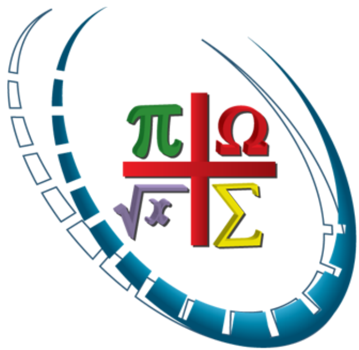
Intégrales impropres et intégrale dépendant d'un paramètre

Exercice 5



Mathématiques de Base 4 - $2^{\text{ème}}$ année

Exercice 5

Etudier la nature des intégrales suivantes:

$$I_1 = \int_2^{+\infty} \ln(x)\,\mathrm{dx}, \qquad I_2 = \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2\ln(x)+1}\,\mathrm{dx}, \quad I_3 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)\ln(x)}\,\mathrm{dx},$$

$$I_4 = \int_2^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^2\ln^2(x)+1}\,\mathrm{dx}.$$

$$I_1 = \int_2^{+\infty} \ln(x)\,\mathrm{dx}$$

C'est une intégrale de Bertrand avec $\alpha = 0$ et $\beta = -1$.
Ainsi,

$$\int_2^{+\infty} \ln(x)\,\mathrm{dx} \text{ est convergente}$$

4

$$I_2 = \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln(x) + 1} \,\mathrm{dx}$$

On a

$$0 \leq \frac{1}{x^2 \ln(x) + 1} \leq \frac{1}{x^2 \ln(x)}$$

Or $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln(x)} \,\mathrm{dx}$ est une intégrale de Bertrand avec $\alpha = 2 > 1$, donc elle converge.
Ainsi, en utilisant le critère de comparaison, on a

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln(x) + 1} \,\mathrm{dx} \ \text{ est convergente}$$

$$I_3 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)\ln(x)}\,\mathrm{dx}$$

On a

$$0 \leq \frac{1}{x\ln(x)} \leq \frac{1}{(x-1)\ln(x)}$$

Or $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{dx}$ est une intégrale de Bertrand avec $\alpha = 1$ et $\beta = 1$, donc elle diverge.
Ainsi, en utilisant le critère de comparaison, on a

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)\ln(x)}\,\mathrm{dx} \ \text{ est divergente}$$

$$I_4 = \int_2^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^2\ln^2(x)+1}\,\mathrm{dx}$$

On a :

$$0 \le \ln(x) \le x \Rightarrow 0 \le \frac{\ln(x+1)}{x^2\ln^2(x)+1} \le \frac{x+1}{x^2\ln^2(x)+1} \le \frac{x+1}{x^2\ln^2(x)} = \frac{1}{x\ln^2(x)} + \frac{1}{x^2\ln^2(x)}$$

Or $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2(x)}\,\mathrm{dx}$ est une intégrale de Bertrand convergente avec $\alpha = 1$ et $\beta = 2$.

$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2\ln^2(x)}\,\mathrm{dx}$ est une intégrale de Bertrand convergente avec $\alpha = 2 > 1$.

Ainsi, en utilisant le critère de comparaison, on a

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^2\ln^2(x)+1}\,\mathrm{dx} \ \text{ est convergente}$$