

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

1. Phương trình $\sin x = \sin \alpha$

a. $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ b. $\begin{cases} \sin x = a. \text{ Điều kiện: } -1 \leq a \leq 1. \\ \sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

• $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ • $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ • $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$.

2. Phương trình $\cos x = \cos \alpha$

a. $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \pm \alpha + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ b. $\begin{cases} \cos x = a. \text{ Điều kiện: } -1 \leq a \leq 1. \\ \cos x = a \Leftrightarrow x = \pm \arccos a + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

• $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ • $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$ • $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$

3. Phương trình $\tan x = \tan \alpha$

a. $\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ b. $\tan x = a \Leftrightarrow x = \arctan a + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

• $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ • $\tan x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

4. Phương trình $\cot x = \cot \alpha$

a. $\cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ b. $\cot x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} a + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

• $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ • $\cot x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

5. Phương trình bậc hai với một hàm số lượng giác

Dạng	Đặt	Điều kiện
$a \sin^2 x + b \sin x + c = 0$	$t = \sin x$	$-1 \leq t \leq 1$
$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$	$t = \cos x$	$-1 \leq t \leq 1$

6. Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$

$$a \sin x + b \cos x = c \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha \sin x + \cos \alpha \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \cos(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \beta.$$

• Điều kiện để phương trình có nghiệm là $a^2 + b^2 \geq c^2$.

7. Phương trình đẳng cấp bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$: $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$

- Xét $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \pm 1$. Kết luận $\cos x = 0$ có thỏa mãn hay không?
- Khi $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x \neq 0$ ta được: $a \tan^2 x + b \tan x + c = d(1 + \tan^2 x)$.
- Đặt: $t = \tan x$, ta được phương trình bậc hai ẩn t : $(a - d)t^2 + b.t + c - d = 0$.

8. Phương trình đối xứng với $\sin x$ và $\cos x$: $(\sin x \pm \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0$

- Đặt: $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; $|t| \leq \sqrt{2} \Rightarrow t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$.
- Đặt: $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; $|t| \leq \sqrt{2}$; $\Rightarrow t^2 = 1 - 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = -\frac{1}{2}(t^2 - 1)$.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

- $\tan \alpha$ xác định khi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cot \alpha$ xác định khi $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha$
- $\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha$
- $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha$
- $\cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha$
- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$;
- $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$;
- $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$;
- $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

1. Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

Góc đối nhau	Góc bù nhau	Góc phụ nhau	Góc hơn kém π	Góc hơn kém $\pi/2$
$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$	$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$

2. Công thức cộng

- $\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$
- $\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$
- $\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$

3. Công thức nhân đôi

- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$
- $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

4. Công thức nhân ba

- $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

- $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

5. Công thức hạ bậc

- $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$
- $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$
- $\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$
- $\sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$
- $\cos^3 \alpha = \frac{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha}{4}$

6. Công thức biến đổi tổng thành tích

- $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$
- $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$
- $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$
- $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$

7. Công thức biến đổi tích thành tổng

- $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
- $\sin a \cdot \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$
- $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$
- $\cos a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]$