תשובה 1

א. הכלה בכיוון אחד: יהי $x \in C$, נראה ש- $x \in A , x \in B$:

מכיוון ש- $x \in C$, אז מהגדרת מכפלה קרטזית, $(x,x) \in C \times C$. מכאן ומהנתון בשאלה:

$(x,x) \in (A \times B) \cup (B \times A)$. מהגדרת איחוד, $(x,x) \in (A \times B)$ או $(x,x) \in (B \times A)$.

בכל מקרה, מהגדרת מכפלה מקבלים $x \in A$ וגם $x \in B$. לפיכך $C \subseteq A, B$.

הכלה בכיוון שני: יהי $x \in A$, נראה ש- $x \in C$:

מכיוון שנתון ש- B אינה ריקה, יהי $y \in B$. אז $(x,y) \in (A \times B)$, לכן מהגדרת איחוד,

$(x,y) \in (A \times B) \cup (B \times A)$. מכאן ומהנתון בשאלה, $(x,y) \in C \times C$, ולפי הגדרת מכפלה

בפרט $x \in C$. ההוכחה עבור B - בדומה. לפיכך $A, B \subseteq C$.

משני הכיוונים מתקבל השוויון המבוקש.

הערה: ההנחה בשאלה כי A, B אינן ריקות היא חיונית: אם למשל $A = C = \emptyset$ אז **לכל** קבוצה B יתקיים: $(A \times B) \cup (B \times A) = \emptyset = C \times C$, כלומר הטענה **אינה נכונה** במקרה זה !
יש לשים לב שאכן אנו משתמשים בהוכחה בהנחה ששתי הקבוצות אינן ריקות, אחרת יסתבר ש"הוכחנו" טענה שאינה נכונה ! זו הסיבה לכך שהוכחת הכיוון השני נוסחה בזהירות, ולא "במכה אחת" עבור A ו- B.

ב. לא נכון. דוגמא נגדית "קטנה": $A = B = \{1\}$, $C = \emptyset$ (השלימו הפרטים !).

קל גם לתת דוגמאות שבהן C אינה ריקה.

ראו גם אתר הקורס, שאלוני רב-ברירה, שאלון "תורת הקבוצות - יחסים", שאלה 2.

תשובה 2

א. לא. דוגמא נגדית: $(\emptyset, \mathbf{N}) \in R$ אבל $(\mathbf{N}, \emptyset) \notin R$ (מדוע?)

ב. לא. $(\{1\},\{2\}) \in R$ וגם $(\{2\},\{1\}) \in R$ אבל $\{2\} \neq \{1\}$.

ג. נכון. הוכחה: נניח בשלילה ש- X אינה אינסופית, משמע X היא קבוצה סופית.

נראה את $\mathbf{N}$ כקבוצה אוניברסלית בדיון זה (אפשרי כי כל הקבוצות שבדיון חלקיות ל- $\mathbf{N}$).

הנתון $(\mathbf{N}, X) \in R$ פירושו ש- $\mathbf{N} - X$ היא קבוצה סופית.

במלים אחרות (מהגדרת משלים) X' היא קבוצה סופית.

לפי נוסחה בתחתית עמ' 22 בספר, איחוד של קבוצה והמשלים שלה הוא הקבוצה האוניברסלית. כלומר $X \cup X' = \mathbf{N}$.

(המשך ההוכחה בעמ' הבא)

אמרנו ש- X ו- X' שתיהן סופיות. לפני נוסחה בראש עמ׳ 17 בספר, הגודל של איחוד שתי קבוצות **סופיות** (!) זרות הוא סכום הגדלים של שתי הקבוצות האלה.

לכן $|X \cup X'| = |X| + |X'|$ (עבור X , X' **סופיות** !)

הסכום של שני מספרים טבעיים הוא מספר טבעי, לכן $|X| + |X'|$ הוא מספר טבעי,

כלומר $X \cup X'$ היא קבוצה סופית. מצד שני $\mathbf{N}$ כמובן אינה סופית.

לכן השוויון $X \cup X' = \mathbf{N}$ אינו אפשרי.

הגענו לסתירה, לכן הנחת השלילה אינה נכונה. לפיכך X היא אינסופית, כמבוקש.

ד. לא. דוגמא נגדית: נקח את X להיות קבוצת הטבעיים הזוגיים (השלימו את ההוכחה).

ה. נניח $(X,Y) \in R$ וגם $(Y,Z) \in R$, עלינו להראות כי $(X,Z) \in R$.

כמו בפתרון סעיף ג, נקח את $\mathbf{N}$ להיות הקבוצה האוניברסלית.

ההנחות שלנו אומרות ש- $X - Y$ היא קבוצה סופית ו- $Y - Z$ היא קבוצה סופית.

ננסח את ההנחות האלה מחדש בעזרת הזהות $A - B = A \cap B'$ (עמ׳ 23 בספר הלימוד):

$X \cap Y'$ היא קבוצה סופית, ו- $Y \cap Z'$ היא קבוצה סופית.

החיתוך של קבוצה סופית עם קבוצה **כלשהי** הוא קבוצה סופית (כי החיתוך חלקי לקבוצה הסופית ממנה התחלנו). לכן גם $X \cap Y' \cap Z'$ וגם $Y \cap Z' \cap X$ הן קבוצות סופיות.

כעת, לפי שאלה 3 א בממ״ן 11, האיחוד של שתי קבוצות אלה הוא $X \cap Z'$.

איחוד שתי קבוצות סופיות הוא קבוצה סופית (ר׳ פתרון סעיף ג כאן).

לכן $X \cap Z'$ היא סופית, משמע $X - Z$ היא סופית, משמע $(X,Z) \in R$ כמבוקש.

ו. לא. נראה קבוצות X,Y,Z כך ש- $(X,Y) \in S$ וגם $(Y,Z) \in S$, אבל $(X,Z) \notin S$.

תהי Y קבוצת הטבעיים הזוגיים, ותהי $X = Z$ קבוצת הטבעיים האי-זוגיים.

(השלימו בעצמכם את החישוב).

תשובה 3

א. דוגמא אפשרית: $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. אז: $R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$R \cup R^2$ אינו טרנזיטיבי כי $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ הם איברים שלו, אך $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ אינו איבר שלו.

ב. בדומה לסעיף הקודם, נקח $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. (המשך בעמ׳ הבא)

אז $R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 3 & 4 & \dots & 2 \end{pmatrix}$, וכללית $R^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k+1 & (k+2)\bmod n & \dots & k \end{pmatrix}$ ($1 \le k \le n-1$).

בפרט: $R^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & 1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$

מהסתכלות **באיחוד** היחסים R^k הנ"ל עבור $k = 1, 2, \dots, n-1$ נראה כי 1 מותאם לכל אחד מהאיברים פרט ל- 1, 2 מותאם לכל אחד מהאיברים פרט ל- 2, וכו'.

במלים אחרות: $\bigcup_{k=1}^{n-1} R^k = (A \times A) - I_A$.

יחס זה אינו טרנזיטיבי כי למשל כי $\begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}$ הם איברים שלו, אך $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ אינו איבר שלו.

ג. נקח $R = \{\, (i, i+1) \mid i \in \mathbf{N}\}$. אז, בדומה לפתרון שאלה 4, ובדומה לסעיף הקודם כאן, $R^k = \{\, (i, i+k) \mid n \in \mathbf{N}\}$. לכן $\bigcup_{k=1}^{n} R^k = \{(i, i+k) \mid 1 \le k \le n\}$.

לכל n שנקח, יחס זה אינו טרנזיטיבי, כי למשל $\begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} n \\ n+1 \end{pmatrix}$ הם איברים שלו, אך $\begin{pmatrix} 0 \\ n+1 \end{pmatrix}$ אינו איבר שלו. הסגור הטרנזיטיבי של R דורש אפוא איחוד של כל החזקות של R .

למעוניינים: הראו שהסגור הטרנזיטיבי של R, שהוא איחוד כל החזקות של R , הוא:
$\{(i\,,\, j) \mid i < j \;,\; i, j \in \mathbf{N}\}$.

כלומר הראו שהסגור הטרנזיטיבי של R הוא היחס $<$ הרגיל מעל $\mathbf{N}$!

תשובה 4

מהגדרת E , שני איברים של A השייכים לאותה מחלקה עומדים ביחס E זה לזה,
ושני איברים של A שאינם באותה מחלקה אינם עומדים ביחס E זה לזה.
לכן, אם נרשום $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$, כאשר באגף ימין אלו 5 המחלקות,
אז מתקיים: $E = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup (A_3 \times A_3) \cup (A_4 \times A_4) \cup (A_5 \times A_5)$.
זהו איחוד זר (איחוד של קבוצות זרות), לכן

$$|\, E \,| = |\, A_1 \times A_1 \,| + |\, A_2 \times A_2 \,| + |\, A_3 \times A_3 \,| + |\, A_4 \times A_4 \,| + |\, A_5 \times A_5 \,|$$

$$= 1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 = 27$$

ראו בעניין זה גם החוברת "אוסף תרגילים פתורים" עמ' 4 שאלה 4ב.

איתי הראבן