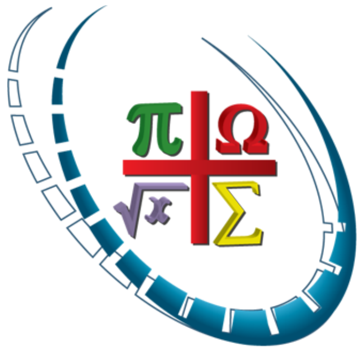
Intégrales impropres et intégrale dépendant d'un paramètre

AA5: Domaine de définition d'une intégrale dépendant d'un paramètre



Intégrale dépendant d'un paramètre

Intégrale dépendant d'un paramètre

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $J \times I$. La fonction

$$F : x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$$

définie sur J, est une fonction définie par **une intégrale dépendant d'un paramètre**.

Intégrale dépendant d'un paramètre

Intégrale dépendant d'un paramètre

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $J \times I$. La fonction

$$F : x \mapsto \int_I f(x,t)\, dt$$

définie sur J, est une fonction définie par **une intégrale dépendant d'un paramètre**.

Exemples :

1) $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$

Intégrale dépendant d'un paramètre

Intégrale dépendant d'un paramètre

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $J \times I$. La fonction

$$F : x \mapsto \int_I f(x,t)\, dt$$

définie sur J, est une fonction définie par **une intégrale dépendant d'un paramètre**.

Exemples :

1) $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$ 2) $F(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$

Intégrale dépendant d'un paramètre

Intégrale dépendant d'un paramètre

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $J \times I$. La fonction

$$F : x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$$

définie sur J, est une fonction définie par **une intégrale dépendant d'un paramètre**.

Exemples :

1) $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$ 2) $F(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$ 3) $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}$

Exemple introductif

Soit la fonction définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt$$

① Montrer que, pour $x = 1$, l'intégrale $F(1)$ est convergente et déterminer sa valeur.

Exemple introductif

Soit la fonction définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt$$

① Montrer que, pour $x = 1$, l'intégrale $F(1)$ est convergente et déterminer sa valeur.

- Pour $x = 1$,

$$F(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt \text{ est une intégrale exponentielle, où } \alpha = 1 > 0 \;\Rightarrow\; \text{converge.}$$

Exemple introductif

Soit la fonction définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt$$

① Montrer que, pour $x = 1$, l'intégrale $F(1)$ est convergente et déterminer sa valeur.

- Pour $x = 1$,

$$F(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt \text{ est une intégrale exponentielle, où } \alpha = 1 > 0 \;\Rightarrow\; \text{converge.}$$

$$F(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = \lim_{u\to+\infty} \int_0^{u} e^{-t}\, dt = \lim_{u\to+\infty} \left[-e^{-t} \right]_0^u = \lim_{u\to+\infty} \left[-e^{-u} + 1 \right] = 1.$$

Exemple introductif

Soit la fonction définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt$$

① Montrer que, pour $x = 1$, l'intégrale $F(1)$ est convergente et déterminer sa valeur.

- Pour $x = 1$,

$$F(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt \text{ est une intégrale exponentielle, où } \alpha = 1 > 0 \;\Rightarrow\; \text{converge.}$$

$$F(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \lim_{u\to+\infty} \int_0^{u} e^{-t}\,dt = \lim_{u\to+\infty} \Big[-e^{-t}\Big]_0^{u} = \lim_{u\to+\infty} \left[-e^{-u} + 1\right] = 1.$$

② Montrer que, pour $x = 0$, l'intégrale $F(0)$ est divergente.

Exemple introductif

Soit la fonction définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt$$

① Montrer que, pour $x = 1$, l'intégrale $F(1)$ est convergente et déterminer sa valeur.

- Pour $x = 1$,

$$F(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt \text{ est une intégrale exponentielle, où } \alpha = 1 > 0 \;\Rightarrow\; \text{converge.}$$

$$F(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = \lim_{u \to +\infty} \int_0^{u} e^{-t}\, dt = \lim_{u \to +\infty} \Big[- e^{-t} \Big]_0^u = \lim_{u \to +\infty} \left[-e^{-u} + 1 \right] = 1.$$

② Montrer que, pour $x = 0$, l'intégrale $F(0)$ est divergente.

- Pour $x = 0$, soit $u > 0$, on a

$$F(0) = \int_0^{+\infty} 1\, dt = \lim_{u \to +\infty} \Big[t \Big]_0^u = +\infty$$

Exemple introductif

③ Pour quelles valeurs de x la fonction F est-elle bien définie ?

Exemple introductif

③ Pour quelles valeurs de x la fonction F est-elle bien définie ?

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt, \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}$$

L'ensemble de définition de F est l'ensemble des nombres x tels que leurs images $F(x)$ existe.
Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt$ est une intégrale exponentielle, où $\alpha = x$, donc existe si et seulement si $x \in]0, +\infty[$.

Exemple introductif

③ Pour quelles valeurs de x la fonction F est-elle bien définie ?

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt, \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}$$

L'ensemble de définition de F est l'ensemble des nombres x tels que leurs images $F(x)$ existe.
Or $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt$ est une intégrale exponentielle, où $\alpha = x$, donc existe si et seulement si $x \in]0, +\infty[$.

$$\Rightarrow \; F \text{ est bien définie pour tout } x \in]0, +\infty[$$

Domaine de définition

Domaine de définition

Soit $F(x) = \int_I f(x,t)dt$ une fonction définie par une intégrale dépendant d'un paramètre. Le domaine de définition de F est l'ensemble des réels x tels que $\int_I f(x,t)dt$ **converge**.

$$\mathcal{D}_F = \{x \in \mathbb{R},\ \text{tels que } \int_I f(x,t)dt \ \textbf{converge}\}$$

Domaine de définition

Domaine de définition

Soit $F(x) = \int_I f(x,t)dt$ une fonction définie par une intégrale dépendant d'un paramètre. Le domaine de définition de F est l'ensemble des réels x tels que $\int_I f(x,t)dt$ **converge**.

$$\mathcal{D}_F = \{x \in \mathbb{R},\ \textbf{tels que } \int_I f(x,t)dt \textbf{ converge}\}$$

Exemple : La fonction $F:\ x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt$ est définie sur $]0,+\infty[$

$$\mathcal{D}_F =]0,+\infty[$$

Exercice

Exercice

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes;

1) $F(x) = \int_0^1 t^x \, dt$ 2) $F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1 + x^2 t^2}$ 3) $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}} \cos(xt) \, dt.$

Exercice

Exercice

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes;

1) $F(x) = \displaystyle\int_0^1 t^x \, dt$ 2) $F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1 + x^2t^2}$ 3) $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}} \cos(xt) \, dt.$

① $F(x) = \displaystyle\int_0^1 t^x \, dt$

Soit $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto t^x$ est continue sur $]0, 1]$.

$\displaystyle\int_0^1 t^x \, dt = \int_0^1 \frac{1}{t^{-x}} dt$ est une intégrale de Riemann converge si et seulement si $-x < 1$

Donc, la fonction $F : x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_0^1 t^x \, dt$ est définie sur $]-1, +\infty[$

$$\Rightarrow \mathcal{D}_F =]-1, +\infty[$$

Exercice

② $F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2}\,dt$

L'application $t \mapsto \frac{1}{1+x^2t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

- Si $x = 0$,

$$\int_1^{+\infty} 1\,dt \text{ diverge } \Rightarrow F \text{ n'est pas définie en } 0$$

- Si $x \neq 0$,

$$\frac{1}{1+x^2t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2t^2} \text{ Or } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt \text{ intégrale de Riemann convergente}$$

D'après le critère d'équivalence pour les fonctions positives,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2}dt \text{ converge pour tout } x \in \mathbb{R}^*$$

Donc, la fonction $F : x \mapsto F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2}\,dt$ est définie sur $\mathbb{R}^*$

$$\Rightarrow \mathcal{D}_F = \mathbb{R}^*$$

Exercice

③ $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}} \cos(xt)\, dt.$

L'application $t \mapsto \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}} \cos(xt)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

On va étudier les deux intégrales

$$\int_0^{1} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}} \cos(xt)\, dt \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}} \cos(xt)\, dt$$

- $\int_0^{1} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}} \cos(xt)\, dt$

  $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}} \cos(xt) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ Or $\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ intégrale de Riemann convergente

D'après le critère d'équivalence pour les fonctions positives,

$$\int_0^{1} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}} \cos(xt)\, dt \text{ est convergente}$$

Exercice

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}} \cos(xt)\, dt$

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ t \geq 1,\ \left|\frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}} \cos(xt)\right| \leq e^{-t}.$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\, dt$ **est une intégrale exponentielle convergente,**

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}} \cos(xt)\, dt \text{ est absolument convergente } \Rightarrow \text{ convergente}$$

Donc, la fonction $F : x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}} \cos(xt)\, dt$ **est définie sur** $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow\ \mathcal{D}_F = \mathbb{R}$$