

מטלת מנחה (ממ"ן) 19

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית חומר הלימוד למטלה: לוגיקה סעיפים 3.1 - 3.10

מספר השאלות: 4 משקל המטלה: 3 נקודות

סמסטר: 2009 מועד אחרון להגשה: יום ו' 6.2.09

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (24 נקודות)

קבע לכל אחד מהביטויים הבאים אם הוא שם-עצם, תבנית אטומית, תבנית שאינה אטומית, פסוק, או שאינו עונה על אף אחת מהגדרות אלו. כתיב מקוצר - מותר. שים לב שביטוי יכול להתאים ליותר מהגדרה אחת: פסוק יכול להיות תבנית אטומית או תבנית לא אטומית.

א. $f_1^3(x_1, f_1^2(x_2), a_1)$ ב. $A_1^3(x_1, \sim(x_2), a_1)$ ג. $\sim A_1^3(x_1, x_2, a_1)$

ד. $A_1^3(x_1, f_1^1(x_2), a_1)$ ה. $f_1^3(A_1^3(x_1, x_2, a_1), x_2, a_1)$ ו. $\exists x_1 A_1^3(a_1, a_2, x_1)$

ז. $\forall x_1 f_1^1(x_1)$ ח. $\forall x_1 (A_1^3(x_1, a_1, a_1) \vee \forall x_2 A_1^3(x_1, x_2, a_1))$

שאלה 2 (26 נקודות)

תהי L שפה חלקית לשפת תחשיב הפרדיקטים, ובה סימנים אלה: קשרים לוגיים, סוגרים, סימני משתנים x_1, x_2, \dots , סימן פרדיקט דו-מקומי אחד R , סימן הכמת \forall . אין סימני פונקציות או פרדיקטים נוספים ואין סימני קבועים אישיים. נתבונן בתבניות הבאות ב- L , בכתיב מקוצר:

$$\psi_1 = \forall x_1 R(x_1, x_1) \quad \psi_2 = \forall x_1 \forall x_2 (R(x_1, x_2) \rightarrow R(x_2, x_1))$$

$$\psi_3 = \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 ((R(x_1, x_2) \wedge R(x_2, x_3)) \rightarrow R(x_1, x_3))$$

א. כמה אינטרפרטציות שונות J של השפה L קיימות, שעולמן (תחום האינטרפרטציה) הוא הקבוצה $\{1, 2, 3\}$, וכך שהתבניות ψ_1, ψ_2, ψ_3 כולן אמיתיות ב- J ? הסבר.

ב. נוסף לשפה L סימן פרדיקט דו-מקומי נוסף, Q .

התבניות ψ_1, ψ_2, ψ_3 נשארות ללא שינוי.

מה כעת התשובה לשאלה שבסעיף א? המספר שונה מהתוצאה של לסעיף א, מכיוון שאנו סופרים אינטרפרטציות של השפה, ואינטרפרטציה צריכה כעת לתת פירוש גם לסימן Q . (המשך השאלה בעמ' הבא)

- ג. בהמשך לסעיף ב, נוסיף לשפה גם סימן פונקציה חד-מקומית f_1^1 וסימן קבוע אישי a .
ענה שוב על אותה שאלה, לגבי השפה הזו.

שאלה 3 (26 נקודות)

חמש הטענות הבאות עוסקות בדפים ברשת (web pages):

1. קיים דף נוח לשימוש שאינו מעוצב יפה וקיים דף בעל עיצוב יפה שאינו נוח לשימוש.
2. כל דף נוח לשימוש מכיל הפניה לדף שהוא מעוצב יפה או נוח לשימוש.
3. יש דף, שכל ההפניות בו הן רק לדפים שאינם מעוצבים יפה.
4. כל דף שמכיל הפניה לעצמו אינו נוח לשימוש.
5. יש דף, שאף אחד מהדפים שהוא מפנה אליהם אינו מפנה חזרה אליו.

נסמן $U(x)$: x הוא דף נוח לשימוש; $D(x)$: x הוא דף בעל עיצוב יפה.

יהי K סימן יחס נוסף. **תן פירוש מתאים ל- K בעולם שהוא קבוצת כל הדפים ברשת, ורשום תבניות $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5$ המייצגות בהתאמה את הטענות 1,2,3,4,5 בעולם זה.**

שים לב:

- * ציין איך מתפרש K , ואם הוא יחס חד-מקומי, דו-מקומי או אחר.
- * סימני היחסים היחידים בהם מותר להשתמש הם U, D, K . אין סימני פונקציות ואין קבועים.
- אין גם סימן עבור יחס השוויון. יתר מרכיבי השפה: הקשרים הלוגיים $\sim, \rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee$,
- סוגריים, הכמתים \forall, \exists וסימני משתנים כגון x, y, z עומדים לרשותך.
- * אין צורך בסימן עבור התכונה " x הוא דף ברשת", כי עולם האינטרפרטציה מכיל רק דפים ברשת.
- * כתיב מקוצר - מותר. במקום שייתכן ספק בקריאה, ובפרט ליד כמתים, הקפד לשים סוגרים.

שאלה 4 (24 נקודות)

השאלה עוסקת בשפה של תחשיב הפרדיקטים, שבה S, R הם סימני פרדיקטים חד-מקומיים.

א. הוכח שהפסוק $\exists x(R(x) \wedge S(x))$ והפסוק $(\exists x R(x)) \wedge (\exists x S(x))$

אינם שקולים לוגית זה לזה.

כדי להוכיח עליך להציג אינטרפרטציה שבה לשני הפסוקים ערכי אמת שונים זה מזה.

ב. הראה כי אחד משני הפסוקים הנ"ל (**איזה?**) גורר לוגית את האחר.

אין צורך בהוכחה פורמלית מלאה, די בהסבר מילולי.

ג. האם הפסוק $\exists x(R(x) \vee S(x))$ שקול לוגית לפסוק $(\exists x R(x)) \vee (\exists x S(x))$?

אם לא, הוכח בעזרת אינטרפרטציה מתאימה. אם כן, תן הסבר מילולי.