## *תשובה 1*

א. תנאי התחלה:

$a_0 = 1$ (סדרה ריקה! נוח להיעזר ב- $a_0$ לסעיף ב)

$a_1 = 1$ (רק בלוק $1 \times 2$ עומד אפשרי)

$a_2 = 3$ בלוק של $2 \times 2$ , או שני בלוקים $1 \times 2$ עומדים, או שני בלוקים $1 \times 2$ שוכבים).

יחס נסיגה: נתבונן בריצוף באורך $n+1$ .

* אם הוא מסתיים בבלוק $1 \times 2$ עומד, אז לפני הבלוק הזה יכול לבוא כל ריצוף באורך $n$ , כלומר $a_n$ ריצופים אפשריים.

* אם הוא מסתיים בבלוק של $2 \times 2$, אז לפני הבלוק הזה יכול לבוא כל ריצוף באורך $n-1$, כלומר $a_{n-1}$ ריצופים אפשריים.

* אם הוא מסתיים בבלוק $1 \times 2$ שוכב, אז בהכרח מדובר בשני בלוקים $1 \times 2$ שוכבים זה מעל זה. לפניהם יכול לבוא כל ריצוף באורך $n-1$, כלומר $a_{n-1}$ ריצופים אפשריים.

בסה"כ קיבלנו: $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$

נבדוק שזה תואם את תנאי ההתחלה שרשמנו: $a_2 = a_1 + 2a_0 = 1 + 2 \cdot 1 = 3$ .

ב. המשוואה האפיינית: $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ .

פתרונותיה הם: $\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2}$ כלומר $2 , -1$ .

לפיכך $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n$ .

בהצבת תנאי ההתחלה $a_1 , a_0$ נקבל:

$A + B = 1$ , $2A - B = 1$ .

מחיבור שתי משוואות אלה $3A = 2$ , כלומר $A = 2/3$ . מכאן $B = 1/3$ .

לפיכך

$$a_n = \frac{2}{3} \cdot 2^n + \frac{1}{3}(-1)^n = \frac{1}{3}\left(2^{n+1} + (-1)^n\right)$$

ג. מיחס הנסיגה: $a_3 = a_2 + 2a_1 = 5$ , $a_4 = a_3 + 2a_2 = 11$ .

מהנוסחה המפורשת: $a_4 = \frac{1}{3}\left(2^5 + (-1)^4\right) = 11$

## תשובה 2

כמו בפתרון שאלה 4 בממ״ן 15, נניח שהמשתנים הזוגיים הם 3 הראשונים, ונכפול את התוצאה שנקבל ב- $20 = \binom{6}{3}$ .

מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 29$ תחת האילוצים הנתונים בשאלה הוא המקדם של $x^{29}$ בפיתוח הפונקציה $f(x) = (x^2 + x^4 + x^6 + \dots)^3 (x^3 + x^5 + x^7 + \dots)^3$ .

בסוגריים השמאליים נוציא גורם משותף $x^2$ , שלאחר העלאה בחזקת 3 נותן $x^6$ .

בסוגריים הימניים נוציא גורם משותף $x^3$ , שלאחר העלאה בחזקת 3 נותן $x^9$ .

קיבלנו

$$f(x) = x^6(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots)^3 \cdot x^9(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots)^3$$
$$= x^{15}(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots)^6$$

המקדם של $x^{29}$ בפונקציה זו הוא המקדם של $x^{14}$ בפונקציה $(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots)^6$ .

בהצבת $y = x^2$ , זהו המקדם של $y^7$ בפונקציה $(1 + y + y^2 + y^3 + \dots)^6$ .

לפי נוסחה (*iii*) שבסוף הממ״ן, המקדם הזה הוא $D(6,7) = \binom{12}{5} = 792$ .

כאמור בתחילת הפתרון, את זה עלינו לכפול ב- 20 . תשובה סופית: $792 \cdot 20 = 15{,}840$ .

## תשובה 3

צונזר

## תשובה 4

צונזר.

לתרגיל דומה פתור, ראו באתר הקורס, הקובץ ״מבוא לפונקציות יוצרות״, לקראת סוף הקובץ.

איתי הראבן