

מטלת מנחה (ממ"ן) 18

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית חומר הלימוד למטלה: לוגיקה פרקים 1-2
מספר השאלות: 4 משקל המטלה: 3 נקודות
סמסטר: 2009א מועד אחרון להגשה: יום ו' 23.1.09

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1

נגדיר פונקציה f מקבוצת הפסוקים בשפה הפורמלית של תחשיב הפסוקים אל N .
ההגדרה - ברקורסיה על בניית פסוק:

- (i) עבור פסוק יסודי P , $f[P] = 0$. (ii) לכל פסוק α , $f[\sim(\alpha)] = f[\alpha] + 1$.
(iii) לכל שני פסוקים α, β , $f[(\alpha \rightarrow \beta)] = 1 + \min\{f[\alpha], f[\beta]\}$

א. חשב את $f[\varphi]$ כאשר φ הוא הפסוק המתואר בעץ שבראש עמוד 45 בספר הלימוד.

ב. יהי φ פסוק כלשהו. הסבר במלים איזה גודל המתייחס לענפים (צלעות) של עץ הבנייה של φ מתארת $f[\varphi]$.

ג. יהי φ פסוק כלשהו. לכל הופעה של פסוק יסודי P_i ב- φ נייחס מספר טבעי, שייקרא **העומק** של אותה הופעה: הוא יוגדר פשוט להיות משקלו של הסוגר השמאלי שמיד משמאל לאותה הופעה של P_i (משקל של סוגר בפסוק מוגדר בעמ' 42 בספר הלימוד). אם φ עצמו הוא פסוק יסודי, נאמר שהעומק של הופעתו ב- φ הוא 0. הוכח **באינדוקציה על בניית פסוק**, כי $f[\varphi]$ שהוגדרה בתחילת השאלה שווה לעומק הקטן ביותר של פסוק יסודי המופיע ב- φ .

ניתן להיעזר בעובדה, ששתי פונקציות שיש להן אותו תיאור רקורסיבי, כולל תנאי התחלה זהים - מתלכדות.

שאלה 2

נתון הפסוק φ , בכתוב מקוצר: $\varphi: (\sim(P_0 \rightarrow P_1)) \vee (\sim(P_0 \rightarrow P_2))$

- א. רשום פסוק בצורה דיסיונקטיבית נורמלית השקול ל- φ .
ב. רשום פסוק בצורה קוניונקטיבית נורמלית השקול ל- φ .
(הגדרת הצורות הנורמליות - בעמ' 62 בספר הלימוד).

שאלה 3

להלן שתי הנחות:

(i) לוגיקה היא מקצוע קשה, או רוב הסטודנטים אוהבים לוגיקה.

(ii) אם דיסקרטית הוא קורס קל, אז לוגיקה אינה מקצוע קשה.

והנה מסקנה:

(iii) אם אין זה נכון שרוב הסטודנטים אוהבים לוגיקה אז דיסקרטית קורס לא קל.

א. בחר פסוקים יסודיים מתאימים וייצג את ההנחות ואת המסקנה בשפה פורמלית. כתיב מקוצר - מותר.

ב. מצא, והוכח בעזרת לוח אמת או בכל דרך אחרת, איזו מהאמירות הבאות נכונה:

* המסקנה **נובעת טאוטולוגית** מההנחות

(כלומר בכל אינטרפרטציה שבה ההנחות אמיתיות גם המסקנה אמיתית).

* המסקנה **אינה** נובעת טאוטולוגית מההנחות, אך **מתיישבת איתן**

(כלומר קיימת אינטרפרטציה בה קיימת אינטרפרטציה בה ההנחות אמיתיות והמסקנה

שקרית, אך קיימת גם אינטרפרטציה בה ההנחות והמסקנה אמיתיות יחד).

* המסקנה וההנחות יחד **אינם קבוצה עקבית**

(כלומר אין אף אינטרפרטציה בה ההנחות והמסקנה נכונות יחד).

שאלה 4

בכל הסעיפים, α, β, γ הם פסוקים, **לא בהכרח שונים זה מזה**, ולא בהכרח פסוקים יסודיים.

אין קשר בין הסעיפים - α, β, γ יכולים להיות שונים מסעיף לסעיף.

כתיב מקוצר - מותר.

הוכח או הפרך:

א. אם $\{\alpha, \beta\} \models \gamma$ אז $\alpha \models \gamma$ או $\beta \models \gamma$.

ב. אם $\{\alpha, \beta\} \models \gamma$ אז הפסוק $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ הוא טאוטולוגיה.

ג. **אם** $\alpha \models \sim \beta$ **אז** $\{\alpha, \beta\} \models \gamma$ **וגם** $\{\alpha, \beta\} \models \sim \gamma$.

ד. **אם** $\{\alpha, \beta\} \models \gamma$ **וגם** $\{\alpha, \beta\} \models \sim \gamma$ **אז** $\alpha \models \sim \beta$.