מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית **חומר הלימוד למטלה**: תורת הקבוצות פרק 1

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2009א **מועד אחרון להגשה:** יום ה' 6.11.08

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (24 נק')

שאלה זו נועדת לתרגל מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות ולחדד כמה נקודות שכדאי להבין בשלב מוקדם:

* ההבדל בין A לבין $\{A\}$ (קבוצה שהאיבר היחיד שלה הוא A).
* מקרה פרטי: ההבדל בין הקבוצה הריקה $\emptyset$ לבין $\{\emptyset\}$.
* ההבדל בין "x איבר של y" לבין "x חלקי ל- y".

נתונות הקבוצות הבאות: $A = \{\emptyset\}$, $B = \{A\}$, $C = \{\emptyset , A\}$.

מצא אילו מהטענות הבאות נכונות.

בשאלה זו בלבד אין צורך לנמק - די לתת את רשימת הסעיפים הנכונים.

א. $\emptyset \in \emptyset$ ב. $\emptyset \subseteq \emptyset$ ג. $\emptyset \in B$ ד. $\emptyset \subseteq B$

ה. $A \subseteq B$ ו. $P(A) \subseteq B$ ז. $P(A) = C$ ח. $A \cap B = \emptyset$

ט. $A \cup B = C$ י. $P(C) = \{\emptyset , A , B , C\}$

שאלה 2 (21 נק')

א! הוכח: $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$. נמק כל שלב בהוכחה על-סמך טענה מתאימה בספר.

לגבי **איחוד** לא מתקיימת טענה כללית הדומה לזו שבסעיף א': ר' החוברת "אוסף תרגילים פתורים" עמ' 1 שאלה 2 . בסעיפים הבאים נבדוק מתי בדיוק כן מתקיים שוויון כזה עבור איחוד. הדרכה לשאלה זו תפורסם באתר הקורס.

ב. הוכח **שאם** $A \subseteq B$ או $B \subseteq A$ **אז** $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$.

ג. הוכח את הכיוון ההפוך לטענה שבסעיף ב', כלומר הוכח
שאם $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ **אז** $A \subseteq B$ או $B \subseteq A$.

הדרכה: נוח להוכיח סעיף זה בדרך השלילה. מהי בדיוק הנחת השלילה במקרה זה?

שאלה 3 (28 נק')

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות. לטענות שאינן נכונות – הבא דוגמא נגדית. את הטענות הנכונות הוכח בעזרת **"אלגברה של קבוצות"**: צא מאחד האגפים, פתח אותו בעזרת זהויות ידועות, והגע לאגף השני, בלי להשתמש במושג "איבר". במקומות בהם מופיע הפרש קבוצות כדאי להיעזר בזהות $A-B=A\cap B'$ (עמ' 23 בספר הלימוד). **ציין באופן ברור בכל צעד את הזהויות עליהן אתה מסתמך**. הסימן $\oplus$ מוגדר בעמ' 27 בספר.

א. $X\cap Z'=(X\cap Y\cap Z')\cup(X\cap Y'\cap Z')$

ב. $X\cup(Y-Z)=(X\cup Y)-(X\cup Z)$

ג! $X\oplus Y=(X\cup Y)-(X\cap Y)$ (ר' "תורת הקבוצות" שאלה 1.22 בעמ' 27).

שאלה 4 (27 נק')

איחוד של קבוצה כלשהי של קבוצות מתואר בהגדרה 1.6 בעמוד 12 בספר.

במלים פשוטות ההגדרה היא: $x\in\bigcup_{i\in I}A_i$ אםם x שייך **לפחות** לאחת הקבוצות A_i,

כאשר i מקבל ערכים ב- I.

חיתוך של קבוצה כלשהי של קבוצות מתואר בעמוד 16 בספר.

במלים פשוטות ההגדרה היא: $x\in\bigcap_{i\in I}A_i$ אםם x שייך **לכל** הקבוצות A_i,

כאשר i מקבל ערכים ב- I.

השאלה שלפניך מתרגלת את השימוש בשני המושגים האלה.

$\mathbf{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים: $\mathbf{N}=\{0,1,2,\ldots\}$ (ר' עמ' 3 בספר הלימוד).

לכל $n\in\mathbf{N}$, תהי $A_n=\{n,\ n+1,\ 2n\}$. למשל $A_5=\{5,6,10\}$, קבוצה בת 3 איברים.

לכל $n\in\mathbf{N}$, תהי $D_n=A_{n+1}-(A_n\cup A_{n+2})$.

חשב את הקבוצות הבאות. הוכח את תשובותיך.

א. $D_0\ ,D_1\ ,D_2\ ,D_3\ ,D_4\ ,D_5$

ב. $\bigcup_{n\in B}A_n$, כאשר $B=\{0,1,2,3\}$.

ג. $\bigcap_{n\in B}A_n$, כאשר $B=\{0,1,2,3\}$.

ד. $\bigcup_{n\in\mathbf{N}}D_n$.