

**מבנה הבחינה :**

- \* יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.
- \* משקל כל שאלה 25% .
- \* אם תשיב/י על יותר מ- 4 שאלות, יחושב הציון לפי 4 התשובות הראשונות.

**משך המבחן: 3 שעות.**

**חומר עזר:** כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

---

**שימו לב:**

- \* **יש לנמק כל תשובה**, גם אם זה לא נאמר במפורש בשאלה.
  - \* **מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.**
  - \* **אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.**
  - \* **בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרת אותם.**
- 

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

## אנא קרא/י בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

### שאלה 1

בכל סעיפי השאלה  $A = \mathbb{N} - \{0\}$  (הטבעיים ללא 0), ו-  $D$  הוא יחס מעל  $A$  המוגדר כך:  
 $(a,b) \in D$  אם  $b$  מתחלק ב-  $a$  ללא שארית.  
לפי "תורת הקבוצות" עמ' 90 שאלה 3.14,  $D$  הוא יחס סדר-חלקי מעל  $A$ .

(4 נק') א. האם  $D$  הוא סדר-מלא מעל  $A$  (הגדרה 3.5)? הוכח את תשובתך.

(5 נק') ב. הוכח שהיחס  $G = D \cup D^{-1}$  אינו טרנזיטיבי.

(8 נק') ג. הוכח:  $D \cdot D^{-1} = A \times A$ .

(8 נק') ד. הוכח:  $D^{-1} \cdot D = A \times A$ .

הערה: בסעיפים ג, ד, פעולת הכפל באגף שמאל היא כפל יחסים (כפל רלציות).

### שאלה 2

(10 נק') א.  $C$  היא עוצמת קבוצת המספרים הממשיים.

תן דוגמא לקבוצות  $A, B$ , כך שקבוצת הפונקציות של  $A$  ל-  $B$  היא בעלת עוצמה גדולה ממש מ-  $C$ . הוכח שהדוגמא שלך מקיימת את הנדרש.

(15 נק') ב. תהי  $k$  עוצמה כלשהי. הוכח:  $k^2 = k \cdot k$ .

הדרכה: היעזר בהגדרה של כפל עוצמות ובהגדרה של חזקה של עוצמות.

אין קשר בין שני הסעיפים.

### שאלה 3

דנה, תלמידה בכיתה א', קראה בספר את המשפט המעניין: **דנה קמה דנה נמה**.

אחרי שקראה בהצלחה את המשפט, עלו בדעתה של דנה כמה שאלות מעניינות לא פחות:

(3 נק') א. בכמה דרכים אפשר לסדר את כל 12 האותיות שבמשפט הזה במחרוזת אחת ללא רווחים, כגון **דנהקמהדנהנמה**.

(4 נק') ב. בכמה מהדרכים הללו מופיע בתוך המחרוזת הרצף **דמקה**?

(18 נק') ג. מה מספר הדרכים לסדר את 12 האותיות כך **שלא** תופיע בתוך המחרוזת

**אף אחת** מארבע המחרוזות הבאות: **דמקה, קהה, ממד, נננה**.

הדרכה: הכלה והפרדה.

שימו לב לצירופי מחרוזות שלא יכולים לקרות יחד, וכאלה שכן אפשריים.

בכל הסעיפים בשאלה זו יש להגיע לתשובה סופית מספרית. כמובן יש לפרט את הדרך.

#### שאלה 4

יהי  $a_n$  מספר הסדרות באורך  $n$ , שאבריהן שייכים לקבוצה  $\{1, 2, \dots, 7\}$ , והמקיימות את התנאי הבא: לא מופיעים בסדרה מספרים זוגיים זה בסמוך לזה.  
 למשל עבור  $n = 5$ , הסדרה  $(1, 1, 2, 6, 3)$  אינה מותרת, כי 2 מופיע ליד 6.  
 גם הסדרה  $(1, 1, 2, 2, 3)$  אסורה, כי יש שתי הופעות צמודות של 2.  
 (10 נק') א. רשום את  $a_0, a_1, a_2$ . מצא יחס נסיגה (יחס רקורסיה) עבור  $a_n$ .  
 בדוק ש-  $a_0, a_1, a_2$  שרשמת מתיישבים עם יחס הנסיגה שמצאת.  
 (15 נק') ב. פתור את יחס הנסיגה וקבל ביטוי מפורש עבור  $a_n$ .  
 בדוק את הביטוי שקיבלת, עבור  $n = 2$ .

#### שאלה 5

נתונה שפה של תחשיב הפרדיקטים, שבה סימן פונקציה דו-מקומית  $f$ , וסימן פרדיקט דו-מקומי  $E$ . יש בשפה שני סימני קבועים:  $a, b$ .  
 אין בשפה עוד סימני פונקציות, פרדיקטים או קבועים.  
 כרגיל, נמצאים בשפה הקשרים הלוגיים  $\forall, \exists, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee$ , סוגריים, שני הכמתים  $\forall, \exists$  וסימני משתנים כגון  $x, y, z$ .  
 נתונות שלוש אינטרפרטציות  $J_1, J_2, J_3$  של השפה הזו, אל העולם  $P(N)$ .  
 בכל האינטרפרטציות האלה,  $E$  מתפרש כיחס השוויון:  $E(x, y)$  פירושו  $x = y$ .  
 בשלושתן, הקבוע  $a$  מתפרש כקבוצה הריקה והקבוע  $b$  מתפרש כקבוצה  $N$ .  
 ההבדל היחיד בין האינטרפרטציות הוא בפירוש של  $f$ :  
 ב-  $J_1$  הסימן  $f$  מתפרש כחיתוך קבוצות. ב-  $J_2$  הסימן  $f$  מתפרש כאיחוד קבוצות.  
 ב-  $J_3$  הסימן  $f$  מתפרש כחיסור (הפרש) קבוצות.  
 (7 נק') א. כתבו פסוק בשפה זו, **ללא שימוש בכמתים**  $(\forall, \exists)$ , שהוא אמיתי ב-  $J_1$  ושקרי ב-  $J_2$ .  
 (9 נק') ב. כתבו פסוק בשפה זו, **שיכול להכיל** כמתים, אבל **לא מופיע בו הסימן**  $b$ , שהוא אמיתי ב-  $J_1$  ושקרי ב-  $J_2$ .  
 (9 נק') ג. כתבו פסוק בשפה זו, **שיכול להכיל** כמתים, אבל **לא מופיע בו הסימן**  $b$ , שהוא אמיתי ב-  $J_1$ , אמיתי ב-  $J_2$  ושקרי ב-  $J_3$ .

בשאלה 5 אין צורך לנמק, אבל יש לרשום ליד כל תבנית את הפירוש המילולי שלה.  
**כתיב מקוצר - מותר.** הקפידו לשים סוגרים במקרה שייתכן ספק בקריאה.

**בהצלחה!**