פתרון ממ"ן 11

שאלה 1

יהיו A ו- B הקבוצות הבאות:

$$B = \{1, 16, 81, \dots\} = \{n^4 \mid n \in \mathbf{N}\} \quad , \quad A = \{1,4,9,\dots\} = \{n^2 \mid n \in \mathbf{N}\}$$

א. בנה התאמה חד-חד-ערכית בין A ו- B.

ב. בנה התאמה שאינה חד-חד-ערכית בין A ו- B.

ג. מהי מסקנתך מסעיפים א' ו- ב': האם A ו- B שקולות? נמק!

ד. האם נובע מן הסעיפים הקודמים כי A אינסופית? נמק!

תשובה

א. לכל n טבעי, נתאים את האיבר n^2 השייך ל- A לאיבר n^4 השייך ל- B. בדרך זו, התאמנו לכל איבר של A איבר אחד ויחיד של B, ולכל איבר של B התאמנו איבר אחד ויחיד של A, כלומר בנינו התאמה חד-חד-ערכית בין שתי הקבוצות.

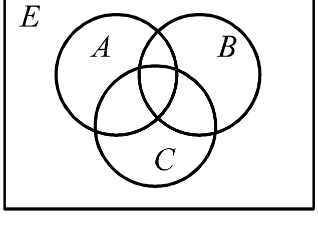
ב. לכל איבר של A נתאים למשל את האיבר 1 השייך ל- B. ברור שההתאמה הזו אינה חד-חד-ערכית, כי לאיבר 1 של B מתאימים איברים רבים של A, ולשאר איברי B לא מתאים אף איבר של A.

ג. על-פי ההגדרה, שתי קבוצות הן שקולות אם קיימת התאמה חד-חד-ערכית ביניהן. בסעיף א' מצאנו התאמה חד-חד-ערכית בין A ל- B, לפיכך הקבוצות האלה שקולות. (כדאי להעיר שבין שתי קבוצות שקולות ייתכנו גם התאמות שאינן חד-חד-ערכיות, כפי שראינו בסעיף ב').

ד. לפי ההגדרה, קבוצה היא אינסופית אם יש לה קבוצה חלקית ממש ששקולה לה. בסעיפים הקודמים לא הוכחנו עובדה זו. אמנם, כדאי לציין כאן את העובדה כי הקבוצה B היא חלקית ממש ל- A, (שכן, לכל $x \in B$ מתקיים $x \in A$ לכן $B \subseteq A$ ומצד שני $4 \in A$ אבל $4 \notin B$, מכאן ש- $B \subset A$). לכן, אם נצרף זאת לעובדה ש- A שקולה ל- B (שהוכחנו בסעיף א') נקבל ש- A אינסופית.

שאלה 2

באיור שלפניך דיאגרמת ון המתארת את היחסים בין שלוש קבוצות כלשהן A, B ו- C שחלקיות לקבוצה E. קווקו בדיאגרמות ון (שונות) את השטח המתאר את הקבוצות הבאות:



א. $B \setminus (A \setminus C)$

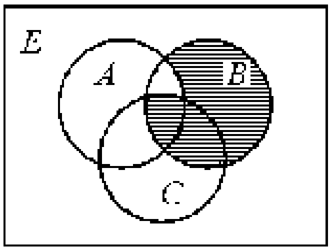
ב. $B \setminus (C \setminus A)$

ג. $((A \setminus B) \setminus C) \cup (A \cap B^c(E) \cap C^c(E))$

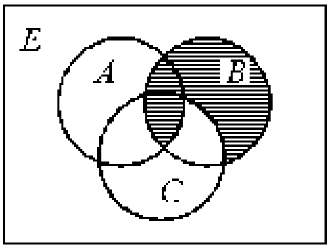
ד. $(A \cup B)^c(E) \cup (B \cup C)^c(E) \cup (C \cup A)^c(E)$

ה. $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$

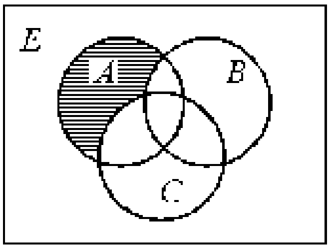
תשובה



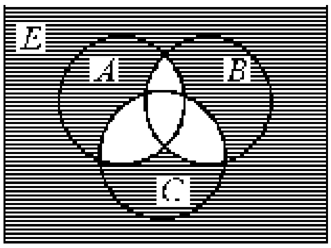
א.



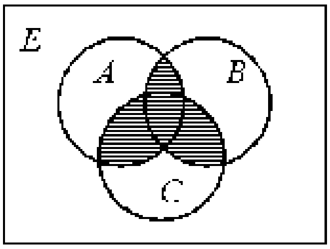
ב.



ג.



ד.



ה.

שאלה 3

יהיו A, B קבוצות. נתון כי לכל $x \in B$ הקבוצה $A \setminus \{x\}$ היא שקולה ל- A.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות :

א.אם A קבוצה סופית אז $A \cap B = \emptyset$.

ב.אם B קבוצה סופית אז $A \cap B = \emptyset$.

תשובה

א. עלינו להוכיח כי $A \cap B = \emptyset$. נניח בדרך השלילה כי $A \cap B \neq \emptyset$. אז קיים איבר $x \in A \cap B$ ולפי הגדרת החיתוך, $x \in A$ וגם $x \in B$. מאחר ש- $x \in B$, על-פי הנתון נובע כי הקבוצה $A \setminus \{x\}$ שקולה ל- A. אבל לפי הגדרת ההפרש בין קבוצות, הרי כי $A \setminus \{x\} \subseteq A$. כמו-כן $x \in A$ ולכן $x \notin A \setminus \{x\}$ ומכאן ש- $A \setminus \{x\} \subset A$. לפיכך מצאנו שקיימת קבוצה ($A \setminus \{x\}$) החלקית ממש ל- A וגם שקולה ל- A ואז נובע כי A היא קבוצה אינסופית, בניגוד לנתון. מכאן שההנחה כי $A \cap B \neq \emptyset$ הייתה שגויה ומכאן ש- $A \cap B = \emptyset$.

II. הטענה לא נכונה. נפריך אותה על-ידי דוגמה נגדית. נבחר למשל $A = \mathbf{N}$, $B = \{1\}$. אז לכל $x \in B$ הקבוצה $A \setminus \{x\}$ היא שקולה ל- A שכן, קיים איבר יחיד ($x = 1$) ב- B, והקבוצה $A \setminus \{1\} = \mathbf{N} \setminus \{1\}$ שקולה ל- A (למשל ההתאמה שמתאימה לכל איבר $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ את האיבר $n - 1 \in \mathbf{N}$ היא חד-חד ערכית). למרות שכל התנאים האלה מתקיימים, $A \cap B = \mathbf{N} \cap \{1\} \neq \emptyset$. הדוגמה מפריכה את הטענה.

שאלה 4

יהיו A, B קבוצות. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $A = A \setminus B$ אז $A = \varnothing$.

ב. אם $A = A \setminus B$ אז $A \cap B = \varnothing$.

ג. אם A שקולה ל- $A \setminus B$ אז $A \cap B = \varnothing$.

ד. אם A סופית ו- A שקולה ל- $A \setminus B$ אז $A \cap B = \varnothing$.

תשובה

א. הטענה לא נכונה. נפריך אותה על-ידי דוגמה נגדית. נבחר למשל $A = \{1\}$, $B = \{2\}$. אז $A \setminus B = \{1\} = A$ אבל $A \neq \varnothing$.

II. הטענה נכונה. נניח בדרך השלילה ש- $A = A \setminus B$ אבל $A \cap B \neq \varnothing$. אז קיים איבר $x \in A \cap B$, כלומר $x \in A$ ו- $x \in B$. אבל אז, לפי הגדרת ההפרש בין קבוצות נובע כי $x \notin A \setminus B$, למרות ש- $x \in A$. הדבר סותר את הנתון כי $A = A \setminus B$, וסתירה זו מוכיחה כי ההנחה $A \cap B \neq \varnothing$ היא שגויה. מכאן ש- $A \cap B = \varnothing$.

III. הטענה לא נכונה. נפריך אותה על-ידי דוגמה נגדית. נבחר למשל $A = \mathbf{N}$ ו- $B = \{1\}$. אז הקבוצות A ו- $A \setminus B$ הן שקולות (למשל, ההתאמה שמתאימה לכל איבר $n \in \mathbf{N}$ את האיבר $n+1 \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ היא התאמה חד-חד-ערכית בין A ל- $A \setminus B$). בכל זאת, $A \cap B = \{1\} \neq \varnothing$ והטענה מופרכת.

IV. הטענה נכונה. נתון כי הקבוצות A ו- $A \setminus B$ הן שקולות. כמו כן, מתקיים $A \setminus B \subseteq A$. מצד שני, נתון כי הקבוצה A היא קבוצה סופית, לכן אין ל- A קבוצה חלקית ממש ששקולה לה. מכאן ש- $A \setminus B$ אינה חלקית ממש ל- A ולכן, בהכרח, $A = A \setminus B$. אבל אז, כפי שהוכחנו בסעיף ב' מתקיים $A \cap B = \varnothing$ כפי שרצינו להוכיח.