פתרון ממ"ן 14

שאלה 1

נתונות הקבוצות הבאות: $A = \{1,2\}$, $B = \mathbf{N}$.

א.תאר את כל הפונקציות מ- A ל- B שאינן חד-חד-ערכיות.

ב.תאר את כל הפונקציות מ- B ל- A שאינן על.

ג.הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

(*i*) קיימות פונקציות $f: A \to B$ ו- $g: B \to A$ כך ש- $g \circ f$ הפיכה.

(*ii*) קיימות פונקציות $f: A \to B$ ו- $g: B \to A$ כך ש- $f \circ g$ הפיכה.

תשובה

א.בקבוצה A יש רק שני איברים, לכן פונקציה מ- A ל- B שאינה יד-חד-ערכיות חייבת להתאים לשני האיברים של A אותו איבר של B. לפיכך, לכל $n \in \mathbf{N}$, ניתן להגדיר פונקציה f_n מ- A ל- B שאינה חד-חד-ערכיות, כך: $f_n(1) = f_n(2) = n$. אלה הן כל הפונקציות מ- A ל- B שאינן יד-חד-ערכיות.

א.מאחר שבקבוצה A יש רק שני איברים, כל פונקציה מ- B ל- A שאינה על חייבת להתאים את כל איברי B לאותו איבר של A (כי רק אז יישאר איבר של A ללא מקור ב- B). לפיכך קיימות רק שת פונקציות מ- B ל- A שאינן על:

$g_1 : B \to A$ המוגדרת על ידי $g_1(n) = 1$ לכל $n \in B$, ו-

$g_2 : B \to A$ המוגדרת על-ידי $g_2(n) = 2$ לכל $n \in B$.

(*i*) הטענה נכונה. כדי להוכיח אותה, נדגים פונקציות $f: A \to B$ ו- $g: B \to A$ כך ש- $g \circ f$ הפיכה. נבחר למשל פונקציה $f: A \to B$ המוגדרת על-ידי $f(1) = 1$ ו- $f(2) = 2$, ופונקציה $g: B \to A$ שמוגדרת על-ידי $g(1) = 1$ ו- $g(n) = 2$ לכל $n \geq 2$. אז $(g \circ f)(1) = 1$ ו- $(g \circ f)(2) = 2$, כלומר $g \circ f$ היא פונקצית הזהות של A ולכן $g \circ f$ הפיכה.

(*ii*) הטענה לא נכונה. כדי להוכיח זאת, עלינו להראות כי **לכל** שתי פונקציות $f: A \to B$ ו- $g: B \to A$, ההרכבה $f \circ g$ אינה פונקציה הפיכה.
נעיר תחילה כי בקבוצה A יש רק שני איברים, לכן לכל פונקציה $g: B \to A$, לפחות שניים מן האיברים $g(1), g(2), g(3)$ (השייכים ל-A) חייבים להיות שווים. מכאן, שבכל מקרה, קיימים איברים $x, y \in B$, $x \neq y$ כך ש- $g(x) = g(y)$. אבל אז, $f(g(x)) = f(g(y))$ כלומר $(f \circ g)(x) = (f \circ g)(y)$.
מכאן ש- $f \circ g$ אינה חד-חד-ערכית, ולכן אינה הפיכה.

שאלה 2

תהי פונקציה $f: A \to B$ ותהי $C \subseteq A$.

א.הוכח ש: $C \subseteq f^{-1}(f(C))$.

ב.הוכח שאם f היא חד-חד-ערכית אז $C = f^{-1}(f(C))$.

ג.הדגם קבוצות A, B, C ופונקציה f שעבורן ההכלה מסעיף א' היא הכלה ממש.

תשובה

א.עלינו להוכיח שלכל $x \in C$ מתקיים $x \in f^{-1}(f(C))$. יהי $x \in C$. אז, עפ"י הגדרת $f(C)$, מתקיים $f(x) \in f(C)$ ואז, מן ההגדרה של $f^{-1}(f(C))$ נובע ש- $x \in f^{-1}(f(C))$. הדבר נכון לכל $x \in C$, לכן הוכחנו כי $C \subseteq f^{-1}(f(C))$. (ניתן את השלב האחרון כך: אם נסמן $D = f(C)$ אז $D \subseteq B$, ולפי הגדרת המקור של D ביחס ל- f ידוע ש- $f^{-1}(D) = \{x \in A \mid f(x) \in D\}$. מכאן ש- $x \in f^{-1}(D)$ אם ורק אם $f(x) \in D$. נציב בחזרה $D = f(C)$ ונקבל ש- $x \in f^{-1}(f(C))$ אם ורק אם $f(x) \in f(C)$).

ב.נניח ש- f היא חד-חד-ערכית. מסעיף א' ידוע ש- $C \subseteq f^{-1}(f(C))$ לכן, כדי להוכיח ש- $C = f^{-1}(f(C))$, מספיק אם נראה ש- $f^{-1}(f(C)) \subseteq C$. יהי $x \in f^{-1}(f(C))$. ואז שוב, (לפי הגדרת המקור של הקבוצה $D = f(C)$ ביחס ל- f) נובע ש- $f(x) \in f(C)$. מאחר ש- $f(C) = \{f(t) \mid t \in C\}$ הרי שקיים $t \in C$ כך ש- $f(x) = f(t)$. מאחר ש- f היא חד-חד-ערכית, נובע ש- $x = t$ ומכאן ש- $x \in C$. הדבר נכון לכל $x \in f^{-1}(f(C))$, לכן הוכחנו ש- $f^{-1}(f(C)) \subseteq C$ ולכן $C = f^{-1}(f(C))$.

ג.מסעיף ב' ברור שחייבים לבנות דוגמה שבה פונקציה f שאינה היא חד-חד-ערכית. ניקח למשל $A = \{1,2\}$, $B = \{b\}$ ו- $f: A \to B$ המוגדרת כך: $f(1) = f(2) = b$. נבחר $C = \{1\}$.
אז:

$f(C) = f(\{1\}) = \{b\}$ ו- $f^{-1}(f(C)) = f^{-1}(\{b\}) = \{1,2\}$. מתקיים $C \subset f^{-1}(f(C))$ כנדרש.

שאלה 3

נתונות f, g פונקציות מ- $\mathbf{N}$ ל- $\mathbf{N}$.

ידוע כי g היא פונקציה על וכי לכל $n \in \mathbf{N}$ מתקיים: $(f \circ g)(n) = 2n - 1$.

א.הוכח כי f אינה פונקציה על.

ב.הוכח כי f היא פונקציה חד-חד-ערכית.

ג.הדגם פונקציות f, g שמקיימות את נתוני השאלה.

תשובה

א.נניח בדרך השלילה כי f היא פונקציה על. אז קיים מספר $k \in \mathbf{N}$ כך ש- $f(k) = 2$. מאחר ש- g היא פונקציה על, נובע שקיים מספר $n \in \mathbf{N}$ כך ש- $g(n) = k$, ומן השוויונות שמצאנו נקבל כי $f(k) = f(g(n)) = 2$, כלומר $(f \circ g)(n) = 2$. אבל, לפי הנתון, $(f \circ g)(n) = 2n - 1$, לכן $2n - 1 = 2$, ולכן $n = 1/2$, בסתירה להנחה כי $n \in \mathbf{N}$. מכאן ש- f אינה פונקציה על.

ב.נניח $t, s \in \mathbf{N}$ כך ש- $f(t) = f(s)$. מאחר ש- g היא פונקציה על, הרי שקיימים מספרים $m, n \in \mathbf{N}$ כך ש- $g(m) = s$ ו- $g(n) = t$. אז, מן השוויון $f(t) = f(s)$ נקבל כי $f(g(m)) = f(g(n))$ לכן $(f \circ g)(m) = (f \circ g)(n)$, ומהנתון נובע כי $2m - 1 = 2n - 1$, כלומר $m = n$. אבל אז מתקיים גם $g(m) = g(n)$, כלומר $s = t$. לסיכום, מצאנו כי לכל $t, s \in \mathbf{N}$, מן השוויון $f(t) = f(s)$ נובע כי $s = t$, לכן f היא פונקציה חד-חד-ערכית.

ג.נבחר למשל את g כפונקצית הזהות של $\mathbf{N}$ ואת $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ שמוגדרת על-ידי $f(n) = 2n - 1$ לכל $n \in \mathbf{N}$. אז g היא כמובן פונקציה על שכן, ולכל $n \in \mathbf{N}$ מתקיים $g(n) = n$, וכמו-כן $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(n) = 2n - 1$ כנדרש.

שאלה 4

תהי G חבורה ביחס לפעולה $*$ ויהי $a \in G$.

נתונה פונקציה $f: G \to G$ שמוגדרת כך: לכל $x \in G$, $f(x) = a^{-1} * x * a$.

א.הוכח ש- f היא פונקציה חד-חד-ערכית ועל.

ב.מצא את הפונקציה ההפכית של f.

ג.הוכח שאם $b, c \in G$ איברים נגדיים זה לזה אז גם $f(b), f(c)$ נגדיים זה לזה.

תשובה

א.נסמן, כרגיל, את האיבר הנטרלי של G ב- e. כדי להוכיח ש- f היא חד-חד-ערכית נראה שלכל $x, y \in G$, השוויון $f(x) = f(y)$ גורר $x = y$. נניח ש- $x, y \in G$ ונניח ש- $f(x) = f(y)$.

אז $a^{-1} * x * a = a^{-1} * y * a$. מחוק הקיבוציות נובע ש- $a^{-1} * (x * a) = a^{-1} * (y * a)$, על-ידי צמצום a^{-1} משמאל מקבלים $x * a = y * a$, ועל-ידי צמצום a מימין מקבלים ש- $x = y$.

מכאן ש- f היא חד-חד-ערכית. כדי להוכיח ש- f היא פונקציה על יש להראות שלכל $y \in G$ קיים $x \in G$ כך ש- $f(x) = y$. יהי $y \in G$. נגדיר $x = a * y * a^{-1}$ לפי תכונות החבורה, ברור ש- $x \in G$. כמו-כן, מתקיים

$$f(x) = a^{-1} * x * a = a^{-1} * (a * y * a^{-1}) * a = (a^{-1} * a) * y * (a^{-1} * a) = e * y * e = y.$$

מכאן ש - f היא על.

ב.כפי שראינו בסעיף הקודם, f היא פונקציה חד-חד-ערכית ועל, לכן היא הפיכה, והמקור של איבר $y \in G$ על-ידי f הוא $a * y * a^{-1}$. לכן הפונקציה ההפכית ל- f היא $g: G \to G$ שמוגדרת כך: לכל $x \in G$, $g(x) = a * x * a^{-1}$.

נעיר שגם בלי להשתמש בתוצאות הסעיף א', אפשר להוכיח ש- f הפיכה ו- g הופכית לה, על-ידי כך שנראה כי $f \circ g$ ו- $g \circ f$ שוות לפונקצית הזהות על G. (ומכאן, מאחר ש- f הפיכה, נקבל ש- f היא חד-חד-ערכית ועל -הוכחה נוספת לסעיף א'). ואכן, לכל $x \in G$ מתקיים:

$$f(g(x)) = f(a * x * a^{-1}) = a^{-1} * (a * x * a^{-1}) * a = (a^{-1} * a) * x * (a^{-1} * a) = e * x * e = x$$

$$g(f(x)) = g(a^{-1} * x * a) = a * (a^{-1} * x * a) * a^{-1} = (a * a^{-1}) * x * (a * a^{-1}) = e * x * e = x$$

מכאן ש- $f \circ g$ ו- $g \circ f$ הן לפונקצית הזהות על G, לכן f הפיכה ו- g הפכית לה.

ג.נניח ש- $b, c \in G$ הם איברים נגדיים זה לזה. אז $b * c = e$, לכן

$$f(b) * f(c) = (a^{-1} * b * a) * (a^{-1} * c * a) = a^{-1} * b * (a * a^{-1}) * c * a$$
$$= a^{-1} * b * e * c * a = a^{-1} * (b * c) * a = a^{-1} * e * a = e$$

לכן $f(c)$ הוא נגדי ל- $f(b)$ ואז גם $f(b)$ נגדי ל- $f(c)$ (שכן, G חבורה), לכן $f(b), f(c)$ נגדיים זה לזה.