תשובה 1

א. את הערך $k = 0$ ניתן להשמיט מהסכום, כי תרומתו היא 0, בשל הכפל ב- k באמצע.

כעת בעזרת הזהות $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ (ר' תחתית עמ' 71 בספר הלימוד),

הסכום המבוקש הוא: $n \cdot \sum_{k=1}^{n} 3^k \cdot \binom{n-1}{k-1}$.

נסמן $i = k - 1$, ונכתוב את הסכום מחדש (שימו לב להתאמת גבולות הסכימה עם החלפת משתנה הסכימה):

$$n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 3^{i+1} \cdot \binom{n-1}{i} = 3n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 3^i \cdot \binom{n-1}{i}.$$

כעת, מנוסחת הבינום, $\sum_{i=0}^{n-1} 3^i \cdot \binom{n-1}{i} = (3+1)^{n-1} = 4^{n-1}$.

הביטוי הנתון כולו שווה אפוא $3n \cdot 4^{n-1}$.

ב. $\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \dfrac{n!}{i!(n-k)!(k-i)!}$.

נציב ונקבל:

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} (-3)^i \binom{n}{k}\binom{k}{i} = \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} \sum_{i=0}^{k} (-3)^i \binom{k}{i}\right] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-3+1)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^k = (-2+1)^n = (-1)^n$$

נעזרנו פעמיים בנוסחת הבינום. מומלץ לבדוק את התוצאה עבור n קטן כלשהו !

תשובה 2

א. $(4 \cdot 4)^3 = 16^3 = 4{,}096$

ב. תהי U קבוצת **כל** הפונקציות של B ל- $A \times A$. מהסעיף הקודם $|U| = 4{,}096$.

עבור $i = 1,2,3,4$, תהי F_i קבוצת הפונקציות f השייכות ל- U, אשר i **אינו** נמצא כאיבר ימני ואינו נמצא כאיבר שמאלי **באף אחד** מהזוגות שבתמונת f .

למשל הפונקציה g בדוגמא שבתרגיל שייכת ל- F_3 וגם ל- F_4 .

אנו מחפשים את גודל הקבוצה $U - \bigcup_{i=1}^{4} F_i$.

את F_1 ניתן לראות כקבוצת הפונקציות של B לקבוצה $\{2,3,4\} \times \{2,3,4\}$.

לכן, בדומה לסעיף א, $|F_1| = (3 \cdot 3)^3 = 729$.

בדומה מובן כי עבור $i = 1,2,3,4$, $|F_i| = 729$.

נחשב חיתוכים בזוגות:

את $F_1 \cap F_2$ ניתן לראות כקבוצת הפונקציות של B לקבוצה $\{3,4\} \times \{3,4\}$.

לכן $\left|F_1 \cap F_2\right| = (2 \cdot 2)^3 = 64$.

מובן כי לכל $i \neq j$ זהו גם $|F_i \cap F_j|$. יש 6 חיתוכים בזוגות

חיתוכים משולשים:

כל חיתוך כזה הוא קבוצת הפונקציות של B לקבוצה בת איבר אחד. יש בדיוק פונקציה אחת השולחת את כל אברי B לאיבר קבוע. לכן עבור i,j,k שונים זה מזה, $|F_i \cap F_j \cap F_k| = 1$.

יש 4 חיתוכים משולשים.

החיתוך $F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4$ הוא ריק.

מעקרון ההכלה וההפרדה,

$$\left|U - \bigcup_{i=1}^{4} F_i\right| = |U| - 4|F_i| + 6|F_1 \cap F_2| - 4|F_1 \cap F_2 \cap F_3|$$

$$= 4{,}096 - 4 \cdot 729 + 6 \cdot 64 - 4 \cdot 1 = 1{,}560$$

תשובה 3

תהי U קבוצת הפתרונות של $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ בטבעיים **ללא הגבלה**.

$|U| = D(4,20) = \binom{23}{3} = 1,771$.

נסמן :

A_1 : קבוצת הפתרונות של המשוואה בטבעיים, כאשר $x_1 = 5$.

A_2 : קבוצת הפתרונות של המשוואה בטבעיים, כאשר $x_2 = 5$.

A_3 : קבוצת הפתרונות של המשוואה בטבעיים, כאשר $x_3 = 8$.

A_4 : קבוצת הפתרונות של המשוואה בטבעיים, כאשר $x_4 = 8$.

מספר אברי A_1 הוא כמספר הפתרונות למשוואה $x_2 + x_3 + x_4 = 15$,

לכן $|A_1| = D(3,15) = \binom{17}{2} = 136$.

מובן ש- $|A_1| = |A_2|$.

מספר אברי A_3 הוא כמספר הפתרונות למשוואה $x_1 + x_2 + x_4 = 12$,

לכן $|A_3| = D(3,12) = \binom{14}{2} = 91$.

מובן ש- $|A_3| = |A_4|$.

חיתוכים בזוגות:

מספר אברי $A_1 \cap A_2$ הוא כמספר הפתרונות למשוואה $x_3 + x_4 = 10$,

לכן $|A_1 \cap A_2| = D(2,10) = 11$.

בדומה :

$|A_1 \cap A_3| = |A_1 \cap A_4| = |A_2 \cap A_3| = |A_2 \cap A_4| = D(2,7) = 8$,

$|A_3 \cap A_4| = D(2,4) = 5$.

חיתוכים של 3 קבוצות:

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = 1$. שאר החיתוכים המשולשים ריקים.

ולבסוף:

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$.

לפי עקרון ההכלה וההפרדה, מספר הפתרונות המבוקש בשאלה הוא:

$$1{,}771 - (136 + 136 + 91 + 91) + (11 + 4 \cdot 8 + 5) - (1 + 1) \quad = \quad 1{,}363$$

תשובה 4

נסתכל בסדרה של המספרים הבנויים (בכתיב עשרוני) רק מחזורות על המחרוזת s:

s , ss , sss , $sssss$, ...

למשל אם s הוא 2274, אנו מסתכלים בסדרת המספרים

2274 , 22742274 , 227422742274 , ...

.

לכל אחד מאברי הסדרה הזו, נתבונן בשארית שלו בחילוק ב- n.

יש n שאריות שונות אפשריות בחילוק ב- n, בעוד שאת הסדרה האמורה ניתן להמשיך כרצוננו. לפיכך חייבים להיות שני מספרים בסדרה שנותנים אותה שארית (שובך יונים: זה קורה לכל היותר כעבור $n + 1$ איברים בסדרה). נבחר אפוא שני מספרים כאלה בסדרה.

יהי a ההפרש בין שני המספרים האלה, הגדול פחות הקטן.

a הוא הפרש של שני מספרים שנותנים אותה שארית בחילוק ב- n, לכן a מתחלק ב- n.

אך a אינו איבר בסדרה הנ"ל, ואינו מהווה אפוא פתרון לשאלה!

מחיסור "כמו בבית ספר", צורתו של a היא, משמאל לימין:

רצף של הופעות של s (הופעה אחת לפחות) ואחריו רצף של אפסים (אפס אחד לפחות).

a מתחלק ב- 10 פעם אחת או יותר, כמספר האפסים שמופיעים בסופו.

כאמור a מתחלק גם ב- n.

נשים לב ש- n ו- 10 הם מספרים זרים זה לזה:

הגורמים של 10 הם 2,5, בעוד שהספרה הימנית של n היא 7,3,1, או 9,

לכן n אינו מתחלק ב- 2 או ב- 5, ולכן הוא זר ל- 10.

לכן, לפי הטענה שהוזכרה בהדרכה,

אם נחלק את a ב- 10 התוצאה עדיין תתחלק ב- n.

נעשה זאת, ונפטרנו מהאפס האחרון ב- a.

נמשיך ונחלק ב- 10 ככל שצריך: כמספר האפסים המופיעים בצד ימין של a אחרי שמסתיימות החזרות על s. בכל שלב יש לנו עדיין מספר שמתחלק ב- n.

התוצאה הסופית היא מספר מהצורה המבוקשת, כלומר רק חזרות על s, אשר מתחלק ב- n, כמבוקש. נשים לב שהמספר שקיבלנו מכיל לא יותר מ- n הופעות של s, מה שנותן חסם על כמה רחוק צריך ללכת כדי לקבל פתרון.

איתי הראבן