

红黑树

@M了个J

<https://github.com/CoderMJLee>

<http://cnblogs.com/mjios>

码拉松



实力IT教育 www.520it.com

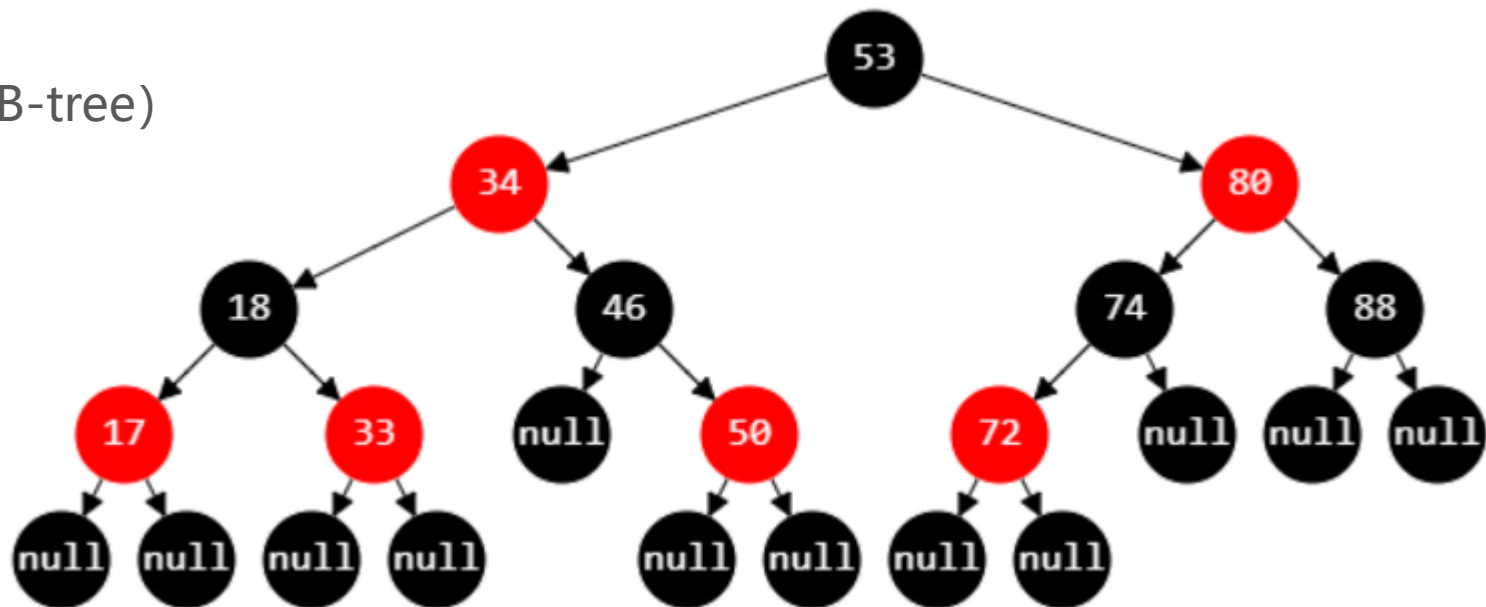
红黑树 (Red Black Tree)

- 红黑树也是一种自平衡的二叉搜索树
- 以前也叫做平衡二叉B树 (Symmetric Binary B-tree)

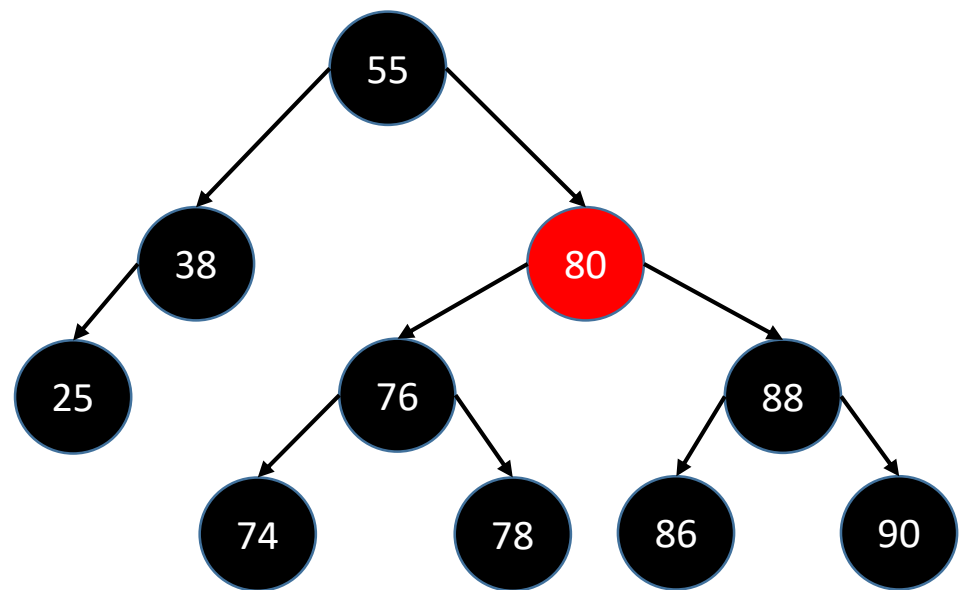
■ 红黑树必须满足以下 5 条性质

1. 节点是 **RED** 或者 **BLACK**
2. 根节点是 **BLACK**
3. 叶子节点 (外部节点, 空节点) 都是 **BLACK**
4. **RED** 节点的子节点都是 **BLACK**
- ✓ **RED** 节点的 parent 都是 **BLACK**
- ✓ 从根节点到叶子节点的所有路径上不能有 2 个连续的 **RED** 节点
5. 从任一节点到叶子节点的所有路径都包含相同数目的 **BLACK** 节点

■ 为何这些规则下, 就能保证平衡?



请问下面这棵是红黑树么？



■ 红黑树必须满足以下 5 条性质

1. 节点是 **RED** 或者 **BLACK**

2. 根节点是 **BLACK**

3. 叶子节点 (外部节点, 空节点) 都是 **BLACK**

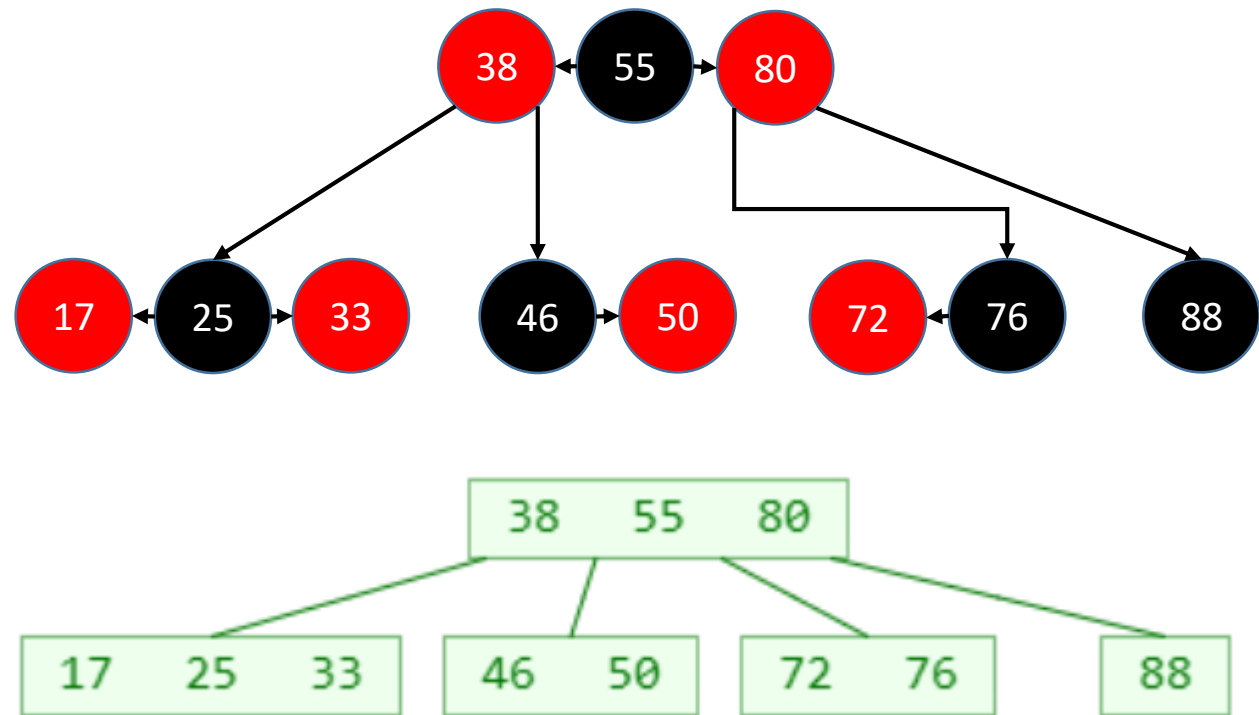
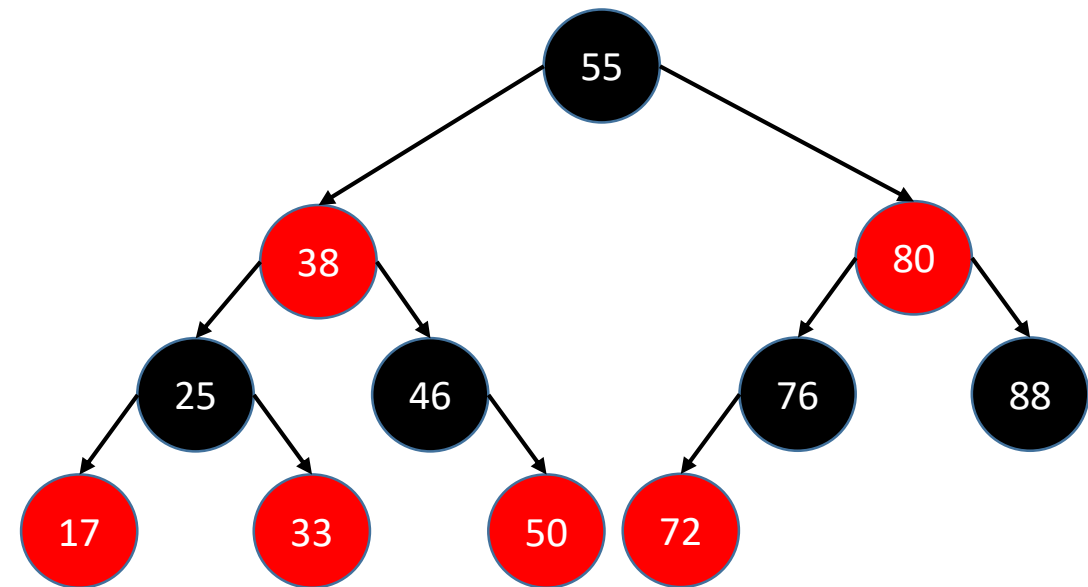
4. **RED** 节点的子节点都是 **BLACK**

✓ **RED** 节点的 **parent** 都是 **BLACK**

✓ 从根节点到叶子节点的所有路径上不能有 2 个连续的 **RED** 节点

5. 从任一节点到叶子节点的所有路径都包含相同数目的 **BLACK** 节点

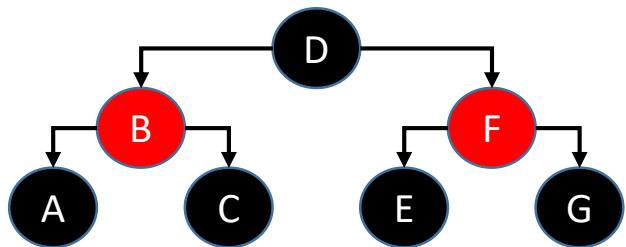
红黑树的等价变换



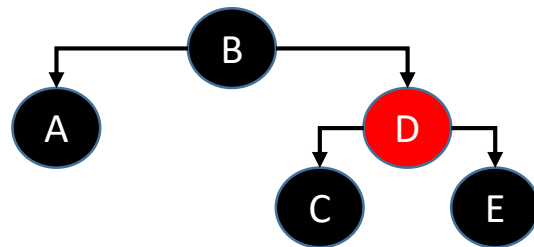
- 红黑树 和 4阶B树 (2-3-4树) 具有等价性
- **BLACK** 节点与它的 **RED** 子节点融合在一起，形成1个B树节点
- 红黑树的 **BLACK** 节点个数 与 4阶B树的节点总个数 相等
- 网上有些教程：用 2-3树 与 红黑树 进行类比，这是极其不严谨的，2-3树 并不能完美匹配 红黑树 的所有情况
- 注意：因为PPT界面空间有限，后面展示的红黑树都会省略 **NULL** 节点

红黑树 vs 2-3-4树

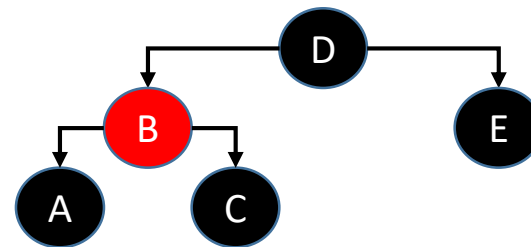
红黑红



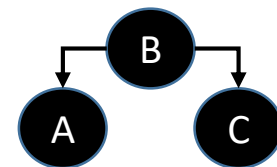
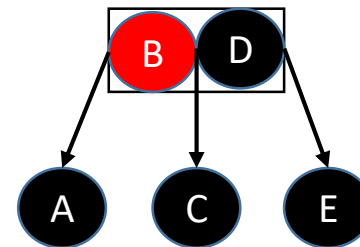
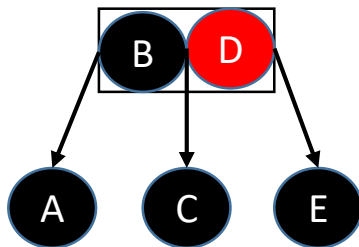
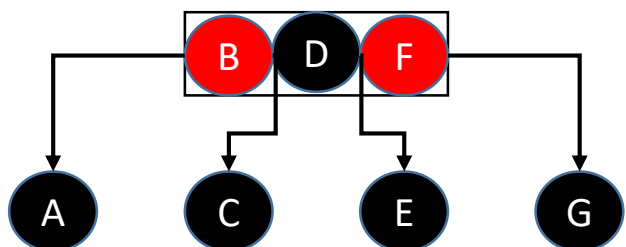
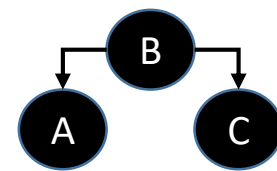
黑红



红黑



黑



- 思考：如果上图最底层的 **BLACK** 节点是不存在的，在B树中是什么样的情形？
- 整棵B树只有1个节点，而且是超级节点

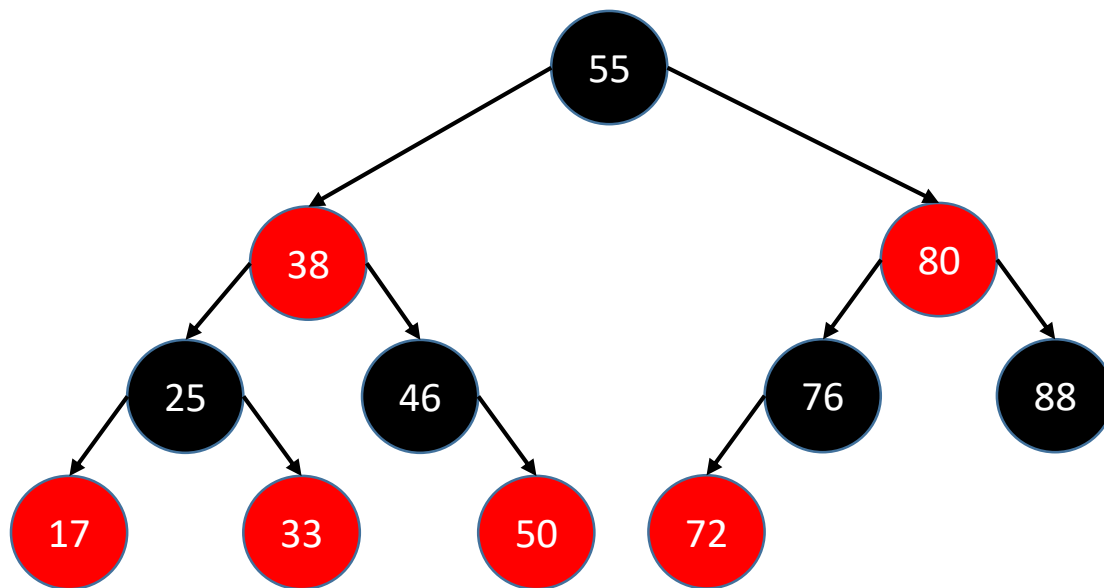
几个英文单词

■ **parent**: 父节点

■ **sibling**: 兄弟节点

■ **uncle**: 叔父节点 (**parent** 的兄弟节点)

■ **grand**: 祖父节点 (**parent** 的父节点)



一些辅助函数

```
private boolean isBlack(Node<E> node) {
    return colorOf(node) == BLACK;
}

private boolean isRed(Node<E> node) {
    return colorOf(node) == RED;
}

private boolean colorOf(Node<E> node) {
    return node == null ? BLACK : ((RBNode<E>)node).color;
}

private RBNode<E> color(Node<E> node, boolean color) {
    if (node != null) ((RBNode<E>)node).color = color;
    return (RBNode<E>) node;
}

private RBNode<E> black(Node<E> node) {
    return color(node, BLACK);
}

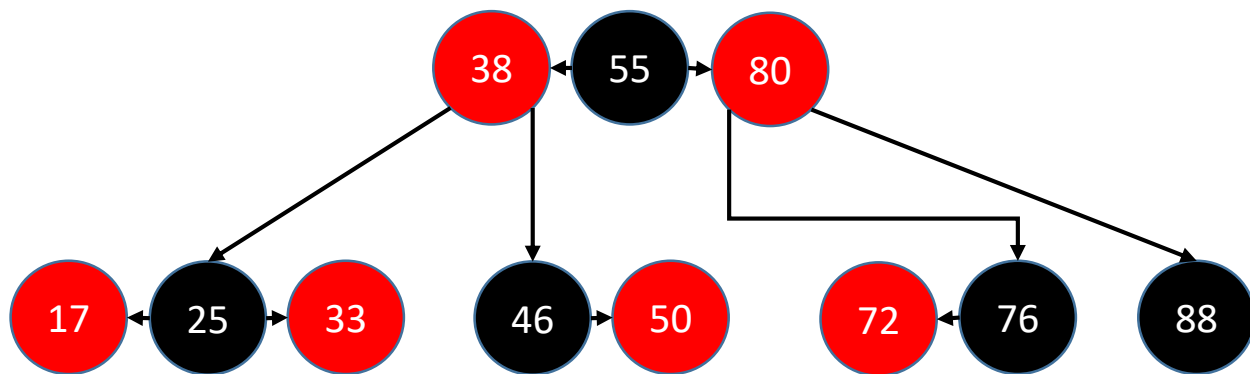
private RBNode<E> red(Node<E> node) {
    return color(node, RED);
}
```

```
public Node<E> sibling() {
    if (isLeftChild()) {
        return parent.right;
    }

    if (isRightChild()) {
        return parent.left;
    }

    return null;
}
```

- 已知
- B树中，新元素必定是添加到叶子节点中
- 4阶B树所有节点的元素个数 x 都符合 $1 \leq x \leq 3$
- 建议新添加的节点默认为 **RED**，这样能够让红黑树的性质尽快满足（性质 1、2、3、5 都满足，性质 4 不一定）



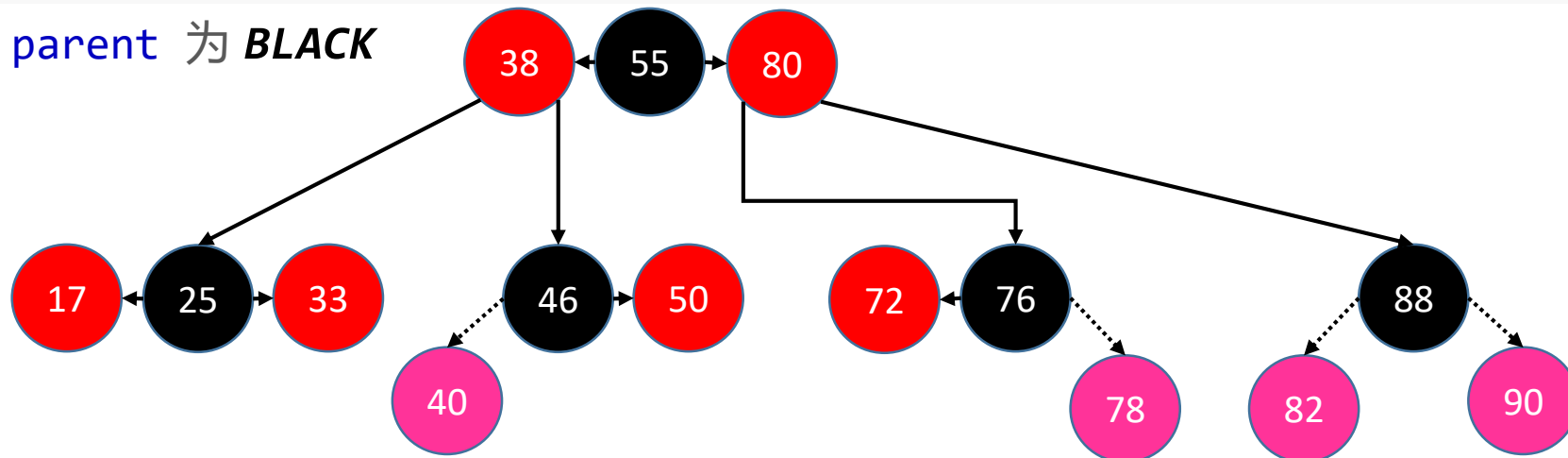
- 如果添加的是根节点，染成 **BLACK** 即可

添加的所有情况

■ 有 4 种情况满足红黑树的性质 4：parent 为 **BLACK**

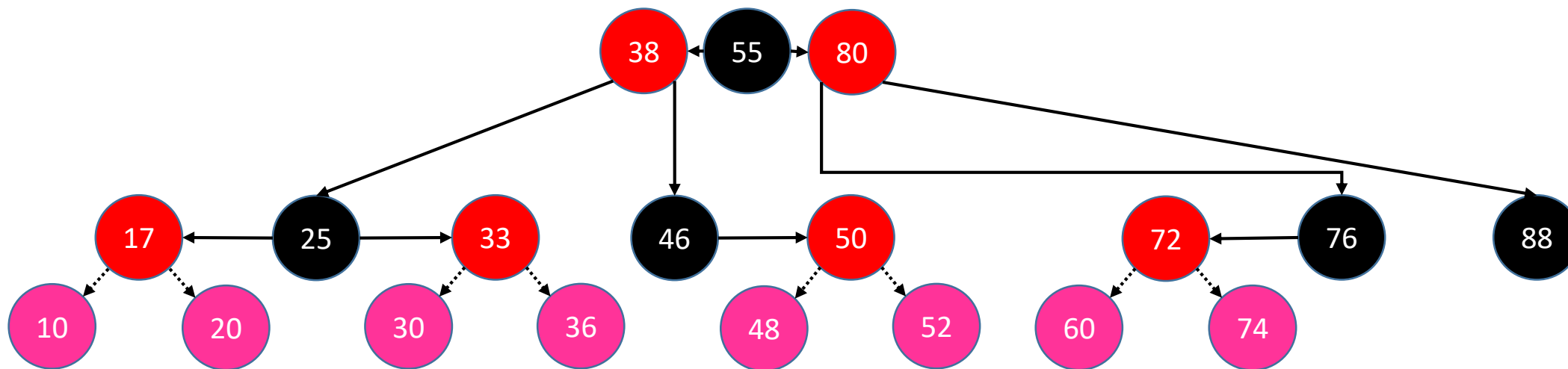
□ 同样也满足 4 阶 B 树的性质

□ 因此不用做任何额外处理



■ 有 8 种情况不满足红黑树的性质 4：parent 为 **RED** (*Double Red*)

□ 其中前 4 种属于 B 树节点上溢的情况



添加 - 修复性质4 - LL\RR

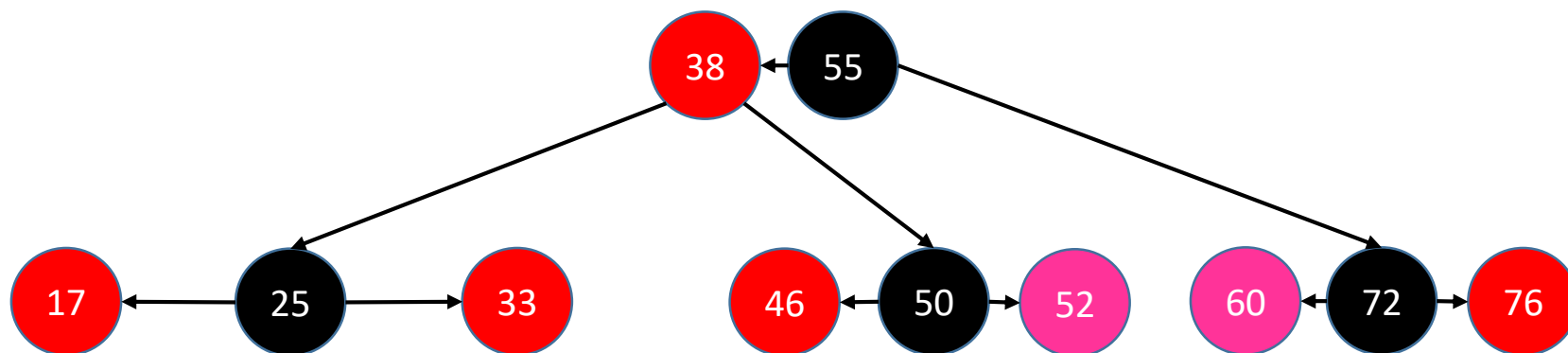
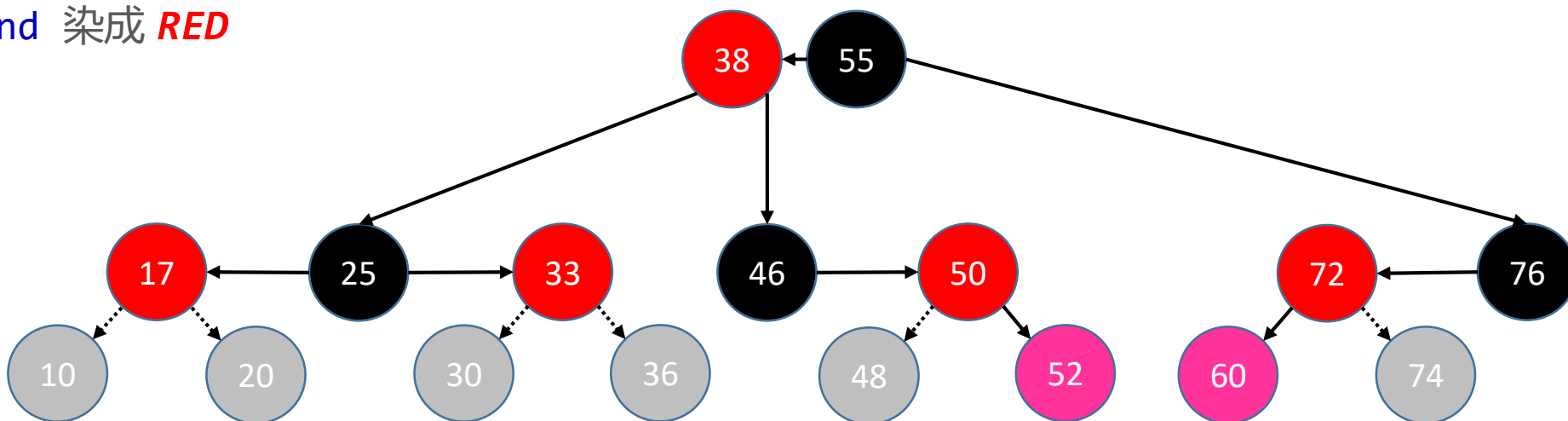
■ 判定条件: **uncle** 不是 **RED**

1. **parent** 染成 **BLACK**, **grand** 染成 **RED**

2. **grand** 进行单旋操作

□ LL: 右旋转

□ RR: 左旋转



添加 - 修复性质4 - LR\RL

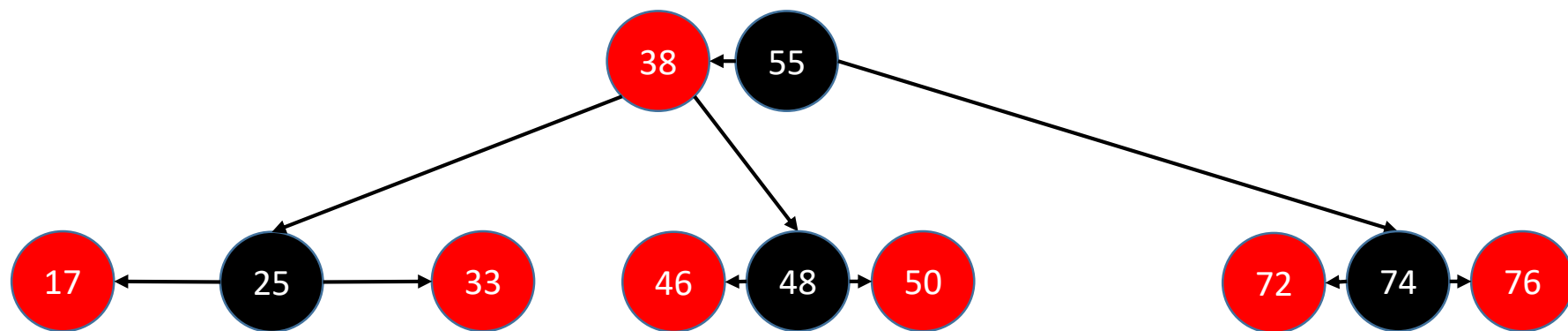
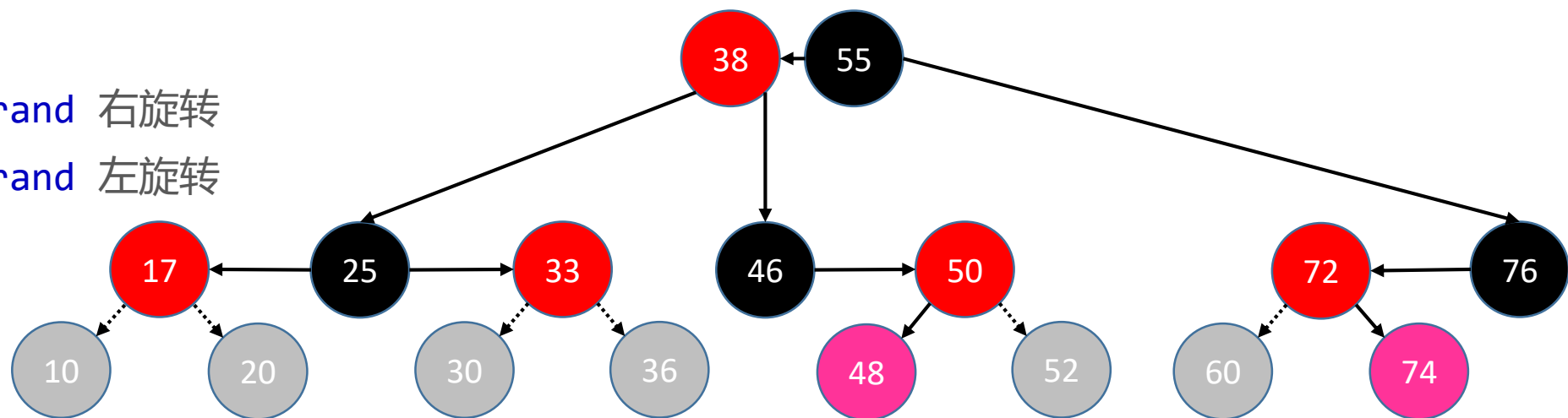
■ 判定条件: **uncle** 不是 **RED**

1. 自己染成 **BLACK**, **grand** 染成 **RED**

2. 进行双旋操作

□ LR: **parent** 左旋转, **grand** 右旋转

□ RL: **parent** 右旋转, **grand** 左旋转



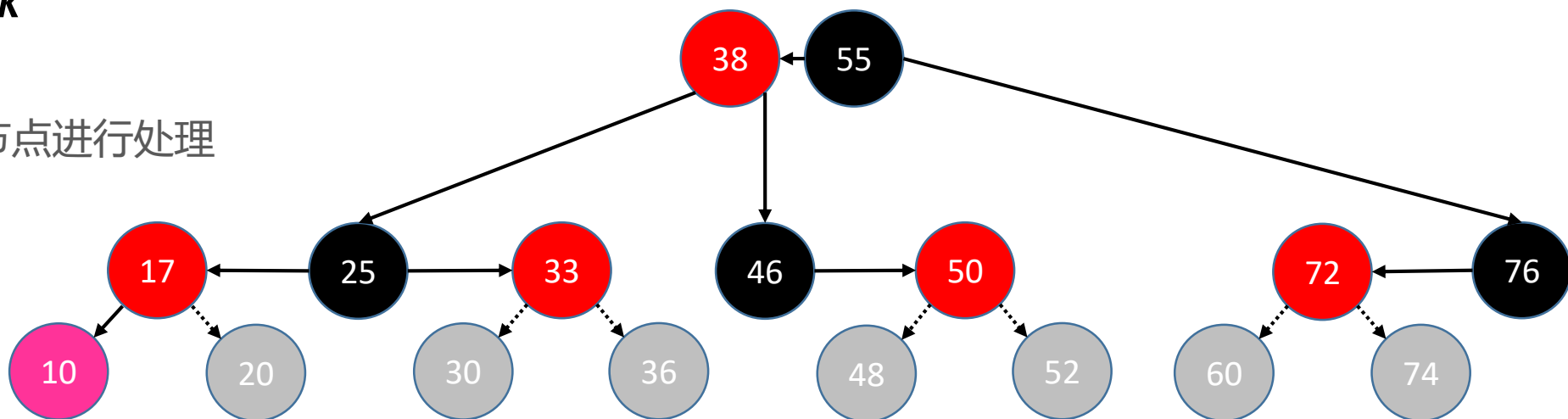
添加 - 修复性质4 - 上溢 - LL

■ 判定条件: **uncle** 是 **RED**

1. **parent**、**uncle** 染成 **BLACK**

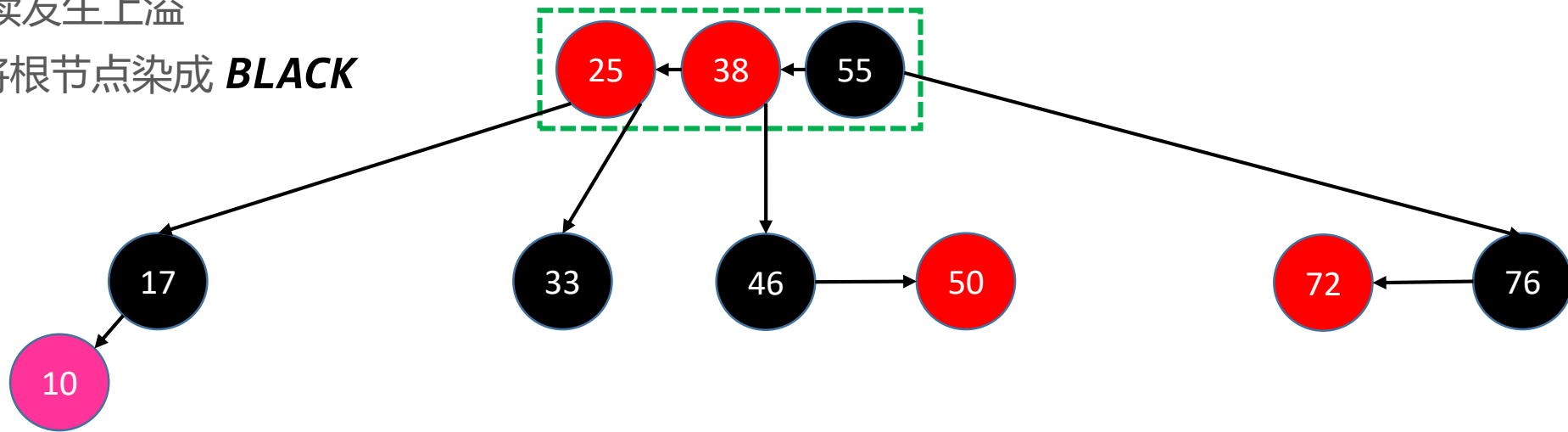
2. **grand** 向上合并

□ 染成 **RED**, 当做是新添加的节点进行处理



■ **grand** 向上合并时, 可能继续发生上溢

■ 若上溢持续到根节点, 只需将根节点染成 **BLACK**



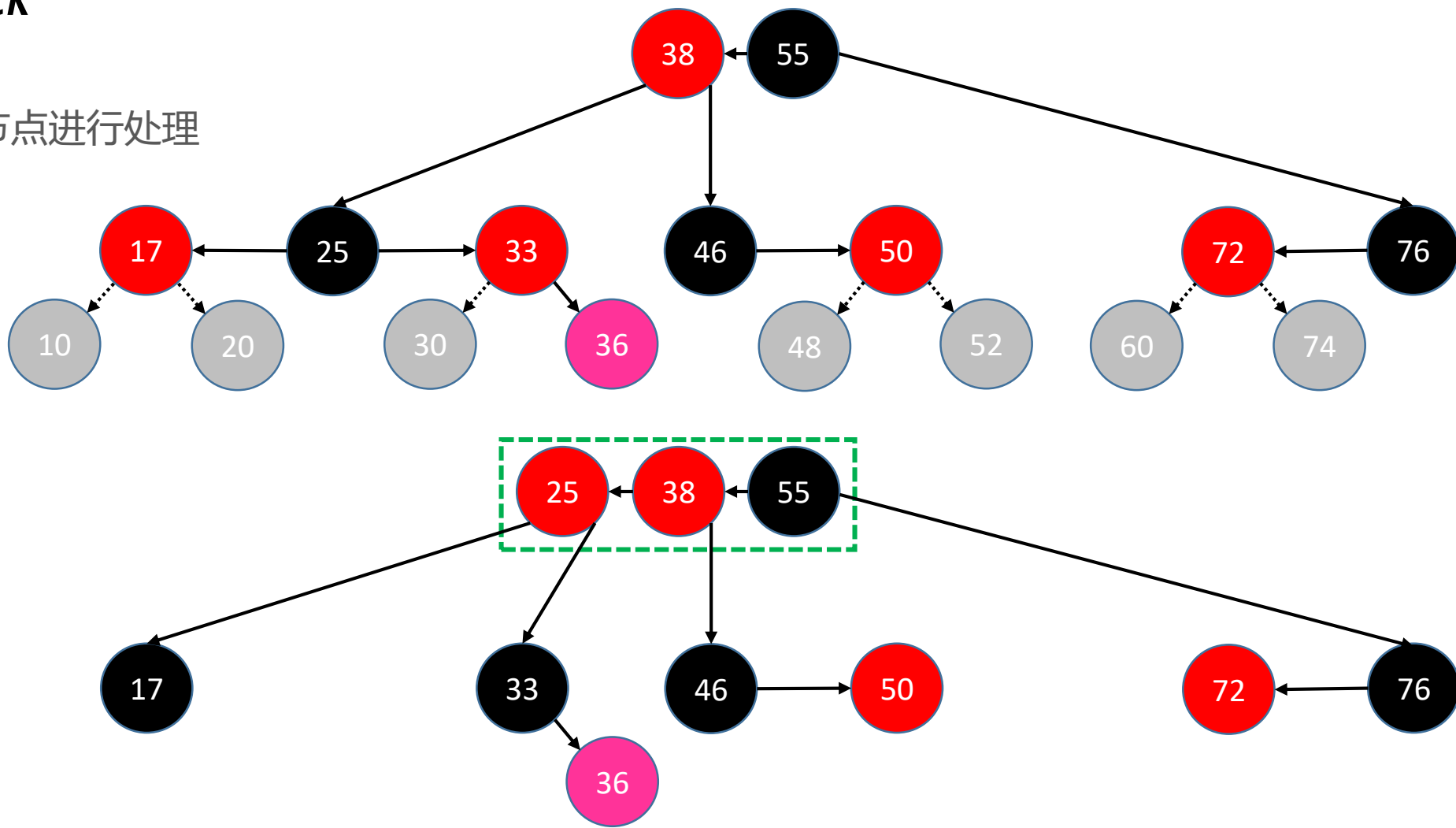
添加 - 修复性质4 - 上溢 - RR

■ 判定条件: **uncle** 是 **RED**

1. **parent**、**uncle** 染成 **BLACK**

2. **grand** 向上合并

□ 染成 **RED**, 当做是新添加的节点进行处理



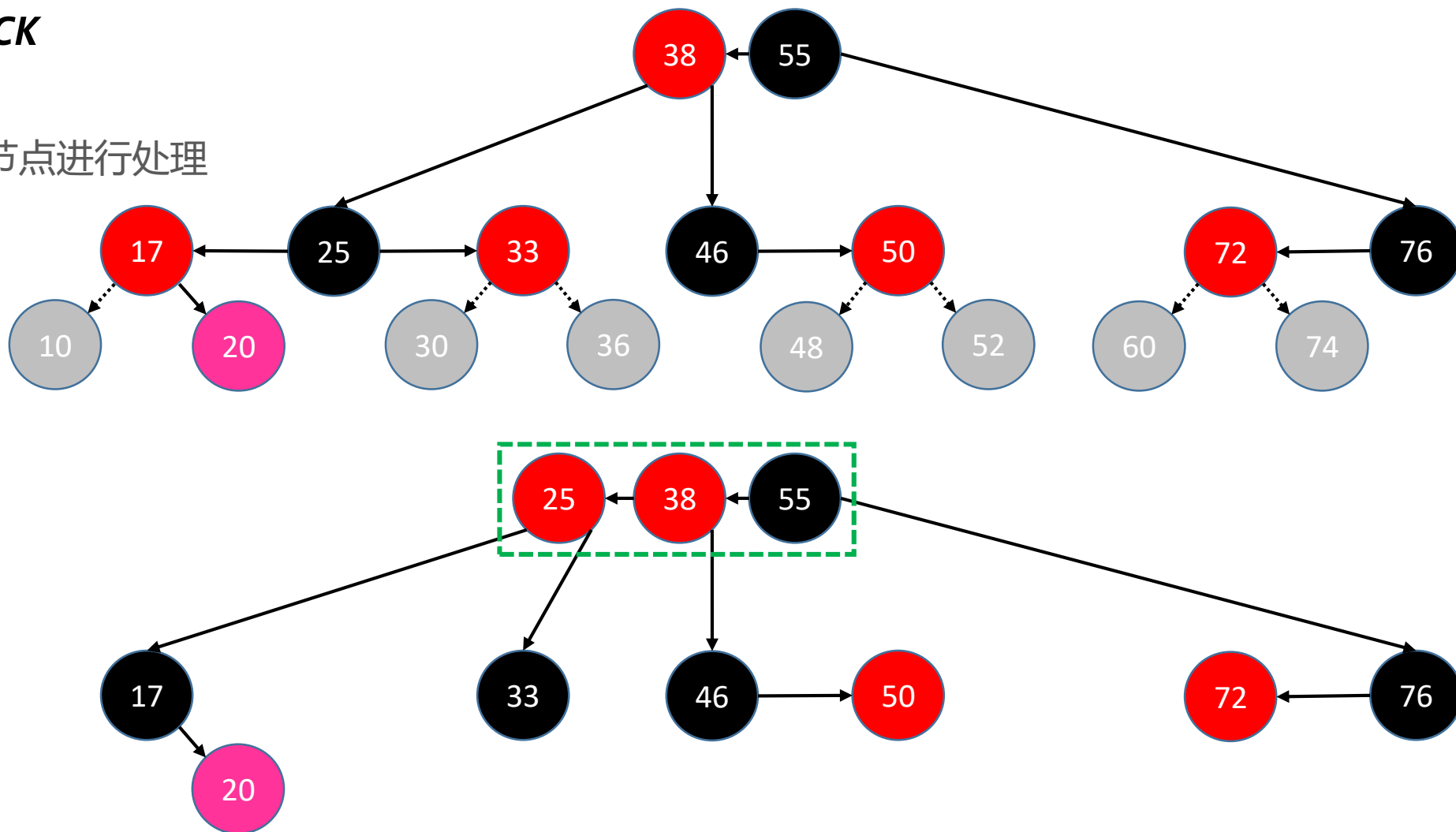
添加 - 修复性质4 - 上溢 - LR

■ 判定条件: **uncle** 是 **RED**

1. **parent**、**uncle** 染成 **BLACK**

2. **grand** 向上合并

□ 染成 **RED**, 当做是新添加的节点进行处理



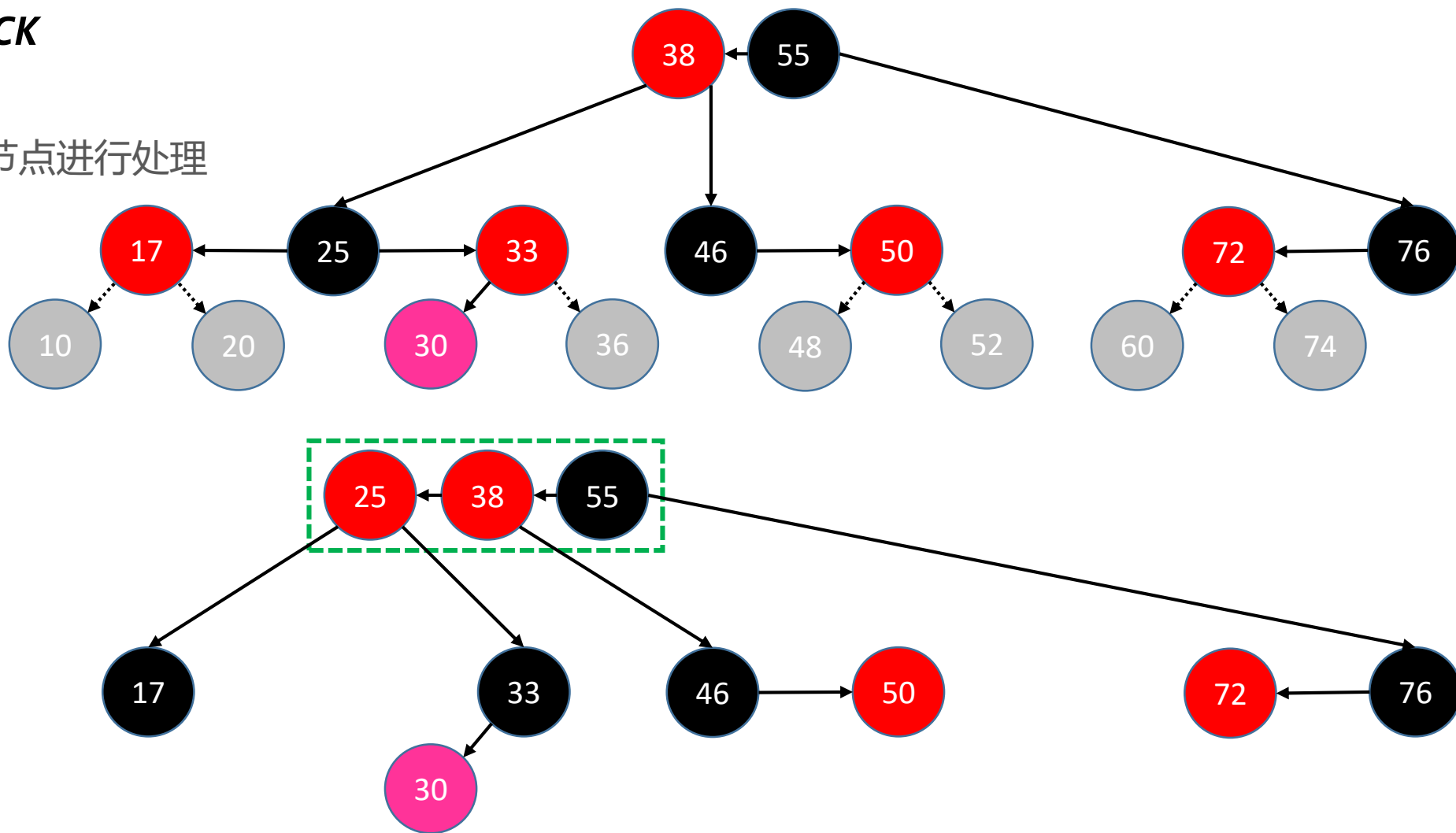
添加 - 修复性质4 - 上溢 - RL

■ 判定条件: **uncle** 是 **RED**

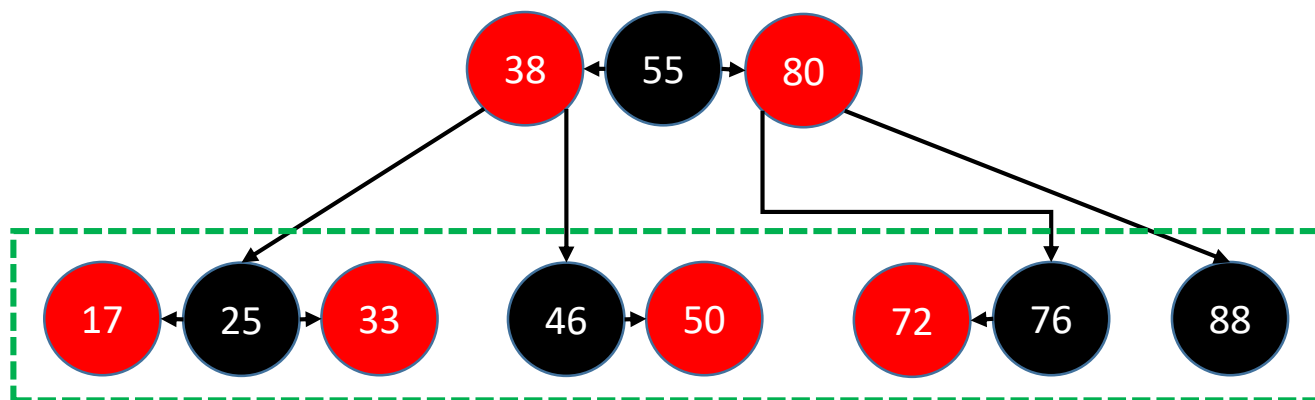
1. **parent**、**uncle** 染成 **BLACK**

2. **grand** 向上合并

□ 染成 **RED**, 当做是新添加的节点进行处理

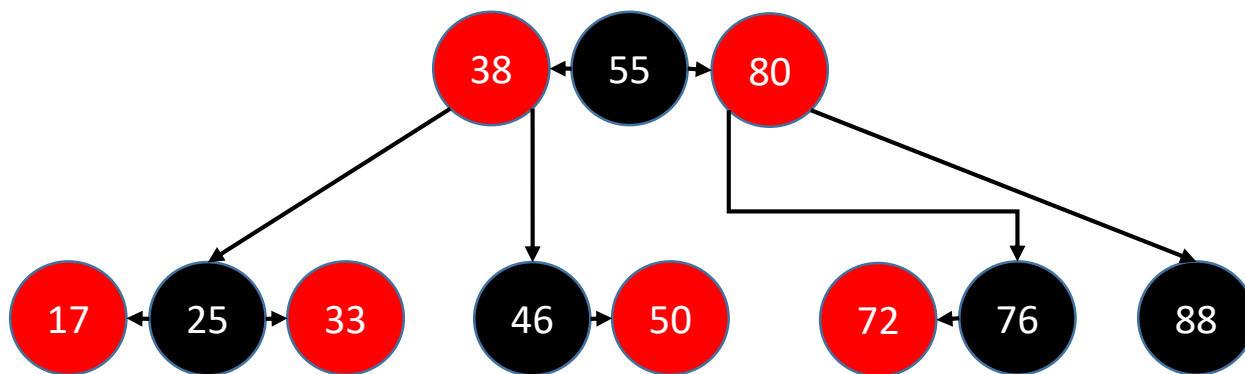


- B树中，最后真正被删除的元素都在叶子节点中



删除 - RED节点

■ 直接删除，不用作任何调整



删除 – BLACK节点

■ 有 3 种情况

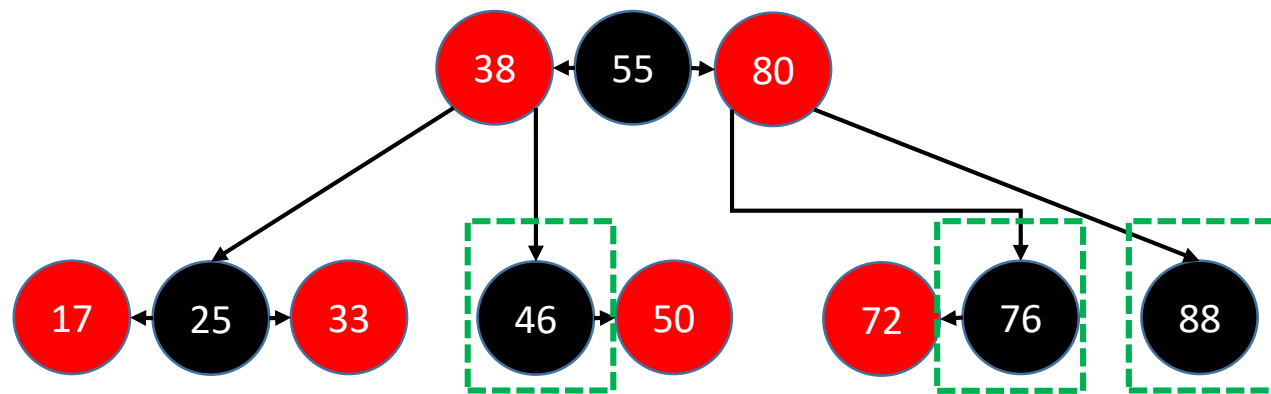
□ 拥有 2 个 **RED** 子节点的 **BLACK** 节点

✓ 不可能被直接删除，因为会找它的子节点替代删除

✓ 因此不用考虑这种情况

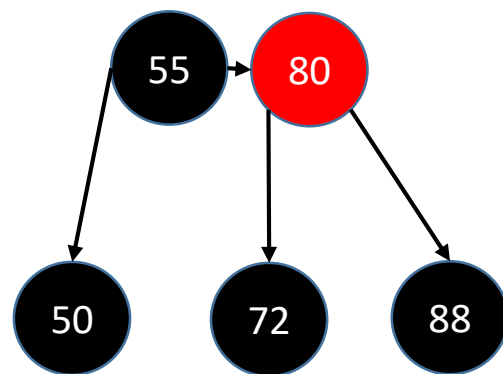
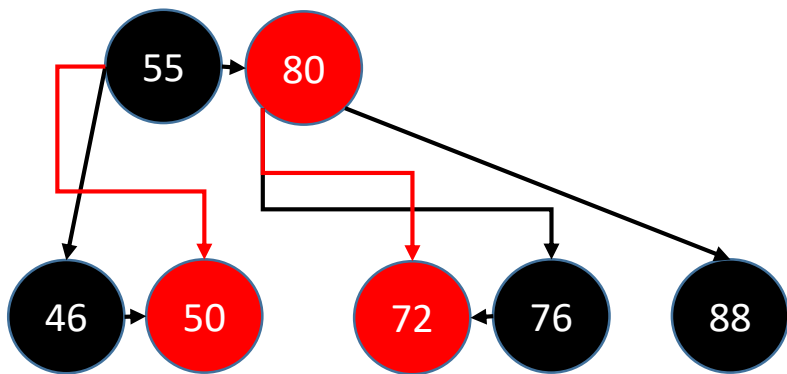
□ 拥有 1 个 **RED** 子节点的 **BLACK** 节点

□ **BLACK** 叶子节点



删除 – 拥有1个RED子节点的BLACK节点

- 判定条件：用以替代的子节点是 **RED**
- 将替代的子节点染成 **BLACK** 即可保持红黑树性质



删除 – BLACK叶子节点 – sibling为BLACK

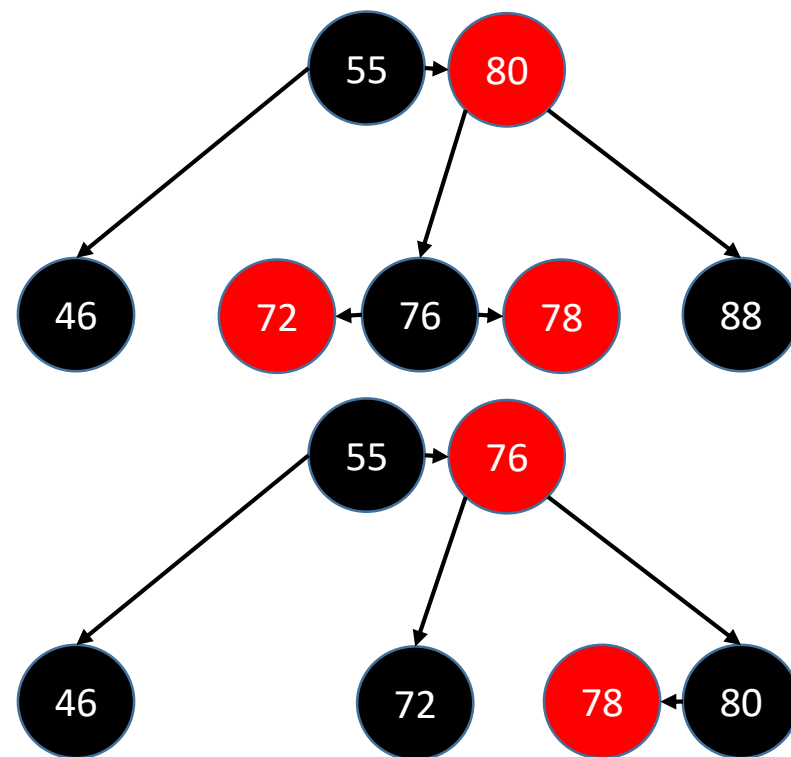
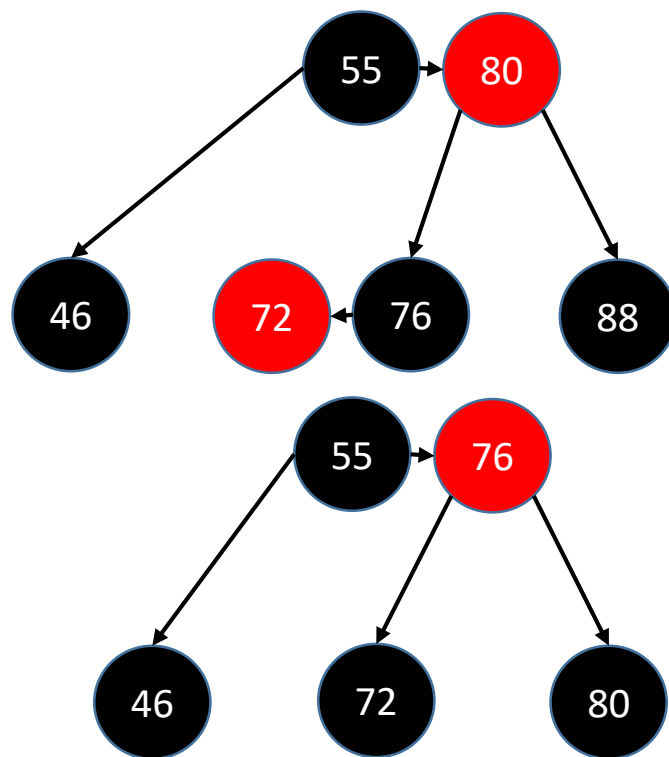
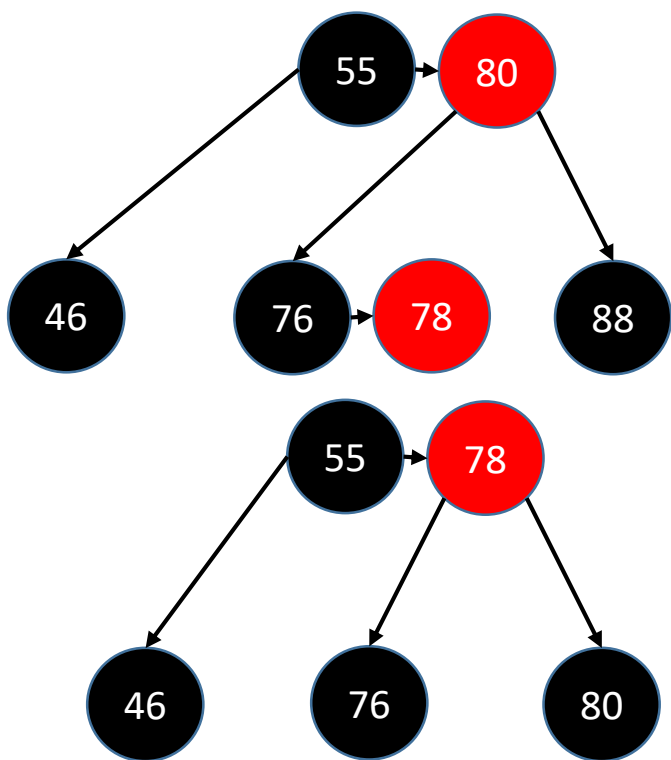
■ **BLACK** 叶子节点被删除后，会导致B树节点下溢（比如删除88）

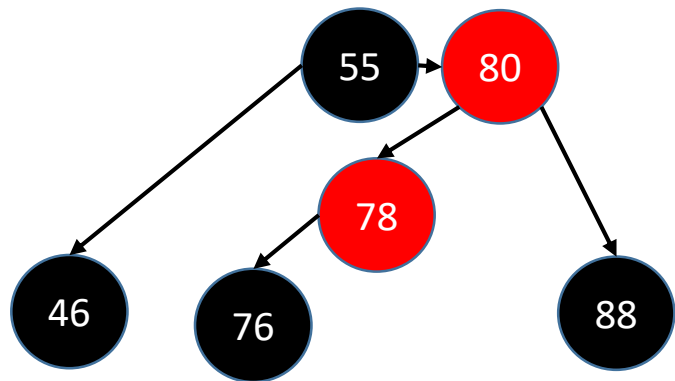
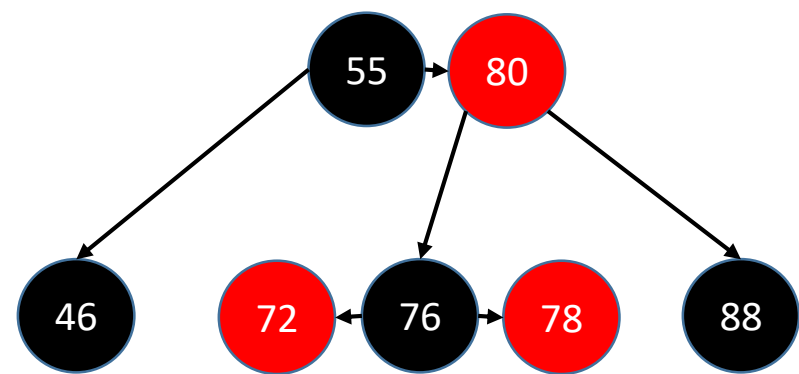
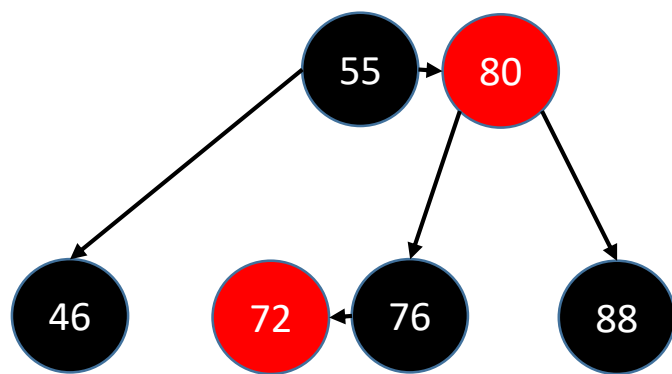
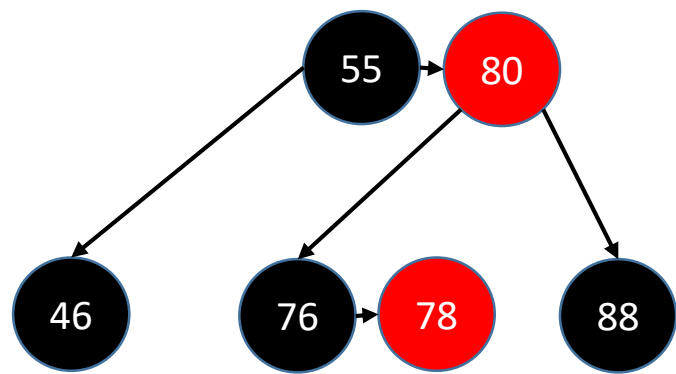
■ 如果 **sibling** 至少有 1 个 **RED** 子节点

□ 进行旋转操作

□ 旋转之后的中心节点继承 **parent** 的颜色

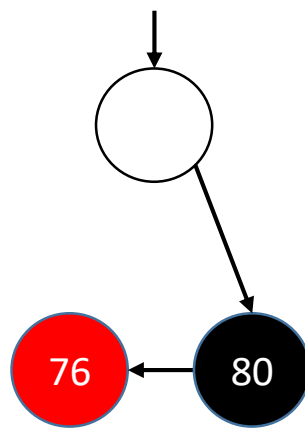
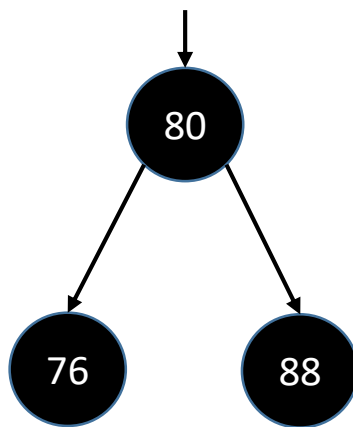
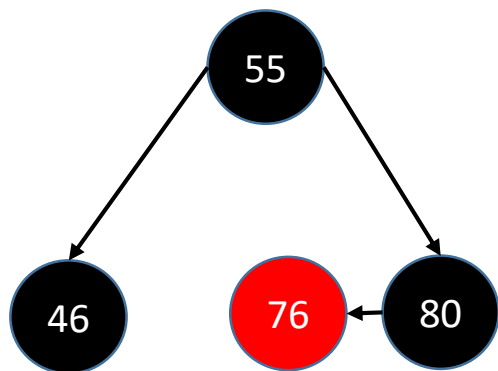
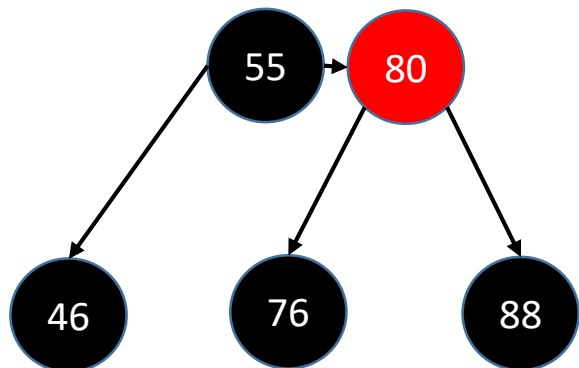
□ 旋转之后的左右节点染为 **BLACK**





删除 – BLACK叶子节点 – sibling为BLACK

- 判定条件: **sibling** 没有 1 个 **RED** 子节点
- 将 **sibling** 染成 **RED**、**parent** 染成 **BLACK** 即可修复红黑树性质



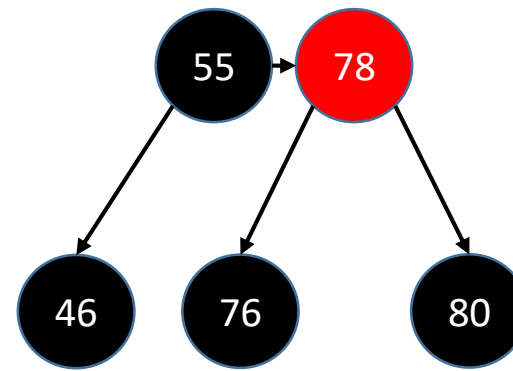
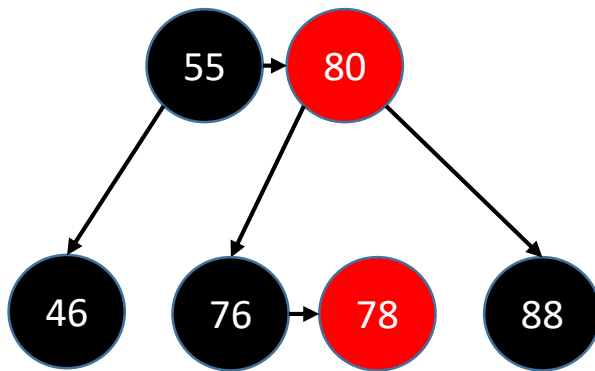
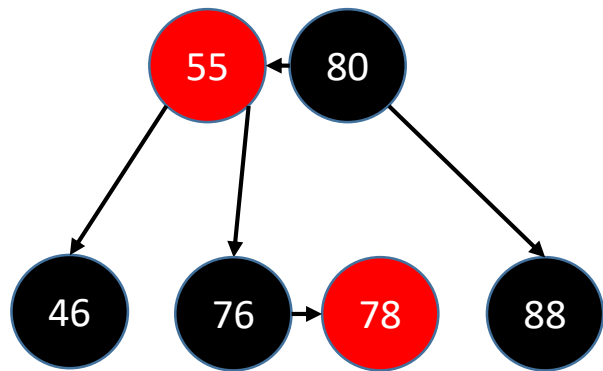
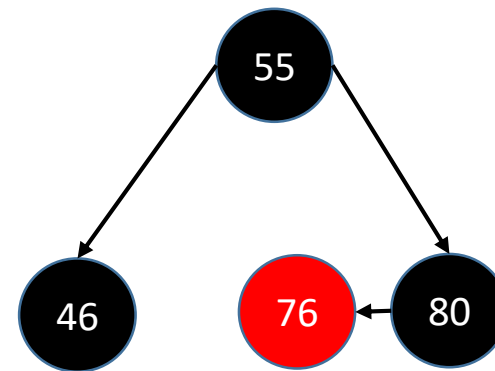
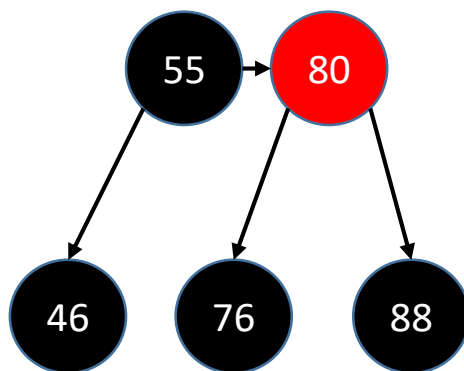
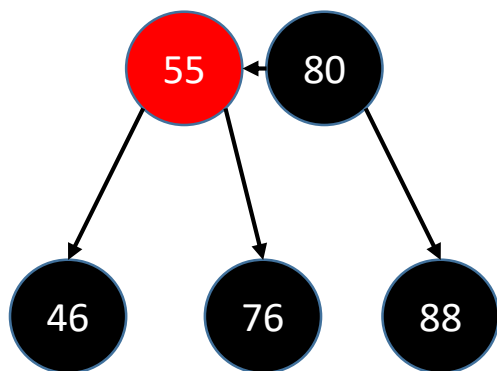
- 如果 **parent** 是 **BLACK**
- 会导致 **parent** 也下溢
- 这时只需要把 **parent** 当做被删除的节点处理即可

删除 – BLACK叶子节点 – sibling为RED

■ 如果 sibling 是 **RED**

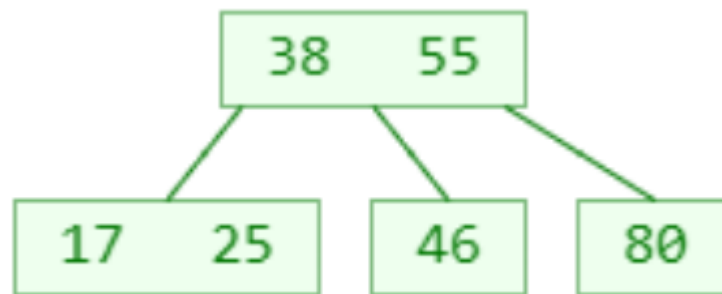
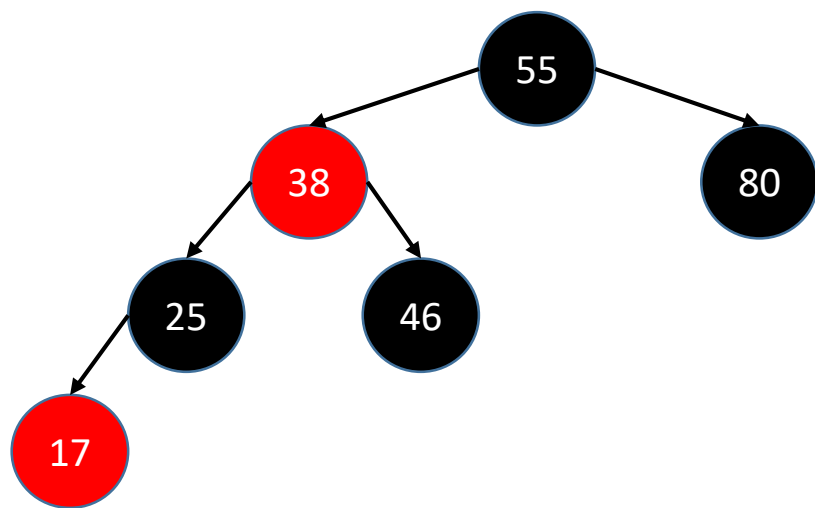
□ sibling 染成 **BLACK**, parent 染成 **RED**, 进行旋转

□ 于是又回到 sibling 是 **BLACK** 的情况



红黑树的平衡

- 最初遗留的困惑：为何那5条性质，就能保证红黑树是平衡的？
- 那5条性质，可以保证 红黑树 等价于 4阶B树



- 相比AVL树，红黑树的平衡标准比较宽松：没有一条路径会大于其他路径的2倍
- 是一种弱平衡、黑高度平衡
- 红黑树的最大高度是 $2 * \log_2(n + 1)$ ，依然是 $O(\log n)$ 级别

平均时间复杂度

- 搜索: $O(\log n)$
- 添加: $O(\log n)$, $O(1)$ 次的旋转操作
- 删除: $O(\log n)$, $O(1)$ 次的旋转操作

AVL树 vs 红黑树

■ AVL树

- 平衡标准比较严格：每个左右子树的高度差不超过1
- 最大高度是 $1.44 * \log_2(n + 2) - 1.328$ (100W个节点, AVL树最大树高28)
- 搜索、添加、删除都是 $O(\log n)$ 复杂度, 其中添加仅需 $O(1)$ 次旋转调整、删除最多需要 $O(\log n)$ 次旋转调整

■ 红黑树

- 平衡标准比较宽松：没有一条路径会大于其他路径的2倍
- 最大高度是 $2 * \log_2(n + 1)$ (100W个节点, 红黑树最大树高40)
- 搜索、添加、删除都是 $O(\log n)$ 复杂度, 其中添加、删除都仅需 $O(1)$ 次旋转调整

- 搜索的次数远远大于插入和删除, 选择AVL树; 搜索、插入、删除次数几乎差不多, 选择红黑树
- 相对于AVL树来说, 红黑树牺牲了部分平衡性以换取插入/删除操作时少量的旋转操作, 整体来说性能要优于AVL树
- 红黑树的平均统计性能优于AVL树, 实际应用中更多选择使用红黑树

BST vs AVL Tree vs Red Black Tree

10, 35, 47, 11, 5, 57, 39, 14, 27, 26, 84, 75, 63, 41, 37, 24, 96

