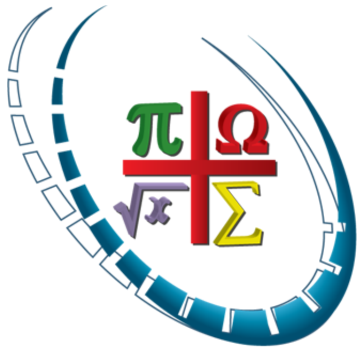
INTÉGRALES IMPROPRES ET INTÉGRALE DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE

AA7: Dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre



Mathématiques de Base 4 - 2$^{\text{ème}}$ année

Exemple introductif

Soit

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2t^2}\,dt$$

① Vérifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Exemple introductif

Soit

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2t^2}\,dt$$

① Vérifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \quad t \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^2t^2} \text{ est continue sur } [0,+\infty[\\[2em] \bullet \quad 0 \leq \dfrac{x^2}{1+x^2t^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2} \text{ et } \displaystyle\int_a^{+\infty} \dfrac{1}{t^2}dt \text{ converge} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2t^2}\,dt \;\; \text{converge}$$

$\Rightarrow$ F est définie sur $\mathbb{R}$

Exemple introductif

Soit

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1 + x^2 t^2}\, dt$$

② Exprimer $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exemple introductif

Soit

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2t^2}\,dt$$

② Exprimer $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- Par le changement de variable $v = |x|t$, on obtient

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2t^2}\,dt = \lim_{u\to+\infty} \int_0^{u} \frac{x^2}{1+x^2t^2}\,dt = \lim_{u\to+\infty} |x| \int_0^{|x|u} \frac{1}{1+v^2}\,dv$$

$$\Rightarrow \quad F(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}x & \text{si x>0;} \\ -\frac{\pi}{2}x, & \text{si x<0;} \\ 0, & \text{si x=0.} \end{cases}$$

Exemple introductif

Soit

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2t^2}\,dt$$

③ Etudier alors la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}$.

Exemple introductif

Soit

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1 + x^2t^2}\, dt$$

③ **Etudier alors la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}$.**

$$\left.\begin{array}{c} \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \frac{\pi}{2} \\ \neq \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = -\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow F \text{ n'est pas dérivable en } 0$$

$\Rightarrow$ F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

Exemple introductif

Soit

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2t^2}\,dt$$

④ Vérifier que la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^2t^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que les fonctions $t \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^2t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{x^2}{1+x^2t^2})$ sont continues sur $[1, +\infty[$.Que peut-on conclure ?

Exemple introductif

Soit

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2t^2}\,dt$$

④ Vérifier que la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^2t^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que les fonctions $t \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^2t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{x^2}{1+x^2t^2})$ sont continues sur $[1,+\infty[$.Que peut-on conclure ?

- Pour tout $t \in]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^2t^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\quad \frac{\partial}{\partial x}(\frac{x^2}{1+x^2t^2}) = \frac{2x}{(1+x^2t^2)^2}$$

- Les fonctions $t \mapsto \dfrac{2x}{(1+x^2t^2)^2}$ et $t \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^2t^2}$ sont continues sur $[0,+\infty[$.

Exemple introductif

Soit

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2t^2}\,dt$$

④ Vérifier que la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^2t^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que les fonctions $t \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^2t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{x^2}{1+x^2t^2})$ sont continues sur $[1, +\infty[$.Que peut-on conclure ?

- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^2t^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial}{\partial x}(\frac{x^2}{1+x^2t^2}) = \frac{2x}{(1+x^2t^2)^2}$$

- Les fonctions $t \mapsto \dfrac{2x}{(1+x^2t^2)^2}$ et $t \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^2t^2}$ sont continues sur $[0, +\infty[$.

Conclusion: La dérivabilité par rapport à x et la continuité de sa dérivée par rapport à t n'implique pas que la fonction F est dérivable.

Théorème de dérivabilité

Théorème de dérivabilité

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $A \times I$, où A et I sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

Si

- ✔ $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur I et $\displaystyle\int_I f(x,t)\,dt$ converge, $\forall\ x \in\ A$
- ✔ $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A, $\forall\ t \in\ I$
- ✔ $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur I , $\forall\ x \in\ A$
- ✔ $\exists\ \psi$ continue, positive sur I et $\displaystyle\int_I \psi(t)\,dt$ est convergente, telle que:

$$\forall (x,t) \in A \times I,\ |\frac{\partial f}{\partial x}((x,t)| \leq\ \psi(t) \quad \textbf{(hypothèse de domination)}.$$

Alors, $F:\ \ x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,dt.$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et $F'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt \quad \forall\ x \in A$

Hypothèse de domination sur tout segment

Remarque

Il suffit que l'hypothèse de domination soit vérifiée sur tout segment de A.
Pour tout segment K inclus dans A, il existe une fonction φ_K continue, positive et $\int_I \varphi_K(t)\,dt$ converge telle que,

$$\forall\ (x,t) \in K \times I,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi_K(t)$$

Exercice 1

Soit

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)e^{-t}}{t}\, dt$$

① Vérifier que la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

② Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

③ Exprimer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x)$ sans le symbole $\displaystyle\int$.

④ En déduire l'expression de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 1

Soit
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)e^{-t}}{t}\,dt$$

① Vérifier que la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1

Soit

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)e^{-t}}{t}\, dt$$

① Vérifier que la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(xt)e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

$$\frac{\sin(xt)e^{-t}}{t} \underset{0}{\sim} x$$

$$\Rightarrow \int_0^{1} \frac{\sin(xt)e^{-t}}{t}\, dt \text{ converge}$$

$$\left|\frac{\sin(xt)e^{-t}}{t}\right| \leq e^{-t} \ \forall\ t \geq 1$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin(xt)e^{-t}}{t}\, dt \text{ converge}$$

$\Rightarrow$ F est bien définie sur $\mathbb{R}$

Exercice 1

Soit
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)e^{-t}}{t}\,dt$$

② **Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.**

Exercice 1

Soit
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)e^{-t}}{t}\,dt$$

② **Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.**

Soit
$$f(x,t) = \frac{\sin(xt)e^{-t}}{t}$$

- **Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ et continue sur $]0,+\infty[$.**
- **Pour tout $t \in]0,+\infty[$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$**
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \cos(xt)e^{-t}.$$
- **Pour tout $x \in \mathbb{R}, t \mapsto \cos(xt)e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$.**

Exercice 1

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,\ \ |\cos(xt)e^{-t}| \leq e^{-t}\ \ \textbf{(HD)}.$$

$$\Rightarrow\ \ F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } F'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}\,dt,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Exercice 1

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,\ \ |\cos(xt)e^{-t}| \leq e^{-t}\ \ \textbf{(HD)}.$$

$\Rightarrow$ F **est de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $\mathbb{R}$ **et** $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}\,dt,\ \forall x \in \mathbb{R}$

③ **Exprimer pour tout** $x \in \mathbb{R}$, $F'(x)$ **sans le symbole** $\displaystyle\int$.

Exercice 1

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[, \quad |\cos(xt)e^{-t}| \leq e^{-t} \quad \textbf{(HD)}.$$

$\Rightarrow$ F **est de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $\mathbb{R}$ **et** $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}\,dt, \ \forall x \in \mathbb{R}$

③ **Exprimer pour tout** $x \in \mathbb{R}$, $F'(x)$ **sans le symbole** $\displaystyle\int$.

Soit $x \in \mathbb{R}$**,**

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}\,dt = \Re\Big(\int_0^{+\infty} e^{-t(1-ix)}\,dt\Big).$$

Exercice 1

$$\int_0^{+\infty} e^{-t(1-ix)}\,dt = \lim_{u\to+\infty}\int_0^u e^{-t(1-ix)}\,dt = \lim_{u\to+\infty}\left[\frac{-1}{1-ix}e^{-t(1-ix)}\right]_0^u$$

$$= \lim_{u\to+\infty}\left[\frac{ix-1}{1+x^2}e^{-t(1-ix)}\right]_0^u = \frac{1-ix}{1+x^2}.$$

Alors,

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Exercice 1

$$\int_0^{+\infty} e^{-t(1-ix)}\,dt = \lim_{u\to+\infty}\int_0^u e^{-t(1-ix)}\,dt = \lim_{u\to+\infty}\left[\frac{-1}{1-ix}e^{-t(1-ix)}\right]_0^u$$

$$= \lim_{u\to+\infty}\left[\frac{ix-1}{1+x^2}e^{-t(1-ix)}\right]_0^u = \frac{1-ix}{1+x^2}.$$

Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

④ En déduire l'expression de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 1

$$\int_0^{+\infty} e^{-t(1-ix)}\,dt \;=\; \lim_{u\to+\infty}\int_0^{u} e^{-t(1-ix)}\,dt = \lim_{u\to+\infty}\left[\frac{-1}{1-ix}e^{-t(1-ix)}\right]_0^u$$

$$= \lim_{u\to+\infty}\left[\frac{ix-1}{1+x^2}e^{-t(1-ix)}\right]_0^u = \frac{1-ix}{1+x^2}.$$

Alors,

$$\forall x\in\mathbb{R},\; F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

④ **En déduire l'expression de $F(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.**

$$\forall x\in\mathbb{R},\; F'(x) = \frac{1}{1+x^2} \;\Rightarrow\; F(x) = \int F'(x)\,dx + c = \arctan(x) + c$$

Et $F(0) = 0$, **alors** $c = 0$

$$F(x) = \arctan(x),\quad \forall\, x\in\mathbb{R}$$

Dérivabilité sur $[a, b]$

Corollaire

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $A \times [a, b]$, où A est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $[a, b]$ un segment. On suppose que:

- ✔ $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $[a, b]$, $\forall\, x \in A$
- ✔ $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A, $\forall\, t \in I$
- ✔ $(x, t) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $A \times [a, b]$

Alors, $F : \begin{array}{l} A \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x, t)\, dt. \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A

Et $$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\, dt. \quad \forall\, x \in A$$

Exercice 2

Soit F la fonction définie par

$$F(x) = \int_0^1 e^{xt}\, dt$$

Montrer alors que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit F la fonction définie par

$$F(x) = \int_0^1 e^{xt}\,dt$$

Montrer alors que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- $t \mapsto e^{xt}$ est continue sur $[0, 1]$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$

Exercice 2

Soit F la fonction définie par

$$F(x) = \int_0^1 e^{xt}\,dt$$

Montrer alors que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- $t \mapsto e^{xt}$ est continue sur $[0,1]$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$
- $x \mapsto e^{xt}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $\forall\ t \in [0,1]$

Exercice 2

Soit F la fonction définie par

$$F(x) = \int_0^1 e^{xt}\,dt$$

Montrer alors que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- $t \mapsto e^{xt}$ est continue sur $[0,1]$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$
- $x \mapsto e^{xt}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $\forall\ t \in [0,1]$
- $(x,t) \mapsto \dfrac{\partial e^{xt}}{\partial x} = te^{xt}$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0,1]$

Exercice 2

Soit F la fonction définie par

$$F(x) = \int_0^1 e^{xt}\,dt$$

Montrer alors que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- $t \mapsto e^{xt}$ est continue sur $[0,1]$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$
- $x \mapsto e^{xt}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $\forall\, t \in [0,1]$
- $(x,t) \mapsto \dfrac{\partial e^{xt}}{\partial x} = te^{xt}$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0,1]$

$\Rightarrow$ F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = \int_0^1 te^{xt}\,dt. \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$