פתרון ממ"ן 13

שאלה 1

תהי G חבורה ביחס לפעולה $*$. נתון שלכל $x, y \in G$ מתקיים: $x * y * x = y$.

א. הוכח כי כל איבר של G הוא נגדי לעצמו וכי G היא חבורה חילופית.

ב. תהי G חבורה ביחס לפעולה $*$, ויהיו $x, y \in G$. הוכח שאם x הוא נגדי ל- $x * y$ אז $x * y = y * x$.

תשובה

א. יהי $x \in G$. נסמן ב- e את האיבר הנטרלי. מאחר ש**לכל** $x, y \in G$ מתקיים $x*y*x = y$, הרי ששוויון זה נכון גם עבור אותו x שבחרנו ועבור $y = e$, כלומר $x*e*x = e$. מכאן ש- $x*x = e$ ולכן כל איבר בחבורה נגדי לעצמו.
כעת נבחר איברים $x, y \in G$. לפי הנתון, $x*y*x = y$ לכן $(x*y*x)*x = y*x$. אבל אז $x*y*(x*x) = y*x$ (שימוש בקיבוציות) לכן $x*y*e = y*x$, שכן $x*x = e$, ולכן $x*y = y*x$.
שוויון זה נכון לכל $x, y \in G$ לכן G היא חבורה חילופית.

ב. נסמן שוב, ב- e את האיבר הנטרלי. נתון כי x הוא נגדי ל- $x*y$ כלומר $(x*y)*x = e$. מאחר שיש קיבוציות, נוכל לרשום שוויון זה גם כך: $x*(y*x) = e$. מכאן נובע כי $y*x$ הוא נגדי ל- x.
בחבורה איברים נגדיים מתחלפים, לכן $(y*x)*x = e$. לפיכך, קיבלנו כי $(x*y)*x = (y*x)*x$ ועל-ידי צימצום ב- x מימין נקבל כי $x*y = y*x$.

שאלה 2

תהי $H = \{e, a, b, c\}$ קבוצה בת ארבעה איברים שונים שעליה מוגדרת פעולה בינרית $*$.

נניח כי e הוא איבר נטרלי ב- H וכי $a*a = b*b = e$.

א. הוכח כי אם ב- H מתקיימים חוקי הצמצום, אז $c*a \neq e$.

ב. הוכח כי אם $*$ פעולה קיבוצית אז $c*b \neq e$.

ג. הוכח כי אם H חבורה ביחס ל- $*$ אז $c*c = e$.

ד. השלם את טבלת הפעולה של H במקרה שהיא חבורה.

תשובה

א. נניח בדרך השלילה כי $c*a=e$. אז, על-פי הנתון נקבל כי $a*a=c*a$, ועל-ידי צימום ב- a מימין נקבל כי $a=c$ - סתירה. לפיכך, $c*a\neq e$.

ב. נניח בדרך השלילה כי $c*b=e$. אז, $(c*b)*b=e*b$. (יש לשים לב כי לא השתמשנו בחוקי הציצום כדי לקבל שוויון זה, אלא רק הצבנו e במקום $c*b$). מתכונת הקיבוציות נובע כי $c*(b*b)=e*b$ ומאחר ש- $b*b=e$, נקבל כי $c=b$, וזו סתירה. מכאן ש- $c*b\neq e$.

ג. מאחר ש- H חבורה, קיים ל- c נגדי ב- H. נגדי זה אינו e שכן, $c*e=c$. הוא איננו a, כי בחבורה מתקיימים חוקי הצימצום, ואז לפי סעיף א', $c*a\neq e$. כמו כן, הנגדי של c איננו b, כי בחבורה יש קיבוציות, ואז, לפי סעיף ב', $c*b\neq e$. לפיכך, רק c יכול להיות נגדי ל- c, ומכאן ש- $c*c=e$.

ד. האיבר הנטרלי הוא e, וידוע שכל איבר בחבורה הזו נגדי לעצמו, לכן:

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e		
b	b		e	
c	c			e

כעת, נשתמש בעובדה כי טבלת הפעולה של חבורה, כל איבר מופיע בכל שורה ובכל טור פעם אחת ויחידה. במשבצות המתאימות ל- $a*b$ ול- $b*a$ יכול להופיע רק c, שכן e,a,b כבר הופיעו באותה שורה או באותו טור. נוסיף זאת לטבלה ונקבל:

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	
b	b	c	e	
c	c			e

במצב זה, לכל המשבצות הריקות נותרה רק אופציית מילוי אחת.

לפיכך, טבלת הפעולה של H נראית כך:

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

שאלה 3

א. הוכח שאם בחבורה G כל איבר נגדי לעצמו אז, G חילופית.

ב. הוכח שהחבורה כיחס לפעולת החיבור מודולו 5, $G=\{0,1,2,3,4\}$ היא חילופית, אך אין בה איבר שנגדי לעצמו פרט לאיבר הנטרלי.

ג. הדגם חבורה לא חילופית שבה קיים איבר שנגדי לעצמו שאינו האיבר הנטרלי.

תשובה

א. יהיו $a,b\in G$. עלינו להוכיח ש- $a*b=b*a$.

לפי הנתון, $a*a=e$, $b*b=e$ (שכן, כל איבר נגדי לעצמו). לכן מתקיים:

$(a*b)*(b*a)=a*(b*b)*a=a*e*a=a*a=e$ כלומר $b*a$ הוא נגדי ל- $a*b$.

אבל $a*b$ הוא איבר של G לכן לפי הנתון, $a*b$ נגדי לעצמו. מצאנו כי $b*a$ ו- $a*b$ הם איברים נגדיים ל- $a*b$. מאחר שבחבורה לכל איבר יש נגדי יחיד, נובע ש- $a*b=b*a$, כפי שרצינו להוכיח.

ב. תחילה נמלא את לוח הפעולה של $G = \{0,1,2,3,4\}$ ביחס לפעולת החיבור מודולו 5.

$+_{(\text{mod } 5)}$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

מן הטבלה נובע מייד שמתקיימת תכונת הסגירות, ש- 0 איבר נטרלי, ושלכל איבר יש נגדי (שכן, 0 מופיע בכל שורה). לכן, כדי להוכיח ש- G חבורה נשאר לבדוק שמתקיימת תכונת הקיבוציות.

לכל מספר שלם $n \geq 0$ נסמן ב- $\overline{n}$ את שארית החילוק של n ב- 5. למשל: $\overline{4} = 4$, $\overline{13} = 3$. ברור שלכל $n \in G$, $n = \overline{n}$. אנו משאירים לך לבדוק שלכל $m, n \in G$ מתקיים $m +_{(\text{mod } 5)} n = \overline{m+n}$ כלומר, שארית החילוק של $m+n$ ב- 5 של סכום מספרים שווה בדיוק לתוצאת החיבור מודולו 5 שלהם. לפיכך, לכל $m, n, k \in G$ נקבל:

$(m +_{(\text{mod } 5)} n) +_{(\text{mod } 5)} k = (\overline{m+n}) +_{(\text{mod } 5)} k$ (כי $m +_{(\text{mod } 5)} n = \overline{m+n}$)

$= \overline{(m+n)+k}$ (שימוש באותו שוויון)

$= \overline{m+(n+k)}$ (כי החיבור הרגיל קיבוצי)

$= m +_{(\text{mod } 5)} \overline{(n+k)}$ (שוב שימוש בשוויון הנ"ל)

$= m +_{(\text{mod } 5)} (n +_{(\text{mod } 5)} k)$

לכן פעולת החיבור מודולו 5 היא קיבוצית ולכן G חבורה. מלוח הפעולה נובע מייד ש- G חבורה חילופית (כי הלוח סימטרי ביחס לאלכסון הראשי) וכן נובע שאין ב- G איבר שונה מ- 0 שנגדי לעצמו.
ניקח למשל את חבורת פעולות הסימטריה של משולש שווה צלעות $P = \{I, R_1, R_2, S_a, S_b, S_c\}$ (ראה טבלה בעמוד 41 בספר). זו לא חבורה חילופית כי למשל $S_a \circ S_b = R_2$ אבל $S_b \circ S_a = R_1$.
האיברים S_a, S_b, S_c שונים מהאיבר הנטרלי וכל אחד מהם נגדי לעצמו.

שאלה 4

תהי $A = \{e, a, b, c, \ldots\}$ (קבוצה שבה לפחות חמישה איברים) שעליה מוגדרת פעולה בינרית $*$ המקיימת את חוק הקיבוציות ואת חוקי הצמצום. נתון כי e הוא איבר נטרלי וכי a נגדי לעצמו.

א. הוכח שבקבוצה $B = \{e, a, b, a*b\}$ יש ארבעה איברים שונים.

ב. הוכח שאם $c \notin B$ אז $a*c \notin B$.

ג. הוכח שבחבורה בת חמישה איברים אין איבר שנגדי לעצמו ושונה מהאיבר הנטרלי.

תשובה

א. האיברים e, a, b שונים זה מזה, עפ"י הנתון.

- אם $a*b = a$ אז $a*b = a*e$ ועל-ידי שימוש בחוק הצמצום הימני מקבלים כי $b = e$ בסתירה לנתון.

- אם $a * b = b$ אז $a * b = e * b$ ועל-ידי שימוש בחוק הצמצום השמאלי מקבלים $a = e$ בסתירה לנתון.
- אם $a * b = e$ אז $a * b = a * a$ (כי a נגדי לעצמו) ואז, על-ידי שימוש בחוק הצימצום השמאלי מקבלים $b = a$ -שוב סתירה לנתון.

לכן, האיברים $e, a, b, a * b$ הם שונים זה מזה.

ב. נניח ש- $c \notin B = \{e, a, b, a * b\}$ ונניח בדרך השלילה ש- $a * c \in B$.

- אם $a * c = e$ אז $a * c = a * a$ ואז $c = a$ בסתירה להנחה $c \notin B$.
- אם $a * c = a$ אז $a * c = a * e$ ואז $c = e$ בסתירה להנחה $c \notin B$.
- אם $a * c = b$ אז $a * (a * c) = a * b$ לכן $(a * a) * c = a * b$ (שימוש בקיבוציות), לכן $e * c = a * b$ (כי a נגדי לעצמו) ואז $c = a * b \in B$, בסתירה להנחה $c \notin B$.
- ואם $a * c = a * b$ אז $c = b$, שוב סתירה להנחה $c \notin B$.

לכן $a * c \notin B$

ג. נניח ש- G חבורה ביחס לפעולה * שבה חמישה איברים. נסמן ב- e את האיבר הנטרלי שלה ונניח בדרך השלילה שקיים $a \in G$, $a \neq e$, כך ש- a נגדי לעצמו.

נסמן ב- b איבר של G ששונה מ- e, a. כמובן ש- $a * b \in G$ (בגלל הסגירות) ואז סעיף א׳ מבטיח כי $e, a, b, a * b$ הם ארבעה איברים ב- G ששונים זה מזה (שכן בחבורה מתקיימות כל התכונות שבהן השתמשנו שם).

ב- G קיים איבר נוסף. נקרא לו c. אז $c \notin \{e, a, b, a * b\}$. מתכונת הסגירות ידוע ש- $a * c \in G$ ומאחר שמתקיימים כל התנאים שבסעיף ב׳, נובע ש- $a * c \notin \{e, a, b, a * b\}$. כמו-כן $a * c \neq c$ (שימוש בחוקי הצימצום) לכן קיבלנו שישה איברים שונים ב- G וזו סתירה.

מכן שההנחה כי קיים ב- G איבר שונה מהנטרלי שנגדי לעצמו היא לא נכונה.