

## שאלה 1

(15 נק') א. יהיו  $A, B$  קבוצות. נתון כי  $A \setminus B$  שקולה ל- $A$ . הוכח או הפרך כל אחת מן הטענות הבאות:

(i) אם  $A \cap B \neq \emptyset$  אז  $A$  היא קבוצה אינסופית.

(ii) אם  $A \cap B \neq \emptyset$  אז  $B$  היא קבוצה אינסופית.

(10 נק') ב. תהי  $C$  קבוצה. נתון כי  $\emptyset \in C$ . הוכח או הפרך כל אחת מן הטענות הבאות:

(i)  $C \subseteq P(C)$

(ii)  $C \cap P(C) \neq \emptyset$

## שאלה 2

(10 נק') א. תהי  $A = \{e, a, b\}$  קבוצה בת שלושה איברים שונים שעליה מוגדרת פעולה בינרית \*

המקיימת את תכונת הסגירות. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: אם  $e$  איבר

נטרלי ואם לכל איבר ב- $A$  יש נגדי, אז  $A$  חבורה ביחס לפעולה \*.

נמקו את התשובה.

(15 נק') ב. על  $\mathbb{Q} \setminus \{3\}$  (קבוצת המספרים הרציונליים השונים מ-3), מגדירים פעולה בינרית  $\Delta$

באופן הבא: לכל  $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{3\}$ ,  $a \Delta b = (a-3)(b-3) + 3$

בדקו אלו מהתכונות שבהגדרת החבורה מקיימת פעולה זו. נמק טענותיך.

## שאלה 3

נתונה פונקציות  $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ( $\mathbb{N}$  היא קבוצת המספרים הטבעיים).

ידוע כי לכל  $n \in \mathbb{N}$ , מתקיים:  $f(n) = 2g(n) - 1$ .

(9 נק') א. הוכיחו כי אם  $f$  היא חד-חד-ערכית אז גם  $g$  היא חד-חד-ערכית.

(9 נק') ב. הוכיחו כי  $f$  אינה פונקציה על.

(7 נק') ג. נניח כי: 
$$g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{אם } n \text{ זוגי} \\ \frac{n+1}{2} & \text{אם } n \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$
 חשבו את  $(g \circ f)(n)$ , לכל  $n \in \mathbb{N}$ .

## שאלה 4

יהיו  $f, g$  איזומטריות של המישור ו- $A, B$  נקודות שונות במישור. ידוע כי  $A$  נקודת שבת של  $f$ ,

כי  $B$  נקודת שבת של  $g$ , וכי  $g \circ g = f$ .

(13 נק') א. הוכח כי  $f$  היא איזומטריית הזהות.

(12 נק') ב. תאר את כל האיזומטריות  $g$  המקיימות את תנאי השאלה. נמקו את התשובה.

## שאלה 5

נתונה מערכת האקסיומות הבאה, אשר מושגי היסוד שלה הם "נקודה", "ישר" (כקבוצה של נקודות) והיחס "נמצאת על" המתפרש כשייכת ל-.

1. יש בדיוק שלוש נקודות.
2. קיימים שני ישרים שונים  $\ell_1, \ell_2$  ושתי נקודות שונות  $A, B$  כך ש- $A, B \in \ell_1$  וגם  $A, B \in \ell_2$ .
3. על כל ישר יש לפחות שתי נקודות.
4. לכל ישר  $m$  ונקודה  $P$  שאינה על  $m$  קיים ישר  $m'$  אשר  $P$  נמצאת עליו ואין לו נקודות משותפות עם  $m$ .
- א. הוכח שהמערכת הזאת היא בעלת סתירה.
- ב. הוכח שכל אחת מן המערכות המכילות שלוש מתוך ארבע האקסיומות הנתונות היא חסרת סתירה. (שים לב: יש ארבע מערכות כאלה).
- ג. הוכח כי במערכת  $(2, 3, 4)$  מתקיים המשפט: יש לפחות ארבע נקודות שונות.

## שאלה 6

- (13 נק') א. תהי  $A = \left\{ \frac{5}{9}, \frac{27}{25} \right\}$ . הוכח כי בקבוצה  $A^*$  הנוצרת מ- $A$  על-ידי כפל, לא קיימים מספרים טבעיים.
- (12 נק') ב. ידוע כי שארית החילוק ב-15 של מספר טבעי  $a$  היא 10.
- הוכח באינדוקציה כי לכל  $n \in \mathbb{N}$ , גם שארית החילוק של  $a^n$  ב-15 היא 10.

סוף.