בחינה III

שאלה 1

א. יהיו A, B קבוצות. נתון כי $A \cap B \neq B$ וכי $A \cup B$ היא שקולה ל- A.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות :

(i) $A \cup B$ היא קבוצה אינסופית.

(ii) B היא קבוצה אינסופית.

ב. יהיו S, U קבוצות. הוכח שאם $P(S) \subseteq \{U\}$ אז $S = U = \varnothing$.

תשובה

א. (i) הטענה נכונה. כדי להוכיח זאת עלינו להראות שקיימת קבוצה חלקית ממש ל- $A \cup B$ ששקולה ל- $A \cup B$. לפי הנתונים המועמדת הטבעית לקבוצה חלקית כזו היא A.

אכן, $A \subseteq A \cup B$ לפי הגדרת האיחוד של קבוצות.

כמו-כן, נתון כי $A \cap B \neq B$ ומאחר ש- $A \cap B \subseteq B$ הרי שבהכרח מתקיים $B \not\subseteq A \cap B$.

לכן קיים $x \in B$ כך ש- $x \notin A \cap B$ וזה מחייב ש- $x \notin A$. מצד שני ברור כי $x \in A \cup B$, שכן, $x \in B$. לפיכך מצאנו איבר $x \in A \cup B$ כך ש- $x \notin A$ ומכאן ש- $A \subset A \cup B$.

מאחר שהקבוצה A היא חלקית ממש ל- $A \cup B$ וגם שקולה לה, נובע כי $A \cup B$ קבוצה אינסופית, כפי שרצינו להוכיח.

(ii) הטענה לא נכונה. נפריך אותה על-ידי דוגמה נגדית.

נבחר למשל $A = \mathbf{N}$ (קבוצת המספרים הטבעיים) ו- $B = \{0\}$. אז $A \cap B = \mathbf{N} \cap \{0\} = \varnothing$ לכן $A \cap B \neq B$. כמו-כן $A \cup B = \mathbf{N} \cup \{0\} = \mathbf{N}_0$, לכן $A \cup B$ שקולה ל- A (שכן, ניתן למשל להתאים לכל איבר $n \in A \cup B$ את האיבר $n+1 \in A$, וזו תהיה התאמה חד-חד-ערכית המבטיחה כי קבוצות אלה הן שקולות).

בכל זאת, B היא קבוצה סופית, על-כן הדוגמה שהבאנו מפריכה את הטענה.

ב. כידוע, לכל קבוצה S מתקיים $\varnothing \subseteq S$, לכן $\varnothing \in P(S)$. מאחר שעל-פי הנתון, $P(S) \subseteq \{U\}$, נקבל כי $\varnothing \in \{U\}$. במילים אחרות, $\varnothing$ איבר בקבוצה $\{U\}$. אבל בקבוצה $\{U\}$ יש רק איבר אחד והוא U, לכן $U = \varnothing$.

כעת נחזור לנתון ונקבל כי $P(S) \subseteq \{\varnothing\}$. אבל לכל קבוצה S מתקיים $S \in P(S)$ (שכן, $S \subseteq S$). לכן מן ההכלה $P(S) \subseteq \{\varnothing\}$ נובע כי $S \in \{\varnothing\}$, ומאחר שלקבוצה $\{\varnothing\}$ יש רק איבר אחד (והוא $\varnothing$), נקבל כי בהכרח $S = \varnothing$.

שאלה 2

א. תהי $G=\{e,a,b,c\}$ חבורה בת ארבעה איברים שונים ביחס לפעולה $*$, שבה e איבר ניטרלי. הוכח כי $a*b=b*a$.

ב. על קבוצת המספרים השלמים $\mathbf{Z}\setminus\{5\}$ מגדירים פעולה בינרית Δ באופן הבא:

לכל $a,b\in\mathbf{Z}\setminus\{5\}$, $a\Delta b=(a-5)(b-5)+5$.

בדוק אלו מהתכונות שבהגדרת החבורה מקיימת פעולה זו. נמק טענותיך.

תשובה

א. מאחר ש- G היא חבורה, הרי שהיא מקיימת את תכונת הסגירות, לכן $a*b\in G$, כלומר $a*b\in\{e,a,b,c\}$.

אם $a*b=a$ אז $a*b=a*e$ ואז על-ידי צמצום a משמאל נקבל כי $b=e$ וזו סתירה.

אם $a*b=b$ אז $a*b=e*b$ ואז על-ידי צמצום b מימין נקבל כי $a=e$, שוב סתירה.

לכן בהכרח, $a*b=e$ או $a*b=c$. באופן דומה מוכיחים כי $b*a=e$ או $b*a=c$.

אם $a*b=e$ אז b הוא נגדי ל- a . כידוע , בחבורה, אם b נגדי ל- a אז גם a נגדי ל- b כלומר $b*a=e$ (במילים אחרות, בחבורה, איברים נגדיים מתחלפים).

לפיכך, במקרה זה קיבלנו כי $a*b=b*a$.

אם $a*b=c$ אז לא ייתכן כי $b*a=e$ (שכן, אז נקבל כמו קודם כי גם $a*b=e$ וזה תהיה סתירה להנחה שלנו). לפיכך נותרה רק האפשרות $b*a=c$ וקיבלנו גם שוב כי $a*b=b*a$.

ב. <u>תכונת הסגירות</u>:

עלינו להוכיח כי לכל $a,b\in\mathbf{Z}\setminus\{5\}$ מתקיים $a\Delta b\in\mathbf{Z}\setminus\{5\}$. אכן, אם $a,b\in\mathbf{Z}\setminus\{5\}$ אז המספר $a\Delta b$ הוא מספר שלם כי הוא מתקבל מסכומים ומכפלות של מספרים שלמים.

לכן נותר להראות כי $a\Delta b\neq 5$. לשם כך נניח בדרך השלילה כי $a\Delta b=5$. כלומר $(a-5)(b-5)+5=5$. אבל אז $(a-5)(b-5)=0$, לכן $a=5$ או $b=5$ וזו סתירה להנחה כי $a,b\in\mathbf{Z}\setminus\{5\}$. מכאן ש- $a\Delta b\neq 5$, לכן $a,b\in\mathbf{Z}\setminus\{5\}$, ותכונת הסגירות מתקיימת.

<u>תכונת הקיבוציות</u>:

עלינו להוכיח כי לכל $a,b,c\in\mathbf{Z}\setminus\{5\}$ מתקיים: $(a\Delta b)\Delta c=a\Delta(b\Delta c)$. אכן, לפי הגדרת Δ ,

$$(a\Delta b)\Delta c=[(a-5)(b-5)+5]\Delta c=[(a-5)(b-5)+5-5](c-5)+5=(a-5)(b-5)(c-5)+5$$

$$a\Delta(b\Delta c)=a\Delta[(b-5)(c-5)+5]=(a-5)[(b-5)(c-5)+5-5]+5=(a-5)(b-5)(c-5)+5$$

ומכאן שהפעולה קיבוצית.

<u>קיום איבר נטרלי</u>:

עלינו למצוא איבר $e\in\mathbf{Z}\setminus\{5\}$ כך שלכל $x\in\mathbf{Z}\setminus\{5\}$ יתקיים $e\Delta x=x\Delta e=x$. איבר כזה חייב למשל לקיים $e\Delta 0=0$, כלומר $(e-5)(0-5)+5=0$. מכאן נקבל ש- $-5e+30=0$ ולכן $e=6$. לפיכך, **אם** קיים איבר נטרלי אז הוא חייב להיות שווה ל- 6 . כעת נוכיח כי 6 הוא אכן איבר נטרלי. ברור כי $6\in\mathbf{Z}\setminus\{5\}$ ולכל $x\in\mathbf{Z}\setminus\{5\}$ מתקיים:

$6\Delta x=(6-5)(x-5)+5=x-5+5=x$ וכן, $x\Delta 6=(x-5)(6-5)+5=x-5+5=x$. מכאן שהמספר 6 הוא איבר נטרלי ב- $\mathbf{Z}\setminus\{5\}$ ביחס לפעולה Δ .

קיום איבר נגדי:

עלינו לבדוק אם לכל איבר $a\in\mathbf{Z}\setminus\{5\}$ קיים איבר $b\in\mathbf{Z}\setminus\{5\}$ כך ש- $a\Delta b=6$, כלומר $(a-5)(b-5)+5=6$, או $(a-5)(b-5)=1$. לא קשה לנחש כי בדרך כלל, אין פתרונות שלמים למשוואה זו, לכן נראה בעזרת דוגמה כי לא לכל איבר יש נגדי ביחס לפעולה Δ . נניח למשל כי למספר 7 קיים נגדי. אז קיים $b\in\mathbf{Z}\setminus\{5\}$ כך ש- $7\Delta b=6$ כלומר $(7-5)(b-5)+5=6$. אז $2(b-5)=1$, ואז $b=5.5$, בסתירה להנחה כי b הוא מספר שלם. מכן שלא לכל איבר יש נגדי ביחס לפעולה Δ .

שאלה 3

נתונות פונקציות $f,g:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$. ידוע כי $g\circ f=I_{\mathbf{N}}$. הוכח או הפרך כל אחת מן הטענות הבאות:

א. f היא פונקציה חד-חד-ערכית.

ב. g היא פונקציה על.

ג. f ו- g הן פונקציות הפיכות.

תשובה

א. טענה זו נכונה. עלינו להוכיח כי לכל $x_1,x_2\in\mathbf{N}$, מהשוויון $f(x_1)=f(x_2)$ נובע כי $x_1=x_2$.

לשם כך, נניח כי $x_1,x_2\in\mathbf{N}$ וכי מתקיים $f(x_1)=f(x_2)$. אז מתקיים גם $g(f(x_1))=g(f(x_2))$ (שכן, g היא פונקציה, לכן מתאימה תמונות זהות לאיברים זהים). מכאן נקבל כי $(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)$

אבל לפי הנתון, $g\circ f=I_{\mathbf{N}}$ לכן לכל $x\in\mathbf{N}$ מתקיים $(g\circ f)(x)=x$ ועל-כן מהשוויון $(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)$ נקבל כי $x_1=x_2$, כפי שרצינו להוכיח. מכאן ש- f חד-חד-ערכית.

ב. גם טענה זו נכונה. עלינו להוכיח כי לכל $y\in\mathbf{N}$ קיים $x\in\mathbf{N}$ כך ש- $g(x)=y$.

לשם כך נבחר איבר $y\in\mathbf{N}$. לפי הנתון, $g\circ f=I_{\mathbf{N}}$ לכן עבור אותו y שבחרנו נקבל $g(f(y))=y$. נסמן כעת $f(y)=x$. אז $x\in\mathbf{N}$ ומתקיים $g(x)=g(f(y))=y$, כפי שרצינו להוכיח. מכאן ש- g היא פונקציה על.

ג. הטענה לא נכונה. נבחר למשל את הפונקציות $f,g:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ המוגדרות כך:

$$f(n)=2n \text{ לכל } n\in\mathbf{N} \quad \text{-ו} \quad g(n)=\begin{cases} n/2 & \text{אם } n \text{ זוגי} \\ 1 & \text{אם } n \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$

אז לכל $n\in\mathbf{N}$ מתקיים $(g\circ f)(n)=g(f(n))=g(2n)=n/2=n$ ולכן $g\circ f=I_{\mathbf{N}}$.

אבל f אינה פונקציה הפיכה כי היא אינה על (למשל אם נניח כי קיים $n\in\mathbf{N}$ כך ש- $f(n)=1$

נקבל כי $2n=1$ וזו סתירה, לכן $f(n)\neq 1$ לכל $n\in \mathbf{N}$ ולכן f אינה על. כמו-כן g אינה פונקציה הפיכה, כי היא אינה חד-חד-ערכית (למשל $g(3)=g(5)=1$). לפיכך הטענה מופרכת.

שאלה 4

נסמן ב- S_ℓ את השיקוף ביחס לישר נתון ℓ. ידוע כי איזומטריה f היא הזזה וכי A היא נקודה במישור כך ש- $S_\ell(A)=f(A)$.

א. הוכח כי $S_\ell\circ f$ היא שיקוף.

ב. הוכח שהנקודה $f(A)$ היא נקודת שבת של $f\circ S_\ell$ והוכח כי $f\circ S_\ell$ היא שיקוף.

תשובה

א. כדי להוכיח כי $S_\ell\circ f$ מספיק למשל להראות כי זו איזומטריה ההופכת מגמת משולשים ובעלת נקודת שבת (שכן, כידוע, כל איזומטריה שהופכת מגמת משולשים היא שיקוף או שיקוף מוזז, ומתוך האיזומטריות האלה רק לשיקופים יש נקודות שבת).

נעיר תחילה כי מאחר ש- f היא הזזה, נובע כי f שומרת מגמת משולשים. לעומת זאת, S_ℓ הופך מגמת משולשים לכן גם ההרכבה $S_\ell\circ f$ הופכת מגמת משולשים. (לאותה מסקנה נגיע גם אם נשים לב כי ניתן להציג את f כהרכבה של שני שיקופים, ואת $S_\ell\circ f$ כהרכבה של שלושה שיקופים, ועל-כן $S_\ell\circ f$ הופכת מגמה). שנית, מהנתון $S_\ell(A)=f(A)$ נובע כי $S_\ell(S_\ell(A))=S_\ell(f(A))$, ומאחר ש- $S_\ell\circ S_\ell=I$ נקבל כי $S_\ell(f(A))=A$, כלומר A היא נקודת שבת של $S_\ell\circ f$. מכאן ש- $S_\ell\circ f$ היא שיקוף.

ב. כדי להוכיח כי $f(A)$ היא נקודת שבת של $f\circ S_\ell$ עלינו להראות כי $(f\circ S_\ell)(f(A))=f(A)$. לשם כך יש לשים לב כי מן הסעיף הקודם ידוע כי $S_\ell(f(A))=A$. מכאן נקבל כי $(f\circ S_\ell)(f(A))=f(S_\ell(f(A))=f(A)$.

כעת, נציין כי גם ההרכבה $f\circ S_\ell$ הופכת מגמת משולשים (כי ניתן להציג אותה כהרכבה של שלושה שיקופים). לפיכך, $f\circ S_\ell$ היא איזומטריה שהופכת מגמת משולשים ובעלת נקודת שבת, על-כן $f\circ S_\ell$ היא שיקוף.

שאלה 5

לפניך מערכת אקסיומות שמושגי היסוד בה הם: "נקודה", "ישר" (כקבוצה של נקודות), והיחס "נמצאת על".

1. קיימות שתי נקודות שונות B, A וקיימים לפחות שני ישרים שונים ℓ_1, ℓ_2, כך ש- B, A נמצאות (שתיהן) על ℓ_1 וגם על ℓ_2.
2. על כל ישר יש לפחות שלוש נקודות.

א. הוכח כי המערכת חסרת סתירה.

ב. הוכח שבמערכת מתקיים המשפט הבא: "קיימות לפחות ארבע נקודות".

ג. הוכח כי המשפט "כל נקודה נמצאת על שני ישרים לפחות" לא נובע מן המערכת הנתונה ולא סותר אותה.

תשובה

א. כדי להוכיח כי המערכת חסרת סתירה עלינו להוכיח כי קיים מודל המקיים כל האקסיומות שלה. נבחר למשל את המודל שקבוצת הנקודות שלו היא $\{A, B, C, D\}$ וקבוצת הישרים שלו היא $\{\ell_1, \ell_2\}$, כאשר $\ell_1 = \{A, B, C\}$ ו- $\ell_2 = \{A, B, D\}$.

ברור כי ℓ_1, ℓ_2 הם שני ישרים שונים וכי הנקודות A, B נמצאת על שני הישרים האלה לכן אקסיומה 1 מתקיימת במודל הנ"ל. כמו-כן ברור כי על כל ישר במודל נמצאות שלוש נקודות, לכן גם האקסיומה 2 מתקיימת במודל זה. לפיכך המערכת הנתונה חסרת סתירה.

ב. עלינו להוכיח כי המשפט הנתון מתקיים בכל מודל של המערכת. לשם כך נבחר מודל כלשהו של המערכת ונראה כי המשפט מתקיים בו. לפי אקסיומה 1, קיימות שתי נקודות שונות B, A וקיימים לפחות שני ישרים שונים ℓ_1, ℓ_2, כך ש- B, A נמצאות על ℓ_1 וגם על ℓ_2. לפי אקסיומה 2 על כל ישר יש לפחות שלוש נקודות, לכן קיימת נקודה C הנמצאת על ℓ_1 ושונה מ- A, B. בזאת הוכחנו את קיומן של לפחות שלוש נקודות שונות במודל. אם נניח בדרך השלילה כי לא קיימת נקודה נוספת במודל, אז נקבל כי $\ell_1 = \{A, B, C\}$. מאחר שלפי אקסיומה 2 גם על הישר ℓ_2 נמצאות לפחות שלוש נקודות, הרי כי $\{A, B, C\} \subseteq \ell_2$ ולכן $\ell_2 = \{A, B, C\}$, כי הנחנו שאין נקודות נוספות במודל. אבל אז נקבל כי $\ell_1 = \ell_2$ בסתירה לעובדה כי ℓ_1, ℓ_2 הם ישרים שונים. מכאן נובע כי במודל שבחרנו קיימות לפחות ארבע נקודות, ובאופן דומה נקבל כי משפט זה נכון בכל מודל של המערכת, כפי שרצינו להוכיח.

ג. כדי להוכיח כי המשפט הנתון לא נובע מן המערכת מספיק אם נמצא מודל למערכת שבו המשפט לא מתקיים. מודל כזה מצאנו בעצם בסעיף א': המודל אמנם מקיים את כל אקסיומות המערכת, אבל הנקודה C נמצאת על הישר ℓ_1 בלבד, לכן המשפט "כל נקודה נמצאת על שני ישרים לפחות" לא מתקיים במודל זה ועל-כן הוא לא נובע מן המערכת הנתונה.
כעת, כדי להוכיח כי המשפט לא סותר את המערכת, עלינו למצוא מודל שמקיים את כל אקסיומות המערכת וגם את המשפט. נבחר למשל את המודל שקבוצת הנקודות בו היא $\{A, B, C, D\}$ וקבוצת הישרים שלו היא $\{\{A, B, C\}, \{A, B, D\}, \{A, C, D\}\}$. ברור כי הנקודות A, B נמצאות על שני הישרים השונים $\{A, B, C\}, \{A, B, D\}$, לכן אקסיומה 1 מתקיימת. כמו-כן, לכל ישר במודל יש שלוש נקודות לכן גם אקסיומה 2 מתקיימת. בנוסף לכך, כל נקודה במודל נמצאת על לפחות שניים מבין שלושת הישרים שלו, לכן מתקיים גם המשפט המבוקש, על-כן המשפט הזה לא סותר את המערכת הנתונה.

שאלה 6

א. נסמן ב- A^* את הקבוצה הנוצרת מ- $A=\{\frac{5}{24}\,,\ 6\}$ על-ידי כפל. הוכח או הפרך את הטענה הבאה: $225\in A^*$.

ב. הוכח באינדוקציה שלכל מספר טבעי $n\geq 2$ מתקיים:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}<\frac{n+3}{2}$$

תשובה

א. לפי הגדרת A^* מתקיים: $A^*=\{(5/24)^a\cdot 6^b \mid$ כאשר $a,b\geq 0$ שלמים, לא שניהם אפס$\}$.

לכן אם $225\in A^*$, אז קיימים מספרים שלמים $a,b\geq 0$, לא שניהם אפס כך ש- $225=(5/24)^a\cdot 6^b$. נפרק את שני האגפים למכפלות של לגורמים ראשוניים:

$3^2\cdot 5^2=(5/(2^3\cdot 3))^a\cdot(2\cdot 3)^b$, לכן $3^2\cdot 5^2=5^a\cdot 2^{-3a}\cdot 3^{-a}\cdot 2^b\cdot 3^b$ ומכאן נקבל כי $3^2\cdot 5^2=2^{-3a+b}\cdot 3^{-a+b}\cdot 5^a$. המשפט היסודי של האריתמטיקה מבטיח כי כל מספר ראשוני חייב להופיע בשני אגפי השוויון הנ"ל אותו מספר פעמים, לכן נקבל כי $\begin{cases}0=-3a+b\\ 2=-a+b\\ 2=a\end{cases}$. אבל אז מהמשוואה השלישית נובע כי $a=2$, מן המשוואה השנייה כי $b=2+a=4$ ואז מן המשוואה הראשונה נקבל כי $b=3a=6$. זו כמובן סתירה, לכן ההנחה כי $225\in A^*$ היא שגויה, ובזאת הפרכנו את הטענה.

ב. עלינו לבדוק תחילה את הטענה עבור $n=2$.

במקרה זה, האגף השמאלי של האי-שוויון הוא $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ ומתקיים:

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2+\frac{1}{2}=\frac{2+3}{2}$ לכן הטענה נכונה עבור $n=2$.

כעת, נניח כי הטענה נכונה עבור n מסוים, כלומר $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}<\frac{n+3}{2}$ ונוכיח כי הטענה נכונה עבור $n+1$, כלומר $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n+2}<\frac{n+4}{2}$. אכן, מתקיים:

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n+2} &=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\\ &<\frac{n+3}{2}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2} && \text{לפי ההנחה שהנחנו עבור } n\\ &<\frac{n+3}{2}+\frac{1}{2\cdot 2+1}+\frac{1}{2\cdot 2+2} && \text{כי } n\geq 2\\ &<\frac{n+3}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{n+4}{2}\end{aligned}$$

מכאן שמתוך ההנחה כי הטענה נכונה עבור n מסוים, נובע כי הטענה נכונה גם עבור $n+1$, ועל-כן לפי עקרון האינדוקציה, מקבלים כי הטענה נכונה לכל $n\geq 2$, כפי שרצינו להוכיח.