# תשובה 1

ב, ד, ז, ח, ט, י .

אם קיבלת תשובות שונות מאלה – רצוי מאד לעבור שוב ולהבין את הטעות.

# תשובה 2

א. התנאי $X \in P(A \cap B)$ שקול, לפי הגדרת קבוצת חזקה, לתנאי

$X \subseteq A \cap B$ .

לפי שאלה 1.10 ב' , זה **שקול** ל-

$X \subseteq A$ וגם $X \subseteq B$ .

שוב לפי הגדרת קבוצת חזקה, זה **שקול** ל-

$X \in P(A)$ וגם $X \in P(B)$ .

ומהגדרת חיתוך, זה **שקול** ל-

$X \in P(A) \cap P(B)$ .

קיבלנו: $X \in P(A \cap B)$ **אסם** (אם ורק אם) $X \in P(A) \cap P(B)$ ,

ולכן ,לפי הגדרה 1.1, שתי הקבוצות שוות.

ב. נתון $A \subseteq B$ **או** $B \subseteq A$ . ב.ה.כ. (בלי הגבלת כלליות) נניח $A \subseteq B$ .

**הסבר:** ב.ה.כ. פירושו: אנו אמנם **מוסיפים הנחה** מסוימת - למשל בוחרים באפשרות אחת מתוך כמה - אך ההנחה הנוספת אינה מגבילה אותנו באמת, כי אם היא אינה מתקיימת, ההוכחה שנציג תפעל בשינוי קטן **שצריך להיות ברור מאד לקורא**.

במקרה שלנו השינוי הוא: להחליף תפקידים בין $A$ ל- $B$ בהוכחה. הסיבה שאפשר להחליף תפקידים ביניהם קשורה כמובן לעובדה שהשוויון $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ שנדרש להוכיח בשאלה זו אינו משתנה בהחלפת תפקידים בין $A$ ל- $B$.

נסתמך על טענות העזר שהוכחו בהדרכה לשאלה, באתר הקורס.

מההנחה $A \subseteq B$ , בעזרת טענת העזר *(i)* , נובע $A \cup B = B$ .

לכן $P(A \cup B) = P(B)$ .

שוב מההנחה $A \subseteq B$ , בעזרת טענת העזר *(ii)*, נקבל $P(A) \subseteq P(B)$ .

מכאן שוב בעזרת טענת העזר *(i)* נקבל $P(A) \cup P(B) = P(B)$ .

בסה"כ קיבלנו כי $P(A \cup B)$ ו- $P(A) \cup P(B)$ שווים שניהם ל- $P(B)$ ולכן הם שווים זה לזה.

ג. נניח בשלילה כי $A$ אינה חלקית ל- $B$ **וגם (!)** $B$ אינה חלקית ל- $A$

- **שימו לב: זו שלילת האמירה** "$A \subseteq B$ **או** $B \subseteq A$" !

לומר ש- $A$ אינה חלקית ל- $B$ פירושו שקיים $a \in A$ המקיים $a \notin B$

לומר ש- $B$ אינה חלקית ל- $A$ פירושו שקיים $b \in B$ המקיים $b \notin A$ .

הקבוצה $\{a,b\}$ שייכת ל- $P(A \cup B)$ , אך

$\{a,b\} \notin P(A)$ כי $b \notin A$ ו- $\{a,b\} \notin P(B)$ כי $a \notin B$ .

לכן $\{a,b\} \notin P(A) \cup P(B)$ .

מצאנו אפוא קבוצה השייכת ל- $P(A \cup B)$ ואינה שייכת ל- $P(A) \cup P(B)$ .

לפיכך $P(A) \cup P(B) \neq P(A \cup B)$ .

# תשובה 3

א. נצא מאגף שמאל, נפתֵח אותו עד שנגיע לאגף ימין. שימו לב שנוסח השאלה כבר מסתמך על הקיבוציות (האסוציאטיביות) של פעולת החיתוך: בלעדיה אין משמעות לביטויים כגון $X \cap Y \cap Z'$ . העובדה שאנו כותבים ביטוי זה ללא סוגרים בתוכו היא בזכות העובדה שהחיתוך הוא אסוציאטיבי. בהמשך הפתרון נמשיך להסתמך על קיבוציות החיתוך ללא הערה נוספת.

מחילופיות (קומוטטיביות) החיתוך, נשנה את הסדר בתוך כל אחד מזוגות הסוגרים:

$$(X \cap Y \cap Z') \cup (X \cap Y' \cap Z') = (X \cap Z' \cap Y) \cup (X \cap Z' \cap Y')$$

נסמן $V = X \cap Z'$ ונמשיך את הפיתוח:

$$= (V \cap Y) \cup (V \cap Y')$$

כעת לפי פילוג (דיסטריבוטיביות) החיתוך מעל האיחוד (נוסחה בראש עמ' 18 בספר),
כאשר אנו מפעילים את הנוסחה שם **משמאל לימין**:

$$= V \cap (Y \cup Y')$$

ניעזר בטענה בתחתית עמ' 22 בספר על איחוד קבוצה והמשלים שלה:

$$= V \cap U$$

לפי שאלה 1.11 ב, כאשר נציב שם $B = U$, $A = V$ :

$$= V$$

נחזור ונציב את הגדרת $V$:

$$= X \cap Z'$$

ב. לא נכון. דוגמא נגדית: $X = Y = Z = \{1\}$.

דוגמא נגדית כללית יותר: בכל מקרה ש- $X \neq \varnothing$ (בידקו זאת!).

ג. מהגדרת $\oplus$,

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

לפי ההדרכה לשאלה, נבחר $U$ המכילה את $A,B$ ונרשום

$$= (A \cap B') \cup (B \cap A')$$

בעזרת דיסטריבוטיביות החיתוך מעל האיחוד (עמ' 17 בספר הלימוד)

$$= (A \cup B) \cap (A \cup A') \cap (B' \cup B) \cap (B' \cup A')$$

לפי טענה בתחתית עמ' 22 בספר, $A \cup A' = B \cup B' = U$.

לפי שאלה 1.11 בעמ' 16 בספר, ניתן לזרוק את $U$ מהחיתוך.

נקבל בהמשך לשוויון המקורי,

$$= (A \cup B) \cap (B' \cup A')$$

לפי כלל דה-מורגן,

$$= (A \cup B) \cap (B \cap A)'$$

ולבסוף, שוב לפי ההדרכה לשאלה

$$= (A \cup B) - (B \cap A)$$

# תשובה 4

א. מהגדרת הקבוצות $A_i$: $A_0 = \{0,1\}$ , $A_1 = \{1,2\}$ , $A_2 = \{2,3,4\}$ , $A_3 = \{3,4,6\}$ ,

$A_4 = \{4,5,8\}$ , $A_5 = \{5,6,10\}$ , $A_6 = \{6,7,12\}$.

מכאן $D_0 = D_1 = \varnothing$ , $D_2 = \{6\}$ , $D_3 = \{8\}$.

להשלמת שאר ערכי $D_n$ המבוקשים וכהכנה להמשך, נוכיח:

עבור כל $2 \leq n$, $D_n$ היא קבוצה בת איבר אחד בדיוק, ואיבר זה הוא $2n + 2$:

(*) $D_n = \{2n + 2\}$ $(2 \leq n)$

**הוכחה**: יהי $2 \leq n$, נחשב:

$$D_n = A_{n+1} - (A_n \cup A_{n+2})$$

$= \{n+1,\ n+2,\ 2n+2\} - \{n,\ n+1,\ 2n,\ n+2,\ n+3, 2n+4\}$

המספרים $n+1,\ n+2$ מופיעים ב"מחוסר" וב"מחסר" ולכן אינם נמצאים בהפרש הקבוצות.

המספר היחיד שעשוי להיות שייך ל- $D_n$ הוא אפוא $2n+2$ ,

והוא נמצא שם **אם"ם** הוא **אינו** נמצא בקבוצה $\{n,\ n+1,\ 2n,\ n+2,\ n+3,\ 2n+4\}$.

עלינו לבדוק אפוא אם $2n+2$ עשוי להיות שווה לאחד המספרים האלה:

$n,\ n+1,\ 2n,\ n+2,\ n+3,\ 2n+4$.

ע"י בדיקה נגלה שחלק מהשוויונות האלה אינו אפשרי כלל

(למשל לא ייתכן $2n+2 = 2n+4$)

ואחרים אפשריים אבל לא עבור טבעיים בתחום $2 \le n$

(למשל $2n+2 = n+3$ מתקיים רק עבור $n=1$).

לפיכך, עבור $2 \le n$ , $D_n = \{2n+2\}$ .

ב. מהגדרת איחוד על קבוצה של אינדקסים, התשובה היא $\{0,1,2,3,4,6\}$ .

ג. אין אף איבר המשותף לכל 4 הקבוצות הנתונות, לכן החיתוך הוא $\varnothing$ .

ד. נוכיח: $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} D_n = \{2m \mid 3 \le m \in \mathbf{N}\}$

**הוכחה**: מכיוון ש- $D_0 = D_1 = \varnothing$ , אפשר לזרוק מהאיחוד שבאגף שמאל את שתי הקבוצות האלה (**מדוע**? השלימו את הנימוק - לא לפי הגדרת איחוד של שתי קבוצות אלא לפי הגדרה 1.6 שהיא הרלבנטית כאן!)

$$\bigcup_{n\in\mathbf{N}} D_n = \bigcup_{2\le n\in\mathbf{N}} D_n$$

מהנוסחה (*) שקיבלנו בפתרון סעיף א,

$$= \bigcup_{2\le n\in\mathbf{N}} \{2n+2\} = \bigcup_{2\le n\in\mathbf{N}} \{2(n+1)\}$$

נסמן $n+1=m$ ונקבל

$$= \bigcup_{3\le m\in\mathbf{N}} \{2m\} = \{2m \mid 3 \le m \in \mathbf{N}\}$$

איתי הראבן