תשובה 1

א. לפי שאלה 3.19 בעמ' 91 בכרך "תורת הקבוצות": כמספר הדרכים לסדר 8 עצמים שונים בשורה. לפי "קומבינטוריקה", בראש עמ' 23 , מספר זה הוא $8!=40,320$.

ב. כמספר הדרכים לבחור 3 מתוך 8 עצמים שונים, ללא חזרות וללא חשיבות לסדר:

$$\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!\,5!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}=56$$

ג. ב.ה.כ. (בלי הגבלת כלליות) נניח ש- $B=\{1,2,3\}$.

בחירת פונקציה מ- B הזו ל- A שקולה לבחירת **סדרה** של 3 איברים מתוך A (מדוע?).

פונקציה מ- B ל- A היא חד-חד-ערכית אסם כל איברי הסדרה המתאימה שונים זה מזה.

לכן מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות של B ל- A הוא כמספר הדרכים לבחור 3 מתוך 8 עצמים שונים, **ללא חזרות ועם חשיבות לסדר**: $8\cdot 7\cdot 6=336$.

ד. $8^3=512$: ר' "קומבינטוריקה" שאלה 1.32 בעמ' 17.

ה. $\frac{8!}{(3!)^2\cdot 2!\cdot 2!}=280$. הסבר למכנה: חילקנו בסידורים הפנימיים בכל אחת מהמחלקות, וכן בהחלפה בין שתי המחלקות בגודל 3. ראו שאלה 2.28 בעמ' 37 בספר (הנוסחה השניה בשאלה - ר' ההסבר עבורה בעמ' 157) ושאלה 2.29 באותם עמודים.

תשובה 2

א. $12,600 = \frac{10!}{4!3!2!}$: ר' שאלה 2.41 בעמ' 43 בספר, והדיון הכללי שבעקבותיה.

ב. אם שתי הספרות הללו חייבות להופיע צמודות, **נתייחס אליהן כאל תו בודד**.

בנוסף, מכיון שהן זהות, אין משמעות להחלפת הסדר בין שתי ההופעות של 2.

יש לנו אפוא 9 תוים, מ- 4 סוגים שונים, כשהכמויות מהסוגים השונים הן: 4+3+1+1 .

מכאן, בדומה לגמרי לסעיף הקודם, מספר הסידורים הוא $2,520 = \frac{9!}{4!3!}$.

ג. נוריד מתוצאת הסעיף הקודם את הסידורים בהם מופיע הרצף 333 .

אם **מופיע** הרצף 333, נראה אותו כתו בודד. בהנחה שגם 22 מופיע, יש לנו 7 תוים שונים, מהם 4 זהים ועוד 3 שונים.

לכן מספר הסידורים בהם **מופיע** הרצף 22 **ומופיע** גם 333 הוא: $210 = \frac{7!}{4!}$.

מספר הסידורים בהם **מופיע** הרצף 22 **ולא מופיע** 333 הוא אפוא:

$2{,}520 - 210 = 2{,}310$.

תשובה 3

א. מדובר בבחירה של 10 עצמים מתוך 3 סוגים, כאשר עצמים מאותו סוג נחשבים זהים (עמ' 49 בספר). מספר האפשרויות לכך הוא $66 = \binom{12}{2} = D(3,10)$.

ב. עלינו להוריד מתוצאת הסעיף הקודם את הבחירות שאינן אפשריות כעת עקב הגבלת מספר הכדורים:

כל הכדורים אדומים (אפשרות אחת), 9 כדורים אדומים (2 אפשרויות לכדור הנותר),

כל הכדורים סגולים (אפשרות אחת), 9 כדורים סגולים (2 אפשרויות לכדור הנותר),

כל הכדורים לבנים (אפשרות אחת), 9 כדורים לבנים (2 אפשרויות לכדור הנותר),

8 כדורים לבנים (3 אפשרויות לשני הכדורים הנותרים: אדום-אדום, סגול-סגול, אדום-סגול).

סך האפשרויות הפסולות: 12.

מכאן, מספר הדרכים המותרות: $54 = 66 - 12$.

ג. אם כל צבע צריך להיבחר לפחות פעם אחת, נקח כדור אחד מכל צבע.

נותר לנו לבחור 7 כדורים מתוך 7 אדומים, 7 סגולים, 6 לבנים.

החישוב דומה לסעיפים א, ב, כאשר הפעם יש רק אפשרות אחת פסולה: בחירת 7 כדורים לבנים.

מספר הדרכים: $35 = D(3,7) - 1$.

תשובה 4

אף אחד מהמשתנים אינו שווה 0 ואינו שווה 1 , כלומר במלים אחרות:

כל המשתנים גדולים/ שווים 2. לכן נציב $x_i = y_i + 2$ $(1 \le i \le 6)$,

ונקבל $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + 12 = 29$,

כלומר $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 17$, כאשר y_i הם טבעיים כלשהם, שהתנאי היחיד לגביהם הוא התנאי על הזוגיות, בו נטפל כעת.

בדיוק 3 מהמשתנים המקוריים היו זוגיים, ולכן בדיוק 3 מהמשתנים החדשים הם זוגיים (חיסור 2 ממספר אינו משנה את הזוגיות שלו). יש $\binom{6}{3} = 20$ דרכים לבחור את 3 המשתנים הזוגיים מתוך 6 המשתנים.

לאחר שבחרנו אותם, נניח ב.ה.כ. (בלי הגבלת כלליות) שאֵלה הם 3 המשתנים הראשונים.

נסמן אפוא: $y_i = 2z_i$ $(1 \le i \le 3)$, $y_i = 2z_i + 1$ $(4 \le i \le 6)$.

נקבל $2z_1 + 2z_2 + 2z_3 + 2z_4 + 2z_5 + 2z_6 + 3 = 17$,

כלומר $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 = 7$, כאשר z_i הם טבעיים **ללא כל הגבלה**.

מספר הפתרונות של משוואה כזו חושב בסעיף 2.4 , והוא $D(6,7) = \binom{12}{5} = 792$.

את זה עלינו לכפול במספר הדרכים לבחור מי יהיו המשתנים הזוגיים, שהוא כאמור 20.

תשובה סופית: $792 \cdot 20 = 15{,}840$.

איתי הראבן