בחינה I

שאלה 1

(15 נק') א. יהיו A, B קבוצות. נתון ש- $A \cap B = \{1\}$. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

1. אם $A \setminus B$ שקולה ל- A, אז A היא אינסופית.
2. אם $A \setminus B$ שקולה ל- B, אז B היא אינסופית.

(10 נק') ב. יהיו S, K, L קבוצות כך ש- $P(S) \subseteq P(K) \cup P(L)$. הוכח כי $S \subseteq K$ או $S \subseteq L$.

תשובה:

א. 1. הטענה נכונה. נוכיח שקיימת קבוצה שחלקית ממש ל- A ששקולה ל- A. נראה שהקבוצה $A \setminus B$ מקיימת תנאים אלה.

מהגדרת ההפרש בין קבוצות נובע כי $A \setminus B \subseteq A$. מהנתון ידוע כי $A \cap B = \{1\}$, לכן $1 \in A$. מצד שני, $1 \notin A \setminus B$ (שכן, $1 \in B$). מכאן ש- $A \setminus B \subset A$ (חלקית ממש!).

מאחר ש- $A \setminus B$ שקולה ל- A, נובע (לפי הגדרת "קבוצה אינסופית"), ש- A אינסופית.

2. הטענה לא נכונה. נפריך אותה על-ידי דוגמה נגדית.

נגדיר $A = \{1,2\}$ ו- $B = \{1\}$. אז $A \cap B = \{1\}$, ו- $A \setminus B = \{2\}$ שקולה ל- B (כי שתיהן הן בנות איבר אחד). לכן A ו- B מקיימות את כל נתוני הסעיף, אבל B היא קבוצה סופית.

ב. לכל קבוצה S מתקיים $S \subseteq S$, לכן $S \in P(S)$ ומן ההכלה הנתונה בשאלה, נובע כי $S \in P(K) \cup P(L)$. לכן, $S \in P(K)$ או $S \in P(L)$ מכאן ש- $S \subseteq K$ או $S \subseteq L$.

הערה: היו כאלה שהציעו את הפתרון הבא: נניח כי $x \in S$. אז $\{x\} \subseteq S$, לכן $\{x\} \in P(S)$, ולכן, לפי הנתון, $\{x\} \in P(K) \cup P(L)$. מכאן ש- $\{x\} \in P(K)$ או $\{x\} \in P(L)$, לכן $\{x\} \subseteq K$ או $\{x\} \subseteq L$ לכן $x \in K$ או $x \in L$. מכאן ש- $S \subseteq K$ או $S \subseteq L$.

למרבה הצער, פתרון זה שגוי. אמנם קיבלנו שאם x מסוים שייך ל- S אז הוא שייך ל- K או ל- L (כלומר, הוכחנו ש- $S \subseteq K \cup L$). אבל, ייתכן ש- x זה שייך ל- K ולא שייך ל- L, בזמן שאיבר אחר של S, נאמר y, שייך דווקא ל- L ולא שייך ל- K. לכן לא הוכחנו כאן ש- $S \subseteq K$ או $S \subseteq L$.

שאלה 2

(7 נק') א. על קבוצה A מוגדרת פעולה בינרית $*$ המקיימת את תכונת הסגירות. ידוע שיש איבר $e \in A$ כך שלכל $x \in A$ מתקיים $x * e = x$. הוכח או הפרך את הטענה הבאה: e איבר נטרלי ב- A ביחס לפעולה $*$.

(18 נק') ב. תהי $M = \{ 3n/2 \mid n \in \mathrm{N} \} = \{ 3/2, 6/2, 9/2, \ldots \}$. על קבוצה זו מגדירים פעולה בינרית Δ באופן הבא: לכל $a, b \in M$, $a \Delta b = \frac{2}{3}ab$. בדוק אלו מהתכונות שבהגדרת מושג החבורה מקיימת פעולה זו. נמק את טענותיך.

תשובה:

א.נפריך את הטענה על-ידי דוגמה נגדית. נבחר למשל קבוצה בת שני איברים, $A = \{e, a\}$ ונגדיר

$*$	e	a
e	e	e
a	a	e

עליה פעולה בינרית $*$ כמתואר בטבלה. ברור שהפעולה מקיימת את תכונת הסגירות וכי לכל $x \in A$ מתקיים $x * e = x$ שכן, $e * e = e$ ו- $a * e = a$. בכל זאת, e אינו נטרלי, כי $e * a = e \neq a$.

ב. 1. <u>סגירות</u>

נבדוק אם לכל $a, b \in M$ מתקיים $a\Delta b \in M$. אם $a, b \in M$, אז לפי הגדרת M, קיימים $k, n \in \mathbf{N}$ כך ש- $a = \frac{3n}{2}$ ו- $b = \frac{3k}{2}$. לכן: $a\Delta b = \frac{2}{3}ab = \frac{2}{3} \cdot \frac{3n}{2} \cdot \frac{3k}{2} = \frac{3nk}{2}$.

ולכן, מאחר ש- $kn \in \mathbf{N}$, נובע כי $a\Delta b \in M$, ולכן תכונת הסגירות מתקיימת.

2. <u>קיבוציות</u>

לכל $a, b, c \in M$ מתקיים: $(a\Delta b)\Delta c = \left(\frac{2}{3}ab\right)\Delta c = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}ab\right) \cdot c = \frac{4}{9}abc$

כמו-כן, $a\Delta(b\Delta c) = a\Delta\left(\frac{2}{3}bc\right) = \frac{2}{3}a\left(\frac{2}{3}bc\right) = \frac{4}{9}abc$

לכן, לכל $a, b, c \in M$ מתקיים $(a\Delta b)\Delta c = a\Delta(b\Delta c)$, ולכן הפעולה קיבוצית.

3. <u>קיו איבר נטרלי</u>

אם קיים איבר נטרלי $e \in M$ אז, לכל $a \in M$ הוא צריך לקיים $a\Delta e = a$ כלומר, $\frac{2}{3}ae = a$, דבר שמחייב $e = \frac{3}{2}$. לכן, אם קיים איבר נטרלי, הוא חייב להיות $\frac{3}{2}$. כעת, נבדוק ש- $\frac{3}{2}$ הוא נטרלי. אכן, $\frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 1}{2} \in M$ ולכל $a \in M$ מתקיים:

$a\Delta\frac{3}{2} = \frac{2}{3} \cdot a\frac{3}{2} = a$ וכן $\frac{3}{2}\Delta a = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}a = a$, מכאן ש- $\frac{3}{2}$ הוא איבר נטרלי.

4. <u>קיום איבר נגדי</u>

עלינו לבדוק אם לכל $a \in M$ קיים $b \in M$ כך ש- $a\Delta b = \frac{3}{2}$. נבחר למשל את האיבר $a = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3 \in M$. אם קיים עבורו נגדי $b \in M$, אז מתקיים $3\Delta b = \frac{3}{2}$ כלומר, $\frac{2}{3} \cdot 3b = \frac{3}{2}$. אבל אז $b = \frac{3}{4}$, וזה מספר שלא שייך לקבוצה M. מכאן שלא לכל איבר של M יש איבר נגדי.

שאלה 3

נתונות f,g פונקציות מ- $\mathbf{N}$ ל- $\mathbf{N}$. ידוע כי g היא על וכי לכל $n \in \mathbf{N}$ מתקיים $f(g(n)) = 2n-1$.

(9 נק׳) א. הוכח כי f אינה פונקציה על.

(9 נק׳) ב. הוכח כי f היא פונקציה חד-חד-ערכית.

(7 נק׳) ג. הדגם פונקציות f,g שמקיימות את נתוני השאלה.

תשובה

א. אינטואיטיבית, ברור ש- f מתאימה לכל מספר טבעי מהצורה $g(n)$, מספר אי-זוגי. מאחר שכל מספר טבעי הוא מהצורה $g(n)$ (שכן, g היא על), הרי ש- f מתאימה **לכל** מספר טבעי, מספר אי-זוגי ולכן היא אינה פונקציה על. ועכשיו, הנה ההוכחה המדויקת:

נניח בדרך השלילה כי f היא פונקציה על. אז קיים $k \in \mathbf{N}$ כך ש- $f(k) = 2$. מאחר ש- g היא פונקציה על, קיים $n \in \mathbf{N}$ כך ש- $g(n) = k$. נציב זאת בשוויון הקודם ונקבל כי $f(g(n)) = 2$. מכאן ש- $2n-1=2$, כלומר $n = 1/2$ וזו בסתירה לכך ש- n הוא מספר טבעי.

ב. נבחר מספרים $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$ ונניח כי $f(k_1) = f(k_2)$. עלינו להוכיח ש- $k_1 = k_2$.

(שים לב שהנתון היחיד בשאלה לגבי f הוא ש- $f(g(n)) = 2n-1$ לכן, חייבים בשלב זה לערב את פונקציה g , כדי שנוכל להשתמש בו.)

כידוע, g היא פונקציה על, לכן קיימים $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$ כך ש- $g(n_1) = k_1$ ו- $g(n_2) = k_2$. ואז, מההנחה $f(k_1) = f(k_2)$ נקבל כי $f((gn_1)) = f(g(n_2))$, לכן $2n_1 - 1 = 2n_2 - 1$. מכאן ש- $n_1 = n_2$, לכן $g(n_1) = g(n_2)$ ולכן $k_1 = k_2$.

לסיכום, הוכחנו שלכל $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$, השוויון $f(k_1) = f(k_2)$ גורר ש- $k_1 = k_2$, ומכאן ש- f היא פונקציה חד-חד-ערכית.

ג. נגדיר $f:\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ כך: לכל $n \in \mathbf{N}, f(n) = 2n-1$. ונגדיר $g:\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ כך: לכל $n \in \mathbf{N}$, $g(n) = n$. אז g היא על ולכל $n \in \mathbf{N}$ מתקיים $f(g(n)) = 2n-1$, כנדרש.

שאלה 4

תהי f איזומטריה של המישור ותהי A נקודה במישור. ידוע כי A היא נקודת שבת של $f \circ f$ וכי $f(A) \neq A$.

(9 נק׳) א. הוכח כי $f(A)$ נקודת שבת של $f \circ f$.

(9 נק׳) ב. הוכח ש- $f \circ f$ היא איזומטרית הזהות.

(7 נק׳) ג. האם יתכן ש- f סיבוב לא טריוויאלי? נמק תשובתך.

תשובה:

א. עלינו להראות כי $(f \circ f)(f(A)) = f(A)$.

נתון ש- A היא נקודת שבת של $f \text{ o } f$ לכן, $(f \circ f)(A) = A$, ולכן

$$f(\underbrace{(f \circ f)(A)}_{(f\circ f)(A)=A}f(A) \quad = \quad (f \circ f)(f(A)) = f(f(f(A)))\,.$$

מכאן ש- הוכח כי $f(A)$ נקודת שבת של $f \text{ o } f$.

ב. נעיר קודם ש- האיזומטריה $f \text{ o } f$ שומרת מגמה. אכן, $f \text{ o } f$ היא הרכבה של איזומטריות אשר שתיהן שומרות מגמה (כאשר f שומרת אותה) או שתיהן הופכות מגמה (כאשר f הופכת אותה). לכן, בכל מקרה, $f \text{ o } f$ שומרת מגמה. מכאן ש- $f \text{ o } f$ יכולה להיות הזזה, סיבוב לא טריוויאלי או הזהות.

מצד שני ידוע ש- A היא נקודת שבת של $f \text{ o } f$ (נתון!) וכן, ש- $f(A)$ נקודת שבת של $f \text{ o } f$ (הוכח בסעיף א'). מאחר ש- $f(A) \neq A$, נובע כי ל- $f \text{ o } f$ יש לפחות שתי נקודות שבת שונות. להזזה אין נקודות שבת, לסיבוב לא טריוויאלי יש רק נקודת שבת אחת, לכן, בהכרח, $f \text{ o } f$ היא איזומטרית הזהות.

ג. התשובה היא **כן**.

ניקח $f = R_{O,180^0}$ (סיבוב ב- 180^0 סביב נקודה O), ונבחר A נקודה במישור, ששונה מ- O.

אז $f(A) \neq A$. כמו-כן, $f \text{ o } f$ היא איזומטרית הזהות, לכן A נקודת שבת של $f \text{ o } f$. לכן f היא סיבוב לא טריוויאלי שמקיים כל תנאי השאלה.

שאלה 5

לפניך מערכת אקסיומות שמושגי היסוד בה הם: "נקודה", "ישר" (כקבוצה של נקודות), והיחס "נמצאת על".

1. יש לפחות שני ישרים.
2. כל נקודה נמצאת על ישר אחד לפחות.
3. לכל ישר ℓ ולכל נקודה P שאינה על ℓ קיים ישר אשר P נמצאת עליו ואין לו נקודה משותפת עם ℓ.

(6 נק') א. הוכח כי המערכת חסרת סתירה.

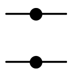
(6 נק') ב. הוכח כי המערכת אינה קטגורית.

(6 נק') ג. הוכח כי המערכת תלויה.

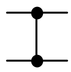
(7 נק') ד. הוכח כי במערכת מתקיים המשפט הבא: "אם נקודה A נמצאת על שני ישרים שונים אז קיימת נקודה נוספת, B הנמצאת אף היא על שני ישרים שונים".

תשובה:

א. כדי להוכיח שהמערכת חסרת סתירה, יש להצביע על מודל אחד שמקיים את כל אקסיומות המערכת. ניקח למשל מודל שבו שתי נקודות a, b ושני ישרים $\{a\}$, $\{b\}$ (ראה המחשה). ברור שאקסיומות 3,2,1 מתקיימות במודל זה.



ב. כדי להוכיח שהמערכת לא קטגורית, עלינו להוכיח שקיימים שני מודלים לא שקולים שמקיימים את כל האקסיומות שלה. ניקח מודל שבו שתי נקודות a, b ושלושה ישרים $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$ (ראה המחשה). גם מודל זה מקיים את כל אקסיומות המערכת אך אינו שקול למודל שהגדרנו בסעיף א' (כי יש לו שלושה ישרים). מכאן שהמערכת אינה קטגורית.



ג. כדי להוכיח שהמערכת תלויה, עלינו להראות שקיימת בה לפחות אקסיומה אחת שנובעת מן האקסיומות האחרות (כלומר, היא מתקיימת **בכל** מודל שמקיים את האקסיומות האחרות). נראה שאקסיומה 2 נובעת מן האקסיומות האחרות.

נבחר מודל שמקיים את אקסיומות 3,1, ונוכיח שגם אקסיומה 2 מתקיימת בו, כלומר, כל נקודה נמצאת על ישר אחד לפחות.

תהי P נקודה במודל זה. נוכיח שיש לפחות ישר אחד אשר P נמצאת עליו. מאקסיומה 1 ידוע שיש לפחות שני ישרים. יהי ℓ אחד מהם. אם P נמצאת עליו אז סיימנו. אם P אינה על ℓ, אז לפי אקסיומה 3, קיים ישר אשר P נמצאת עליו ואין לו נקודה משותפת עם ℓ. לכן, בכל מקרה קיים ישר אשר P נמצאת עליו, כפי שרצינו להוכיח.

ד. נניח שבמודל כלשהו של המערכת, נקודה A נמצאת על שני ישרים שונים ℓ_1 ו- ℓ_2. מאחר שאלה ישרים **שונים**, קיימת נקודה B ששייכת לאחד מהם, למשל ℓ_1, אך אינה שייכת לאחר. ברור ש- B שונה מ- A (שכן, A שייכת לשני הישרים). מאחר ש- B אינה על ℓ_2, הרי שלפי אקסיומה 3, קיים ישר ℓ אשר B נמצאת עליו ואין לו נקודה משותפת עם ℓ_2. בפרט, הנקודה A, ששייכת ל- ℓ_2, לא נמצאת על ℓ, ומכאן ש- ℓ שונה גם מ- ℓ_1. מאחר ש- B נמצאת על ℓ_1 וגם על ℓ, הרי שהיא נמצאת על שני ישרים שונים, כפי שרצינו להוכיח.

שאלה 6

(13 נק') א. תהי A^* הקבוצה הנוצרת מ- $A = \{12, 10, 15\}$ על-ידי כפל.

הוכח או הפרך את הטענה הבאה: $9000 \in A^*$.

(12 נקי) ב. כאשר מחלקים מספר n ב- 3 מקבלים שארית 2 וכאשר מחלקים אותו ב- 2 מקבלים שארית 1. מהי שארית החילוק של n ב- 6 ? נמק תשובתך.

תשובה:

א. נניח כי $9000 \in A^*$. אז, לפי הגדרת A^*, קיימים $r, s, t \in \mathbf{N}_0$, לא כולם אפס כך ש- $9000 = 12^r 10^s 15^t$. כדי לבדוק נכונות השוויון הזה, נפרק את כל המספרים לגורמים ראשוניים, ואז נוכל להשתמש במשפט היסודי של האריתמטיקה. נקבל:

$9 \cdot 10^3 = (2^2 \cdot 3)^r (2 \cdot 5)^s (3 \cdot 5)^t$, ולכן $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 = 2^{2r+s} \cdot 3^{r+t} \cdot 5^{s+t}$.

המשפט היסודי של האריתמטיקה מבטיח כי לכל מספר ראשוני יש אותו מספר של הופעות בכל אחד מאגפי השוויון, לכן, $\begin{cases} 2r + s = 3 \\ r + t = 2 \\ s + t = 3 \end{cases}$. מחיסור שתי המשוואות האחרונות נובע כי $r - s = -1$ ואם נחבר זאת למשוואה הראשונה, נקבל כי $3r = 2$. ברור כאן ש- $r \neq 0$ לכן בשוויון האחרון, שבו כל המספרים טבעיים, המספר הראשוני 3 הוא גורם באגף שמאל, אך אינו גורם באגף ימין, בסתירה למשפט היסודי של האריתמטיקה.

מסקנה: $9000 \notin A^*$.

ב. ממשפט החלוקה עם שארית, ידוע שקיימים מספרים $k, r \in \mathbf{N}_0$ כאשר $r < 6$, כך ש- $n = 6k + r$. עלינו למצוא את r.

מאחר ששארית החילוק של n ב- 3 היא 2, קיים $s \in \mathbf{N}_0$ כך ש- $n = 3s + 2$. אם s הוא מספר זוגי אז קיים $t \in \mathbf{N}_0$ כך ש- $s = 2t$, ואז $n = 3s + 2 = 3 \cdot 2t + 2 = 2(3t + 1)$, דבר הסותר את הנתון כי שארית החילוק של n ב- 2 היא 1. לכן, בהכרח, s הוא מספר אי-זוגי, כלומר, קיים $t \in \mathbf{N}_0$ כך ש- $s = 2t + 1$, ולכן: $n = 3s + 2 = 3(2t + 1) + 2 = 6t + 5$.

מכאן ששארית החילוק של n ב- 6 היא 5.