esprit Se former autrement
HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Intégrales impropres et intégrale dépendant d'un paramètre

AA6: Continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre

Mathématiques de Base 4 - 2ème année

Exemple introductif

Soit la fonction définie par

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{x}{1 + x^2 t^2}\, dt$$

① Vérifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Exemple introductif

Soit la fonction définie par

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2t^2}\,dt$$

① Vérifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto \dfrac{x}{1+x^2t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

- Si $x = 0$,

$$F(0) = 0 \;\Rightarrow\; F \text{ est bien définie en } 0$$

- Si $x \neq 0$,

$$\frac{x}{1+x^2t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{xt^2} \text{ Or } \int_1^{+\infty} \frac{1}{xt^2} \text{ intégrale de Riemann convergente}$$

$$\Rightarrow\; F \text{ est définie sur } \mathbb{R}$$

Exemple introductif

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{x}{1 + x^2 t^2}\, dt$$

② Exprimer $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exemple introductif

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2t^2}\,dt$$

② **Exprimer $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.**

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2t^2}\,dt = \lim_{u\to+\infty} \int_1^{u} \frac{x}{1+x^2t^2}\,dt$$

Par le changement de variable $v = xt$, on obtient

$$F(x) = \lim_{u\to+\infty} \int_x^{xu} \frac{1}{1+v^2}\,dv = \lim_{u\to+\infty} \Big[\arctan(v)\Big]_x^{xu} = \lim_{u\to+\infty} \Big[\arctan(xu) - \arctan(x)\Big]$$

Alors

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \arctan(x) & \text{si} \quad x > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2} - \arctan(x) & \text{si} \quad x < 0; \\ 0, & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Exemple introductif

③ Etudier alors la continuité de F sur $\mathbb{R}$.

Exemple introductif

③ Etudier alors la continuité de F sur $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{lcl} \displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x) & = & \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \neq F(0) \\ & & \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^-} F(x) & = & \displaystyle\lim_{x\to 0^-} -\frac{\pi}{2} - \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \neq F(0) \end{array}\right\} \Rightarrow F \text{ n'est pas continuie en } 0$$

$$\Rightarrow \ F \text{ n'est continue sur } \ \mathbb{R}$$

Exemple introductif

③ Etudier alors la continuité de F sur $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to 0^+} F(x) & = & \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \neq F(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^-} F(x) & = & \lim\limits_{x\to 0^-} -\frac{\pi}{2} - \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \neq F(0) \end{array}\right\} \Rightarrow F \text{ n'est pas continuie en } 0$$

$\Rightarrow$ F n'est continue sur $\mathbb{R}$

La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{x}{1+x^2t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ par contre F n'est pas continue sur tout $\mathbb{R}$, alors la continuité par rapport à t et la continuité par rapport à x n'impliquent pas la continuité de la fonction F.

Théorème de continuité

Théorème de continuité

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $A \times I$, où A et I sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

Si

- ✔ $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $I, \quad \forall\, x \in A$.
- ✔ $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $A, \quad \forall\, t \in I$.
- ✔ Il existe une fonction φ, continue, positive sur I et $\displaystyle\int_I \varphi(t)\,dt$ est convergente, telle que:

$$\forall\, (x,t) \in A \times I,\ |f(x,t)| \leq \varphi(t) \quad \textbf{(hypothèse de domination)},$$

$$\text{Alors,} \quad F: \begin{array}{l} A \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,dt \end{array} \quad \text{est continue sur } A$$

Exercice

Soit F la fonction définie par:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{(1+t^2)}\,dt.$$

1. Montrer que la fonction F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

Exercice

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{(1+t^2)}\, dt.$$

① Montrer que la fonction F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{(1+t^2)}\, dt.$$

① **Montrer que la fonction F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.**

- $\forall\ x \in \mathbb{R}$, **la fonction** $t \mapsto \dfrac{\arctan(xt)}{(1+t^2)}$ **est continue sur** $[0, +\infty[$.
- $\forall\ t \in [0, +\infty[$, **la fonction** $x \mapsto \dfrac{\arctan(xt)}{(1+t^2)}$ **est continue sur** $\mathbb{R}$.
- **On a** $\forall\ (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$

$$\left.\begin{array}{l} \left|\dfrac{\arctan(xt)}{(1+t^2)}\right| \leq \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{1+t^2}, \\ \textbf{Et} \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+t^2}\, dt \textbf{ converge} \end{array}\right\} \Rightarrow F \textbf{ est bien définie continue sur } \mathbb{R}$$

Exercice

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{(1+t^2)}\, dt.$$

② **Calculer** $F(0)$ **et** $F(1)$.

Exercice

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{(1+t^2)}\,dt.$$

② **Calculer $F(0)$ et $F(1)$.**

$$F(0) \quad = \quad 0$$

Exercice

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{(1+t^2)}\, dt.$$

② **Calculer** $F(0)$ **et** $F(1)$.

$$F(0) \quad = \quad 0$$

$$F(1) \quad = \quad \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{(1+t^2)}\, dt = \lim_{u\to+\infty} \int_0^{u} \frac{\arctan(t)}{(1+t^2)}\, dt = \lim_{u\to+\infty} \left[\frac{1}{2}\arctan^2(x)\right]_0^u = \frac{\pi^2}{8}$$

Contiuité d'une intégrale définie

Remarque

Soit f une fonction à valeurs réelles **continue sur** $A \times [a,b]$, où A un intervalle de $\mathbb{R}$ et $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$.

$$\text{La fonction} \quad F: \begin{array}{l} A \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,dt \end{array} \quad \text{est continue sur } A$$

Contiuité d'une intégrale définie

Remarque

Soit f une fonction à valeurs réelles **continue sur** $A \times [a, b]$, où A un intervalle de $\mathbb{R}$ et $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$.

$$\text{La fonction} \quad \begin{aligned} F : \quad & A \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \int_a^b f(x,t)\,dt \end{aligned} \quad \text{est continue sur } A$$

Exemple: Soit F la fonction définie par

$$F(x) = \int_0^1 e^{-xt^2}\,dt$$

La fonction $(x, t) \mapsto e^{-xt^2}$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$, alors, la fonction F est bien définie, continue sur $\mathbb{R}$

Attention!

La continuité par rapport à chacune des variables ne suffit pas.

Considérons, par exemple, la fonction f définie sur $[0,1]\times[0,1]$ par:

$$\forall (x,t)\in[0,1]\times[0,1],\quad f(x,t)=\frac{xt}{(x^2+t^2)^2}$$

- Pour tout $t\in[0,1]$, la fonction $x\mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0,1]$.
- Pour tout $x\in[0,1]$, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0,1]$;

Cependant, $F(x)=\displaystyle\int_0^1 \frac{xt}{(x^2+t^2)^2}\,dt=\frac{1}{2x(x^2+1)}$ si $x\in]0,1]$ et $F(0)=0$:
F n'est pas continue en 0! Cela provient du fait que la fonction f n'est pas continue en $(0,0)$(par exemple, $\lim\limits_{u\to 0} f(u,u)=+\infty$).