

### שאלה 1

- (15 נק') א. יהיו  $A, B$  קבוצות. נתון כי  $A \not\subseteq B$ . הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:
- (i) אם  $A \cup B$  היא שקולה ל- $A$  אז  $A \cup B$  היא קבוצה אינסופית.
- (ii) אם  $A \cup B$  היא שקולה ל- $B$  אז  $A \cup B$  היא קבוצה אינסופית.
- (10 נק') ב. נתונות קבוצות  $S, T$ . הוכח שאם  $\{ \emptyset \} \subset P(S) \cap P(T)$  אז  $S \cap T \neq \emptyset$ .

### שאלה 2

- (12 נק') א. נתונים חבורה  $G$  ביחס לפעולה  $*$  ו- $e, a, b, c$  ארבעה איברים שונים שלה. ידוע כי  $e$  הוא האיבר הניטרלי וכי  $a * b = b * c$ . הוכח כי ל- $G$  יש לפחות חמישה איברים שונים.
- (13 נק') ב. על קבוצת המספרים השלמים האי-שליליים  $\mathbb{N}_0$  מגדירים פעולה בינרית  $\Delta$  כך:
- $$x \Delta y = 3xy + x + y, \quad x, y \in \mathbb{N}_0$$
- אלו מהתכונות שבהגדרת מושג החבורה מקיימת פעולה זו? נמק כל טענותיך.

### שאלה 3

- נתונות קבוצה  $A$  ופונקציות  $f, g$  פונקציות מ- $A$  ל- $A$ .
- הוכח או הפרך כל אחת מן הטענות הבאות:
- (9 נק') א. אם  $g \circ f$  היא חד-חד-ערכית אז  $g$  היא על.
- (8 נק') ב. אם  $g \circ f$  היא חד-חד-ערכית אז  $f$  היא חד-חד-ערכית.
- (8 נק') ג. אם  $g \circ f$  היא על אז  $f$  היא על.

### שאלה 4

- יהיו  $f$  איזומטריה של המישור,  $S_\ell$  שיקוף ביחס לישר  $\ell$  ו- $A$  נקודה במישור. נתון כי
- $$f(A) = S_\ell(A)$$
- (12 נק') א. הוכח כי  $A$  נקודת שבת של  $S_\ell \circ f$ .
- (13 נק') ב. הוכח שאם  $f$  היא הזזה אז  $S_\ell \circ f$  היא שיקוף.

## שאלה 5

לפניך מערכת אקסיומות שמושגי היסוד בה הם: "נקודה", "ישר" (כקבוצה של נקודות), והיחס "נמצאת על".

1. לכל שתי נקודות שונות  $A, B$  קיימים שני ישרים שונים  $\ell_1, \ell_2$  כך ש-  $A, B$  נמצאות גם על

וגם  $\ell_1$  ועל  $\ell_2$ .

2. לכל ישר  $\ell$  ולכל נקודה  $P$  שאינה על  $\ell$  קיים לפחות ישר אחד אשר  $P$  נמצאת עליו ואין לו נקודה משותפת עם  $\ell$ .

3. יש בדיוק ארבע נקודות.

6 נק' א. הוכח כי המערכת חסרת סתירה.

6 נק' ב. הוכח כי המערכת אינה קטגורית.

6 נק' ג. הוכח כי המערכת היא בלתי תלויה.

7 נק' ד. הוכח כי במערכת מתקיים המשפט הבא: "קיים ישר שעליו לפחות שלוש נקודות".

## שאלה 6

13 נק' א. יהי  $n$  מספר טבעי. ידוע כי שארית החילוק של  $n$  ב- 7 היא 5 ושארית החילוק

של  $n$  ב- 12 היא 11. מהי שארית החילוק של  $n$  ב- 42? נמק כל טענותיך.

12 נק' ב. הוכח באינדוקציה שלכל מספר טבעי  $n \geq 2$  מתקיים:

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} < \frac{n+3}{2}$$

סוף.