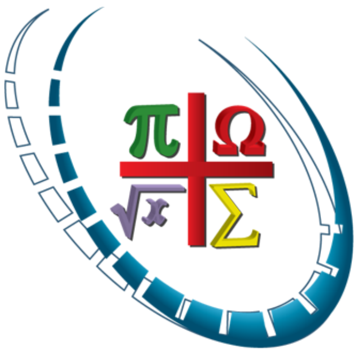
esprit
Se former autrement
HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Intégrales impropres et intégrale dépendant d'un paramètre

Exercice 1



Exercice 1

Etudier la nature des intégrales suivantes:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t + t} \, \mathrm{dt}, \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{\arctan(\frac{1}{t})}{\sqrt{t}} \, \mathrm{dt}, \qquad I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1 + t^3} \, \mathrm{dt},$$

$$I_4 = \int_2^{+\infty} \frac{\cos(\dfrac{1}{t})}{\ln(t)} \, \mathrm{dt}, \qquad I_5 = \int_0^1 \frac{1}{2(1 - \cos(t))} \, \mathrm{dt}.$$

3

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t + t} \, \mathrm{dt}$$

3

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t + t} \, \mathrm{dt}$$

- La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{e^t + t}$ est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$, donc on a un problème en $+\infty$.

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t + t}\,\mathrm{dt}$$

- La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{e^t + t}$ est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$, donc on a un problème en $+\infty$.
- D'une part, pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a:

$$0 \leq \frac{1}{e^t + t} \leq e^{-t}$$

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t + t}\,\mathrm{dt}$$

- La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{e^t + t}$ est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$, donc on a un problème en $+\infty$.
- D'une part, pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a:

$$0 \leq \frac{1}{e^t + t} \leq e^{-t}$$

- D'autre part, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{dt}$ est une intégrale géométrique avec $\alpha = 1$. Donc elle converge.

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t + t}\,\mathrm{dt}$$

- La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{e^t + t}$ est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$, donc on a un problème en $+\infty$.
- D'une part, pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a:

$$0 \leq \frac{1}{e^t + t} \leq e^{-t}$$

- D'autre part, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{dt}$ est une intégrale géométrique avec $\alpha = 1$. Donc elle converge.

Ainsi, et d'après le critère de comparaison,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t + t}\,\mathrm{dt} \text{ est convergente}$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\arctan(\frac{1}{t})}{\sqrt{t}}\,\mathrm{dt}$$

- **La fonction $t \mapsto \dfrac{\arctan(\frac{1}{t})}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,1]$ et n'admet pas une limite finie en 0, donc on a un problème en 0.**

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\arctan(\frac{1}{t})}{\sqrt{t}}\,\mathrm{dt}$$

- La fonction $t \mapsto \dfrac{\arctan(\frac{1}{t})}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,1]$ et n'admet pas une limite finie en 0, donc on a un problème en 0.
- D'une part, pour tout $t \in]0,1]$, on a:

$$0 \leq \frac{\arctan(\frac{1}{t})}{\sqrt{t}} \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{t}}$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\arctan(\frac{1}{t})}{\sqrt{t}}\,\mathrm{dt}$$

- La fonction $t \mapsto \dfrac{\arctan(\frac{1}{t})}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,1]$ et n'admet pas une limite finie en 0, donc on a un problème en 0.
- D'une part, pour tout $t \in]0,1]$, on a:

$$0 \leq \frac{\arctan(\frac{1}{t})}{\sqrt{t}} \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{t}}$$

- D'autre part, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{dt}$ est une intégrale de Riemann avec $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Donc elle converge.

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\arctan(\frac{1}{t})}{\sqrt{t}} \mathrm{dt}$$

- La fonction $t \mapsto \dfrac{\arctan(\frac{1}{t})}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,1]$ et n'admet pas une limite finie en 0, donc on a un problème en 0.
- D'une part, pour tout $t \in]0,1]$, on a:

$$0 \leq \frac{\arctan(\frac{1}{t})}{\sqrt{t}} \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{t}}$$

- D'autre part, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{t}} \mathrm{dt}$ est une intégrale de Riemann avec $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Donc elle converge.

Ainsi, et d'après le critère de comparaison,

$$\int_0^1 \frac{\arctan(\frac{1}{t})}{\sqrt{t}} \mathrm{dt} \text{ est convergente}$$

$$I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^3}\,\mathrm{dt}$$

- La fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^3}$ est continue sur $[1, +\infty[$, donc on a un problème en $+\infty$.

$$I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^3}\,\mathrm{dt}$$

- La fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^3}$ est continue sur $[1, +\infty[$, donc on a un problème en $+\infty$.
- D'une part, on a:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\dfrac{\ln(t)}{1+t^3}}{\dfrac{1}{t^2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2\ln(t)}{1+t^3} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2\ln(t)}{t^3} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$$

car

$$\frac{t^2\ln(t)}{1+t^3} \underset{\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t}$$

$$I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^3}\,\mathrm{dt}$$

- La fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^3}$ est continue sur $[1, +\infty[$, donc on a un problème en $+\infty$.
- D'une part, on a:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\dfrac{\ln(t)}{1+t^3}}{\dfrac{1}{t^2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2\ln(t)}{1+t^3} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2\ln(t)}{t^3} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$$

car

$$\frac{t^2\ln(t)}{1+t^3} \underset{\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t}$$

- D'autre part, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{dt}$ est une intégrale de Riemann avec $\alpha = 2$. Donc elle converge.

$$I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^3}\,\mathrm{dt}$$

- La fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^3}$ est continue sur $[1, +\infty[$, donc on a un problème en $+\infty$.
- D'une part, on a:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\dfrac{\ln(t)}{1+t^3}}{\dfrac{1}{t^2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2\ln(t)}{1+t^3} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2\ln(t)}{t^3} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$$

car

$$\frac{t^2\ln(t)}{1+t^3} \underset{\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t}$$

- D'autre part, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{dt}$ est une intégrale de Riemann avec $\alpha = 2$. Donc elle converge.

Ainsi, et d'après le critère de quotient,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^3}\,\mathrm{dt} \ \text{ est convergente}$$

$$I_4 = \int_2^{+\infty} \frac{\cos(\frac{1}{t})}{\ln(t)}\,\mathrm{dt}$$

- La fonction $t \mapsto \dfrac{\cos(\frac{1}{t})}{\ln(t)}$ est continue sur $[2, +\infty[$, donc on a un problème en $+\infty$.

$$I_4 = \int_2^{+\infty} \frac{\cos(\frac{1}{t})}{\ln(t)}\,\mathrm{dt}$$

- La fonction $t \mapsto \dfrac{\cos(\frac{1}{t})}{\ln(t)}$ est continue sur $[2, +\infty[$, donc on a un problème en $+\infty$.
- D'une part, on a:

$$\cos(\frac{1}{t}) \underset{+\infty}{\sim} 1$$

$$I_4 = \int_2^{+\infty} \frac{\cos(\frac{1}{t})}{\ln(t)} \, \mathrm{dt}$$

- La fonction $t \mapsto \dfrac{\cos(\frac{1}{t})}{\ln(t)}$ est continue sur $[2, +\infty[$, donc on a un problème en $+\infty$.
- D'une part, on a:

$$\cos(\frac{1}{t}) \underset{+\infty}{\sim} 1 \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \frac{\frac{\cos(\frac{1}{t})}{\ln(t)}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t \cos(\frac{1}{t})}{\ln(t)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{\ln(t)} = +\infty$$

$$I_4 = \int_2^{+\infty} \frac{\cos(\frac{1}{t})}{\ln(t)}\,\mathrm{dt}$$

- La fonction $t \mapsto \dfrac{\cos(\frac{1}{t})}{\ln(t)}$ est continue sur $[2, +\infty[$, donc on a un problème en $+\infty$.
- D'une part, on a:

$$\cos(\frac{1}{t}) \underset{+\infty}{\sim} 1 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{\cos(\frac{1}{t})}{\ln(t)}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t\cos(\frac{1}{t})}{\ln(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{\ln(t)} = +\infty$$

- D'autre part, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{dt}$ est une intégrale de Riemann avec $\alpha = 1$. Donc elle diverge.

$$I_4 = \int_2^{+\infty} \frac{\cos(\frac{1}{t})}{\ln(t)}\,\mathrm{dt}$$

- La fonction $t \mapsto \dfrac{\cos(\frac{1}{t})}{\ln(t)}$ est continue sur $[2, +\infty[$, donc on a un problème en $+\infty$.
- D'une part, on a:

$$\cos(\frac{1}{t}) \underset{+\infty}{\sim} 1 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{\cos(\frac{1}{t})}{\ln(t)}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t\cos(\frac{1}{t})}{\ln(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{\ln(t)} = +\infty$$

- D'autre part, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{dt}$ est une intégrale de Riemann avec $\alpha = 1$. Donc elle diverge.

Ainsi, et d'après le critère de quotient,

$$\int_2^{+\infty} \frac{\cos(\frac{1}{t})}{\ln(t)}\,\mathrm{dt} \ \text{ est divergente}$$

$$I_5 = \int_0^1 \frac{1}{2(1-\cos(t))}\,\mathrm{dt}$$

- La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{2(1-\cos(t))}$ est continue sur $]0,1]$ et n'admet pas une limite finie en 0, donc on a un problème en 0.

$$I_5 = \int_0^1 \frac{1}{2(1-\cos(t))}\,\mathrm{dt}$$

- La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{2(1-\cos(t))}$ est continue sur $]0,1]$ et n'admet pas une limite finie en 0, donc on a un problème en 0.
- D'une part, on a:

$$\cos(t) \underset{0}{\sim} 1 - \frac{t^2}{2} \iff 1-\cos(t) \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{2}$$

$$I_5 = \int_0^1 \frac{1}{2(1-\cos(t))}\,\mathrm{d}t$$

- La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{2(1-\cos(t))}$ est continue sur $]0,1]$ et n'admet pas une limite finie en 0, donc on a un problème en 0.
- D'une part, on a:

$$\cos(t) \underset{0}{\sim} 1 - \frac{t^2}{2} \iff 1-\cos(t) \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{2(1-\cos(t))}}{\dfrac{1}{t^2}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2}{2(1-\cos(t))} = 1$$

$$I_5 = \int_0^1 \frac{1}{2(1-\cos(t))}\,\mathrm{dt}$$

- D'autre part, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2}\,\mathrm{dt}$ est une intégrale de Riemann avec $\alpha = 2$. Donc elle diverge.

$$I_5 = \int_0^1 \frac{1}{2(1-\cos(t))}\,\mathrm{dt}$$

- D'autre part, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2}\,\mathrm{dt}$ est une intégrale de Riemann avec $\alpha = 2$. Donc elle diverge.

Ainsi, et d'après le critère d'équivalence,

$$\int_0^1 \frac{1}{2(1-\cos(t))}\,\mathrm{dt} \ \textbf{ est divergente}$$