תשובה 1

א. חישוב לפי ההגדרה הרקורסיבית נותן 2.

ב. $f[\varphi]$ מתארת את מספר הקטעים במסלול הקצר ביותר משורש העץ ל"עלה" כלשהו.
כדי להוכיח זאת, נרשום הגדרה רקורסיבית של פונקציה המתארת את אורך המסלול הקצר ביותר בעץ מהשורש לעלה כלשהו. **נקבל בדיוק את ההגדרה שניתנה בשאלה עבור f !**
שתי פונקציות שיש להן אותה הגדרה רקורסיבית – מתלכדות (ר' הסבר בסוף סעיף ג').

ג. עבור פסוק כלשהו φ, נסמן ב- $g[\varphi]$ את **העומק המינימלי של פסוק יסודי** ב- φ, כפי שהוגדר בסעיף ג' בשאלה. נוכיח: $f[\varphi] = g[\varphi]$. ההוכחה – באינדוקציה על בניית פסוק:

(i) עבור פסוק יסודי P, $f[P] = 0$, ולפי ההגדרה גם $g[P] = 0$.

(ii) יהי α פסוק, יהי $\varphi = \sim(\alpha)$, ונניח $f[\alpha] = g[\alpha]$.
התווים "$\sim($" שבתחילת φ, והתו "$)$" שבסיום, אינם פסוקים יסודיים. לכן כדי לחשב את $g[\varphi]$ עלינו להתבונן בהופעות של פסוקים יסודיים ב- α, ולחשב את העומק שלהם בביטוי $\sim(\alpha)$. מהגדרת עומק (משקל, עמ' 41 – 42 בספר) מובן שכל הופעה של פסוק יסודי ב- α היא בעלת עומק גדול ב- 1 בביטוי $\sim(\alpha)$ לעומת העומק שלה בביטוי α. לכן גם העומק המינימלי של פסוק יסודי בביטוי גדל ב- 1, כלומר $g[\varphi] = g[\alpha] + 1$. מצד שני, $f[\varphi] = f[\alpha] + 1$. לכן $g[\varphi] = f[\varphi]$.

(iii) יהיו α, β פסוקים, $\varphi = (\alpha) \rightarrow (\beta)$, ונניח $f[\alpha] = g[\alpha]$, $f[\beta] = g[\beta]$.
חמשת התוים שמחוץ ל- α ו- β בביטוי $(\alpha) \rightarrow (\beta)$ אינם פסוקים יסודיים, ולכן כדי לחשב את $g[\varphi]$ עלינו להתבונן בהופעות של פסוקים יסודיים ב- α וב- β ולחשב את העומק שלהם בביטוי $(\alpha) \rightarrow (\beta)$. כמו בסעיף הקודם, כל הופעה של פסוק יסודי ב- α היא בעלת עומק גדול ב- 1 בביטוי $(\alpha) \rightarrow (\beta)$ לעומת העומק שלה בביטוי α. בנוסף, נזכור ש- α מאוזן מבחינת הסוגריים **(משפט 2.4 !)** ולכן גם המחרוזת (α) מאוזנת. לכן כל הופעה של פסוק יסודי ב- β היא בעלת עומק גדול ב- 1 בביטוי $(\alpha) \rightarrow (\beta)$ לעומת העומק שלה ב- β.
מכל זה מתקבל ש- $g[\varphi] = 1 + \min\{g[\alpha], g[\beta]\}$. מצד שני, $f[\varphi] = 1 + \min\{f[\alpha], f[\beta]\}$.
לכן $g[\varphi] = f[\varphi]$.

בסך-הכל הראינו באינדוקציה על בניית פסוק, **שלכל** פסוק φ, $g[\varphi] = f[\varphi]$.

אגב, אם נזרוק מהוכחה זו את כל הפרטים הספציפיים, נוכל לקבל ממנה הוכחה באינדוקציה על בניית פסוק של הטענה הכללית שהזכרנו בהוכחת סעיף ב׳: שתי פונקציות שיש להן אותה הגדרה רקורסיבית – מתלכדות.

תשובה 2

א. מלוח האמת של ״חץ״, הפסוק $P_0 \to P_1$ שקרי אםם P_0 אמיתי ו- P_1 שקרי.

לכן $\sim (P_0 \to P_1)$ אמיתי אםם P_0 אמיתי ו- P_1 שקרי.

בדומה $\sim (P_0 \to P_2)$ אמיתי אםם P_0 אמיתי ו- P_2 שקרי.

מכאן לא קשה לרשום את לוח האמת של $(\sim (P_0 \to P_1)) \vee (\sim (P_0 \to P_2))$.

בעזרת הלוח או בעזרת מה שנאמר כאן, אנו רואים שהפסוק הנ״ל אמיתי בדיוק ב- 3 מתוך 8 השורות של לוח האמת:

כל השורות בהן P_0 אמיתי, פרט לשורה בה P_0, P_1, P_2 אמיתיים כולם.

מכאן לפי האלגוריתם 2.30 בספר, **צורה דיסיונקטיבית נורמלית (צד״נ)** לפסוק היא:

$(P_0 \wedge P_1 \wedge (\sim P_2)) \vee (P_0 \wedge (\sim P_1) \wedge P_2) \vee (P_0 \wedge (\sim P)_1 \wedge (\sim P_2))$.

צד״נ של פסוק אינה יחידה: ייתכנו צורות רבות כאלה !

צד״נ אחרת אפשרית לפסוק זה, שניתן לקבל אותה ישירות מהפסוק הנתון היא:

$(P_0 \wedge (\sim P_1)) \vee (P_0 \wedge (\sim P_2))$ **(*)**

בצורה זו לא כל הפסוקים היסודיים הנתונים מופיעים בכל מרכיב - זה לגיטימי !

ב. **צורה קוניונקיטיבית נורמלית (צק״נ)** לפסוק: לפי המתכון שבתשובה לשאלה 2.33 נקבל צורה אחת אפשרית, שהיא קוניונקציה של 5 פסוקים שכל אחד מהם מכיל את כל 3 הפסוקים היסודיים, עם הופעות שונות של סימני שלילה על חלק מהם.

נדגים כאן דווקא צק״נ אחרת לפסוק המקורי: $P_0 \wedge ((\sim P_1) \vee (\sim P_2))$!

הגענו לפסוק זה על-ידי שימוש בחוק הפילוג על הפסוק (*) ופישוט הפסוק שהתקבל בעזרת שקילויות שונות.

תשובה 3

א. נסמן: L: לוגיקה היא מקצוע קשה. S: רוב הסטודנטים אוהבים לוגיקה.

D: דיסקרטית הוא קורס קל .

אנו רואים את L,S,D כפסוקים יסודיים. תרגום הטענות בשאלה:

(i) $L \vee S$ *(ii)* $D \to (\sim L)$ *(iii)* $(\sim S) \to (\sim D)$

ב. ניתן לענות על השאלה בעזרת לוח אמת בעל 8 שורות.

למען העניין, נראה דרך אחרת:

עלינו לבדוק אם בכל אינטרפרטציה שבה (i)+ (ii) אמיתיים, גם (iii) אמיתי.

נבדוק אם קיימת אינטרפרטציה J שבה (i)+(ii) אמיתיים ו- (iii) שקרי.

נתבונן ב- (iii). לפי הלוח של "חץ",

פסוק "חץ" הוא **שקרי** ב- J כלשהי אםם המרכיב השמאלי שלו אמיתי ב- J והימני שקרי ב- J.

במקרה שלנו זה אומר: $\sim S$ אמיתי ב- J ו- $\sim D$ שקרי ב- J.

כלומר $J(S) = \mathrm{F}$, $J(D) = \mathrm{T}$.

הנחנו ש- (ii) אמיתי ב- J, ויחד עם התוצאה $J(D) = \mathrm{T}$, נקבל מהלוח של "חץ" שגם

$J(\sim L) = \mathrm{T}$. כלומר $J(L) = \mathrm{F}$.

קיבלנו $J(L) = \mathrm{F}$ וקודם קיבלנו $J(S) = \mathrm{F}$. מהלוח של "או" יוצא שגם פסוק (i) שקרי ב- J,

בסתירה להנחתנו!

הגענו לסתירה, לכן לא קיימת J שבה (i)+(ii) אמיתיים ו- (iii) שקרי.

כלומר בכל אינטרפרטציה שבה (i)+ (ii) אמיתיים, גם (iii) אמיתי.

משמע - התוצאה (iii) **נובעת טאוטולוגית** מההנחות (i) + (ii)!

תשובה 4

א. לא נכון. דוגמא נגדית: ניקח $\gamma = P_1 \wedge P_2$, $\beta = P_2$, $\alpha = P_1$.

מתקיים $\{P_1, P_2\} \models P_1 \wedge P_2$: בכל אינטרפרטציה בה P_1 ו- P_2 מקבלים שניהם T גם $P_1 \wedge P_2$ מקבל T. אבל אף אחד מהפסוקים P_1, P_2 לבדו אינו גורר טאוטולוגית את $P_1 \wedge P_2$ (מדוע?).

ב. נכון: מתקבל משאלה 2.25 + משפט 2.22 (שניהם בעמ' 57 בספר).

לחלופין, הנה תחילתה של הוכחה ישירה: נניח $\{\alpha, \beta\} \models \gamma$ ונניח בשלילה כי $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ **אינו** טאוטולוגיה. אז קיימת אינטרפרטציה J בה $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ שקרי. מהלוח של "חץ", α אמיתי ב- J בעוד ש- $\beta \to \gamma$ שקרי ב- J. המשיכו באותה צורה והגיעו לסתירה!

ג. צונזר

ד. **נכון**! פירוש ההנחות הוא, שבכל אינטרפרטציה שבה α ו- β שניהם אמיתיים, גם γ אמיתי וגם $\sim\gamma$ אמיתי. כמובן, **אין אף אינטרפרטציה** שבה γ ו- $\sim\gamma$ שניהם אמיתיים. לכן כדי לקיים את התנאים, צריך שלא תהיה אף אינטרפרטציה שבה α ו- β שניהם אמיתיים!

אם אין אינטרפרטציה שבה α ו- β שניהם אמיתיים, משמע בכל אינטרפרטציה שבה α אמיתי, β הוא שקרי, כמבוקש (לא בהכרח קיימת אינטרפרטציה בה α אמיתי - זה לא משנה).

אגב, כאשר אין אף אינטרפרטציה שבה α,β אמיתיים שניהם, אומרים שהקבוצה $\{\alpha, \beta\}$ **אינה עקבית**.

הנה דוגמא למצב המתואר בשאלה: $\alpha = P_0$, $\beta = \sim P_0$, ו- γ פסוק כלשהו.

שלישייה זו מקיימת את הדרישות: מכיון **שאין** אף אינטרפרטציה שבה P_0 ו- $\sim P_0$ אמיתיים שניהם, נוכל לומר שבכל אינטרפרטציה בה שניהם אמיתיים γ אמיתי, וגם $\sim\gamma$ אמיתי...

איתי הראבן