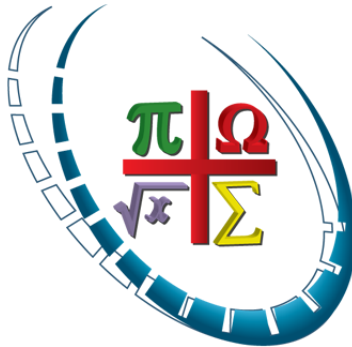


INTÉGRALES IMPROPRES ET INTÉGRALE DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE

AA2: Intégrale impropre des fonctions particulières





Motivation

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle de la forme $[a, b[$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (**respectivement** $]a, b]$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$).

On se donne une intégrale impropre en a ou en b :

$$\int_a^b f(x)dx$$



Motivation

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle de la forme $[a, b[$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (**respectivement** $]a, b]$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$).

On se donne une intégrale impropre en a ou en b:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Objectif:

Présenter quelques intégrales impropres de fonctions particulières et étudier leurs natures.



Intégrale géométrique ou exponentielle

Intégrale géométrique ou exponentielle

Une intégrale géométrique est toute intégrale de la forme

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx \quad \text{où } \alpha \text{ est une constante}$$

Exemples:



Intégrale géométrique ou exponentielle

Intégrale géométrique ou exponentielle

Une intégrale géométrique est toute intégrale de la forme

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx \quad \text{où } \alpha \text{ est une constante}$$

Exemples:

- $\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx$



Intégrale géométrique ou exponentielle

Intégrale géométrique ou exponentielle

Une intégrale géométrique est toute intégrale de la forme

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx \quad \text{où } \alpha \text{ est une constante}$$

Exemples:

$$\bullet \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx$$

$$\bullet \int_0^{+\infty} e^{\frac{x}{2}} dx$$



Intégrale géométrique ou exponentielle

Intégrale géométrique ou exponentielle

Une intégrale géométrique est toute intégrale de la forme

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx \quad \text{où } \alpha \text{ est une constante}$$

Exemples:

$$\bullet \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx \qquad \bullet \int_0^{+\infty} e^{\frac{x}{2}} dx$$

? Pour quelles valeurs de α , $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$ est convergente ?



⇒ Distinguons trois cas:



⇒ Distinguons trois cas: $\alpha = 0$,



⇒ Distinguons trois cas: $\alpha = 0$, $\alpha > 0$



⇒ Distinguons trois cas: $\alpha = 0$, $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$



⇒ Distinguons trois cas: $\alpha = 0$, $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$

- Supposons $\alpha = 0$.



⇒ Distinguons trois cas: $\alpha = 0$, $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$

- Supposons $\alpha = 0$.

Pour tout $X \in [0, +\infty[$ on a:

$$\int_0^X e^{-\alpha x} dx = \int_0^X e^{-0 \cdot x} dx = \left[x \right]_0^X = X$$



⇒ Distinguons trois cas: $\alpha = 0$, $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$

• Supposons $\alpha = 0$.

Pour tout $X \in [0, +\infty[$ on a:

$$\int_0^X e^{-\alpha x} dx = \int_0^X e^{-0 \cdot x} dx = \left[x \right]_0^X = X$$

Par conséquent,

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X e^{-\alpha x} dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} X = +\infty.$$



⇒ Distinguons trois cas: $\alpha = 0$, $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$

• Supposons $\alpha = 0$.

Pour tout $X \in [0, +\infty[$ on a:

$$\int_0^X e^{-\alpha x} dx = \int_0^X e^{-0 \cdot x} dx = [x]_0^X = X$$

Par conséquent,

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X e^{-\alpha x} dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} X = +\infty.$$

Ainsi, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$ est **divergente**.



- Supposons $\alpha > 0$.

Pour tout $X \in [0, +\infty[$ on a :

$$\int_0^X e^{-\alpha x} dx = \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \right]_0^X = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha X} + \frac{1}{\alpha}.$$



- Supposons $\alpha > 0$.

Pour tout $X \in [0, +\infty[$ on a :

$$\int_0^X e^{-\alpha x} dx = \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \right]_0^X = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha X} + \frac{1}{\alpha}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X e^{-\alpha x} dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha X} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}.$$



- Supposons $\alpha > 0$.

Pour tout $X \in [0, +\infty[$ on a :

$$\int_0^X e^{-\alpha x} dx = \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \right]_0^X = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha X} + \frac{1}{\alpha}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X e^{-\alpha x} dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha X} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}.$$

Ainsi, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$ est **convergente** et vaut $\frac{1}{\alpha}$.



- Supposons $\alpha < 0$.

Pour tout $X \in [0, +\infty[$ on a:

$$\int_0^X e^{-\alpha x} dx = \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \right]_0^X = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha X} + \frac{1}{\alpha}.$$



- Supposons $\alpha < 0$.

Pour tout $X \in [0, +\infty[$ on a :

$$\int_0^X e^{-\alpha x} dx = \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \right]_0^X = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha X} + \frac{1}{\alpha}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X e^{-\alpha x} dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha X} + \frac{1}{\alpha} = +\infty.$$



- Supposons $\alpha < 0$.

Pour tout $X \in [0, +\infty[$ on a :

$$\int_0^X e^{-\alpha x} dx = \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \right]_0^X = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha X} + \frac{1}{\alpha}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X e^{-\alpha x} dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha X} + \frac{1}{\alpha} = +\infty.$$

Ainsi, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$ est **divergente**.



- Supposons $\alpha < 0$.

Pour tout $X \in [0, +\infty[$ on a :

$$\int_0^X e^{-\alpha x} dx = \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \right]_0^X = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha X} + \frac{1}{\alpha}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X e^{-\alpha x} dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha X} + \frac{1}{\alpha} = +\infty.$$

Ainsi, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$ est **divergente**.

Conclusion

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$ est $\begin{cases} \text{convergente} & \text{si } \alpha > 0 \\ \text{divergente} & \text{si } \alpha \leq 0. \end{cases}$



Intégrale exponentielle ou géométrique

Théorème

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$.



Intégrale exponentielle ou géométrique

Théorème

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

Exemples :

- L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx$ est une intégrale géométrique avec $\alpha = 2 > 0$, donc elle est **convergente** et vaut $\frac{1}{2}$



Intégrale exponentielle ou géométrique

Théorème

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

Exemples :

- L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx$ est une intégrale géométrique avec $\alpha = 2 > 0$, donc elle est **convergente** et vaut $\frac{1}{2}$
- L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{\frac{x}{2}} dx$ est une intégrale géométrique avec $\alpha = -\frac{1}{2} < 0$, donc elle est **divergente**.



Intégrale de Riemann

- Soit p une constante.

Définition ($a > 0$)

L'intégrale

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

est dite une intégrale de Riemann

Exemples:



Intégrale de Riemann

- Soit p une constante.

Définition ($a > 0$)

L'intégrale

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

est dite une intégrale de Riemann

Exemples:

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$



Intégrale de Riemann

- Soit p une constante.

Définition ($a > 0$)

L'intégrale

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

est dite une intégrale de Riemann

Exemples:

$$\bullet \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx \quad \bullet \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$



Intégrale de Riemann

- Soit p une constante.

Définition ($a > 0$)

L'intégrale

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

est dite une intégrale de Riemann

Exemples:

$$\bullet \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx \quad \bullet \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Définition ($-\infty < a < b < +\infty$)

Les intégrales

$$\blacktriangleright \mathcal{I}_1 = \int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx$$

Ou

$$\blacktriangleright \mathcal{I}_2 = \int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} dx$$

sont dites intégrale de Riemann

Exemples:



Intégrale de Riemann

- Soit p une constante.

Définition ($a > 0$)

L'intégrale

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

est dite une intégrale de Riemann

Exemples:

$$\bullet \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx \quad \bullet \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Définition ($-\infty < a < b < +\infty$)

Les intégrales

$$\blacktriangleright \mathcal{I}_1 = \int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx$$

Ou

$$\blacktriangleright \mathcal{I}_2 = \int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} dx$$

sont dites intégrale de Riemann

Exemples:

$$\bullet \int_0^1 \frac{1}{x} dx$$



Intégrale de Riemann

- Soit p une constante.

Définition ($a > 0$)

L'intégrale

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

est dite une intégrale de Riemann

Exemples:

$$\bullet \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx \quad \bullet \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Définition ($-\infty < a < b < +\infty$)

Les intégrales

$$\blacktriangleright \mathcal{I}_1 = \int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx$$

Ou

$$\blacktriangleright \mathcal{I}_2 = \int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} dx$$

sont dites intégrale de Riemann

Exemples:

$$\bullet \int_0^1 \frac{1}{x} dx \quad \bullet \int_1^2 \frac{1}{(2-x)^3} dx$$



Intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$

? Pour quelles valeurs de p , l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ est convergente ?



Intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$

? Pour quelles valeurs de p , l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ est convergente ?

Distinguons trois cas:



Intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$

? Pour quelles valeurs de p , l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ est convergente ?

Distinguons trois cas: $p = 1$,



Intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$

? Pour quelles valeurs de p , l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ est convergente ?

Distinguons trois cas: $p = 1$, $p > 1$ et



Intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$

? Pour quelles valeurs de p , l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ est convergente ?

Distinguons trois cas: $p = 1$, $p > 1$ et $p < 1$



Intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$

? Pour quelles valeurs de p , l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ est convergente ?

Distinguons trois cas: $p = 1$, $p > 1$ et $p < 1$

- Supposons $p = 1$.



Intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$

? Pour quelles valeurs de p , l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ est convergente ?

Distinguons trois cas: $p = 1$, $p > 1$ et $p < 1$

- Supposons $p = 1$.

Pour tout $X \in [1, +\infty[$ on a:

$$\int_1^X \frac{1}{x^p} dx = \int_1^X \frac{1}{x} dx = \left[\ln(x) \right]_1^X = \ln(X)$$



Intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$

? Pour quelles valeurs de p , l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ est convergente ?

Distinguons trois cas: $p = 1$, $p > 1$ et $p < 1$

- Supposons $p = 1$.

Pour tout $X \in [1, +\infty[$ on a:

$$\int_1^X \frac{1}{x^p} dx = \int_1^X \frac{1}{x} dx = \left[\ln(x) \right]_1^X = \ln(X)$$

Par conséquent,

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_1^X \frac{1}{x^p} dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty.$$



Intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$

? Pour quelles valeurs de p , l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ est convergente ?

Distinguons trois cas: $p = 1$, $p > 1$ et $p < 1$

- Supposons $p = 1$.

Pour tout $X \in [1, +\infty[$ on a:

$$\int_1^X \frac{1}{x^p} dx = \int_1^X \frac{1}{x} dx = \left[\ln(x) \right]_1^X = \ln(X)$$

Par conséquent,

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_1^X \frac{1}{x^p} dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty.$$

Ainsi, l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ est **divergente**.

- Supposons $p > 1$.

Pour tout $X \in [1, +\infty[$ on a:

$$\int_1^X \frac{1}{x^p} dx = \int_1^X x^{-p} dx = \left[\frac{1}{-p+1} \cdot x^{-p+1} \right]_1^X = \frac{1}{-p+1} \cdot X^{-p+1} - \frac{1}{-p+1}$$

- Supposons $p > 1$.

Pour tout $X \in [1, +\infty[$ on a :

$$\int_1^X \frac{1}{x^p} dx = \int_1^X x^{-p} dx = \left[\frac{1}{-p+1} \cdot x^{-p+1} \right]_1^X = \frac{1}{-p+1} \cdot X^{-p+1} - \frac{1}{-p+1}$$

Par conséquent,

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_1^X \frac{1}{x^p} dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{-p+1} \cdot X^{-p+1} - \frac{1}{-p+1} = \frac{1}{p-1}.$$

- Supposons $p > 1$.

Pour tout $X \in [1, +\infty[$ on a :

$$\int_1^X \frac{1}{x^p} dx = \int_1^X x^{-p} dx = \left[\frac{1}{-p+1} \cdot x^{-p+1} \right]_1^X = \frac{1}{-p+1} \cdot X^{-p+1} - \frac{1}{-p+1}$$

Par conséquent,

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_1^X \frac{1}{x^p} dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{-p+1} \cdot X^{-p+1} - \frac{1}{-p+1} = \frac{1}{p-1}.$$

Ainsi, l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ est **convergente** et vaut $\frac{1}{p-1}$.



- Supposons $p < 1$.

Pour tout $X \in [1, +\infty[$ on a:

$$\int_1^X \frac{1}{x^p} dx = \int_1^X x^{-p} dx = \left[\frac{1}{-p+1} \cdot x^{-p+1} \right]_1^X = \frac{1}{-p+1} \cdot X^{-p+1} - \frac{1}{-p+1}$$



- Supposons $p < 1$.

Pour tout $X \in [1, +\infty[$ on a :

$$\int_1^X \frac{1}{x^p} dx = \int_1^X x^{-p} dx = \left[\frac{1}{-p+1} \cdot x^{-p+1} \right]_1^X = \frac{1}{-p+1} \cdot X^{-p+1} - \frac{1}{-p+1}$$

Par conséquent,

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_1^X \frac{1}{x^p} dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{-p+1} \cdot X^{-p+1} - \frac{1}{-p+1} = +\infty.$$

- Supposons $p < 1$.

Pour tout $X \in [1, +\infty[$ on a :

$$\int_1^X \frac{1}{x^p} dx = \int_1^X x^{-p} dx = \left[\frac{1}{-p+1} \cdot x^{-p+1} \right]_1^X = \frac{1}{-p+1} \cdot X^{-p+1} - \frac{1}{-p+1}$$

Par conséquent,

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_1^X \frac{1}{x^p} dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{-p+1} \cdot X^{-p+1} - \frac{1}{-p+1} = +\infty.$$

Ainsi, l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ est **divergente**.

Conclusion

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ est $\left\{ \begin{array}{ll} \text{convergente} & \text{si } p > 1 \\ \text{divergente} & \text{si } p \leq 1. \end{array} \right.$

Théorème

Soit $p \in \mathbb{R}$.

- $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ est convergente si et seulement si $p > 1$.

Théorème

Soit $p \in \mathbb{R}$.

- $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ est convergente si et seulement si $p > 1$.

Exemples :

- L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ est une intégrale de Riemann avec $p = 3 > 1$, donc elle est **convergente** et vaut $\frac{1}{2}$.
- L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ est une intégrale de Riemann avec $p = \frac{1}{2} < 1$, donc elle est **divergente**.

Intégrale de Riemann $(-\infty < a < b < +\infty)$

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx \text{ ou } \int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} dx$$

? Pour quelles valeurs de p , l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ est convergente ?

Intégrale de Riemann $(-\infty < a < b < +\infty)$

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx \text{ ou } \int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} dx$$

? Pour quelles valeurs de p , l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ est convergente ?

Distinguons trois cas: $p = 1$,

Intégrale de Riemann $(-\infty < a < b < +\infty)$

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx \text{ ou } \int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} dx$$

? Pour quelles valeurs de p , l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ est convergente ?

Distinguons trois cas: $p = 1$, $p > 1$,

Intégrale de Riemann $(-\infty < a < b < +\infty)$

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx \text{ ou } \int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} dx$$

? Pour quelles valeurs de p , l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ est convergente ?

Distinguons trois cas: $p = 1$, $p > 1$, et $p < 1$.

Intégrale de Riemann $(-\infty < a < b < +\infty)$

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx \text{ ou } \int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} dx$$

? Pour quelles valeurs de p , l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ est convergente ?

Distinguons trois cas: $p = 1$, $p > 1$, et $p < 1$.

- Supposons $p = 1$.



Intégrale de Riemann $(-\infty < a < b < +\infty)$

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx \text{ ou } \int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} dx$$

? Pour quelles valeurs de p , l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ est convergente ?

Distinguons trois cas: $p = 1$, $p > 1$, et $p < 1$.

- Supposons $p = 1$. Pour tout $X \in]0, 1]$ on a:

$$\int_X^1 \frac{1}{x^p} dx = \int_X^1 \frac{1}{x} dx = \left[\ln(x) \right]_X^1 = -\ln(X)$$

Intégrale de Riemann $(-\infty < a < b < +\infty)$

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx \text{ ou } \int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} dx$$

? Pour quelles valeurs de p , l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ est convergente ?

Distinguons trois cas: $p = 1$, $p > 1$, et $p < 1$.

- Supposons $p = 1$. Pour tout $X \in]0, 1]$ on a:

$$\int_X^1 \frac{1}{x^p} dx = \int_X^1 \frac{1}{x} dx = \left[\ln(x) \right]_X^1 = -\ln(X)$$

Par conséquent,

$$\lim_{X \rightarrow 0^+} \int_X^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{X \rightarrow 0^+} -\ln(X) = +\infty.$$



Intégrale de Riemann $(-\infty < a < b < +\infty)$

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx \text{ ou } \int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} dx$$

? Pour quelles valeurs de p , l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ est convergente ?

Distinguons trois cas: $p = 1$, $p > 1$, et $p < 1$.

- Supposons $p = 1$. Pour tout $X \in]0, 1]$ on a:

$$\int_X^1 \frac{1}{x^p} dx = \int_X^1 \frac{1}{x} dx = \left[\ln(x) \right]_X^1 = -\ln(X)$$

Par conséquent,

$$\lim_{X \rightarrow 0^+} \int_X^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{X \rightarrow 0^+} -\ln(X) = +\infty.$$

Ainsi, l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ est **divergente**.



- Supposons $p > 1$.

Pour tout $X \in]0, 1]$ on a:

$$\int_X^1 \frac{1}{x^p} dx = \int_X^1 x^{-p} dx = \left[\frac{1}{-p+1} \cdot x^{-p+1} \right]_X^1 = \frac{1}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \cdot X^{-p+1}$$



- Supposons $p > 1$.

Pour tout $X \in]0, 1]$ on a :

$$\int_X^1 \frac{1}{x^p} dx = \int_X^1 x^{-p} dx = \left[\frac{1}{-p+1} \cdot x^{-p+1} \right]_X^1 = \frac{1}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \cdot X^{-p+1}$$

Par conséquent,

$$\lim_{X \rightarrow 0^+} \int_X^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \cdot X^{-p+1} = +\infty.$$



- Supposons $p > 1$.

Pour tout $X \in]0, 1]$ on a :

$$\int_X^1 \frac{1}{x^p} dx = \int_X^1 x^{-p} dx = \left[\frac{1}{-p+1} \cdot x^{-p+1} \right]_X^1 = \frac{1}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \cdot X^{-p+1}$$

Par conséquent,

$$\lim_{X \rightarrow 0^+} \int_X^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \cdot X^{-p+1} = +\infty.$$

Ainsi, l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ est **divergente**.

- Supposons $p < 1$.

Pour tout $X \in]0, 1]$ on a:

$$\int_X^1 \frac{1}{x^p} dx = \int_X^1 x^{-p} dx = \left[\frac{1}{-p+1} \cdot x^{-p+1} \right]_X^1 = \frac{1}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \cdot X^{-p+1}$$



- Supposons $p < 1$.

Pour tout $X \in]0, 1]$ on a:

$$\int_X^1 \frac{1}{x^p} dx = \int_X^1 x^{-p} dx = \left[\frac{1}{-p+1} \cdot x^{-p+1} \right]_X^1 = \frac{1}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \cdot X^{-p+1}$$

Par conséquent,

$$\lim_{X \rightarrow 0^+} \int_X^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \cdot X^{-p+1} = \frac{1}{-p+1}.$$

- Supposons $p < 1$.

Pour tout $X \in]0, 1]$ on a :

$$\int_X^1 \frac{1}{x^p} dx = \int_X^1 x^{-p} dx = \left[\frac{1}{-p+1} \cdot x^{-p+1} \right]_X^1 = \frac{1}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \cdot X^{-p+1}$$

Par conséquent,

$$\lim_{X \rightarrow 0^+} \int_X^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \cdot X^{-p+1} = \frac{1}{-p+1}.$$

Ainsi, l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ est **convergente** et vaut $\frac{1}{-p+1}$.

Conclusion

L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ est $\begin{cases} \text{convergente} & \text{si } p < 1 \\ \text{divergente} & \text{si } p \geq 1. \end{cases}$

Théorème

Soit $p \in \mathbb{R}$.

- $\mathcal{I}_1 = \int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx$ ou $(\mathcal{I}_2 = \int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} dx)$ est convergente si et seulement si $p < 1$.

Théorème

Soit $p \in \mathbb{R}$.

- $\mathcal{I}_1 = \int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx$ ou $(\mathcal{I}_2 = \int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} dx)$ est convergente si et seulement si $p < 1$.

Exemples :

- L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x^3} dx$ est une intégrale de Riemann avec $p = 3 > 1$, donc elle est **divergente**.
- L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ est une intégrale de Riemann avec $p = \frac{1}{2} < 1$, donc elle est **convergente** et vaut 2.