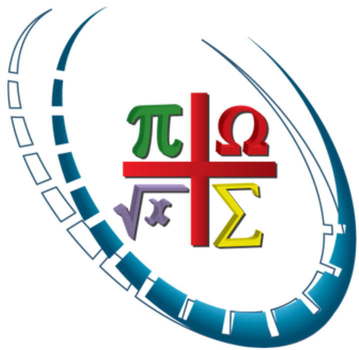
# INTÉGRALES IMPROPRES ET INTÉGRALE DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE

## AA1: Définition et nature d'une intégrale impropre



# Intégrale impropre

## Intégrale généralisée

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$, on dit que l'intégrale $\int_I f(t)dt$ est une intégrale impropre ou généralisée en $a$ ou en $b$. Avec $I$ est une des intervalles suivantes:

$$I = ]-\infty, a] \text{ ou } I = [a, +\infty[ \text{ ou } I = ]a, b] \text{ ou } I = [a, b[ \text{ ou } I = ]a, b[ \text{ ou } I = ]-\infty, +\infty[$$

# Intégrale impropre

## Intégrale généralisée

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$, on dit que l'intégrale $\int_I f(t)dt$ est une intégrale impropre ou généralisée en $a$ ou en $b$. Avec $I$ est une des intervalles suivantes:

$$I = ]-\infty, a] \text{ ou } I = [a, +\infty[ \text{ ou } I = ]a, b] \text{ ou } I = [a, b[ \text{ ou } I = ]a, b[ \text{ ou } I = ]-\infty, +\infty[$$

Exemples :

- $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{(1-t^2)}{\ln(3+t)}\,dt$ est une intégrale impropre (problème en $-2$)

# Intégrale impropre

## Intégrale généralisée

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$, on dit que l'intégrale $\int_I f(t)dt$ est une intégrale impropre ou généralisée en $a$ ou en $b$. Avec $I$ est une des intervalles suivantes:

$$I = ]-\infty, a] \text{ ou } I = [a, +\infty[ \text{ ou } I = ]a, b] \text{ ou } I = [a, b[ \text{ ou } I = ]a, b[ \text{ ou } I = ]-\infty, +\infty[$$

Exemples :

- $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{(1-t^2)}{\ln(3+t)}\,dt$ est une intégrale impropre (problème en $-2$)

$$t \mapsto \frac{(1-t^2)}{\ln(3+t)} \text{ n'admet pas de limite finie en } -2$$

# Intégrale impropre

## Intégrale généralisée

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$, on dit que l'intégrale $\int_I f(t)dt$ est une intégrale impropre ou généralisée en $a$ ou en $b$. Avec $I$ est une des intervalles suivantes:

$$I = ]-\infty, a] \text{ ou } I = [a, +\infty[ \text{ ou } I = ]a, b] \text{ ou } I = [a, b[ \text{ ou } I = ]a, b[ \text{ ou } I = ]-\infty, +\infty[$$

Exemples :

- $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{(1-t^2)}{\ln(3+t)}\, dt$ est une intégrale impropre (problème en $-2$)

$$t \mapsto \frac{(1-t^2)}{\ln(3+t)} \quad \text{n'admet pas de limite finie en } \; -2$$

- $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} (t^2 + 3t)\, dt$ est une intégrale impropre (problème en $+\infty$ )

# Nature d’une intégrale impropre

## Nature d’une intégrale impropre

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle de la forme $[a, b[$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (**respectivement** $]a, b]$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$).

On dit que l’intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge, si la fonction $X \mapsto \displaystyle\int_a^X f(x)\,dx$ a une limite finie en $b^-$ (**respectivement** $X \mapsto \displaystyle\int_X^b f(x)\,dx$ a une limite finie en $a^+$).

On dit que cette intégrale est divergente dans le cas contraire. En cas de convergence, on écrit:

$$\lim_{X \to b^-} \int_a^X f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$(\textbf{respectivement} \quad \lim_{X \to a^+} \int_X^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx)$$

# Nature d'une intégrale impropre: $I = ]-\infty, a]$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{u \to -\infty} \int_{u}^{a} f(x)\,dx = l$$

# Nature d'une intégrale impropre: $I = ]-\infty, a]$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{u\to-\infty}\int_{u}^{a} f(x)\,dx = l$$

☑ $l$ existe et finie

$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ est **convergente**

☑ $l$ est infinie

$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ est **divergente**

# Nature d'une intégrale impropre: $I = ]-\infty, a]$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{u \to -\infty} \int_{u}^{a} f(x)\,dx = l$$

☑ $l$ existe et finie

$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ est **convergente**

☑ $l$ est infinie

$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ est **divergente**

Exemple :

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx$ est une intégrale impropre (problème en $-\infty$ )

# Nature d'une intégrale impropre: $I = ]-\infty, a]$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{u \to -\infty} \int_{u}^{a} f(x)\,dx = l$$

**☑ $l$ existe et finie**

$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ est **convergente**

**☑ $l$ est infinie**

$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ est **divergente**

**Exemple :**

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx$ est une intégrale impropre (problème en $-\infty$ )

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{u \to -\infty} \int_{u}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{u \to -\infty} \Big[ -\frac{1}{x} \Big]_{u}^{-1} = \lim_{u \to -\infty} (1 + \frac{1}{u}) = 1$$

# Nature d'une intégrale impropre: $I = ]-\infty, a]$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{u \to -\infty} \int_{u}^{a} f(x)\,dx = l$$

☑ $l$ existe et finie

$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ est **convergente**

☑ $l$ est infinie

$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ est **divergente**

Exemple :

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx$ est une intégrale impropre (problème en $-\infty$ )

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{u \to -\infty} \int_{u}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{u \to -\infty} \Big[ -\frac{1}{x} \Big]_{u}^{-1} = \lim_{u \to -\infty} (1 + \frac{1}{u}) = 1$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx \text{ est } \textbf{convergente}$$

# Nature d'une intégrale impropre: $I = [a, +\infty[$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{u \to +\infty} \int_a^u f(x)\,dx = l$$

# Nature d'une intégrale impropre: $I = [a, +\infty[$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{u \to +\infty} \int_a^u f(x)\,dx = l$$

☑ $l$ existe et finie

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est **convergente**

☑ $l$ est infinie

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est **divergente**

# Nature d'une intégrale impropre: $I = [a, +\infty[$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{u\to+\infty} \int_a^u f(x)\,dx = l$$

☑ $l$ existe et finie

$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est **convergente**

☑ $l$ est infinie

$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est **divergente**

Exemple :

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ est une intégrale impropre (problème en $+\infty$ )

# Nature d'une intégrale impropre: $I = [a, +\infty[$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{u\to+\infty} \int_a^u f(x)\,dx = l$$

☑ $l$ existe et finie

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est **convergente**

☑ $l$ est infinie

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est **divergente**

**Exemple :**

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ est une intégrale impropre (problème en $+\infty$ )

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{u\to+\infty} \int_1^u \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{u\to+\infty} \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^u = \lim_{u\to+\infty} (-\frac{1}{u} + 1) = 1$$

# Nature d'une intégrale impropre: $I = [a, +\infty[$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\,dx = l$$

☑ $l$ existe et finie

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est **convergente**

☑ $l$ est infinie

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est **divergente**

**Exemple :**

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ est une intégrale impropre (problème en $+\infty$ )

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{u\to+\infty}\int_1^u \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{u\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^u = \lim_{u\to+\infty}\left(-\frac{1}{u}+1\right) = 1$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \text{ est } \textbf{convergente}$$

# Nature d'une intégrale impropre: $I = [a, b[$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{u \to b^-} \int_a^u f(x)\,dx = l$$

# Nature d'une intégrale impropre: $I = [a, b[$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{u \to b^-} \int_a^u f(x)\,dx = l$$

☑ $l$ existe et finie

$\int_a^b f(x)\,dx$ est **convergente**

☑ $l$ est infinie

$\int_a^b f(x)\,dx$ est **divergente**

# Nature d'une intégrale impropre: $I = [a, b[$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{u \to b^-} \int_a^u f(x)\,dx = l$$

☑ $l$ existe et finie

$\int_a^b f(x)\,dx$ est **convergente**

☑ $l$ est infinie

$\int_a^b f(x)\,dx$ est **divergente**

Exemple :

- $\int_0^1 \frac{1}{1-x^2}\,dx$ est une intégrale impropre (problème en $1$ )

# Nature d'une intégrale impropre: $I = [a, b[$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{u\to b^-} \int_a^u f(x)\,dx = l$$

☑ $l$ existe et finie

$\int_a^b f(x)\,dx$ est **convergente**

☑ $l$ est infinie

$\int_a^b f(x)\,dx$ est **divergente**

**Exemple :**

- $\int_0^1 \frac{1}{1-x^2}\,dx$ est une intégrale impropre (problème en $1$ )

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x^2}\,dx = \lim_{u\to 1^-} \int_0^u \frac{1}{1-x^2}\,dx = \lim_{u\to 1^-} \int_0^u \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$= \lim_{u\to 1^-} \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]_0^u = \lim_{u\to 1^-} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = +\infty$$

# Nature d'une intégrale impropre: $I = [a, b[$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{u \to b^-} \int_a^u f(x)\,dx = l$$

☑ $l$ existe et finie

$\int_a^b f(x)\,dx$ est **convergente**

☑ $l$ est infinie

$\int_a^b f(x)\,dx$ est **divergente**

Exemple :

- $\int_0^1 \frac{1}{1-x^2}\,dx$ est une intégrale impropre (problème en $1$ )

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x^2}\,dx = \lim_{u \to 1^-} \int_0^u \frac{1}{1-x^2}\,dx = \lim_{u \to 1^-} \int_0^u \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$= \lim_{u \to 1^-} \frac{1}{2}\Big[\ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)\Big]_0^u = \lim_{u \to 1^-} \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1+u}{1-u}\Big) = +\infty$$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1-x^2}\,dx$ est **divergente**

# Nature d'une intégrale impropre: $I = ]a, b]$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{u \to a^+} \int_u^b f(x)\, dx = l$$

# Nature d'une intégrale impropre: $I = ]a, b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{u \to a^+} \int_u^b f(x)\,dx = l$$

☑ $l$ existe et finie

$\int_a^b f(x)\,dx$ est **convergente**

☑ $l$ est infinie

$\int_a^b f(x)\,dx$ est **divergente**

# Nature d'une intégrale impropre: $I = ]a, b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{u \to a^+} \int_u^b f(x)\,dx = l$$

☑ $l$ existe et finie

$\int_a^b f(x)\,dx$ est **convergente**

☑ $l$ est infinie

$\int_a^b f(x)\,dx$ est **divergente**

Exemple :

- $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ est une intégrale impropre (problème en $0$ )

# Nature d'une intégrale impropre: $I = ]a, b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{u \to a^+} \int_u^b f(x)\,dx = l$$

**☑ $l$ existe et finie**

$\int_a^b f(x)\,dx$ est **convergente**

**☑ $l$ est infinie**

$\int_a^b f(x)\,dx$ est **divergente**

**Exemple :**

- $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ est une intégrale impropre (problème en $0$ )

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{u \to 0^+} \int_u^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{u \to 0^+} \Big[\ln(x)\Big]_u^1 = \lim_{u \to 0^+} (-\ln(u)) = +\infty$$

# Nature d'une intégrale impropre: $I = ]a, b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{u \to a^+} \int_u^b f(x)\,dx = l$$

**☑ $l$ existe et finie**

$\int_a^b f(x)\,dx$ est **convergente**

**☑ $l$ est infinie**

$\int_a^b f(x)\,dx$ est **divergente**

**Exemple :**

- $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ est une intégrale impropre (problème en $0$ )

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{u \to 0^+} \int_u^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{u \to 0^+} \Big[\ln(x)\Big]_u^1 = \lim_{u \to 0^+} (-\ln(u)) = +\infty$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx \text{ est } \textbf{divergente}$$

# Nature d'une intégrale impropre: $I = ]a,b[$

**Intégrale impropre pour** $I = ]a,b[$

Si $f$ est non bornée seulement en un point $c$ de l'intervalle $]a,b[$, alors on peut étudier la nature de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ en utilisant la relation suivante :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

On peut étendre ces définitions aux cas où $f$ est non bornée en deux ou plusieurs points de l'intervalle $]a,b[$.

# Exercice

**Donner la valeur de l'intégrale** $\int_0^2 \ln(|x-1|)\,dx$ **et en déduire sa nature.**

# Exercice

**Donner la valeur de l'intégrale** $\int_0^2 \ln(|x-1|)\,dx$ **et en déduire sa nature.**

$$x \mapsto \ln(|x-1|) = \begin{cases} \ln(1-x) & \textbf{si} \quad x < 1 \\ \ln(x-1) & \textbf{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

# Exercice

**Donner la valeur de l'intégrale** $\int_0^2 \ln(|x-1|)\,dx$ **et en déduire sa nature.**

$$x \mapsto \ln(|x-1|) = \begin{cases} \ln(1-x) & \textbf{si} \quad x<1 \\ \ln(x-1) & \textbf{si} \quad x>1 \end{cases} \Rightarrow \ \textbf{non bornée en } \ 1$$

# Exercice

**Donner la valeur de l'intégrale** $\int_0^2 \ln(|x-1|)\,dx$ **et en déduire sa nature.**

$$x \mapsto \ln(|x-1|) = \begin{cases} \ln(1-x) & \textbf{si} \quad x < 1 \\ \ln(x-1) & \textbf{si} \quad x > 1 \end{cases} \Rightarrow \textbf{ non bornée en } 1$$

On aura donc

$$\int_0^2 \ln(|x-1|)\,dx = \int_0^1 \ln(1-x)\,dx + \int_1^2 \ln(x-1)\,dx = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$$

# Exercice

**Donner la valeur de l'intégrale** $\int_0^2 \ln(|x-1|)\,dx$ **et en déduire sa nature.**

$$x \mapsto \ln(|x-1|) = \begin{cases} \ln(1-x) & \textbf{si} \quad x<1 \\ \ln(x-1) & \textbf{si} \quad x>1 \end{cases} \Rightarrow \text{ non bornée en } 1$$

On aura donc

$$\int_0^2 \ln(|x-1|)\,dx = \int_0^1 \ln(1-x)\,dx + \int_1^2 \ln(x-1)\,dx = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$$

Calculons

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^1 \ln(1-x)\,dx \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_2 = \int_1^2 \ln(x-1)\,dx$$

# Exercice

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &= \int_0^1 \ln(1-x)\,dx = \lim_{u\to 1^-}\int_0^u \ln(1-x)\,dx = \lim_{u\to 1^-}\int_1^{1-u} \ln(t)\,(-dt) \\
&= \lim_{u\to 1^-}\int_{1-u}^1 \ln(t)\,dt = \lim_{u\to 1^-}\Big[t\ln(t)-t\Big]_{1-u}^1 = \lim_{u\to 1^-}\left(-u-(1-u)\ln(1-u)\right)
\end{aligned}$$

# Exercice

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &= \int_0^1 \ln(1-x)\,dx = \lim_{u\to 1^-}\int_0^u \ln(1-x)\,dx = \lim_{u\to 1^-}\int_1^{1-u} \ln(t)\,(-dt)\\
&= \lim_{u\to 1^-}\int_{1-u}^1 \ln(t)\,dt = \lim_{u\to 1^-}\Big[t\ln(t)-t\Big]_{1-u}^1 = \lim_{u\to 1^-}\left(-u-(1-u)\ln(1-u)\right) = -1
\end{aligned}
$$

# Exercice

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &= \int_0^1 \ln(1-x)\,dx = \lim_{u\to 1^-}\int_0^u \ln(1-x)\,dx = \lim_{u\to 1^-}\int_1^{1-u} \ln(t)\,(-dt) \\
&= \lim_{u\to 1^-}\int_{1-u}^1 \ln(t)\,dt = \lim_{u\to 1^-}\Big[t\ln(t)-t\Big]_{1-u}^1 = \lim_{u\to 1^-}\left(-u-(1-u)\ln(1-u)\right) = -1 \\
\mathcal{I}_2 &= \int_1^2 \ln(x-1)\,dx = \lim_{u\to 1^+}\int_u^2 \ln(x-1)\,dx = \lim_{u\to 1^+}\int_{u-1}^1 \ln(t)\,dt \\
&= \lim_{u\to 1^+}\Big[t\ln(t)-t\Big]_{u-1}^1 = \lim_{u\to 1^+}\left(u-2-(u-1)\ln(u-1)\right)
\end{aligned}$$

# Exercice

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &= \int_0^1 \ln(1-x)\,dx = \lim_{u\to 1^-}\int_0^u \ln(1-x)\,dx = \lim_{u\to 1^-}\int_1^{1-u} \ln(t)\,(-dt)\\
&= \lim_{u\to 1^-}\int_{1-u}^1 \ln(t)\,dt = \lim_{u\to 1^-}\Big[t\ln(t)-t\Big]_{1-u}^1 = \lim_{u\to 1^-}\left(-u-(1-u)\ln(1-u)\right) = -1\\
\mathcal{I}_2 &= \int_1^2 \ln(x-1)\,dx = \lim_{u\to 1^+}\int_u^2 \ln(x-1)\,dx = \lim_{u\to 1^+}\int_{u-1}^1 \ln(t)\,dt\\
&= \lim_{u\to 1^+}\Big[t\ln(t)-t\Big]_{u-1}^1 = \lim_{u\to 1^+}\left(u-2-(u-1)\ln(u-1)\right) = -1
\end{aligned}
$$

# Exercice

$\mathcal{I}_1 = -1$

# Exercice

$$\textbf{ET} \quad \left.\begin{array}{l} \mathcal{I}_1 = -1 \;\Rightarrow\; \text{convergente} \\ \\ \\ \mathcal{I}_2 = -1 \;\Rightarrow\; \text{convergente} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_0^2 \ln(|x-1|)\,dx = -2$$

# Exercice

$$\textbf{ET}\quad \left.\begin{array}{l} \mathcal{I}_1 = -1 \;\Rightarrow\; \text{convergente} \\ \\ \mathcal{I}_2 = -1 \;\Rightarrow\; \text{convergente} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_0^2 \ln(|x-1|)\,dx = -2 \;\Rightarrow\; \text{convergente}$$

# Nature d'une intégrale impropre: $I = ]-\infty, +\infty[$

**Intégrale impropre pour $I = ]-\infty, +\infty[$**

Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ et soit $c \in ]-\infty, +\infty[$.
On dit que l'intégrale de $f$ sur $]-\infty, +\infty[$ est convergente si les deux intégrales $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ et $\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$ convergent et dans ce cas, on écrit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$$

# Nature d'une intégrale impropre: $I = ]-\infty, +\infty[$

**Intégrale impropre pour** $I = ]-\infty, +\infty[$

Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ et soit $c \in ]-\infty, +\infty[$. On dit que l'intégrale de $f$ sur $]-\infty, +\infty[$ est convergente si les deux intégrales $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ et $\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$ convergent et dans ce cas, on écrit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$$

**Attention!**

Il est inexact d'ecrire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{X\to+\infty} \int_{-X}^{X} f(x)\,dx$$

.

# Exercice

**Déterminer la nature de l'intégrale** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ **et donner sa valeur.**

# Exercice

**Déterminer la nature de l'intégrale** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ **et donner sa valeur.**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$$

# Exercice

**Déterminer la nature de l'intégrale** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ **et donner sa valeur.**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$$

Calculons

$$\mathcal{I}_1 = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_2 = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\mathcal{I}_1 = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{u\to-\infty} \int_{u}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{u\to-\infty} -\arctan(u)$$

# Exercice

**Déterminer la nature de l'intégrale** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ **et donner sa valeur.**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$$

Calculons

$$\mathcal{I}_1 = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_2 = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\mathcal{I}_1 = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{u \to -\infty} \int_{u}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{u \to -\infty} -\arctan(u) = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathcal{I}_2 = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{u \to +\infty} \int_{0}^{u} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{u \to +\infty} \arctan(u)$$

# Exercice

**Déterminer la nature de l'intégrale** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ **et donner sa valeur.**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$$

Calculons

$$\mathcal{I}_1 = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_2 = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\mathcal{I}_1 = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{u\to-\infty} \int_{u}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{u\to-\infty} -\arctan(u) = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathcal{I}_2 = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{u\to+\infty} \int_{0}^{u} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{u\to+\infty} \arctan(u) = \frac{\pi}{2}$$

# Exercice

**Déterminer la nature de l'intégrale** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ **et donner sa valeur.**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$$

Calculons

$$\mathcal{I}_1 = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} \quad \textbf{et} \quad \mathcal{I}_2 = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\mathcal{I}_1 = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{u\to-\infty} \int_{u}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{u\to-\infty} -\arctan(u) = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathcal{I}_2 = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{u\to+\infty} \int_{0}^{u} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{u\to+\infty} \arctan(u) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

# Exercice

**Déterminer la nature de l'intégrale** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ **et donner sa valeur.**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$$

Calculons

$$\mathcal{I}_1 = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} \quad \textbf{et} \quad \mathcal{I}_2 = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\mathcal{I}_1 = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{u\to-\infty} \int_{u}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{u\to-\infty} -\arctan(u) = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathcal{I}_2 = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{u\to+\infty} \int_{0}^{u} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{u\to+\infty} \arctan(u) = \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ est **convergente**

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ pour } ]a,b[ \; (-\infty \leq a < b \leq +\infty)$$

On divise l'intégrale en deux et on étudie les deux intégrales

$$\int_a^c f(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_c^b f(x)\,dx$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\int_a^c f(x)\,dx$ | **converge** | **diverge** | **diverge** | **diverge** |
| $\int_c^b f(x)\,dx$ | **converge** | **converge** | **converge** | **diverge** |
| $\int_a^b f(x)dx$ | **converge** | **diverge** | **diverge** | On ne peut pas conclure ☹ |