

שאלה 1

(15 נק') א. יהיו A, B קבוצות. נתון כי לכל $x \in B$ הקבוצה $A \setminus \{x\}$ היא שקולה ל- A .

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

(i) אם A קבוצה סופית אז $A \cap B = \emptyset$.

(ii) אם B קבוצה סופית אז $A \cap B = \emptyset$.

(10 נק') ב. יהיו S, T קבוצות. הוכח שאם $P(S) \cap \{T\} \neq \emptyset$ אז $T \subseteq S$.

שאלה 2

(13 נק') א. תהי $H = \{e, a, b, c\}$ קבוצה בת ארבעה איברים שונים שעליה מוגדרת פעולה

בינרית $*$. נניח כי e הוא איבר נטרלי ב- H וכי $a * a = b * b = e$.

(i) הוכח כי אם ב- H מתקיימים חוקי הצמצום, אז $c * a \neq e$.

(ii) הוכח כי אם $*$ פעולה קיבוצית אז $c * b \neq e$.

(iii) הוכח כי אם H חבורה ביחס ל- $*$ אז $c * c = e$.

(12 נק') ב. על קבוצת המספרים השלמים האי-שליליים \mathbb{N}_0 מגדירים פעולה בינרית Δ כך:

$$x \Delta y = 2xy + x + y, \quad x, y \in \mathbb{N}_0$$

אלו מהתכונות שבהגדרת מושג החבורה מקיימת פעולה זו? נמק כל טענותיך.

שאלה 3

נתונות קבוצה A ופונקציות f, g פונקציות מ- A ל- A .

הוכח או הפרך כל אחת מן הטענות הבאות:

(8 נק') א. אם $g \circ f$ היא חד-חד-ערכית אז g היא חד-חד-ערכית.

(9 נק') ב. אם $g \circ f$ היא חד-חד-ערכית אז f חד-חד-ערכית.

(8 נק') ג. אם $g \circ f$ היא על אז f היא על.

שאלה 4

יהיו ℓ ו- m שני ישרים שונים במישור ונסמן ב- S_ℓ ו- S_m את השיקופים ביחס לישרים אלה.

נתון שקיימת במישור נקודה A כך ש- $S_\ell(A) = S_m(A)$.

(12 נק') א. הוכח כי האיזומטריה $S_\ell \circ S_m$ היא סיבוב. נמק טענותיך.

(13 נק') ב. הוכח שלכל נקודה B במישור ששונה מ- A מתקיים $S_\ell(B) \neq S_m(B)$.

(מותר להשתמש בסעיף א' גם אם לא פתרת אותו).

שאלה 5

לפניך מערכת אקסיומות שמושגי היסוד בה הם: "נקודה", "ישר" (כקבוצה של נקודות), והיחס "נמצאת על".

1. יש לפחות שתי נקודות.
2. לכל שתי נקודות A, B קיימים לפחות שני ישרים שונים ℓ_1, ℓ_2 , כך ש- A, B נמצאות על ℓ_1 וגם על ℓ_2 .
3. לכל ישר ℓ ולכל נקודה P שאינה על ℓ קיים לפחות ישר אחד אשר P נמצאת עליו ואין לו נקודה משותפת עם ℓ .
- 6 (נק') א. הוכח שבמערכת מתקיים המשפט הבא: "קיימות לפחות שלוש נקודות.
- 6 (נק') ב. הוכח כי המערכת חסרת סתירה.
- 6 (נק') ג. הוכח כי המערכת אינה קטגורית.
- 7 (נק') ד. הוכח כי הטענה "קיים ישר שעליו יש בדיוק שתי נקודות" לא נובעת מן המערכת הנתונה.

שאלה 6

- 13 (נק') א. נתונים m ו- n מספרים טבעיים. ידוע כי שארית החילוק של n ב-15 היא 7 וכי שארית החילוק של m ב-12 היא 5.
- מצא את שארית החילוק של המספר $4n + 5m$ ב-20. נמק טענותיך.
- 12 (נק') ב. הוכח באינדוקציה שלכל מספר טבעי n מתקיים השוויון הבא:

$$3^{n+1} + 3^{n+2} + \dots + 3^{2n} = \frac{3^{n+1}(3^n - 1)}{2}$$

סוף.