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x}$ **est divergente.**

$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ **est une intégrale de Riemann divergente** ($p = 1$).

③ **En déduire que l'intégrale** $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(x)}\, dx$ **diverge.**

- $0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\ln x}, \quad \forall x \in [2, +\infty[$

Et

- $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ **diverge**

Exercice 2

Soit l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(x)}\, dx$$

① **Vérifier que** $0 \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{\ln(x)} \quad \forall x \in [2, +\infty[$.

$$\forall x \in [2, +\infty[, \quad x \geq \ln x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\ln x}, \quad \forall x \in [2, +\infty[$$

② **Montrer que** $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}$ **est divergente.**

$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ est une intégrale de Riemann divergente ($p = 1$).

③ **En déduire que l'intégrale** $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(x)}\, dx$ **diverge.**

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \quad 0 \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{\ln x}, \quad \forall x \in [2, +\infty[\\ \text{Et} \\ \bullet \quad \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx \text{ diverge} \end{array}\right\} \Longrightarrow \int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln x}\, dx \text{ diverge}$$

Exercice 3

Exercice 3

Etudier la nature des intégrales suivantes:

$$1)\ \int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) dx, \qquad 2)\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+3}\, dx, \qquad 3)\ \int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{x}}\, dx.$$

Exercice 3

Exercice 3

Etudier la nature des intégrales suivantes:

$$1)\ \int_0^1 \cos^2(\frac{1}{x})\,dx, \qquad 2)\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx, \qquad 3)\ \int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{x}}\,dx.$$

$$1)\quad \int_0^1 \cos^2(\frac{1}{x})\,dx,$$

La fonction $x \longmapsto \cos^2(\frac{1}{x})$ est continue sur $]0,1]$. De plus, on a:

$$|\cos^2(\frac{1}{x})| \leq 1$$

Puisque $\int_0^1 1\,dx$ converge, on en déduit que $\int_0^1 \cos^2(\frac{1}{x})\,dx$ est aussi convergente.

Exercice 3

$$2) \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+3}\, dx,$$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+2x+3}$ est continue sur $[1,+\infty[$. De plus, $\forall x \in [1,+\infty[$ on a:

$$\frac{1}{x^2+2x+3} \leq \frac{1}{x^2}$$

Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ converge, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+3}\, dx$ est aussi convergente.

Exercice 3

$$3) \quad \int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{x}}\, dx.$$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$ **est continue sur** $[0,1[$. **Et**

$$\forall x \in [0,1[, \quad \sqrt{x} \geq x \quad \Longrightarrow \quad -\sqrt{x} \leq -x \quad \Longrightarrow \quad 1-\sqrt{x} \leq 1-x \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{1-\sqrt{x}} \geq \frac{1}{1-x}.$$

Et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x}\, dx$ **diverge(intégrale de Riemann), alors,** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{x}}\, dx$ **diverge.**

Critère de quotient

Critère de quotient

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle de la forme $[a,b[$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (**respectivement** $]a,b]$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$), à **valeurs réelles positives** telles ques

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L \quad (\textbf{respectivement } \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L)$$

Alors,

- Si $L \neq 0$ et $L \neq +\infty$ alors $\int_a^b f(x)\,dx$ et $\int_a^b g(x)\,dx$ sont de même nature
- Si $L = 0$ alors, si $\int_a^b g(x)\,dx$ **converge** alors, $\int_a^b f(x)\,dx$ **converge**
- Si $L = +\infty$ alors si $\int_a^b g(x)\,dx$ **diverge,** alors, $\int_a^b f(x)\,dx$ **diverge,**

Exercice 4

Soient

$$f(x) = \frac{x^2}{4x^4 + 5} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$$

1. Vérifier que $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ converge.

2. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

3. En déduire la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

Exercice 4

Soient

$$f(x) = \frac{x^2}{4x^4+5} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$$

① Vérifier que $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ converge.

Exercice 4

Soient

$$f(x) = \frac{x^2}{4x^4 + 5} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$$

① **Vérifier que** $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ **converge.**

$\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge (intégrale de Riemann avec $p = 2 > 1$).

Exercice 4

Soient

$$f(x) = \frac{x^2}{4x^4 + 5} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$$

① Vérifier que $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ converge.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge (intégrale de Riemann avec $p = 2 > 1$).

② Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Exercice 4

Soient

$$f(x) = \frac{x^2}{4x^4+5} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$$

① **Vérifier que $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ converge.**

$\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge (intégrale de Riemann avec $p = 2 > 1$).

② **Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x^2}{4x^4+5}}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4+\dfrac{5}{x^4}} = \frac{1}{4}$$

Exercice 4

Soient

$$f(x) = \frac{x^2}{4x^4 + 5} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$$

① Vérifier que $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ converge.

$\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge (intégrale de Riemann avec $p = 2 > 1$).

② Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2}{4x^4 + 5}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{4 + \frac{5}{x^4}} = \frac{1}{4}$$

③ En déduire la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

Exercice 4

Soient

$$f(x) = \frac{x^2}{4x^4+5} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$$

① **Vérifier que** $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ **converge.**

$\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge (intégrale de Riemann avec $p = 2 > 1$).

② **Calculer** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{4x^4+5}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4+\frac{5}{x^4}} = \frac{1}{4}$$

③ **En déduire la nature de l'intégrale** $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{4} \neq 0$ et puisque $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, on en déduit d'après le critère de quotient que $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ est aussi convergente.

Exercice 5

Soit

$$f(x) = \frac{x^2}{4x^4 + 25} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$$

1. **Calculer** $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 f(x)$.

2. **Montrer que** $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ **est convergente.**

3. **Calculer** $\lim\limits_{x \to +\infty} x g(x)$.

4. **Montrer que** $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\, dx$ **est divergente.**

Exercice 5

Soit

$$f(x) = \frac{x^2}{4x^4 + 25} \text{ et } g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$$

① **Calculer** $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 f(x)$.

Exercice 5

Soit

$$f(x) = \frac{x^2}{4x^4 + 25} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$$

① **Calculer** $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 f(x)$.

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 \frac{x^2}{4x^4 + 25} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4}{4x^4 + 25} = \frac{1}{4}$$

Exercice 5

Soit

$$f(x) = \frac{x^2}{4x^4 + 25} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$$

① **Calculer** $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 f(x)$.

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 \frac{x^2}{4x^4 + 25} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4}{4x^4 + 25} = \frac{1}{4}$$

② **Montrer que** $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ **est convergente.**

Exercice 5

Soit

$$f(x) = \frac{x^2}{4x^4 + 25} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$$

① **Calculer** $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 f(x)$.

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 \frac{x^2}{4x^4 + 25} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4}{4x^4 + 25} = \frac{1}{4}$$

② **Montrer que** $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ **est convergente.**

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 f(x) = \dfrac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{4}$ et puisque $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^2}\, dx$ converge, on peut donc conclure que $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ est convergente.

Exercice 5

Soit

$$f(x) = \frac{x^2}{4x^4 + 25} \quad \textbf{et} \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$$

③ **Calculer** $\lim\limits_{x \to +\infty} xg(x)$.

Exercice 5

Soit

$$f(x) = \frac{x^2}{4x^4 + 25} \text{ et } g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$$

③ **Calculer** $\lim\limits_{x \to +\infty} xg(x)$.

$$\lim_{x \to +\infty} xg(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} = 1$$

Exercice 5

Soit

$$f(x) = \frac{x^2}{4x^4 + 25} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$$

③ **Calculer** $\lim\limits_{x \to +\infty} xg(x)$.

$$\lim_{x \to +\infty} xg(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} = 1$$

④ **Montrer que** $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ **est divergente.**

Exercice 5

Soit

$$f(x) = \frac{x^2}{4x^4+25} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

③ **Calculer** $\lim\limits_{x\to+\infty} xg(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} xg(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4+x^2+1}} = 1$$

④ **Montrer que** $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ **est divergente.**

$\lim\limits_{x\to+\infty} xg(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{\frac{1}{x}} = 1$ et puisque $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverge, on peut donc conclure que $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ est divergente.

Critère d'équivalence: Cas $L = 1$

$$f \underset{b^-}{\sim} g \quad (\textbf{resp} \quad f \underset{a^+}{\sim} g) \textbf{ alors } \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad (\textbf{resp} \quad \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1)$$

Critère d'équivalence: Cas $L = 1$

$$f \underset{b^-}{\sim} g \quad (\text{resp} \quad f \underset{a^+}{\sim} g) \text{ alors } \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad (\text{resp} \quad \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1)$$

Théorème d'équivalence

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle de la forme $[a, b[$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (**respectivement** $]a, b]$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$) et qui ne changent pas de signe, alors, si f et g sont équivalentes au voisinage de b (resp a), alors $\int_a^b f(x)\,dx$ et $\int_a^b g(x)\,dx$ sont deux intégrales de **même nature**.

Exemples

- L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx$ est convergente, car la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^4}$ est positive et équivalente en $+\infty$ à $\dfrac{1}{x^4}$.

Exemples

- L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx$ est convergente, car la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^4}$ est positive et équivalente en $+\infty$ à $\dfrac{1}{x^4}$.
- L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$ est divergente, car la fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$ est positive et équivalente en $+\infty$ à $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Exercice

Etudier la nature des intégrales suivantes:

$$1)\int_0^1 \frac{Arctg(\frac{1}{x})}{1+x^2}\,dx, \qquad 2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,dx, \qquad 3)\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2\ln(x)}\,dx.$$

Exercice

Etudier la nature des intégrales suivantes:

$$1)\ \int_0^1 \frac{Arctg(\frac{1}{x})}{1+x^2}\,dx, \qquad 2)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,dx, \qquad 3)\ \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2\ln(x)}\,dx.$$

$$1)\ \int_0^1 \frac{Arctg(\frac{1}{x})}{1+x^2}\,dx$$

$$\frac{Arctg(\frac{1}{x})}{1+x^2} \underset{0}{\sim} \frac{\pi}{2}$$

Or l'intégrale $\int_0^1 \frac{\pi}{2}\,dx$ **converge. Donc,** $\int_0^1 \frac{Arctg(\frac{1}{x})}{1+x^2}\,dx$ **converge.**

Exercice

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,dx$

Exercice

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,dx$

$$\ln(\sin(x)) = \ln(x\frac{\sin(x)}{x}) = \ln(\frac{\sin(x)}{x}) + \ln(x)$$

Et par suite,

$$\frac{\ln(\sin(x))}{\ln(x)} = \frac{\ln(\frac{\sin(x)}{x})}{\ln(x)} + 1$$

Exercice

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,dx$

$$\ln(\sin(x)) = \ln(x\frac{\sin(x)}{x}) = \ln(\frac{\sin(x)}{x}) + \ln(x)$$

Et par suite,

$$\frac{\ln(\sin(x))}{\ln(x)} = \frac{\ln(\frac{\sin(x)}{x})}{\ln(x)} + 1$$

Or,

$$\lim_{x\longmapsto 0} \frac{\ln(\frac{\sin(x)}{x})}{\ln(x)} = \lim_{x\longmapsto 0} \left(\frac{1}{\ln(x)} \times \ln(\frac{\sin(x)}{x})\right) = 0$$

Exercice

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,dx$

$$\ln(\sin(x)) = \ln(x\frac{\sin(x)}{x}) = \ln(\frac{\sin(x)}{x}) + \ln(x)$$

Et par suite,

$$\frac{\ln(\sin(x))}{\ln(x)} = \frac{\ln(\frac{\sin(x)}{x})}{\ln(x)} + 1$$

Or,

$$\lim_{x\longmapsto 0} \frac{\ln(\frac{\sin(x)}{x})}{\ln(x)} = \lim_{x\longmapsto 0} \Big(\frac{1}{\ln(x)} \times \ln(\frac{\sin(x)}{x})\Big) = 0$$

Donc,

$$\lim_{x\longmapsto 0} \frac{\ln(\sin(x))}{\ln(x)} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \ln(\sin(x)) \underset{0}{\sim} \ln(x)$$

Et comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(x)\,dx$ **converge, donc** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,dx$ **converge.**

Exercice

3) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln(x)}\,dx$

Exercice

3) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln(x)}\, dx$

On a

$$\lim_{x \longmapsto +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^2 \ln(x)} = \lim_{x \longmapsto +\infty} \frac{1}{x^{2-\frac{3}{2}} \ln(x)} = \lim_{x \longmapsto +\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} \ln(x)} = 0$$

Exercice

3) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln(x)}\, dx$

On a

$$\lim_{x \longmapsto +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^2 \ln(x)} = \lim_{x \longmapsto +\infty} \frac{1}{x^{2-\frac{3}{2}} \ln(x)} = \lim_{x \longmapsto +\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} \ln(x)} = 0$$

Et comme $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx$ est une intégrale de Riemann ($\alpha = \frac{3}{2} > 1$) convergente.

Exercice

3) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2\ln(x)}\,dx$

On a

$$\lim_{x\longmapsto+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^2\ln(x)} = \lim_{x\longmapsto+\infty} \frac{1}{x^{2-\frac{3}{2}}\ln(x)} = \lim_{x\longmapsto+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}\ln(x)} = 0$$

Et comme $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ est une intégrale de Riemann ($\alpha = \frac{3}{2} > 1$) convergente.

D'après le critère de comparaison on peut conclure que

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2\ln(x)}\,dx \quad \text{converge.}$$

Temporary page!

LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page ha been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because LaTeX now knows how many pages to expect for this document.