תשובה 1

צונזר

תשובה 2

א. סימן הפרדיקט הדו-מקומי R מתפרש ב- J כיחס (רלציה) דו-מקומי $J(R)$ מעל הקבוצה $\{1,2,3\}$. שלושת הפסוקים הנתונים אמיתיים ב- J אם ורק אם $J(R)$ היא רלציית שקילות מעל העולם של J. מכיוון ש- R הוא הסימן היחיד בשפה שיש לתת לו ערך באינטרפרטציה, הרי שמספר האינטרפרטציות המקיימות את התנאי הוא כמספר יחסי השקילות השונים שניתן להגדיר מעל $\{1,2,3\}$. את אלה אפשר לספור ע"י ספירה ישירה של כל החלוקות האפשריות של הקבוצה $\{1,2,3\}$. נקבל שמספר החלוקות השונות, ולכן מספר יחסי השקילות השונים, הוא 5 .

ב. בנוסף לפירוש עבור R, עלינו לתת כעת פירוש ל- Q כיחס דו-מקומי כלשהו מעל $\{1,2,3\}$.

לפי שאלה 1א בממ"ן 15, מספר היחסים הדו-מקומיים מעל $\{1,2,3\}$ הוא 2^9 .

לכן מספר האינטרפרטציות המקיימות את הנדרש הוא $5 \cdot 2^9 = 2{,}560$.

ג. הסימן a צריך להתפרש כאיבר בעולם, ויכול לקבל 3 ערכים שונים.

הסימן f_1^1 צריך להתפרש כפונקציה של $\{1,2,3\}$ אל $\{1,2,3\}$, וכידוע יש 3^3 פונקציות כאלה.

סה"כ $3 \cdot 27 \cdot 2{,}560 = 207{,}360$ אינטרפרטציות מקיימות את הנדרש.

תשובה 3

פירוש מתאים ל- K, המאפשר להשלים את כתיבת התבניות הוא:

$K(x,y)$ מתפרש כ - "הדף x מכיל קישור לדף y".

K הוא אפוא סימן יחס (פרדיקט) דו-מקומי.

התבניות (ייתכנו כמה תשובות בכל סעיף, להלן תשובה אפשרית לכל סעיף):

1. $\exists x\big(U(x) \wedge \sim D(x)\big) \wedge \exists x\big(D(x) \wedge \sim U(x)\big)$

יכולנו גם לכתוב זאת כך: $\exists x\big(U(x) \wedge \sim D(x)\big) \wedge \exists y\big(D(y) \wedge \sim U(y)\big)$.

שני הניסוחים האלה שקולים לוגית!

2. $\forall x\big(U(x) \rightarrow (\exists y \ (K(x,y) \wedge (D(y) \vee U(y))))\big)$

3. $\exists x \forall y\left(D(y) \rightarrow \sim K(x,y)\right)$

4. $\forall x\left(K(x,x) \rightarrow \sim U(x)\right)$

5. $\exists x \forall y\left(K(x,y) \rightarrow \sim K(y,x)\right)$

תשובה 4

א. תהי J אינטרפרטציה של השפה לעולם $\{1,2\}$, שבה R מתפרש כ"להיות שווה 1" ,
ו- S מתפרש כ- "להיות שווה 2" .
הפסוק $\left(\exists x R(x)\right) \wedge \left(\exists x S(x)\right)$ אמיתי ב- J, כי קיים בעולם הזה איבר השווה 1 , וקיים בעולם הזה איבר השווה 2.
לעומת זאת, הפסוק $\exists x(R(x) \wedge S(x))$ שקרי ב- J, כי לא קיים בעולם הזה איבר השווה הן ל- 1 והן ל- 2 .
לכן הפסוקים אינם שקולים לוגית.

ב. נוכיח ש- $\exists x(R(x) \wedge S(x))$ גורר לוגית את $\left(\exists x R(x)\right) \wedge \left(\exists x S(x)\right)$:
תהי J אינטרפרטציה שבה אמיתי $\exists x(R(x) \wedge S(x))$. משמע קיים בעולם איבר המקיים בו זמנית את התנאי R ואת התנאי S. לפיכך קיים בעולם איבר המקיים את התנאי R (אותו האיבר הנ"ל) וקיים בעולם איבר המקיים את התנאי S (אותו האיבר).
משמע $\left(\exists x R(x)\right) \wedge \left(\exists x S(x)\right)$ אמיתי ב- J.

ג. נוכיח שהפסוקים שקולים לוגית.

כיוון אחד:

תהי J אינטרפרטציה שבה $\exists x\,(R(x) \vee S(x))$ אמיתי.

כלומר קיים בעולם של J איבר המקיים את התנאי $R(x) \vee S(x)$.

לפי לוח האמת של "או", האיבר הזה מקיים את R או שהוא מקיים את S. נפריד לשני המקרים.

(*i*) אם הוא מקיים את R , אז הפסוק $\exists x R(x)$ אמיתי ב- J .

לכן, מהלוח של "או", הפסוק $\left(\exists x R(x)\right) \vee \left(\exists x S(x)\right)$ אמיתי ב- J .

(*ii*) אם הוא מקיים את S אז הפסוק $\exists x S(x)$ אמיתי ב- J .

לכן, מהלוח של "או", הפסוק $\left(\exists x R(x)\right) \vee \left(\exists x S(x)\right)$ אמיתי ב- J .

בשני המקרים קיבלנו ש- $\left(\exists x R(x)\right) \vee \left(\exists x S(x)\right)$ אמיתי ב- J , כמבוקש.

כיוון שני:

תהי J אינטרפרטציה שבה $\left(\exists x\, R(x)\right) \vee \left(\exists x\, S(x)\right)$ אמיתי.

השלימו את ההוכחה של כיוון זה, בדומה לכיוון הראשון.

איתי הראבן