

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית חומר הלימוד למטלה: תורת הקבוצות פרק 3

מספר השאלות: 4 משקל המטלה: 3 נקודות

סמסטר: 2009 מועד אחרון להגשה: יום ב' 24.11.08

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
 - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (28 נקודות)

\mathbb{N} היא קבוצת המספרים הטבעיים, \mathbb{Z} היא קבוצת המספרים השלמים,

\mathbb{R} היא קבוצת המספרים הממשיים. נסמן גם: $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, קבע אם היא חד-חד-ערכית ואם היא על. הוכח.

א. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = \sqrt{1+2x} - 1$.

ב. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = \text{floor}(x) = \lfloor x \rfloor$. הפונקציה מחזירה את המספר השלם הגדול ביותר

שאינו גדול יותר מ- x . במחשבים מקובלים שני הסימונים הללו לפונקציה זו, מתמטיקאים

מסמנים אותה לעתים $[x]$ והיא נקראת גם "החלק השלם של x ".

דוגמאות: $\lfloor 4.2 \rfloor = 4$, $\lfloor -2.6 \rfloor = -3$.

ג. $f: P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R})$, $f(X) = X \cup \mathbb{N}$.

ד. $f: P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R})$, $f(X) = X \oplus \mathbb{N}$ (הדרכה: ר' תכונות של הפרש סימטרי בעמ' 27

בספר. שימוש באסוציאטיביות יחד עם התכונה האחרונה בסעיף ב יכול לעזור).

שאלה 2 (24 נקודות)

לפי שאלה 3.25 בעמ' 94 בספר, יחס ההכלה \subseteq הוא סדר-חלקי מעל כל קבוצה שאבריה הם קבוצות. השאלה עוסקת בשתי דוגמאות ליחס ההכלה מעל קבוצה של קבוצות.

א. תהי A קבוצה ותהי K קבוצת כל יחסי השקילות מעל A . לפי האמור בראש השאלה, K סדורה בסדר-חלקי לגבי הכלה. הראה שיש ב- K איבר קטן ביותר ואיבר גדול ביותר ("תורת הקבוצות" עמ' 93). מיהם? הוכח שהאיברים שאתה מציין אכן שייכים ל- K .

ב. תהי $A = \{1, 2, 3\}$ ותהי J קבוצת כל היחסים האנטי-סימטריים מעל A . לפי האמור בראש השאלה, J סדורה בסדר-חלקי לגבי הכלה. האם יש ב- J איבר קטן ביותר? איבר גדול ביותר? אם כן, מיהם? אם לא מצאת איבר קטן ביותר, תן דוגמא לאיבר מינימלי והסבר מדוע הוא אינו קטן ביותר. אם לא מצאת איבר גדול ביותר, תן דוגמא לאיבר מקסימלי והסבר מדוע הוא אינו גדול ביותר.

שאלה 3 (25 נקודות)

תהי f פונקציה של קבוצה A לקבוצה B . נגדיר פונקציה $f_* : P(A) \rightarrow P(B)$ כך:

$$f_*(X) = \{f(x) \mid x \in X\}, \quad X \in P(A)$$

הוכח כי f היא חד-חד-ערכית אם f_* היא חד-חד-ערכית.

תרגיל הכנה לשאלה זו יפורסם באתר הקורס.

שאלה 4 (23 נקודות)

הוכח באינדוקציה על n : מספר טבעי שבנוי מ- 3^n ספרות זהות, מתחלק ב- 3^n . למשל: 222 מתחלק ב- 3, 222,222,222 מתחלק ב- 9. אפשר להסתמך על העובדה הידועה הבאה: מספר שסכום ספרותיו מתחלק ב- 3, הוא עצמו מתחלק ב- 3. הדרכה נוספת תהיה באתר הקורס לקראת מועד הגשת המטלה.