

שאלה 1

(15 נק') א. יהיו A, B קבוצות. נתון כי $A \not\subseteq B$. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

(i) אם A שקולה ל- $A \cap B$ אז A היא קבוצה אינסופית.

(ii) אם B שקולה ל- $A \cap B$ אז B היא קבוצה אינסופית.

(10 נק') ב. נתונות קבוצות S, T . הוכח שאם $S, T \in P(S) \setminus P(T)$ אז $S \neq \emptyset$.

שאלה 2

(12 נק') א. נתון: $G = \{e, a, b, c\}$ היא חבורה בעלת ארבעה איברים שונים, ביחס לפעולה $*$,

e הוא האיבר הניטרלי ו- $a * b = c * c$.

מצא את $a * a$ ואת $b * b$. נמק כל טענותיך.

(13 נק') ב. על קבוצת המספרים השלמים הזוגיים $A = \{2n | n \in \mathbb{Z}\}$ מגדירים פעולה בינרית Δ

$$\text{כך: לכל } x, y \in A \quad x \Delta y = x + y - \frac{xy}{2}.$$

אלו מהתכונות שבהגדרת מושג החבורה מקיימת פעולה זו? נמק כל טענותיך.

שאלה 3

יהיו f, g פונקציות מ- \mathbb{N} ל- \mathbb{N} . נתון כי לכל n טבעי מתקיים:

$$(f \circ f)(n) = (f \circ g)(n) = n + 6$$

(9 נק') א. הוכח ש- f היא פונקציה חד-חד-ערכית.

(9 נק') ב. הוכח כי $f = g$.

(7 נק') ב. האם f בהכרח על? נמק תשובתך.

שאלה 4

נתון ישר ℓ ונסמן ב- S_ℓ את השיקוף ביחס ל- ℓ . תהי f איזומטריות של המישור.

(10 נק') א. הוכח כי אם x היא נקודת שבת של $S_\ell \circ f \circ S_\ell$ אז $S_\ell(x)$ היא נקודת שבת של f .

(15 נק') ב. הוכח שאם $S_\ell \circ f \circ S_\ell$ היא הזזה אז גם f הזזה.

שאלה 5

לפניך מערכת אקסיומות שמושגי היסוד בה הם: "נקודה", "ישר" (כקבוצה של נקודות), והיחס "נמצאת על". אם נקודה נמצאת על ישר נאמר שהישר עובר דרך הנקודה.

1. קיימים שני ישרים שונים ℓ_1, ℓ_2 ושתי נקודות שונות A, B כך ש- $A, B \in \ell_1$ וגם $A, B \in \ell_2$.
2. יש שתי נקודות שדרכן עובר ישר אחד ויחיד.
3. לכל ישר ℓ ולכל נקודה P שאינה על ℓ קיים לפחות ישר אחד אשר P נמצאת עליו ואין לו נקודה משותפת עם ℓ .
- 6 (נק') א. הוכח כי המערכת חסרת סתירה.
- 6 (נק') ב. הוכח כי המערכת אינה קטגורית.
- 6 (נק') ג. הוכח כי המערכת היא בלתי תלויה.
- 7 (נק') ד. הוכח כי במערכת מתקיים המשפט הבא: "קיים ישר שעליו לפחות שלוש נקודות".

שאלה 6

- 12 (נק') א. יהי n מספר טבעי. ידוע כי שארית החילוק של n ב-8 היא 7 ושארית החילוק של n ב-5 היא 3. מהי שארית החילוק של n ב-20? נמק כל טענותיך.
 - 13 (נק') ב. תהי $A = \{10, \frac{1}{20}, 30\}$ ונסמן ב- A^* את הקבוצה הנוצרת מ- A על-ידי כפל.
- הוכח או הפרך את הטענה הבאה: $\frac{1}{2000} \in A^*$. נמק תשובתך.

סוף.