Intégrales impropres et intégrale dépendant d'un paramètre

Exercice 2

Exercice 2

① Discuter, suivant la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence de deux intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} \, \mathrm{dt} \qquad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - 1}{t^\alpha} \, \mathrm{dt}$$

② a) Justifier la convergence de l'intégrale suivante.

$$I_3 = \int_0^{+\infty} t e^{-\sqrt{t}} \, \mathrm{dt}$$

b) Calculer la valeur de I_3, en utilisant un changement de variable et des intégrations par parties successives.

① $a)$ **Discuter, suivant la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence de deux intégrales suivantes :**

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt} \qquad\qquad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt}$$

① $a)$ **Discuter, suivant la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence de deux intégrales suivantes :**

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt} \qquad\qquad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt}$$

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt}$$

- **Pour $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt}$,on a un problème à la fois en 0 et en $+\infty$.**

① $a)$ Discuter, suivant la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence de deux intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt} \qquad\qquad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt}$$

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt}$$

- Pour $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt}$,on a un problème à la fois en 0 et en $+\infty$.
- Pour cela, on divise l'intégrale en deux, en effet:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt} = \int_0^{1} \frac{1}{\mathrm{t}^\alpha}\,\mathrm{dt} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{t}^\alpha}\,\mathrm{dt} = \mathrm{I}_{11} + \mathrm{I}_{12}.$$

① $a)$ **Discuter, suivant la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence de deux intégrales suivantes :**

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt} \qquad\qquad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt}$$

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt}$$

- Pour $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt}$,on a un problème à la fois en 0 et en $+\infty$.
- Pour cela, on divise l'intégrale en deux, en effet:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt} = \int_0^{1} \frac{1}{\mathrm{t}^\alpha}\,\mathrm{dt} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{t}^\alpha}\,\mathrm{dt} = \mathrm{I}_{11} + \mathrm{I}_{12}.$$

  - $I_{11} = \displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt}$ (intégrale de Riemann) converge si et seulement si $\alpha < 1$.

① $a)$ **Discuter, suivant la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence de deux intégrales suivantes :**

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt} \qquad\qquad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt}$$

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt}$$

- Pour $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt}$,on a un problème à la fois en 0 et en $+\infty$.
- Pour cela, on divise l'intégrale en deux, en effet:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt} = \int_0^{1} \frac{1}{\mathrm{t}^\alpha}\,\mathrm{dt} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{t}^\alpha}\,\mathrm{dt} = \mathrm{I}_{11} + \mathrm{I}_{12}.$$

  - $I_{11} = \displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt}$ (intégrale de Riemann) converge si et seulement si $\alpha < 1$.
  - $I_{12} = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt}$ (intégrale de Riemann) converge si et seulement si $\alpha > 1$.

① $a)$ Discuter, suivant la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence de deux intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt} \qquad\qquad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt}$$

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt}$$

- Pour $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt}$,on a un problème à la fois en 0 et en $+\infty$.
- Pour cela, on divise l'intégrale en deux, en effet:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt} = \int_0^{1} \frac{1}{\mathrm{t}^\alpha}\,\mathrm{dt} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{t}^\alpha}\,\mathrm{dt} = \mathrm{I}_{11} + \mathrm{I}_{12}.$$

- $I_{11} = \displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt}$ (intégrale de Riemann) converge si et seulement si $\alpha < 1$.
- $I_{12} = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt}$ (intégrale de Riemann) converge si et seulement si $\alpha > 1$.

On en déduit que l'intégrale I_1 est divergente pour tout $\alpha \neq 1$.

- Pour $\alpha = 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ admette une primitive donnée par $\ln(t)$ que donne la divergence à la fois de I_{11} et I_{12} vers $+\infty$.

- Pour $\alpha = 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ admette une primitive donnée par $\ln(t)$ que donne la divergence à la fois de I_{11} et I_{12} vers $+\infty$. En effet,

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{dt} = \Big[\ln(\mathrm{t})\Big]_{\mathrm{x}}^{1} = \ln 1 - \ln \mathrm{x} = -\ln \mathrm{x}$$

- Pour $\alpha = 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ admette une primitive donnée par $\ln(t)$ que donne la divergence à la fois de I_{11} et I_{12} vers $+\infty$. En effet,

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{dt} = \Big[\ln(\mathrm{t})\Big]_{\mathrm{x}}^1 = \ln 1 - \ln \mathrm{x} = -\ln \mathrm{x}$$

D'où

$$I_{11} = \int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{dt} = \lim_{\mathrm{x}\to 0} \int_{\mathrm{x}}^1 \frac{1}{\mathrm{t}}\,\mathrm{dt} = \lim_{\mathrm{x}\to 0} (-\ln \mathrm{x}) = +\infty.$$

- Pour $\alpha = 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ admette une primitive donnée par $\ln(t)$ que donne la divergence à la fois de I_{11} et I_{12} vers $+\infty$. En effet,

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{dt} = \Big[\ln(\mathrm{t})\Big]_{\mathrm{x}}^{1} = \ln 1 - \ln \mathrm{x} = -\ln \mathrm{x}$$

D'où

$$I_{11} = \int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{dt} = \lim_{\mathrm{x}\to 0} \int_{\mathrm{x}}^1 \frac{1}{\mathrm{t}}\,\mathrm{dt} = \lim_{\mathrm{x}\to 0} (-\ln \mathrm{x}) = +\infty.$$

et

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{dt} = \Big[\ln(\mathrm{t})\Big]_{1}^{\mathrm{x}} = \ln \mathrm{x} - \ln 1 = \ln \mathrm{x},$$

- Pour $\alpha = 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ admette une primitive donnée par $\ln(t)$ que donne la divergence à la fois de I_{11} et I_{12} vers $+\infty$. En effet,

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{dt} = \Big[\ln(\mathrm{t})\Big]_{\mathrm{x}}^{1} = \ln 1 - \ln \mathrm{x} = -\ln \mathrm{x}$$

D'où

$$I_{11} = \int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{dt} = \lim_{\mathrm{x}\to 0} \int_{\mathrm{x}}^1 \frac{1}{\mathrm{t}}\,\mathrm{dt} = \lim_{\mathrm{x}\to 0} (-\ln \mathrm{x}) = +\infty.$$

et

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{dt} = \Big[\ln(\mathrm{t})\Big]_{1}^{\mathrm{x}} = \ln \mathrm{x} - \ln 1 = \ln \mathrm{x},$$

D'où

$$I_{12} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{dt} = \lim_{\mathrm{x}\to +\infty} \int_1^{\mathrm{x}} \frac{1}{\mathrm{t}}\,\mathrm{dt} = \lim_{\mathrm{x}\to +\infty} \ln \mathrm{x} = +\infty.$$

- Pour $\alpha = 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ admette une primitive donnée par $\ln(t)$ que donne la divergence à la fois de I_{11} et I_{12} vers $+\infty$. En effet,

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{dt} = \Big[\ln(\mathrm{t})\Big]_{\mathrm{x}}^{1} = \ln 1 - \ln \mathrm{x} = -\ln \mathrm{x}$$

D'où

$$I_{11} = \int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{dt} = \lim_{\mathrm{x}\to 0} \int_{\mathrm{x}}^1 \frac{1}{\mathrm{t}}\,\mathrm{dt} = \lim_{\mathrm{x}\to 0}(-\ln \mathrm{x}) = +\infty.$$

et

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{dt} = \Big[\ln(\mathrm{t})\Big]_{1}^{\mathrm{x}} = \ln \mathrm{x} - \ln 1 = \ln \mathrm{x},$$

D'où

$$I_{12} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{dt} = \lim_{\mathrm{x}\to+\infty} \int_1^{\mathrm{x}} \frac{1}{\mathrm{t}}\,\mathrm{dt} = \lim_{\mathrm{x}\to+\infty} \ln \mathrm{x} = +\infty.$$

- En résumé que l'intégrale I_1 n'est jamais convergente.

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - 1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt}$$

- On divise l'intégrale en deux, en effet:

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - 1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt} = \int_0^{1} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{t}} - 1}{\mathrm{t}^\alpha}\,\mathrm{dt} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{t}} - 1}{\mathrm{t}^\alpha}\,\mathrm{dt} = \mathrm{I}_{21} + \mathrm{I}_{22}.$$

- Le développement limite de la fonction $t \mapsto e^{-t}$ au voisinage de 0 à l'ordre 1 est donné par :

$$e^{-t} = 1 - t + t\epsilon_1(t), \quad \epsilon_1(t) \to 0 \quad lorsque \quad t \to 0$$

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt}$$

- On divise l'intégrale en deux, en effet:

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt} = \int_0^{1} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}-1}{\mathrm{t}^\alpha}\,\mathrm{dt} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}-1}{\mathrm{t}^\alpha}\,\mathrm{dt} = \mathrm{I}_{21} + \mathrm{I}_{22}.$$

- Le développement limite de la fonction $t \mapsto e^{-t}$ au voisinage de 0 à l'ordre 1 est donné par :

$$e^{-t} = 1 - t + t\epsilon_1(t), \quad \epsilon_1(t) \to 0 \quad lorsque \quad t \to 0$$

Donc

$$e^{-t} - 1 \underset{0}{\sim} -t \quad \Rightarrow \quad \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha} \underset{0}{\sim} \frac{-1}{t^{\alpha-1}},$$

ce qui implique que $I_{21} = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt}$ converge si et seulement si $\alpha - 1 < 1$, c'est-à-dire si $\alpha < 2$.

- On a aussi,
$$\frac{e^{-t}-1}{t^{\alpha}} \underset{\infty}{\sim} \frac{-1}{t^{\alpha}},$$
ce qui implique que $I_{22} = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}-1}{t^{\alpha}}\,\mathrm{dt}$ converge si et seulement si $\alpha > 1,$.

- On a aussi,

$$\frac{e^{-t}-1}{t^\alpha} \underset{\infty}{\sim} \frac{-1}{t^\alpha},$$

ce qui implique que $I_{22} = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$,.

- En résumé, l'intégrale I_2 converge si et seulement si $1 < \alpha < 2$.

7

② $a)$ **Justifier la convergence de l'intégrale suivante.**

$$I_3 = \int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{dt}$$

② $a)$ **Justifier la convergence de l'intégrale suivante.**

$$I_3 = \int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{dt}$$

- **La fonction $te^{-\sqrt{t}}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc on a un problème en $+\infty$.**

② $a)$ Justifier la convergence de l'intégrale suivante.

$$I_3 = \int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{dt}$$

- La fonction $te^{-\sqrt{t}}$ est continue sur $[0,+\infty[$, donc on a un problème en $+\infty$.
- D'une part, on a:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to+\infty} t^3 e^{-\sqrt{t}} = 0.$$

② $a)$ Justifier la convergence de l'intégrale suivante.

$$I_3 = \int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{dt}$$

- La fonction $te^{-\sqrt{t}}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc on a un problème en $+\infty$.
- D'une part, on a:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to+\infty} t^3e^{-\sqrt{t}} = 0.$$

- D'autre part, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{dt}$ est de Riemann avec $\alpha = 2$. Donc elle converge.

② $a)$ **Justifier la convergence de l'intégrale suivante.**

$$I_3 = \int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{dt}$$

- La fonction $te^{-\sqrt{t}}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc on a un problème en $+\infty$.
- D'une part, on a:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to+\infty} t^3 e^{-\sqrt{t}} = 0.$$

- D'autre part, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{dt}$ est de Riemann avec $\alpha = 2$. Donc elle converge.

Ainsi, et d'après le critère de quotient, $\int_1^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{dt}$ est convergente.

Et donc,

$$I_3 = \int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{dt} = \int_0^{1} \mathrm{t}e^{-\sqrt{\mathrm{t}}}\,\mathrm{dt} + \int_1^{+\infty} \mathrm{t}e^{-\sqrt{\mathrm{t}}}\,\mathrm{dt} \text{ est convergente.}$$

- Pour le calcul de l'intégrale, on commence par effectuer le changement de variable $X = \sqrt{t} \Rightarrow \mathrm{dX} = \dfrac{\mathrm{dt}}{2\sqrt{\mathrm{t}}}$. On obtient :

$$I_3 = \int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{dt} = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{X}^3\mathrm{e}^{-\mathrm{X}}\,\mathrm{dX}.$$

- Pour le calcul de l'intégrale, on commence par effectuer le changement de variable $X = \sqrt{t} \Rightarrow \mathrm{dX} = \dfrac{\mathrm{dt}}{2\sqrt{\mathrm{t}}}$. On obtient :

$$I_3 = \int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{dt} = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{X}^3\mathrm{e}^{-\mathrm{X}}\,\mathrm{dX}.$$

- Soit $\epsilon > 0$, on effectue des intégrations par parties successives de $\displaystyle\int_0^{\epsilon} 2X^3e^{-X}\,\mathrm{dX}$:

- Pour le calcul de l'intégrale, on commence par effectuer le changement de variable $X = \sqrt{t} \Rightarrow \mathrm{dX} = \dfrac{\mathrm{dt}}{2\sqrt{\mathrm{t}}}$. On obtient :

$$I_3 = \int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{dt} = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{X}^3\mathrm{e}^{-\mathrm{X}}\,\mathrm{dX}.$$

- Soit $\epsilon > 0$, on effectue des intégrations par parties successives de $\displaystyle\int_0^{\epsilon} 2X^3e^{-X}\,\mathrm{dX}$:

$$\int_0^{\epsilon} 2X^3e^{-X}\,\mathrm{dX} \quad = \quad 2\left[-X^3e^{-X}\right]_0^{\epsilon} + 6\int_0^{\epsilon} X^2e^{-X}\,\mathrm{dX}$$

- Pour le calcul de l'intégrale, on commence par effectuer le changement de variable $X = \sqrt{t} \Rightarrow \mathrm{dX} = \dfrac{\mathrm{dt}}{2\sqrt{\mathrm{t}}}$. On obtient :

$$I_3 = \int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{dt} = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{X}^3\mathrm{e}^{-\mathrm{X}}\,\mathrm{dX}.$$

- Soit $\epsilon > 0$, on effectue des intégrations par parties successives de $\displaystyle\int_0^{\epsilon} 2X^3e^{-X}\,\mathrm{dX}$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\epsilon} 2X^3e^{-X}\,\mathrm{dX} &= 2\left[-X^3e^{-X}\right]_0^{\epsilon} + 6\int_0^{\epsilon} X^2e^{-X}\,\mathrm{dX} \\ &= 2\left[-X^3e^{-X}\right]_0^{\epsilon} + 6\left[-X^2e^{-X}\right]_0^{\epsilon} + 12\int_0^{\epsilon} Xe^{-X}\,\mathrm{dX}\end{aligned}$$

- Pour le calcul de l'intégrale, on commence par effectuer le changement de variable $X = \sqrt{t} \Rightarrow \mathrm{dX} = \dfrac{\mathrm{dt}}{2\sqrt{\mathrm{t}}}$. On obtient :

$$I_3 = \int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{dt} = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{X}^3\mathrm{e}^{-\mathrm{X}}\,\mathrm{dX}.$$

- Soit $\epsilon > 0$, on effectue des intégrations par parties successives de $\int_0^{\epsilon} 2X^3e^{-X}\,\mathrm{dX}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\epsilon} 2X^3e^{-X}\,\mathrm{dX} &= 2\left[-X^3e^{-X}\right]_0^{\epsilon} + 6\int_0^{\epsilon} X^2e^{-X}\,\mathrm{dX} \\
&= 2\left[-X^3e^{-X}\right]_0^{\epsilon} + 6\left[-X^2e^{-X}\right]_0^{\epsilon} + 12\int_0^{\epsilon} Xe^{-X}\,\mathrm{dX} \\
&= 2\left[-X^3e^{-X}\right]_0^{\epsilon} + 6\left[-X^2e^{-X}\right]_0^{\epsilon} + 12\left[-Xe^{-X}\right]_0^{\epsilon} + 12\int_0^{\epsilon} e^{-X}\,\mathrm{dX}
\end{aligned}$$

- Pour le calcul de l'intégrale, on commence par effectuer le changement de variable $X = \sqrt{t} \Rightarrow \mathrm{dX} = \dfrac{\mathrm{dt}}{2\sqrt{\mathrm{t}}}$. On obtient :

$$I_3 = \int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{dt} = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{X}^3\mathrm{e}^{-\mathrm{X}}\,\mathrm{dX}.$$

- Soit $\epsilon > 0$, on effectue des intégrations par parties successives de $\int_0^{\epsilon} 2X^3e^{-X}\,\mathrm{dX}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\epsilon} 2X^3e^{-X}\,\mathrm{dX} &= 2\left[-X^3e^{-X}\right]_0^{\epsilon} + 6\int_0^{\epsilon} X^2e^{-X}\,\mathrm{dX} \\
&= 2\left[-X^3e^{-X}\right]_0^{\epsilon} + 6\left[-X^2e^{-X}\right]_0^{\epsilon} + 12\int_0^{\epsilon} Xe^{-X}\,\mathrm{dX} \\
&= 2\left[-X^3e^{-X}\right]_0^{\epsilon} + 6\left[-X^2e^{-X}\right]_0^{\epsilon} + 12\left[-Xe^{-X}\right]_0^{\epsilon} + 12\int_0^{\epsilon} e^{-X}\,\mathrm{dX}
\end{aligned}$$

- En faisant $\epsilon \to +\infty$, on prouve la convegence et on a le résultat suivant:

$$I_3 = \lim_{\epsilon \to +\infty} \int_0^{\epsilon} 2X^3e^{-X}\,\mathrm{dX} = 12$$