שאלה 1

(15 נקי)   א. יהיו A , B קבוצות. נתון כי $A \setminus B \neq \emptyset$ וכי הקבוצה $A \cup B$ שקולה לקבוצה B.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות :

(i) $A \cup B$ היא קבוצה אינסופית.

(ii) A היא קבוצה אינסופית.

(10 נקי)   ב. יהיו S, T קבוצות. הוכח שאם $\{S \setminus T\} \subseteq P(T)$ אז $S \subseteq T$.

שאלה 2

(10 נקי)   א. תהי $G = \{e, a, b, c\}$ חבורה בת ארבעה איברים שונים ביחס לפעולה $*$, שבה e הוא האיבר הניטרלי.   הוכח כי $a * b = b * a$.

(15 נקי)   ב. על הקבוצה $A = \{4n | n \in \mathbf{N}\}$ מגדירים פעולה בינרית Δ כך :

לכל $a, b \in A$, $a \Delta b = a + \frac{b}{2} - 6$.

בדוק אלו מהתכונות שבהגדרת החבורה מקיימת פעולה זו. נמק טענותיך.

שאלה 3

נתונה פונקציה $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$. ידוע כי $f \circ f = I_{\mathbf{N}}$. ($I_{\mathbf{N}}$ היא פונקציית הזהות של $\mathbf{N}$).

הוכח או הפרך כל אחת מן הטענות הבאות :

(9 נקי)   א. f היא פונקציה חד-חד-ערכית.

(9 נקי)   ב. f היא פונקציה על.

(7 נקי)   ג. f היא פונקציית הזהות.

שאלה 4

נתונים שיקוף מוזז f , ושיקוף S_ℓ ביחס לישר ℓ .

(10 נקי)   א. הוכח כי $f \circ S_\ell$ אינה איזומטריית הזהות.

(15 נקי)   ב. הוכח כי אם A נקודת שבת של $f \circ S_\ell$ אז $f \circ S_\ell$ היא סיבוב שמרכזו ב- A.

שאלה 5

לפניך מערכת אקסיומות שמושגי היסוד בה הם: "נקודה", "ישר" (כקבוצה של נקודות), והיחס "נמצאת על".

1. קיימות שתי נקודות שונות B, A וקיימים לפחות שני ישרים שונים ℓ_1, ℓ_2, כך ש- B, A נמצאות (שתיהן) על ℓ_1 וגם על ℓ_2.
2. קיימים שני ישרים שעליהם נמצאות שתי נקודות בדיוק.

(8 נק') א. הוכח כי המערכת חסרת סתירה.

(8 נק') ב. הוכח שבמערכת מתקיים המשפט הבא: "קיימים לפחות שלושה ישרים".

(9 נק') ג. הוכח כי המשפט "לכל ישר ℓ ולכל נקודה P שאינה על ℓ קיים לפחות ישר אחד אשר P נמצאת עליו ואין לו נקודה משותפת עם ℓ" לא נובע מן המערכת הנתונה ולא סותר אותה.

שאלה 6

(12 נק') א. הוכח שלא קיים מספר טבעי n כך ששארית החילוק שלו ב- 20 היא 13 ושארית החילוק שלו ב- 12 היא 7.

(13 נק') ב. הוכח באינדוקציה שלכל מספר טבעי $n \geq 2$ מתקיים:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$$

סוף.