

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 2
מספר השאלות: 4 משקל המטלה: 3 נקודות
סמסטר: 2009 מועד אחרון להגשה: יום ב' 17.11.08

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

"רלציה" בעברית: יחס.

שאלה 1 (20 נקודות)

- א. תהינה B, A קבוצות לא-ריקות.
הוכח שאם קיימת C כך ש- $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times C$ אז $A = B = C$.
- ב. הוכח או הפרך ע"י דוגמה נגדית:
לכל 3 קבוצות A, B, C מתקיים $(A \times A) - (B \times C) = (A - B) \times (A - C)$.

שאלה 2 (40 נקודות)

- N היא קבוצת המספרים הטבעיים.
נגדיר שני יחסים (רלציות) מעל $P(N)$:
עבור $X, Y \in P(N)$,
 $(X, Y) \in R$ אם ורק אם $X - Y$ היא קבוצה סופית (אפשר ריקה).
 $(X, Y) \in S$ אם ורק אם $X - Y$ היא קבוצה אינסופית.

5 נק' א. האם R הוא יחס סימטרי? הוכיחו את תשובתכם.

5 נק' ב. האם R הוא יחס אנטי-סימטרי? הוכיחו את תשובתכם.

6 נק' ג. הוכח או הפרך: אם $(N, X) \in R$ אז X היא קבוצה אינסופית.

6 נק' ד. הוכח או הפרך: אם X היא קבוצה אינסופית אז $(N, X) \in R$.

9 נק' ה. הוכח ש- R הוא יחס טרנזיטיבי.

כדאי להיעזר בסעיף משאלה 3 בממ"ן 11. הוכחות בנפנופי ידיים לא יתקבלו.

9 נק' ו. האם S הוא יחס טרנזיטיבי? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 3 (30 נקודות)

שאלה זו מיועדת לחדד את מושג הסגור הטרגזיטיבי של יחס.

לפי משפט 2.16 (עמ' 56 בספר) הסגור הטרגזיטיבי של R נתון על-ידי הנוסחה $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$,

ולפי שאלה 2.35 שם, לקבוצה בגודל n ניתן להסתפק ב- $S = \bigcup_{k=1}^n R^k$.

א. מדוע לא מספיק בכל מקרה לקחת $S = R \cup R^2$?

- תני דוגמא ליחס R מעל $A = \{1, 2, 3\}$ כך ש- $R \cup R^2$ אינו טרגזיטיבי.

ב. בהינתן $n > 1$ כלשהו, תני דוגמא ליחס R מעל $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$,

כך ש- $\bigcup_{k=1}^{n-1} R^k$ אינו טרגזיטיבי.

ג. תני דוגמא ליחס R מעל קבוצת הטבעיים \mathbb{N} , שהסגור הטרגזיטיבי שלו באמת מצריך איחוד

של כל החזקות שלו: כלומר יחס R כזה, שלכל n טבעי, $\bigcup_{k=1}^n R^k$ עדיין אינו טרגזיטיבי.

שאלה 4 (10 נקודות)

A היא קבוצה בת 11 איברים, E הוא יחס שקילות מעל A , המחלק את A ל-5 מחלקות: מחלקה אחת בת איבר אחד, שתי מחלקות שבכל אחת מהן 2 איברים, ו-2 מחלקות שבכל אחת מהן 3 איברים.

מהו $|E|$, כלומר כמה זוגות סדורים יש ב- E ? הוכח.