Intégrales impropres et intégrale dépendant d'un paramètre

AA4: Intégrale impropre des fonctions quelconques

Mathématiques de Base 4 - $2^{\text{ème}}$ année

Exemple introductif

Soit l'intégrale

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{3(x^2+1)}\,dx$$

① **Montrer que** $\left|\dfrac{\sin x}{3(x^2+1)}\right| \leq \dfrac{1}{3(x^2+1)},\ \forall\ x \in\ [\pi, +\infty[.$

Exemple introductif

Soit l'intégrale

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{3(x^2+1)}\,dx$$

① **Montrer que** $\left|\dfrac{\sin x}{3(x^2+1)}\right| \leq \dfrac{1}{3(x^2+1)},\ \forall\ x \in\ [\pi,+\infty[.$

$$\forall\ x\ ,\ |\sin(x)| \leq 1\ \Rightarrow \left|\frac{\sin x}{3(x^2+1)}\right| \leq \frac{1}{3(x^2+1)},\ \forall\ x \in\ [\pi,+\infty[$$

Exemple introductif

Soit l'intégrale

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{3(x^2+1)}\, dx$$

① **Montrer que** $\left|\frac{\sin x}{3(x^2+1)}\right| \leq \frac{1}{3(x^2+1)},\ \forall\ x \in\ [\pi, +\infty[$.

$$\forall\ x\ ,\ |\sin(x)| \leq 1\ \Rightarrow \left|\frac{\sin x}{3(x^2+1)}\right| \leq \frac{1}{3(x^2+1)},\ \forall\ x \in\ [\pi, +\infty[$$

② **En déduire que l'intégrale** $\int_{\pi}^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{3(x^2+1)}\right| dx$ **converge.**

Exemple introductif

Soit l'intégrale

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{3(x^2+1)}\,dx$$

① **Montrer que** $\left|\dfrac{\sin x}{3(x^2+1)}\right| \leq \dfrac{1}{3(x^2+1)},\ \forall\ x \in\ [\pi, +\infty[$.

$$\forall\ x\ ,\ |\sin(x)| \leq 1\ \Rightarrow\ \left|\frac{\sin x}{3(x^2+1)}\right| \leq \frac{1}{3(x^2+1)},\ \forall\ x \in\ [\pi, +\infty[$$

② **En déduire que l'intégrale** $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{3(x^2+1)}\right| dx$ **converge.**

On remarque que

$$\frac{1}{3(x^2+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3x^2}$$

Exemple introductif

Or $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{3x^2} dx$ est **convergente**.

Exemple introductif

Or $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{3x^2}dx$ est **convergente**.

D'après le théorème d'équivalence $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{3(x^2+1)}dx$ est **convergente**.

Exemple introductif

Or $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{3x^2} dx$ est **convergente**.

D'après le théorème d'équivalence $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{3(x^2+1)} dx$ est **convergente**.

Or

$$0 \leq \left|\frac{\sin x}{3(x^2+1)}\right| \leq \frac{1}{3(x^2+1)}, \; \forall\, x \in \; [\pi, +\infty[$$

Exemple introductif

Or $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{3x^2} dx$ est **convergente**.

D'après le théorème d'équivalence $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{3(x^2+1)} dx$ est **convergente**.

Or

$$0 \leq \left|\frac{\sin x}{3(x^2+1)}\right| \leq \frac{1}{3(x^2+1)}, \ \forall\, x \in \ [\pi, +\infty[$$

D'après le théorème de comparaison $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{3(x^2+1)}\right| dx$ est **convergente**.

Convergence absolue

Convergence absolue

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_I f(x)\,dx$ est absolument convergente si et seulement si $\int_I |f(x)|\,dx$ est convergente.

$$\int_I f(x)\,dx \text{ converge absolument} \Longleftrightarrow \int_I |f(x)|\,dx \text{ converge}$$

Convergence absolue

Convergence absolue

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_I f(x)\,dx$ est absolument convergente si et seulement si $\int_I |f(x)|\,dx$ est convergente.

$$\int_I f(x)\,dx \text{ converge absolument} \Longleftrightarrow \int_I |f(x)|\,dx \text{ converge}$$

Théorème

Toute intégrale généralisée absolument convergente est convergente.

Convergence absolue

Convergence absolue

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_I f(x)\,dx$ est absolument convergente si et seulement si $\int_I |f(x)|\,dx$ est convergente.

$$\int_I f(x)\,dx \text{ converge absolument} \Longleftrightarrow \int_I |f(x)|\,dx \text{ converge}$$

Théorème

Toute intégrale généralisée absolument convergente est convergente.

Attention!

La réciproque est fausse: il existe des intégrales généralisées convergentes mais non absolument convergentes.

Exercice

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt$ **est convergente.**

Exercice

Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ est convergente.

On a

$$\forall\ t\ \in \mathbb{R}\ \ |cos(t)| \leq 1\ \Rightarrow\ 0 \leq |\frac{cos(t)}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2} \qquad \forall\ t\ \in \mathbb{R}$$

Exercice

Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ est convergente.

On a

$$\forall\ t\ \in \mathbb{R}\ \ |cos(t)| \leq 1 \ \Rightarrow\ 0 \leq |\frac{cos(t)}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2} \qquad \forall\ t\ \in \mathbb{R}$$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est une intégrale de Reimann convergente.

Exercice

Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt$ est convergente.

On a

$$\forall\ t\ \in \mathbb{R}\ \ |cos(t)| \leq 1 \ \Rightarrow\ 0 \leq |\frac{cos(t)}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2} \qquad \forall\ t\ \in \mathbb{R}$$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est une intégrale de Reimann convergente.

D'aprés le théorème de comparaison

$$\int_1^{+\infty} \frac{cos(t)}{t^2}dt \text{ est absolument convergente } \Longrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{cos(t)}{t^2}dt \ \text{ est convergente}$$

Exemple

Soit l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

① En intégrant par partie, montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ est convergente.

Exemple

Soit l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

① En intégrant par partie, montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ est convergente.

- Soit $X > 1$, on intègre par parties, en intégrant le sinus et en dérivant $1/t$ pour augmenter l'exposant au dénominateur.

$$\begin{aligned}\int_1^X \frac{\sin(t)}{t} dt &= \left[\frac{-\cos(t)}{t}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos t}{t^2} dt \\ &= -\frac{\cos(X)}{X} + \frac{\cos(1)}{1} - \int_1^X \frac{\cos(t)}{t^2} dt.\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{\cos(X)}{X} = 0$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\cos(1)}{1} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

Exemple

De plus, on a:

$$\left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2} \; \forall \; t \in [1, +\infty[$$

Ceci implique que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ est convergente. Alors, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \, dt$ est convergente.

Exemple

De plus, on a:

$$\left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2} \;\forall\; t \in [1, +\infty[$$

Ceci implique que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt$ est convergente. Alors, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est convergente.

② Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}dt$ converge grâce à une intégration par partie.

Exemple

De plus, on a:

$$\left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2} \ \forall\ t \in [1,+\infty[$$

Ceci implique que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt$ est convergente. Alors, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ dt$ est convergente.

② Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}dt$ converge grâce à une intégration par partie.

- Soit $X > 1$, on intègre par parties, en intégrant le fonction $t \longrightarrow cos(2t)$ et en dérivant $1/t$ pour augmenter l'exposant au dénominateur.

$$\begin{aligned}\int_1^{X} \frac{\cos(2t)}{t}dt &= [-\frac{\sin(2t)}{t}]_1^X + \int_1^{X} \frac{\cos(2t)}{t^2}dt \\ &= -\frac{\sin(2X)}{X} + \frac{\sin(2)}{1} + \int_1^{X} \frac{\cos(2t)}{t^2}dt\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{\sin(2X)}{X} = 0$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}dt = \lim_{X\to+\infty} \int_1^{X} \frac{\cos(2t)}{t}dt = \frac{\sin(2)}{1} + \int_1^{+\infty} \frac{cos(2t)}{t^2}dt$$

Exemple

De plus, on a:

$$\left|\frac{\cos(2t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2} \ \forall\ t \in [1, +\infty[$$

Ceci implique que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ est convergente. Alors, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$ est convergente.

Exemple

De plus, on a:

$$\left|\frac{\cos(2t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2} \ \forall\ t \in [1, +\infty[$$

Ceci implique que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ est convergente. Alors, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$ est convergente.

③ Montrer que $\forall t \in [1; +\infty[$, $0 \leq \sin^2(t) = \dfrac{1 - \cos(2t)}{2} \leq |\sin(t)|$.

Exemple

De plus, on a:

$$\left|\frac{\cos(2t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2} \ \forall\ t \in [1, +\infty[$$

Ceci implique que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ est convergente. Alors, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$ est convergente.

③ Montrer que $\forall t \in [1; +\infty[$, $0 \leq \sin^2(t) = \dfrac{1 - \cos(2t)}{2} \leq |\sin(t)|$.

$$\forall\ t \in [1, +\infty[,\ |\sin(t)| \leq 1 \ \Rightarrow\ |\sin(t)| \geq \sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}.$$

Exemple

③ En déduire que $\int_0^{+\infty} |\frac{\sin t}{t}|\, dt$ diverge. Conclure.

Exemple

③ En déduire que $\int_0^{+\infty} |\frac{\sin t}{t}|\, dt$ diverge. Conclure.

On a

$$\frac{\sin^2 t}{t} = \frac{1-\cos(2t)}{2t} \leq \frac{|\sin t|}{t}, \qquad \forall t \geq 1.$$

Et

$$\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(2t)}{2t} dt = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$$

Exemple

③ En déduire que $\int_0^{+\infty} |\frac{\sin t}{t}|\, dt$ diverge. Conclure.

On a

$$\frac{\sin^2 t}{t} = \frac{1-\cos(2t)}{2t} \leq \frac{|\sin t|}{t}, \qquad \forall t \geq 1.$$

Et

$$\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(2t)}{2t} dt = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$$

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ est **divergente**

Et

- $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$ est **convergente**

Exemple

③ En déduire que $\int_0^{+\infty} |\frac{\sin t}{t}|\, dt$ diverge. Conclure.

On a

$$\frac{\sin^2 t}{t} = \frac{1-\cos(2t)}{2t} \leq \frac{|\sin t|}{t}, \qquad \forall t \geq 1.$$

Et

$$\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(2t)}{2t} dt = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$$

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ est **divergente**

Et

- $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$ est **convergente**

$\Longrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(2t)}{2t} dt$ est **divergente**

Exemple

③ En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\frac{\sin t}{t}|\, dt$ diverge. Conclure.

On a

$$\frac{\sin^2 t}{t} = \frac{1-\cos(2t)}{2t} \leq \frac{|\sin t|}{t}, \qquad \forall t \geq 1.$$

Et

$$\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(2t)}{2t} dt = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \quad \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt \text{ est } \textbf{divergente} \\ \text{Et} \\ \bullet \quad \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt \text{ est } \textbf{convergente} \end{array}\right\} \Longrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(2t)}{2t} dt \text{ est } \textbf{divergente}$$

D'après le théorème de comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\frac{\sin t}{t}|\, dt$ est divergente

Semi-convergence

Semi-convergence

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_I f(x)\,dx$ est semi-convergente si et seulement si $\int_I |f(x)|\,dx$ **diverge** et $\int_I f(x)\,dx$ **converge**, c'est à dire que $\int_I f(x)\,dx$ est convergente mais n'est pas absolument convergente.

- $\int_I |\ f(x)\ |\ dx$ est **divergente**

Et

- $\int_I f(x)\,dx$ est **convergente**

$\Longleftrightarrow \int_I f(x)\,dx$ est **semi-convergente**