פתרון ממ"ן 15

שאלה 1

א. תהי A קבוצה ויהיו g, f פונקציות מ- A ל- A.

הוכח שאם f אינה על A אז $f \circ g$ אינה על A.

ב. יהיו f ו- g הפונקציות הבאות מ- $\mathbf{N}$ ל- $\mathbf{N}$:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} \\ \\ 1 \end{cases} \qquad g(n) = 2n-1 \ , \quad n \in \mathbf{N}$$

הוכח ש- g אינה על $\mathbf{N}$ אך $f \circ g$ היא על $\mathbf{N}$.

ג. תהי A קבוצה ויהיו g, f פונקציות מ- A ל- A.

הוכח שאם g אינה על A ו- f היא חד-חד-ערכית, אז $f \circ g$ אינה על A.

תשובה

א. נתון ש- f אינה על. לכן קיים $y \in A$ כך שלכל $x \in A$ מתקיים $f(x) \neq y$.

אם $f \circ g$ היא על אז, לאותו איבר y מקודם, קיים מקור ביחס ל- $f \circ g$. לכן קיים $t \in A$ כך ש- $f(g(t)) = y$. אבל אז, אם נסמן ב- x את האיבר $g(t)$ נקבל כי $f(x) = y$, דבר העומד בסתירה להנחה המקורית. לכן $f \circ g$ אינה על.

ב. כדי להוכיח ש- g אינה על יש להראות שקיים מספר טבעי שאינו בתמונה של g. ניקח למשל את המספר 2. אם נניח שקיים $n \in \mathbf{N}$ כך ש- $g(n) = 2$ נקבל ש- $2n - 1 = 2$ כלומר $2n = 3$ וזו סתירה כי 3 אינו מספר זוגי. לפיכך g אינה פונקציה על.

מצד שני, לכל $n \in \mathbf{N}$ מתקיים: $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(2n-1) = \frac{(2n-1)+1}{2} = n$

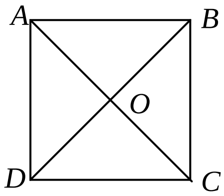
מכאן ש- $f \circ g$ היא פונקצית הזהות ולכן היא על. $\boxed{\text{כי } 2n\text{-1 אי-זוגי}}$

ג. נניח ש- g אינה על A ו- f היא חד-חד-ערכית. נוכיח ש- $f \circ g$ אינה על.

מאחר ש- g אינה על, נובע שקיים $y \in A$ כך שלכל $x \in A$ מתקיים $g(x) \neq y$. אנחנו נוכיח ש- $f \circ g$ אינה מקבלת את הערך $f(y)$ (שכמובן, הוא איבר של A).

נניח בשלילה שקיים איבר $x \in A$ כך ש- $(f \circ g)(x) = f(y)$. אז $f(g(x)) = f(y)$. אבל, מכיוון ש- f היא חד-חד-ערכית, נובע ש- $g(x) = y$ בסתירה למה שהנחנו קודם. לכן, האיבר $f(y)$ לא נמצא בתמונה של $f \circ g$ ולכן $f \circ g$ אינה פונקציה על.

שאלה 2



יהיו A, B, C, D קדקודי ריבוע שמרכזו O, כמו באיור.

ותהי f איזומטריה אשר $\{A, B, C, D\}$ היא קבוצת שבת שלה.

נתון ש- $f(C) = A$.

א. הוכח ש- $f(A) = C$ ו- O היא נקודת שבת של f.

ב. הוכח שאם $f(B) = B$ אז f היא שיקוף.

ג. הוכח שאם $f(B) = D$ אז f היא סיבוב.

ד. הוכח ש- f אינה יכולה להעתיק את B ל- A או ל- C.

תשובה

א. מאחר ש- $\{A, B, C, D\}$ קבוצה קבועה של f, נובע ש- $f(A), f(C)$ הן שתי נקודות מתוך קבוצה זו, כך שהמרחק ביניהן שווה לאורך אלכסון הריבוע (שכן, $\overline{AC} = \overline{f(A)f(C)}$).
מכאן ש- $f(A), f(C)$ הם קצוות של אחד מאלכסוני הריבוע הנתון, ומאחר ש- $f(A) = C$, נובע ש- $f(C)$ חייב להיות הקצה השני של האלכסון AC, כלומר $f(C) = A$.
כידוע, איזומטריה שומרת מרחקים ומעתיקה קטע על קטע. לכן, במקרה שלנו, f מעתיקה את הקטע AC על הקטע $f(C)f(A)$. בפרט הנקודה O הנמצאת על הקטע AC ומקיימת $\overline{AO} = \overline{OC}$ מועתקת על-ידי f לנקודה $f(O)$ הנמצאת על הקטע $f(C)f(A)$ ומקיימת $\overline{f(A)f(O)} = \overline{f(O)f(C)}$. אבל $f(A) = C$ ו- $f(C) = A$ לכן קיבלנו ש- $f(O)$ היא בעצם אמצע הקטע AC ולכן, $f(O) = O$ כפי שרצינו להוכיח.

ב. נניח ש- $f(B) = B$ ונסמן ב- S_ℓ את השיקוף ביחס לישר ℓ העובר דרך הנקודות B, D.
אז $f(B) = B = S_\ell(B)$, $f(O) = O = S_\ell(O)$, $f(A) = C = S_\ell(A)$.
כך קיבלנו שהאיזומטריות f ו- S_ℓ מתלכדות בשלוש נקודות לא קוויות (A, O, C).
כידוע, שתי איזומטריות כאלה הן שוות. לכן, $f = S_\ell$.

ג. נניח ש- $f(B) = D$ ונסמן ב- $R_{O,180^o}$ את הסיבוב ב- 180^o סביב הנקודה O.
אז $f(B) = D = R_{O,180^o}(B)$, $f(O) = O = R_{O,180^o}(O)$, $f(A) = C = R_{O,180^o}(A)$.
כך קיבלנו שהאיזומטריות f ו- $R_{O,180^o}$ מתלכדות בשלוש נקודות לא קוויות (A, O, C).
כידוע, שתי איזומטריות כאלה הן שוות. לכן, $f = R_{O,180^o}$.

ד. אם $f(B) = A$ אז מהנתון $f(C) = A$ נקבל ש- $f(C) = f(B)$, דבר העומד בסתירה לעובדה שכל איזומטריה היא פונקציה חד-חד-ערכית.
אם $f(B) = C$ אז מהשוויון $f(A) = C$ (שהוכחנו בסעיף א') נקבל ש- $f(A) = f(B)$, שוב, בניגוד לעובדה ש- f היא פונקציה חד-חד-ערכית.

שאלה 3

יהיו f , g איזומטריות של המישור. נסמן ב- f' את $g \circ f \circ g^{-1}$.

א.הוכח ש- f' היא איזומטריה ו- f' שומרת מגמה אם ורק אם f שומרת מגמה.

ב.הוכח שאם A היא נקודת שבת של f , אז $g(A)$ נקודת שבת של f' ואם B נקודת שבת של f' , אז $g^{-1}(B)$ היא נקודת שבת של f .

ג.הוכח ש- f ו- f' הן איזומטריות מאותו סוג.

תשובה

א.אם g היא איזומטריה אז g היא פונקציה הפיכה ו- g^{-1} היא גם כן איזומטריה (ראה עמ' 46 בספר). כמו-כן הרכבה של איזומטריות היא שוב איזומטריה (הוכח באותו עמוד בספר).

מכאן ש- $f' = g \circ f \circ g^{-1}$ היא איזומטריה, שכן, היא הרכבה של שלוש איזומטריות.

כעת נעיר שבעמוד 46, סעיף 4 מוכח שאם g הרכבה של שיקופים, אז, את g^{-1} ניתן להציג כהרכבה של אותם השיקופים בסדר הפוך. מכאן שתמיד ניתן להציג את g ואת g^{-1} כהרכבה של **אותו מספר** שיקופים ולכן g שומרת מגמה אם ורק אם g^{-1} שומרת מגמה.

מאחר ש- g ו- g^{-1} שומרות שתיהן את מגמת המשולשים או הופכות אותה שתיהן, הרי שההרכבה $g \circ f \circ g^{-1}$ שמורת את המגמה אם f שומרת אותה והופכת את המגמה אם f הופכת אותה.

ב.נניח ש- A היא נקודת שבת של f . אז $f(A) = A$, לכן

$$f'(g(A)) = (g \circ f \circ g^{-1})(g(A)) = g(f(g^{-1}(g(A))))$$

$$= g(f(A)) \qquad (\text{כי } g \circ g^{-1} = I)$$

$$= g(A)) \qquad (\text{כי } f(A) = A)$$

מכאן ש- $f'(g(A)) = g(A)$, כלומר $g(A)$ נקודת שבת של f' .

כעת נניח ש- B נקודת שבת של f' . אז $f'(B) = B$, ואז

$$(\underbrace{f(g^{-1}(B)}_{\text{אותו איבר}}) = g^{-1}(g(\underbrace{f(g^{-1}(B)}_{\text{אותו איבר}}))) \qquad (\text{כי } g^{-1} \text{ o } g = I)$$

$$= g^{-1}[(g \circ f \circ g^{-1})(B)]$$

$$= g^{-1}(f'(B)) \qquad (\text{כי } g \circ f \circ g^{-1} = f')$$

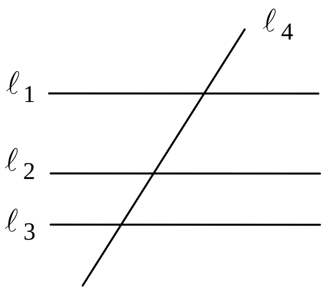
$$= g^{-1}(B) \qquad (\text{כי } f'(B) = B)$$

מכאן ש- $(f(g^{-1}(B)) = g^{-1}(B)$, כלומר $g^{-1}(B)$ היא נקודת שבת של f .

ג.בסעיף א׳ הוכחנו ש- f שומרת מגמה אם ורק אם f' שומרת מגמה. מסעיף ב׳ ידוע של f יש נקודת שבת אם ורק אם ל- f' יש נקודת שבת ואף יותר מזה, שהפונקציה g מגדירה התאמה חד-חד-ערכית בין קבוצת נקודות השבת של f לבין קבוצת נקודות השבת של f' . מאחר שכל אחד מסוגי האיזומטריות נקבע לגמרי על-ידי שמירת או היפוך המגמה ומספר נקודות השבת , הרי ש- f ו- f' הן איזומטריות מאותו סוג. (השלם בעצמך את פרטי ההוכחה עבור כל אחד מחמשת סוגי האיזומטריות).

שאלה 4

באיור מתוארים ארבעה ישרים: ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 ישרים מקבילים זה לזה ו- ℓ_4 שחותך אותם.

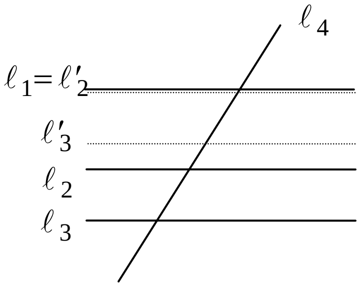


א.הוכח שההרכבה $S_{\ell_4} \circ S_{\ell_3} \circ S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$ היא סיבוב.

ב.הוכח ש- $S_{\ell_4} \circ S_{\ell_3} \circ S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1} = S_{\ell_4} \circ S_{\ell_1} \circ S_{\ell_2} \circ S_{\ell_3}$.

תשובה

א. כידוע, תוצאת ההרכבה של שני שיקופים בעלי צירים מקבילים היא הזזה בכיוון מאונך לצירים ובמרחק שהוא כפול מהמרחק בין הצירים. אם נבחר למשל בזוג השיקופים S_{ℓ_2}, S_{ℓ_3} , אז $S_{\ell_3} \circ S_{\ell_2}$ היא הזזה. **אותה הזזה** בדיוק מתקבלת מ- $S_{\ell'_3} \circ S_{\ell'_2}$, אם ℓ'_2, ℓ'_3 הם ישרים מקבילים ל- ℓ_2, ℓ_3 (בסדר זה) והמרחק ביניהם שווה לזה שבין ℓ_2, ℓ_3 . אנו נבחר ℓ'_2, ℓ'_3 כך ש- $\ell'_2 = \ell_1$ ונקבל:



$S_{\ell_4} \circ S_{\ell_3} \circ S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1} = S_{\ell_4} \circ (S_{\ell_3} \circ S_{\ell_2}) \circ S_{\ell_1}$ (קיבוציות)

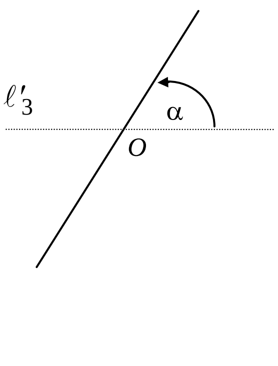
$= S_{\ell_4} \circ (S_{\ell'_3} \circ S_{\ell'_2}) \circ S_{\ell_1}$ (כי $S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1} = S_{\ell'_3} \circ S_{\ell'_2}$)

$= S_{\ell_4} \circ (S_{\ell'_3} \circ S_{\ell_1}) \circ S_{\ell_1}$ (כי $\ell'_2 = \ell_1$)

$= S_{\ell_4} \circ S_{\ell'_3} \circ (S_{\ell_1} \circ S_{\ell_1})$ (שוב שימוש בקיבוציות)

$= S_{\ell_4} \circ S_{\ell'_3} \circ I$ (כי $S_{\ell_1} \circ S_{\ell_1} = I$)

$= S_{\ell_4} \circ S_{\ell'_3} = R_{O,2\alpha}$ (כי הרכבת שני שיקופים בעלי צירים נחתכים היא סיבוב סביב נקודת החיתוך, בזווית כפולה מזו שבין שני צירים)



לכן, $S_{\ell_4} \circ S_{\ell_3} \circ S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1} = R_{O,2\alpha}$.

ב. נשים לב שההרכבה $S_{\ell'_2} \circ S_{\ell'_3}$ מתארת **אותה הזזה** כמו ההרכבה $S_{\ell_2} \circ S_{\ell_3}$ (זו בעצם ההזזה ההפוכה לזו שבסעיף הקודם). לפיכך:

$S_{\ell_4} \circ S_{\ell_1} \circ S_{\ell_2} \circ S_{\ell_3} = S_{\ell_4} \circ S_{\ell_1} \circ (S_{\ell_2} \circ S_{\ell_3})$ (ההרכבה היא קיבוצית)

$= S_{\ell_4} \circ S_{\ell_1} \circ (S_{\ell'_2} \circ S_{\ell'_3})$ (כי $S_{\ell_2} \circ S_{\ell_3} = S_{\ell'_2} \circ S_{\ell'_3}$)

$= S_{\ell_4} \circ (S_{\ell_1} \circ S_{\ell'_2}) \circ S_{\ell'_3}$ (שוב שימוש בקיבוציות)

$= S_{\ell_4} \circ (S_{\ell_1} \circ S_{\ell_1}) \circ S_{\ell'_3}$ (כי $\ell'_2 = \ell_1$)

$= S_{\ell_4} \circ I \circ S_{\ell'_3}$

$= S_{\ell_4} \circ S_{\ell'_3} = R_{O,2\alpha}$

לכן, כתוצאה מסעיף א', נובע ש- $S_{\ell_4} \circ S_{\ell_1} \circ S_{\ell_2} \circ S_{\ell_3} = S_{\ell_4} \circ S_{\ell_3} \circ S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$.