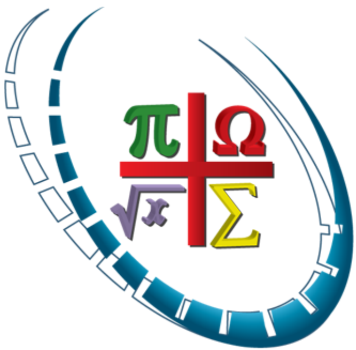
Intégrales impropres et intégrale dépendant d'un paramètre

Exercice 3



Exercice 3

Pour $x \in \mathbb{R}$, on considère la fonction:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \cos(tx)\, e^{-t^2}\, \mathrm{dt}$$

1. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est paire.
3. Etudier la continuité de F.
4. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
5. Exprimer la dérivée de F à l'aide d'une intégrale.

F est bien définie sur $\mathbb{R}$

- Pour tout x fixé de $\mathbb{R}$, on a:

$$\forall t \in [0, +\infty[, \ |\cos(tx)\, e^{-t^2}| \leq e^{-t^2}$$

- D'autre part,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{dt} = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2}\, \mathrm{dt} + \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2}\, \mathrm{dt}$$

F est bien définie sur $\mathbb{R}$

- **Pour tout x fixé de $\mathbb{R}$, on a:**

$$\forall t \in [0, +\infty[, \ |\cos(tx)\, e^{-t^2}| \le e^{-t^2}$$

- **D'autre part,**

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{dt} = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2}\, \mathrm{dt} + \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2}\, \mathrm{dt}$$

- $\int_0^1 e^{-t^2}\, \mathrm{dt}$ **converge, et**

$$\forall\ t \in [1, +\infty[,\ 0 \le e^{-t^2} \le e^{-t} \ \textbf{et} \ \int_1^{+\infty} e^{-t}\, \mathrm{dt} \ \textbf{converge}$$

- $\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{dt}$ **converge.**

F est bien définie sur $\mathbb{R}$

- **Pour tout x fixé de $\mathbb{R}$, on a:**

$$\forall t \in [0, +\infty[,\ |\cos(tx)\, e^{-t^2}| \leq e^{-t^2}$$

- **D'autre part,**

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{dt} = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2}\,\mathrm{dt} + \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2}\,\mathrm{dt}$$

- $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{dt}$ **converge, et**

$$\forall\ t \in [1, +\infty[,\ 0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-t} \textbf{ et } \int_1^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{dt} \textbf{ converge}$$

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{dt}$ **converge.**

D'après le critère de comparaison, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{+\infty} \cos(tx)\, e^{-t^2}\,\mathrm{dt} \textbf{ est absolument convergente } \Rightarrow \int_0^{+\infty} \cos(\mathrm{tx})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2}\,\mathrm{dt} \textbf{ converge}$$

F est bien définie sur $\mathbb{R}$

- **Pour tout x fixé de $\mathbb{R}$, on a:**

$$\forall t \in [0, +\infty[, \ |\cos(tx)\, e^{-t^2}| \leq e^{-t^2}$$

- **D'autre part,**

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{dt} = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2}\,\mathrm{dt} + \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2}\,\mathrm{dt}$$

- $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{dt}$ **converge, et**

$$\forall\ t \in [1, +\infty[, \ 0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-t} \text{ et } \int_1^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{dt} \text{ converge}$$

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{dt}$ **converge.**

D'après le critère de comparaison, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{+\infty} \cos(tx)\, e^{-t^2}\,\mathrm{dt} \text{ est absolument convergente } \Rightarrow \int_0^{+\infty} \cos(\mathrm{tx})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2}\,\mathrm{dt} \text{ converge}$$

$$\Rightarrow \ F \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}$$

F est paire

Rappel: Une fonction paire

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit qu'elle est paire si:

- $\forall x \in I, f(-x) = f(x)$.
- L'intervalle I est symétrique, i.e. $\forall x \in I, -x \in I$.

F est paire

Rappel: Une fonction paire

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit qu'elle est paire si:

- $\forall x \in I, f(-x) = f(x)$.
- L'intervalle I est symétrique, i.e. $\forall x \in I, -x \in I$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a:

$$F(-x) = \int_0^{+\infty} \cos(-tx)\, e^{-t^2}\, \mathrm{dt} = \int_0^{+\infty} \cos(\mathrm{tx})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2}\, \mathrm{dt} = \mathrm{F}(\mathrm{x})$$

F est paire

Rappel: Une fonction paire

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit qu'elle est paire si:

- $\forall x \in I, f(-x) = f(x)$.
- L'intervalle I est symétrique, i.e. $\forall x \in I, -x \in I$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a:

$$F(-x) = \int_0^{+\infty} \cos(-tx)\, e^{-t^2}\, \mathrm{dt} = \int_0^{+\infty} \cos(\mathrm{tx})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2}\, \mathrm{dt} = \mathrm{F}(\mathrm{x})$$

$\Rightarrow$ F est paire

Continuité de F

Théorème de continuité

Soit f une fonction définie sur $A \times I$, avec A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que:

H1 : Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur I.

H2 : Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A.

H3 : Il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$, continue et positive telle que:

- Pour tout $x \in A$ et $t \in I$, $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$.
- L'intégrale $\int_I \varphi(t)\, t$ est convergente.

Alors la fonction définie sur A par l'intégrale:

$$F(x) = \int_I f(x,t)\,\mathrm{dt}$$

est continue sur A.

Continuité de F

- Vérification de l'hypothèse $H1$.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \cos(tx)\, e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ comme étant le produit de deux fonctions continues.

Continuité de F

- Vérification de l'hypothèse $H1$.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \cos(tx)\, e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ comme étant le produit de deux fonctions continues.

- Vérification de l'hypothèse $H2$.
  Pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \cos(tx)\, e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, car la fonction $x \mapsto \cos(tx)$ l'est aussi.

Continuité de F

- **Vérification de l'hypothèse $H1$.**
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \cos(tx)\, e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ comme étant le produit de deux fonctions continues.

- **Vérification de l'hypothèse $H2$.**
  Pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \cos(tx)\, e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, car la fonction $x \mapsto \cos(tx)$ l'est aussi.

- **Vérification de l'hypothèse $H3$.**
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, +\infty[$, on a:

$$|\cos(tx)\, e^{-t^2}| \leq e^{-t^2} \text{ et } \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{dt} \text{ converge}$$

Continuité de F

- **Vérification de l'hypothèse $H1$.**
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \cos(tx)\, e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ comme étant le produit de deux fonctions continues.

- **Vérification de l'hypothèse $H2$.**
  Pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \cos(tx)\, e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, car la fonction $x \mapsto \cos(tx)$ l'est aussi.

- **Vérification de l'hypothèse $H3$.**
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, +\infty[$, on a:

$$|\cos(tx)\, e^{-t^2}| \leq e^{-t^2} \text{ et } \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{dt} \text{ converge}$$

$$\Rightarrow \ F \text{ est continue sur } \mathbb{R}$$

F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

Théorème de dérivation

Soit f une fonction définie sur $A \times I$, avec A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que:

H1 : Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur I et l'intégrale $\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ converge.

H2 : Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A.

H3 : Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur I.

H4 : Il existe une fonction $\psi : I \to \mathbb{R}$, continue et positive telle que:

- Pour tout $x \in A$ et $t \in I$, $|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \psi(t)$.
- L'intégrale $\int_I \psi(t)\,t$ est convergente.

Alors la fonction définie sur A, $F(x) = \int_I f(x,t)\,t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A, avec:

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

- Vérification de l'hypothèse $H1$.
  On a bien montré que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \cos(tx)\, e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, ainsi que l'intégrale ${}_0^{+\infty} \cos(tx)\, e^{-t^2}\, \mathrm{dt}$ converge.

F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

- **Vérification de l'hypothèse $H1$.**
  On a bien montré que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \cos(tx)\, e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, ainsi que l'intégrale ${}_{0}^{+\infty} \cos(tx)\, e^{-t^2}\, \mathrm{dt}$ converge.

- **Vérification de l'hypothèse $H2$.**
  Pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \cos(tx)\, e^{-t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, car la fonction $x \mapsto \cos(tx)$ l'est aussi et on a:

$$\forall t \in [0, +\infty[,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -t \sin(tx)\, e^{-t^2}$$

  continue sur $\mathbb{R}$.

F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

- **Vérification de l'hypothèse $H1$.**
  On a bien montré que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \cos(tx)\, e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, ainsi que l'intégrale ${}_{0}^{+\infty} \cos(tx)\, e^{-t^2}\, \mathrm{dt}$ converge.

- **Vérification de l'hypothèse $H2$.**
  Pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \cos(tx)\, e^{-t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, car la fonction $x \mapsto \cos(tx)$ l'est aussi et on a:

$$\forall t \in [0, +\infty[, \ \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -t \sin(tx)\, e^{-t^2}$$

  continue sur $\mathbb{R}$.

- **Vérification de l'hypothèse $H3$.**
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto -t \sin(tx)\, e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ comme étant le produit de des fonctions continues.

F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

- Vérification de l'hypothèse $H4$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, +\infty[$, on a:

$$|-t\sin(tx)\, e^{-t^2}| \leq te^{-t^2}$$

De plus, on a:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{te^{-t^2}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to+\infty} t^2\, te^{-t^2} = \lim_{t\to+\infty} t^3 e^{-t^2} = 0$$

et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{dt}$ converge. Donc, d'après le critère de quotient,

$$\int_1^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{dt} \text{ est convergente.}$$

Comme $\displaystyle\int_0^1 te^{-t^2}\,\mathrm{dt}$ est convergente donc

$$\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{dt} = \int_0^1 \mathrm{te}^{-\mathrm{t}^2}\,\mathrm{dt} + \int_1^{+\infty} \mathrm{te}^{-\mathrm{t}^2}\,\mathrm{dt} \text{ est convergente.}$$

Finalement, on en conclut que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et on a:

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{dt} = -\int_0^{+\infty} \mathrm{t}\sin(\mathrm{tx})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2}\,\mathrm{dt}, \quad \forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}$$