

**מבנה הבחינה :**

- \* יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.
- \* משקל כל שאלה 25% .
- \* אם תשיב/י על יותר מ- 4 שאלות, יחושב הציון לפי 4 התשובות הראשונות.

**משך המבחן: 3 שעות.**

**חומר עזר:** כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

---

**שימו לב:**

- \* יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה, אלא אם נאמר בשאלה שאין צורך לנמק.
  - \* מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.
  - \* אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.
  - \* בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.
- 

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

## אנא קרא/י בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

### שאלה 1

בכל סעיפי השאלה  $A = \mathbb{N} - \{0\}$  (הטבעיים ללא 0), ו-  $D$  הוא יחס מעל  $A$  המוגדר כך :

$(a, b) \in D$  אם  $b$  מתחלק ב-  $a$  ללא שארית.

לפי "תורת הקבוצות" עמ' 90 שאלה 3.14,  $D$  הוא יחס סדר-חלקי מעל  $A$ .

(4 נק') א. האם  $D$  הוא סדר-מלא מעל  $A$  (הגדרה 3.5) ?

אם כן, הוכח. אם לא הבא דוגמא נגדית.

(5 נק') ב. הוכח שהיחס  $G = D \cup D^{-1}$  אינו טרנזיטיבי.

(8 נק') ג. הוכח:  $D \cdot D^{-1} = A \times A$ .

(8 נק') ד. הוכח:  $D^{-1} \cdot D = A \times A$ .

הערה: בסעיפים ג, ד, פעולת הכפל באגף שמאל היא כפל יחסים (כפל רלציות).

### שאלה 2

הסימן  $\oplus$  (הפרש סימטרי) הוגדר ב"תורת הקבוצות" עמ' 27 שאלה 1.22.

(15 נק') א. הוכח: אם  $|B| = \aleph_0$ ,  $|A| > \aleph_0$  אז  $|A \oplus B| = |A|$ .

(10 נק') ב. מצא את התשובה הנכונה והוכח אותה:

אם  $|A| = |B| = \aleph_0$  אז עוצמת  $A \oplus B$ :

(1) חייבת להיות  $\aleph_0$ .

(2) חייבת להיות אפס.

(3) חייבת להיות עוצמה סופית שונה מאפס.

(4) יכולה להיות  $\aleph_0$ , יכולה להיות אפס, ויכולה להיות עוצמה

סופית שונה מאפס.

### שאלה 3

יהי  $a_n$  מספר הסדרות באורך  $n$ , שאבריהן שייכים לקבוצה  $\{1, 2, \dots, 7\}$ , והמקיימות את

התנאי הבא: לא מופיעים בסדרה מספרים זוגיים זה בסמוך לזה.

למשל עבור  $n = 5$ , הסדרה (1,1,2,6,3) אינה מותרת, כי 2 מופיע ליד 6.

גם הסדרה (1,1,2,2,3) אסורה, כי יש שתי הופעות צמודות של 2.

(10 נק') א. רשום את  $a_0, a_1, a_2$ . מצא יחס נסיגה (יחס רקורסיה) עבור  $a_n$ .

בדוק ש-  $a_0, a_1, a_2$  שרשמת מתיישבים עם יחס הנסיגה שמצאת.

(15 נק') ב. פתור את יחס הנסיגה וקבל ביטוי מפורש עבור  $a_n$ .

בדוק את הביטוי שקיבלת, עבור  $n = 2$ .

#### שאלה 4

תהינה  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  ,  $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  .

(5 נק') א. כמה פונקציות חד-חד-ערכיות של  $X$  ל- $Y$  קיימות?

(20 נק') ב. מצא כמה פונקציות חד-חד-ערכיות של  $X$  ל- $Y$  מקיימות:

$$\text{לכל } i \in X, f(i) \neq i .$$

#### שאלה 5

נתונה שפה של תחשיב הפרדיקטים, שבה סימן פונקציה דו-מקומית  $f$  ,

וסימן פרדיקט דו-מקומי  $E$  . יש בשפה סימן אחד עבור קבוע:  $a$  .

אין בשפה עוד סימני פונקציות, פרדיקטים או קבועים.

כרגיל, נמצאים בשפה הקשרים הלוגיים  $\neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee$  , סוגריים, שני הכמתים  $\forall, \exists$  .

וסימני משתנים כגון  $x, y, z$  .

נתונות שלוש אינטרפרטציות  $J_1, J_2, J_3$  של השפה הזו, אל העולם  $N$  (הטבעיים).

בכל האינטרפרטציות האלה,  $E$  מתפרש כיחס השוויון:  $E(x, y)$  פירושו  $x = y$  .

בכולן הקבוע  $a$  מתפרש כמספר הטבעי 0 .

ההבדל היחיד בין האינטרפרטציות הוא בפירוש של  $f$  :

ב-  $J_1$  הסימן  $f$  מתפרש כפעולה  $\max$  , המחזירה את הגדול בין שני הארגומנטים (אם הם שווים, אז אחד מהם).

ב-  $J_2$  הסימן  $f$  מתפרש כפעולה  $\min$  , המחזירה את הקטן בין שני הארגומנטים (אם הם שווים, אז אחד מהם).

ב-  $J_3$  הסימן  $f$  מתפרש כפעולת הכפל.

(7 נק') א. כתבו פסוק בשפה זו, תוך שימוש בסימן  $a$  ,

כך שהפסוק אמיתי ב-  $J_1$  , שקרי ב-  $J_2$  ושקרי ב-  $J_3$  .

(9 נק') ב. כתבו פסוק בשפה זו, שלא מופיע בו הסימן  $a$  ,

והוא אמיתי ב-  $J_1$  , אמיתי ב-  $J_2$  ושקרי ב-  $J_3$  .

(9 נק') ג. כתבו פסוק בשפה זו, שלא מופיע בו הסימן  $a$  ,

והוא אמיתי ב-  $J_1$  , שקרי ב-  $J_2$  ואמיתי ב-  $J_3$  .

בשאלה 5 אין צורך לנמק, אבל יש לרשום ליד כל תבנית את הפירוש המילולי שלה.

**כתיב מקוצר - מותר.** הקפידו לשים סוגרים במקרה שייתכן ספק בקריאה.

**בהצלחה!**