פתרון ממ"ן 12

שאלה 1

א.יהיו $A = \{1, \{1\}\}$, $B = \{1, \varnothing\}$.

רשום את $P(A)$, $P(B)$, $P(A) \setminus P(B)$, $P(B) \setminus B$, $P(A) \setminus \{A\}$ בעזרת צומדיים.

ב.תהי C קבוצה כלשהי. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

(i) $P(C) \cap C = \varnothing$

(ii) $P(C) \cap C \neq \varnothing$

תשובה

א. $P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{\{1\}\}, \{1, \{1\}\}\}$

$P(B) = \{\varnothing, \{1\}, \{\varnothing\}, \{1, \varnothing\}\}$

$P(A) \setminus P(B) = \{\{\{1\}\}, \{1, \{1\}\}\}$

$P(B) \setminus B = \{\{1\}, \{\varnothing\}, \{1, \varnothing\}\}$

$P(A) \setminus \{A\} = \{\varnothing, \{1\}, \{\{1\}\}\}$

ב. (i) הטענה לא נכונה. ניקח למשל $C = \{1, \{1\}\}$. אז $P(C) = \{\varnothing, \{1\}, \{\{1\}\}, \{1, \{1\}\}\}$

לכן $P(C) \cap C = \{\{1\}\} \neq \varnothing$.

(ii) גם טענה זו לא נכונה. ניקח למשל $C = \{1\}$. אז $P(C) = \{\varnothing, \{1\}\}$ ואז

$P(C) \cap C = \{\varnothing, \{1\}\} \cap \{1\} = \varnothing$.

שאלה 2

יהיו A, B, C קבוצות.

הוכח את הטענות הבאות:

א. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

ב.אם $A \setminus (B \setminus C) \subseteq (A \setminus B) \setminus C$ אז $A \cap C = \varnothing$.

הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

ג.אם $P(A) \subseteq B$ אז $\{\varnothing, A\} \in P(B)$.

ד.אם $\{\varnothing, A\} \in P(B)$ אז $P(A) \subseteq B$.

תשובה

א. יש להוכיח ש- $(A \cup B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ וש- $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) \subseteq (A \cup B) \setminus C$.

כיוון ראשון:

נניח ש- $x \in (A \cup B) \setminus C$. אז $x \in A \cup B$ ו- $x \notin C$, לכן ($x \in B$ או $x \in A$) ו- $x \notin C$,

לכן ($x \in A$ ו- $x \notin C$) או ($x \in B$ ו- $x \notin C$) , לכן $x \in A \setminus C$ או $x \in B \setminus C$, מכאן ש- $x \in (A \setminus C) \cup (A \setminus B)$ והוכחנו כי $(A \cup B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

כיוון שני:

נניח ש- $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$. אז $x \in A \setminus C$ או $x \in B \setminus C$, לכן ($x \in A$ ו- $x \notin C$) או ($x \in B$ ו- $x \notin C$) , לכן ($x \in B$ או $x \in A$) ו- $x \notin C$ ולכן $x \in (A \cup B) \setminus C$. כך הוכחנו ש- $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) \subseteq (A \cup B) \setminus C$ ומכאן נובע השוויון הדרוש.

ב. עלינו להוכיח ש- $A \cap C = \varnothing$.

נניח בדרך השלילה כי $A \cap C \neq \varnothing$. אז קיים איבר x כך ש- $x \in A$ וגם $x \in C$.

אז $x \notin B \setminus C$ (שכן, $x \in C$) וכן $x \in A$ (כך הנחנו!) לכן $x \in A \setminus (B \setminus C)$. אבל

אז, מנתון השאלה נובע ש- $x \in (A \setminus B) \setminus C$ ומכאן ש- $x \notin C$ -סתירה להנחה!

לכן ההנחה ש- $A \cap C \neq \varnothing$ לא נכונה ולכן $A \cap C = \varnothing$.

ג. הטענה נכונה. כידוע, לכל קבוצה A מתקיים $A \subseteq A$ וגם $\varnothing \subseteq A$ לכן $A \in P(A)$ וגם $\varnothing \in P(A)$ ואז, מן ההכלה $P(A) \subseteq B$ נקבל כי $A \in B$ וגם $\varnothing \in B$. מכאן ששני איברי הקבוצה $\{\varnothing, A\}$ שייכים לקבוצה B ולכן קבוצה זו מוכלת ב- B כלומר $\{\varnothing, A\} \subseteq B$. אבל לפי ההגדרה של $P(B)$, כל קבוצה **שחלקית** ל- B היא **איבר** של $P(B)$. במילים אחרות, $\{\varnothing, A\} \in P(B)$, כפי שרצינו להוכיח.

ד. הטענה לא נכונה. אם $\{\varnothing, A\} \in P(B)$ אז $\{\varnothing, A\} \subseteq B$ לכן הקבוצות A ו- $\varnothing$ שייכות ל- B, אבל זה לא מבטיח כי **כל** קבוצה חלקית ל- A היא איבר של B (כמו שדרוש לקיום ההכלה $P(A) \subseteq B$. לפיכך נפריך את הטענה על-ידי דוגמה נגדית מתאימה.

נבחר למשל $A = \{1,2\}$ ו- $B = \{\varnothing, \{1,2\}\}$. אז A ו- $\varnothing$ שייכות ל- B, לכן $\{\varnothing, A\} \subseteq B$ ולכן $\{\varnothing, A\} \in P(B)$, כמו שנתון בשאלה.

אבל $P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, A\}$ לכן $P(A) \not\subseteq B$ שכן, $\{1\} \in P(A)$ אבל $\{1\} \notin B$. הטענה מופרכת.

שאלה 3

א.על קבוצת המספרים הטבעיים הזוגיים $A = \{2n | n \in \mathbf{N}\}$ מגדירים פעולה בינרית $*$ כך:

לכל $x, y \in A$, $x * y = \dfrac{(x-2)(y-2)}{2} + 2$.

בדוק אלו מהתכונות אשר בהגדרת החבורה מקיימת הפעולה $*$. נמק כל טענותיך.

ב.פתור את השאלה מסעיף א׳ בהנחה כי $A = \mathbf{Q} \setminus \{2\}$. ($\mathbf{Q}$ היא קבוצת המספרים הרציונליים).

תשובה

א. 1. סגירות - מתקיימת.

עלינו לבדוק האם לכל $x,y\in A$ מתקיים $x*y\in A$. נבחר $x,y\in A$. לפי הגדרת A, קיימים $k,n\in\mathbf{N}$ כך ש- $x=2n\ ,\ y=2k$, לכן:

$$x*y=\frac{(x-2)(y-2)}{2}+2=\frac{(2n-2)(2k-2)}{2}+2=2(n-1)(k-1)+2=2[(n-1)(k-1)+1]$$

המספר $(n-1)(k-1)$ הוא שלם אי-שלילי (כי $n\geq 1$ ו- $k\geq 1$) לכן $(n-1)(k-1)+1$ הוא מספר טבעי, ומכאן ש- $x*y=2[(n-1)(k-1)+1]$ הוא מספר טבעי זוגי, ולכן שייך ל- A.

2. קיבוציות - מתקיימת.

נוכיח שלכל $x,y,z\in A$ מתקיים $(x*y)*z=x*(y*z)$. אכן,

$$(x*y)*z=\left[\frac{(x-2)(y-2)}{2}+2\right]*z=\frac{\left[\frac{(x-2)(y-2)}{2}+2-2\right](z-2)}{2}+2$$
$$=\frac{(x-2)(y-2)(z-2)}{4}+2$$

ומצד שני,

$$x*(y*z)=x*\left[\frac{(y-2)(z-2)}{2}+2\right]=\frac{(x-2)\left[\frac{(y-2)(z-2)}{2}+2-2\right]}{2}+2$$
$$=\frac{(x-2)(y-2)(z-2)}{4}+2$$

3. קיום איבר נטרלי.

נניח ש- e איבר נטרלי ביחס לפעולה $*$. אז, למשל, $6*e=6$ כלומר $\frac{(6-2)(e-2)}{2}+2=6$. מכאן ש- $2(e-2)=4$ ולכן $e=4$. מה שהוכחנו כאן הוא עדיין לא קיומו של איבר נטרלי (שכן, יצאנו מן ההנחה ש- e איבר נטרלי), אבל מצאנו ש**אם** קיים איבר נטרלי אז הוא בהכרח שווה ל- 4. כעת נוכיח ש- 4 איבר נטרלי.

אכן, $4\in A$ לכל $x\in A$ מתקיים:

$$x*4=\frac{(x-2)(4-2)}{2}+2=(x-2)\cdot 1+2=x \quad \text{וגם}$$

$$x*4=\frac{(x-2)(4-2)}{2}+2=(x-2)\cdot 1+2=x$$

לפיכך $x*4=4*x=x$ לכל $x\in A$ ולכן 4 איבר נטרלי.

4. קיום איבר נגדי.

תכונה זו לא מתקיימת: למשל אם נניח כי לאיבר $6\in A$ קיים $x\in A$ כך ש- $6*x=4$

נקבל כי $\frac{(6-2)(x-2)}{2}+2=4$ כלומר $2(x-2)+2=4$ לכן $x=3$, וזו סתירה, כי $3\notin A$. לפיכך, תכונת האיבר הנגדי לא מתקיימת.

II. 1. סגירות.

נניח ש- $x,y\in A=\mathbf{Q}\setminus\{2\}$. אז $x*y\in\mathbf{Q}$ (שכן, תוצאה של חיבור וכפל של מספרים רציונליים היא שוב מספר רציונלי). לכן, נשאר לבדוק ש- $x*y\neq 2$.

נניח ש- $x*y=2$. אז $\frac{(x-2)(y-2)}{2}+2=2$ לכן $(x-2)(y-2)=0$ כלומר $x=2$ או $y=2$ בניגוד להנחה ש- $x,y\in\mathbf{Q}\setminus\{2\}$. לכן $x*y\neq 2$ ומכאן ש- $x*y\in\mathbf{Q}\setminus\{2\}$, כלומר תכונת הסגירות מתקיימת.

2. קיבוציות.

לכל $x,y,z\in\mathbf{Q}\setminus\{2\}$ מתקיים $x*(y*z)=(x*y)*z$. ההוכחה זהה לזו שעשינו עבור $x,y,z\in A$

3. קיום איבר נטרלי.

כמו בסעיף א' מוכיחים כי 4 איבר נטרלי. (ברור כי $4\in\mathbf{Q}\setminus\{2\}$).

4. קיום איבר נגדי.

יהי $x\in\mathbf{Q}\setminus\{2\}$. אנו מחפשים $y\in\mathbf{Q}\setminus\{2\}$ כך ש- $x*y=4$ כלומר $\frac{(x-2)(y-2)}{2}+2=4$. ומכאן, על-ידי חילוץ y מקבלים ש- $y=\frac{4}{x-2}$.

מה שהוכחנו עד כה הוא ש<u>אם</u> לאיבר x יש נגדי אז נגדי זה חייב להיות $y=2+\frac{4}{x-2}$.

כעת נוכיח שאכן $y=2+\frac{4}{x-2}$ הוא נגדי ל- x.

המספר y מוגדר, כי $x\neq 2$. הוא רציונלי (כמנה וסכום של רציונליים) והוא שונה מ- 2 (כי אם $2+\frac{4}{x-2}=2$ אז $\frac{4}{x-2}=0$ ואז $4=0$, סתירה). לפיכך $2+\frac{4}{x-2}\in\mathbf{Q}\setminus\{2\}$.

כמו-כן, מתקיים:

$$x*\left(2+\frac{4}{x-2}\right)=\frac{(x-2)\left(2+\frac{4}{x-2}-2\right)}{2}+2=\frac{(x-2)\frac{4}{x-2}}{2}+2=\frac{4}{2}+2=4.$$

מכאן שלכל $x\in\mathbf{Q}\setminus\{2\}$ קיים נגדי.

לסיכום, הקבוצה $\mathbf{Q}\setminus\{2\}$ היא חבורה ביחס לפעולה $*$.