

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרקים 4-5
מספר השאלות: 4 משקל המטלה: 3 נקודות
סמסטר: 2009א מועד אחרון להגשה: יום א' 7.12.08

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

חלק מהממ"ן מסתמך על החוברת "פרק 5" שקיבלתם בחבילה של חמרי הקורס.
חוברת זו משלימה את פרק 4 ומחליפה חלק ממנו.

שאלה 1 (24 נקודות)

תני דוגמא לקבוצות A, B כך שחמש הקבוצות $A, B, A - B, A \oplus B, A \cup B$ שונות כולן זו מזו, אבל לכל חמש הקבוצות האלה אותה עוצמה. הוכיחי שהקבוצות שונות והוכיחי שיש להן אותה עוצמה.

שאלה 2 (26 נקודות)

א. תהי K קבוצת כל תת-הקבוצות הסופיות של \mathbb{N} : $K = \{A \in P(\mathbb{N}) \mid A \text{ היא קבוצה סופית}\}$. הוכח ש- K היא בת-מניה. אפשר להיעזר בחוברת "אוסף תרגילים פתורים" עמ' 8 שאלה 10, אבל שימו לב ששם מדובר על סדרות וכאן על קבוצות, לכן יש עוד מה להוכיח... דרך אפשרית היא להתאים לכל קבוצה - סדרה.

ב. בהינתן $A \in P(\mathbb{N})$, נאמר ש- A קו-סופית (co-finite) ב- \mathbb{N} ,

אם A' (המשלימה של A ב- \mathbb{N}) היא קבוצה סופית.

אי-שם בממ"ן 12 ראינו שאם A קו-סופית ב- \mathbb{N} אז A אינסופית, אבל לא כל קבוצה אינסופית של טבעיים היא קו-סופית ב- \mathbb{N} .

תהי L קבוצת כל התת-קבוצות הקו-סופיות ב- \mathbb{N} : $L = \{A \in P(\mathbb{N}) \mid A \text{ קו-סופית ב-}\mathbb{N}\}$. הוכח ש- L היא בת-מניה.

שאלה 3 (26 נקודות)

א. תהי M קבוצת כל התת-קבוצות של N אשר הן ומשלימותיהן אינסופיות:

$$M = \{A \mid A' \text{ שתייהן אינסופיות } A \in P(N)\}$$

הוכח ש- M אינה בת-מניה. עליך להוכיח זאת בעזרת סעיף 4.1.1 בספר ובעזרת העובדה ש-
 $P(N)$ אינה בת-מנייה. אין להסתמך על טענות אחרות מפרק 5. כדאי להיעזר בשאלה 2 כאן.

ב. מצא בעזרת פרק 5 את עוצמת M . שימוש במשפט מתאים ייתן הוכחה קצרה מאוד.

שאלה 4 (24 נקודות)

א. יהיו k_1, k_2, m_1, m_2 עוצמות. הוכח שאם $k_1 \leq k_2$ ו- $m_1 \leq m_2$ אז $k_1 \cdot m_1 \leq k_2 \cdot m_2$.

ב. הוכח: $\aleph_0 \cdot C = C$ (הדרכה: היעזר בסעיף הקודם).

ג. הוכח: $C^C = 2^C$ (הדרכה: היעזר בסעיף הקודם ובמשפטים שבחוברת).