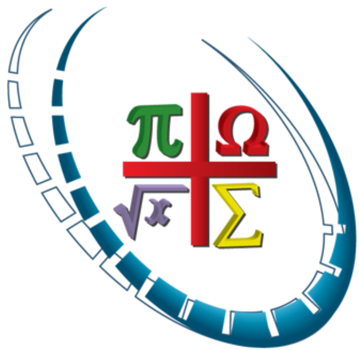
esprit
Se former autrement
HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Intégrales impropres et intégrale dépendant d'un paramètre

Exercice 4



Exercice 4

Pour $x \in [0, +\infty[$ et $t \in [0, +\infty[$, on pose:

$$f(x,t) = \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$$

① a) Montrer que, pour $x \in [0, +\infty[$ et $t \in [0, +\infty[$, on a

$$0 \leq f(x,t) \leq \frac{1}{1+t^2}$$

b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{dt}$ est convergente.

② a) Montrer que, pour $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivale sur $[0, +\infty[$ et calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$.

b) Soit $a > 0$, montrer que, pour tout $x \in [a, +\infty[$ et $t \in [0, +\infty[$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-at^2}$$

Exercice 4

③ Pour $x \in [0, +\infty[$, on considère la fonction

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{dt}$$

a) Montrer que F est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.
b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et donner l'expression de sa dérivée $F'(x)$ sous forme d'une intégrale.
c) Montrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$F(x) - F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{dt}$$

d) Par un changement de variable, en déduire que, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$F(x) - F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{du}$$

④ a) Monter que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a:

$$0 \leq F(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{du}$$

b) Déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

① $a)$ **Montrer que, pour $x \in [0, +\infty[$ et $t \in [0, +\infty[$, on a**

$$0 \leq f(x,t) \leq \frac{1}{1+t^2}$$

① $a)$ **Montrer que, pour $x \in [0, +\infty[$ et $t \in [0, +\infty[$, on a**

$$0 \leq f(x,t) \leq \frac{1}{1+t^2}$$

- **Pour tout $x \in [0, +\infty[$ et $t \in [0, +\infty[$, on a:**

$$-xt^2 \leq 0$$

① $a)$ **Montrer que, pour $x \in [0, +\infty[$ et $t \in [0, +\infty[$, on a**

$$0 \leq f(x,t) \leq \frac{1}{1+t^2}$$

- **Pour tout $x \in [0, +\infty[$ et $t \in [0, +\infty[$, on a:**

$$-xt^2 \leq 0 \;\Rightarrow\; 0 \leq e^{-xt^2} \leq 1$$

① $a)$ **Montrer que, pour $x \in [0, +\infty[$ et $t \in [0, +\infty[$, on a**

$$0 \leq f(x,t) \leq \frac{1}{1+t^2}$$

- **Pour tout $x \in [0, +\infty[$ et $t \in [0, +\infty[$, on a:**

$$-xt^2 \leq 0 \;\Rightarrow\; 0 \leq e^{-xt^2} \leq 1 \;\Rightarrow\; 0 \leq f(x,t) \leq \frac{1}{1+t^2}$$

① $a)$ **Montrer que, pour $x \in [0, +\infty[$ et $t \in [0, +\infty[$, on a**

$$0 \leq f(x,t) \leq \frac{1}{1+t^2}$$

- **Pour tout $x \in [0, +\infty[$ et $t \in [0, +\infty[$, on a:**

$$-xt^2 \leq 0 \;\Rightarrow\; 0 \leq e^{-xt^2} \leq 1 \;\Rightarrow\; 0 \leq f(x,t) \leq \frac{1}{1+t^2}$$

① $b)$ **Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{dt}$ est convergente.**

① a) **Montrer que, pour $x \in [0,+\infty[$ et $t \in [0,+\infty[$, on a**

$$0 \le f(x,t) \le \frac{1}{1+t^2}$$

- Pour tout $x \in [0,+\infty[$ et $t \in [0,+\infty[$, on a:

$$-xt^2 \le 0 \;\Rightarrow\; 0 \le e^{-xt^2} \le 1 \;\Rightarrow\; 0 \le f(x,t) \le \frac{1}{1+t^2}$$

① b) **Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{dt}$ est convergente.**

- La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est positive et continue sur $[0,+\infty[$, avec:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{1+t^2} = 1$$

① $a)$ **Montrer que, pour $x \in [0, +\infty[$ et $t \in [0, +\infty[$, on a**

$$0 \le f(x,t) \le \frac{1}{1+t^2}$$

- **Pour tout $x \in [0, +\infty[$ et $t \in [0, +\infty[$, on a:**

$$-xt^2 \le 0 \;\Rightarrow\; 0 \le e^{-xt^2} \le 1 \;\Rightarrow\; 0 \le f(x,t) \le \frac{1}{1+t^2}$$

① $b)$ **Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{dt}$ est convergente.**

- **La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est positive et continue sur $[0, +\infty[$, avec:**

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{1+t^2} = 1$$

Et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{dt}$ est une intégrale de Riemann $(\alpha = 2 > 1)$ convergente

Donc, d'après le critère d'équivalence,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{dt} \text{ est convergente}$$

Donc, d'après le critère d'équivalence,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{dt} \text{ est convergente}$$

Et comme

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{dt} = \int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{t}^2}\,\mathrm{dt} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{t}^2}\,\mathrm{dt}$$

Et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}$ est une intégrale finie.

Donc, d'après le critère d'équivalence,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{dt} \text{ est convergente}$$

Et comme

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{dt} = \int_0^{1} \frac{1}{1+\mathrm{t}^2}\,\mathrm{dt} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{t}^2}\,\mathrm{dt}$$

Et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}$ est une intégrale finie.

Alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{dt} \text{ est convergente}$$

② $a)$ **Montrer que, pour** $t \in [0, +\infty[$, **la fonction** $x \mapsto f(x,t)$ **est dérivale sur** $[0, +\infty[$ **et calculer** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$.

② $a)$ **Montrer que, pour $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivale sur $[0, +\infty[$ et calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$.**

- Pour $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est dérivable sur $[0, +\infty[$, car la fonction $x \mapsto e^{-xt^2}$ l'est aussi et pour $x \in [0, +\infty[$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{-t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}$$

② $a)$ **Montrer que, pour $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivale sur $[0, +\infty[$ et calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$.**

- Pour $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est dérivable sur $[0, +\infty[$, car la fonction $x \mapsto e^{-xt^2}$ l'est aussi et pour $x \in [0, +\infty[$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{-t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}$$

② $b)$ **Soit $a > 0$, montrer que, pour tout $x \in [a, +\infty[$ et $t \in [0, +\infty[$,**

$$|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq e^{-at^2}$$

② $a)$ Montrer que, pour $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivale sur $[0, +\infty[$ et calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$.

- Pour $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est dérivable sur $[0, +\infty[$, car la fonction $x \mapsto e^{-xt^2}$ l'est aussi et pour $x \in [0, +\infty[$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{-t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}$$

② $b)$ Soit $a > 0$, montrer que, pour tout $x \in [a, +\infty[$ et $t \in [0, +\infty[$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-at^2}$$

- Pour $t \in [0, +\infty[$ et $x \in [a, +\infty[$, on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{-t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}\right| \leq e^{-xt^2} \leq e^{-at^2}$$

③ **Pour $x \in [0, +\infty[$, on considère la fonction**

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{dt}$$

a) **Montrer que F est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.**

③ Pour $x \in [0, +\infty[$, on considère la fonction

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que F est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.

- Pour tout $x \in [0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est positive et continue sur $[0, +\infty[$. De plus, on a montré que:

$$\forall t \in [0, +\infty[\quad , \quad |f(x,t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$$

③ Pour $x \in [0, +\infty[$, on considère la fonction

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{dt}$$

a) Montrer que F est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.

- Pour tout $x \in [0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est positive et continue sur $[0, +\infty[$. De plus, on a montré que:

$$\forall t \in [0, +\infty[\quad , \quad |f(x,t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$$

Pour tout $x \in [0, +\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{dt}$ est convergente.

③ Pour $x \in [0, +\infty[$, on considère la fonction

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{dt}$$

a) Montrer que F est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.

- Pour tout $x \in [0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est positive et continue sur $[0, +\infty[$. De plus, on a montré que:

$$\forall t \in [0, +\infty[\quad , \quad |f(x,t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$$

Pour tout $x \in [0, +\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{dt}$ est convergente.

$$\Rightarrow \ F \text{ est bien définie sur } [0, +\infty[$$

- D'une part, pour tout $x \in [0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ comme étant une fraction dont le dénominateur ne s'annule pas.

- D'une part, pour tout $x \in [0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ comme étant une fraction dont le dénominateur ne s'annule pas.

- De plus, pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, car la fonction $x \mapsto e^{-xt^2}$ l'est aussi.

- D'une part, pour tout $x \in [0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ comme étant une fraction dont le dénominateur ne s'annule pas.
- De plus, pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, car la fonction $x \mapsto e^{-xt^2}$ l'est aussi.
- D'autre part, pour tout $x, t \in [0, +\infty[$, on a:

$$|f(x,t)| \leq \frac{1}{1+t^2} \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{dt} \text{ converge}$$

- D'une part, pour tout $x \in [0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ comme étant une fraction dont le dénominateur ne s'annule pas.

- De plus, pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, car la fonction $x \mapsto e^{-xt^2}$ l'est aussi.

- D'autre part, pour tout $x, t \in [0, +\infty[$, on a:

$$|f(x,t)| \leq \frac{1}{1+t^2} \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

$\Rightarrow$ F est continue sur $[0, +\infty[$

b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et donner l'expression de sa dérivée $F'(x)$ sous forme d'une intégrale..

b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et donner l'expression de sa dérivée $F'(x)$ sous forme d'une intégrale..

- **Vérification de l'hypothèse $H1$.**

  On a bien montré que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, ainsi que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{dt}$ converge.

b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et donner l'expression de sa dérivée $F'(x)$ sous forme d'une intégrale..

- **Vérification de l'hypothèse $H1$.**

  On a bien montré que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, ainsi que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{dt}$ converge.

- **Vérification de l'hypothèse $H2$.**

  Pour tout $t \in [0,+\infty[$, pour tout $a > 0$, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$, car la fonction $x \mapsto e^{-xt^2}$ l'est aussi.

b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et donner l'expression de sa dérivée $F'(x)$ sous forme d'une intégrale..

- **Vérification de l'hypothèse $H1$.**

  On a bien montré que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, ainsi que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

- **Vérification de l'hypothèse $H2$.**

  Pour tout $t \in [0,+\infty[$, pour tout $a > 0$, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$, car la fonction $x \mapsto e^{-xt^2}$ l'est aussi.

- **Vérification de l'hypothèse $H3$.**

  Pour tout $x \in [a,+\infty[$, la fonction $t \mapsto -\dfrac{t^2\,e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ comme étant une fraction dont le dénominateur ne s'annule pas.

- **Vérification de l'hypothèse** $H4$.
  Pour tout $x \in [a, +\infty[$ et $t \in [0, +\infty[$, on a:

$$\left| -\frac{t^2\, e^{-xt^2}}{1+t^2} \right| \leq e^{-at^2}$$

  De plus, on a:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{e^{-at^2}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \to +\infty} t^2\, e^{-at^2} = 0$$

  Donc, d'après le critère de quotient,

$$\int_0^{+\infty} e^{-at^2}\, \mathrm{dt} \text{ est convergente}$$

- **Vérification de l'hypothèse** $H4$.
  Pour tout $x \in [a, +\infty[$ et $t \in [0, +\infty[$, on a:

$$\left| -\frac{t^2\, e^{-xt^2}}{1+t^2} \right| \leq e^{-at^2}$$

  De plus, on a:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{e^{-at^2}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \to +\infty} t^2\, e^{-at^2} = 0$$

  Donc, d'après le critère de quotient,

$$\int_0^{+\infty} e^{-at^2}\, \mathrm{dt} \text{ est convergente}$$

Finalement, on en conclut que pour tout $a > 0$, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$. Autrement dit elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et on a:

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2\, e^{-xt^2}}{1+t^2}\, \mathrm{dt}, \quad \forall \mathrm{x} > 0$$

c) **Montrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$,**

$$F(x) - F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{dt}$$

c) **Montrer que, pour tout** $x \in]0, +\infty[$,

$$F(x) - F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{dt}$$

$$\begin{aligned} F(x) - F'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{dt} - \int_0^{+\infty} \frac{-\mathrm{t}^2\mathrm{e}^{-\mathrm{xt}^2}}{1+\mathrm{t}^2}\,\mathrm{dt} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)\,e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{dt} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{xt}^2}\,\mathrm{dt} \end{aligned}$$

c) **Montrer que, pour tout** $x \in]0, +\infty[$,

$$F(x) - F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{dt}$$

$$\begin{aligned} F(x) - F'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{dt} - \int_0^{+\infty} \frac{-\mathrm{t}^2\mathrm{e}^{-\mathrm{x}\mathrm{t}^2}}{1+\mathrm{t}^2}\,\mathrm{dt} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)\,e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{dt} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{x}\mathrm{t}^2}\,\mathrm{dt} \end{aligned}$$

d) Par un changement de variable, en déduire que, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$F(x) - F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \, \mathrm{du}$$

d) Par un changement de variable, en déduire que, pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$F(x) - F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{du}$$

$$\begin{aligned} F(x) - F'(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{dt} \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\frac{\mathrm{du}}{\sqrt{x}} \quad (\text{changement de variable } u = \sqrt{x}t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{du} \end{aligned}$$

④ $a)$ **Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a:**

$$0 \leq F(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, \mathrm{du}$$

④ $a)$ **Montrer que pour tout** $x \in]0,+\infty[$**, on a:**

$$0 \leq F(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{du}$$

On a :

$$\forall x,t \in [0,+\infty[,\ f(x,t) \geq 0$$

④ $a)$ Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a:

$$0 \leq F(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{du}$$

On a :

$$\forall x, t \in [0,+\infty[,\ f(x,t) \geq 0$$

Ceci implique que pour tout $x \in [0,+\infty[,\ F(x) \geq 0$ (intégrale d'une fonction positive).

④ $a)$ **Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a:**

$$0 \le F(x) \le \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{du}$$

On a :

$$\forall x, t \in [0, +\infty[,\ f(x,t) \ge 0$$

Ceci implique que pour tout $x \in [0, +\infty[,\ F(x) \ge 0$ (intégrale d'une fonction positive).

On a :

$$\forall x, t \in [0, +\infty[,\ \frac{-t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} \le 0$$

④ $a)$ **Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a:**

$$0 \leq F(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{du}$$

On a :

$$\forall x,t \in [0,+\infty[,\ f(x,t) \geq 0$$

Ceci implique que pour tout $x \in [0,+\infty[,\ F(x) \geq 0$ (intégrale d'une fonction positive).

On a :

$$\forall x,t \in [0,+\infty[,\ \frac{-t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} \leq 0$$

Ceci implique que pour tout $x \in]0,+\infty[, F'(x) \leq 0$ (intégrale d'une fonction négative).

④ $a)$ Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a:

$$0 \leq F(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{du}$$

On a :

$$\forall x, t \in [0,+\infty[,\ f(x,t) \geq 0$$

Ceci implique que pour tout $x \in [0,+\infty[,\ F(x) \geq 0$ (intégrale d'une fonction positive).

On a :

$$\forall x, t \in [0,+\infty[,\ \frac{-t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} \leq 0$$

Ceci implique que pour tout $x \in]0,+\infty[, F'(x) \leq 0$ (intégrale d'une fonction négative).

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leq F(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{du}$$

d) **Déduire** $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

d) **Déduire** $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

- **La fonction** $u \mapsto e^{-u^2}$ **est positive et continue sur** $[0, +\infty[$**, avec:**

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{e^{-u^2}}{\frac{1}{u^2}} = \lim_{u\to+\infty} u^2\, e^{-u^2} = 0$$

d) **Déduire** $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

- **La fonction** $u \mapsto e^{-u^2}$ **est positive et continue sur** $[0, +\infty[$**, avec:**

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{e^{-u^2}}{\frac{1}{u^2}} = \lim_{u \to +\infty} u^2 \, e^{-u^2} = 0$$

Donc et d'après le critère de quotient,

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} \, \mathrm{du} \text{ est convergente.}$$

d) **Déduire** $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

- La fonction $u \mapsto e^{-u^2}$ est positive et continue sur $[0, +\infty[$, avec:

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{e^{-u^2}}{\frac{1}{u^2}} = \lim_{u\to+\infty} u^2 e^{-u^2} = 0$$

Donc et d'après le critère de quotient,

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{du} \text{ est convergente.}$$

Ceci implique que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{du} = 0$$

d) **Déduire** $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

- **La fonction** $u \mapsto e^{-u^2}$ **est positive et continue sur** $[0, +\infty[$**, avec:**

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{e^{-u^2}}{\frac{1}{u^2}} = \lim_{u \to +\infty} u^2 e^{-u^2} = 0$$

Donc et d'après le critère de quotient,

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du \text{ est convergente.}$$

Ceci implique que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$$