בחינה 4

שאלה 1

(15 נקי) א. תהי A קבוצה. נתון כי $A\cap\mathbf{N}$ שקולה ל- $A\cap\mathbf{N}_0$. הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות:

(i) אם $0\in A$ אז $A\cap\mathbf{N}_0$ היא קבוצה אינסופית.

(ii) אם $0\notin A$ אז A היא קבוצה אינסופית.

(10 נקי) ב. יהיו A,B,C קבוצות. הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות:

(i) אם $A\not\subseteq B\cap C$ אז $(A\setminus B)\cap(A\setminus C)\neq\varnothing$.

(ii) אם $A\not\subseteq B\cap C$ אז $(A\setminus B)\cup(A\setminus C)\neq\varnothing$.

תשובה

א. (i) הטענה נכונה. נוכיח כי לקבוצה $A\cap\mathbf{N}_0$ יש קבצה חלקית ממש ששוקלה לה.

הקבוצה $A\cap\mathbf{N}$ היא חלקית ל- $A\cap\mathbf{N}_0$, שכן אם $x\in A\cap\mathbf{N}$ אז $x\in A$ וגם $x\in\mathbf{N}$ לכן $x\in A$ וגם $x\in\mathbf{N}_0$ ולכן $x\in A\cap\mathbf{N}_0$. לכן $A\cap\mathbf{N}\subseteq A\cap\mathbf{N}_0$.

מצד שני, נתון כי $0\in A$ לכן $0\in A\cap\mathbf{N}_0$, אבל $0\notin A\cap\mathbf{N}$, שכן $0\notin\mathbf{N}$. מכאן ש- $A\cap\mathbf{N}$ היא חלקית ממש ל- $A\cap\mathbf{N}_0$. ($A\cap\mathbf{N}\subset A\cap\mathbf{N}_0$).

בנוסף, נתון כי $A\cap\mathbf{N}$ שקולה ל- $A\cap\mathbf{N}_0$. לכפיך מצאנו כי ל- $A\cap\mathbf{N}_0$ יש קבוצה חלקית ממש ושקולה ל- $A\cap\mathbf{N}_0$ ולכן $A\cap\mathbf{N}_0$ היא קבוצה אינסופית.

(ii) הטענה לא נכונה. נפריך אותה על-ידי דוגמה נגדית.

נבחר למשל $A=\{1\}$ אז $A\cap\mathbf{N}_0=A\cap\mathbf{N}=\{1\}$ ולכן $A\cap\mathbf{N}$ שקולה ל- $A\cap\mathbf{N}_0$. כמו-כן $0\notin A$, אבל A קבוצה סופית.

ב. (i) הטענה לא נכונה. נפריך אותה על-ידי דוגמה נגדית.

נבחר למשל $A=\{1,2\}$, $B=\{1,2\}$, $C=\{2\}$. אז $B\cap C=\{2\}$ לכן $A\not\subseteq B\cap C$, אבל $A\setminus B=\varnothing$ לכן גם $(A\setminus B)\cap(A\setminus C)=\varnothing$ בניגוד לטענה הנתונה.

(ii) הטענה נכונה. נניח כי $A\not\subseteq B\cap C$. אז קיים איבר $x\in A$ כך ש- $x\notin B\cap C$. אז $x\in A$ ו- $x\notin B$ או $x\notin C$. מכאן ש- $x\in A\setminus B$ או $x\in A\setminus C$ כלומר $x\in(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$ ולכן $(A\setminus B)\cup(A\setminus C)\neq\varnothing$.

שאלה 2

(10 נק׳) א. נתון כי G חבורה ביחס לפעולה $*$ ו- $a,b\in G$ הם אברים **שונים**. ידוע כי $a*b=b*b*a$ וכי b אינו האיבר הנטרלי ב- G.

(i) הוכח כי a אינו האיבר הנטרלי ב- G וכי b אינו נגדי לעצמו.

(ii) הוכח כי החבורה G אינה חילופית.

(15 נק׳) ב. על הקבוצה $A=\{-6n \mid n\in\mathbf{N}\}$ מגדירים פעולה בינרית $*$ כך:

לכל $a,b\in A$, $a*b=-\dfrac{ab}{3}$.

בדוק אלו מהתכונות שבהגדרת החבורה מקיימת פעולה זו. נמק טענותיך.

תשובה

א. (i) נניח בדרך השלילה כי a הוא האיבר הנטרלי ב- G. אז $b*a=b$. אבל מהנתון, בעזרת תכונת הקיבוציות מקבלים כי $a*b=b*(b*a)$, לכן $a*b=b*b$ ואז, על-ידי צמצום b מימין נקבל כי $a=b$, בסתירה לנתון. לכן a אינו נטרלי.

נסמן ב- e את האיבר הנטרלי של G. לפי מה שהוכחנו, $a\neq e$ ולפי הנתון, $b\neq e$.

נניח כעת בדרך השלילה כי b נגדי לעצמו כלומר $b*b=e$. מאחר שלפי הנתון מתקיים $a*b=(b*b)*a$ נקבל $a*b=e*a=e$. לכן $a*b=a*e$ ועל-ידי צמצום a משמאל נקבל $b=e$ וזו סתירה לנתון. לכן b לא נגדי לעצמו.

(ii) נניח בדרך השלילה כי G חבורה חילופית. אז, בפרט, $a*b=b*a$. מהנתון ידוע כי $a*b=b*(b*a)$ לכן נקבל כי $a*b=b*(a*b)$ כלומר $e*(a*b)=b*(a*b)$ ואז על-ידי צמצום $(a*b)$ מימין נקבל כי $e=b$ - סתירה. מכאן ש- $a*b\neq b*a$ והחבורה לא חילופית.

ב. סגירות.

לפי הגדרת הקבוצה A לכל $a,b\in A$ קיימים $m,n\in\mathbf{N}$ כך ש- $a=-6m,\ b=-6n$. אז

$a*b=-\dfrac{ab}{3}=-\dfrac{(-6m)(-6n)}{3}=-6(3mn)$ ומאחר ש- $3mn\in\mathbf{N}$ נקבל כי $a*b\in A$ ועל-כן תכונת הסגירות מתקיימת.

קיבוציות.

לכל $a,b,c\in A$ מתקיים: $(a*b)*c=\left(-\dfrac{ab}{3}\right)*c=-\dfrac{\left(-\dfrac{ab}{3}\right)\cdot c}{3}=\dfrac{abc}{9}$. וכמו-כן:

$$a*(b*c)=a*\left(-\frac{bc}{3}\right)=-\frac{a\cdot\left(-\frac{bc}{3}\right)}{3}=\frac{abc}{9}$$

מכאן שלכל $a,b,c\in A$ מתקיים $(a*b)*c=a*(b*c)$ ולכן הפעולה קיבוצית.

קיום איבר נטרלי.

אם קיים $e\in A$ נטרלי ביחס לפעולה $*$ אז הוא חייב בין השאר לקיים $e*(-6)=-6$ כלומר $-\dfrac{e(-6)}{3}=-6$. אבן מכאן נובע כי בהכרח $e=-3$ ומאחר ש- $-3\notin A$ הרי **שלא קיים** ב- A

ביחס לפעולה $*$.
קיום איבר נגדי.
מאחר שלא קיים נטרלי הרי שלא קיים נגדי לאף איבר של A .

שאלה 3

נתונות פונקציות $f,g:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ ($\mathbf{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים).
ידוע כי לכל $n\in\mathbf{N}$, מתקיים : $f(n)=g(n+2)$.

(9 נק׳) א. הוכיחו כי אם g היא חד-חד-ערכית אז גם f היא חד-חד-ערכית.
(9 נק׳) ב. הוכיחו כי אם f היא פונקציה על אז גם g היא פונקציה על.
(7 נק׳) ג. הוכיחו כי אם f היא על אז g אינה חד-חד-ערכית.

תשובה

א. נניח בדרך כי g היא חד-חד-ערכית ונניח כי $m,n\in\mathbf{N}$ כך ש- $f(m)=f(n)$. אז לפי הנתון, $g(m+2)=g(n+2)$. מאחר שהנחנו כאן כי g היא חד-חד-ערכית, נקבל כי $m+2=n+2$ ומכאן ש- $m=n$. לפיכך, לכל $m,n\in\mathbf{N}$, מתוך השוויון $f(m)=f(n)$ נובע $m=n$ ומכאן ש- f היא חד-חד-ערכית.

ב. נניח כעת כי f היא פונקציה על ונוכיח כי g היא פונקציה על. לשם כך נבחר איבר כלשהו $y\in\mathbf{N}$ ונוכיח כי קיים $x\in\mathbf{N}$ כך ש- $g(x)=y$.
מאחר ש- f היא על, עבור אותו איבר $y\in\mathbf{N}$ שבחרנו, קיים $n\in\mathbf{N}$ כך ש- $f(n)=y$. מהנתון נקבל כי $g(n+2)=y$. לכן אם נסמן $x=n+2$, אז $x\in\mathbf{N}$ ומתקיים : $g(x)=g(n+2)=y$.
מכאן ש- g היא פונקציה על.

ג. נניח עתה כי f היא על ונוכיח ש- g אינה חד-חד-ערכית. לשם כך נסתכל למשל על המספר $k=g(1)$. זה כמובן מספר טבעי ומאחר ש- f היא על, הרי שקיים $n\in\mathbf{N}$ כך ש- $f(n)=k$.
אז מהנתון נקבל כי $g(n+2)=k$.
לפיכך $g(n+2)=g(1)$ ומאחר ש- $n+2\neq 1$, הרי ש- g אינה חד-חד-ערכית.

שאלה 4

יהיו f,g איזומטריות של המישור ו- A נקודה במישור.
נתון כי A נקודת שבת של f וכי $(f\circ g)(A)=g(A)$.

(12 נק׳) א. הוכח כי אם f סיבוב לא טריוויאלי אז A נקודת שבת של g .
(13 נק׳) ב. הוכיחו כי אם g שיקוף מוזז אז f שיקוף או זהות.

תשובה

א. f סיבוב לא טריוויאלי לכן ל- f יש נקודת שבת יחידה ולפי הנתון זו בהכרח הנקודה A.
כמו כן נתון כי $(f \circ g)(A) = g(A)$ כלומר $f(g(A)) = g(A)$ לכן $g(A)$ נקודת שבת של f.
מאחר ש- A היא נקודת השבת היחידה של f הרי שבהכרח $g(A) = A$ ומכאן ש- A נקודת שבת של g.

ב. כפי שראינו בסעיף הקודם, הנתון $(f \circ g)(A) = g(A)$ מבטיח כי $g(A)$ נקודת שבת של f ולכן בתור איזומטריה בעלת נקודת שבת, f יכולה להיות רק זהות, סיבוב או שיקוף.

שאלה 5

נתונה מערכת האקסיומות הבאה, אשר מושגי היסוד שלה הם "נקודה", "ישר" (כקבוצה של נקודות) והיחס "נמצאת על" המתפרש כשייכת ל-.

1. קיימים לפחות שני ישרים.
2. לכל שני ישרים יש לפחות שתי נקודות משותפות.
3. לכל שתי נקודות שונות קיים לפחות ישר אחד שהן נמצאות עליו.

(6 נק') א. הוכיחו כי המערכת היא חסרת סתירה.

(6 נק') ב. הוכיחו כי המערכת היא בלתי תלויה.

(6 נק') ג. הוכיחו כי המערכת אינה קטגורית.

(7 נק') ד. הוכיחו כי במערכת הנתונה מתקיים המשפט: "קיימות לפחות שלוש נקודות שונות"

תשובה

א. כדי להוכיח כי המערכת חסרת סתירה עלינו למצוא מודל המקיים את כל האקסיומות שלה. נבחר למשל את המודל שבו הנקודות הן $1,2,3$ והישרים: $\{1,2,3\}$, $\{1,2\}$. מודל זה מקיים את כל אקסיומות המערכת הנתונה ולכן היא חסרת סתירה.

ב. עלינו להראות כי כל אחת מאקסיומות המערכת אינה נובעת מן האקסיומות האחרות.

1. המודל שבו הנקודות הן $1,2$ ויש בו רק ישר אחד $\{1,2\}$, מקיים את אקסיומות 2,3 ולא מקיים אקסיומה 1 מכאן שאקסיומה 1 לא נובעת מן האחרות.
2. המודל שבו הנקודות הן $1,2$ והישרים הם $\{1\},\{1,2\}$ מקיים את אקסיומות 1,3 אך לא מקיים את אקסיומה 2, לכן אקסיומה 2 לא נובעת מן האחרות.
3. המודל שבו קבוצת הנקודות היא $1,2,3,4$ והישרים הם $\{1,2,3\}$, $\{1,2\}$ מקיים את אקסיומות 1,2 ולא מקיים את אקסיומה 3, לכן גם אקסיומה 3 לא נובעת מן האחרות.

מכאן שהמערכת בלתי תלויה.

ג. כדי להוכיח כי המערכת אינה קטגורית עלינו להצביע על שני מודלים שלה שאינם שקולים. נסתכל למשל במודל שבו הנקודות הן $1,2,3,4$ והישרים הם: $\{1,2,3,4\}$, $\{1,2\}$. מודל זה מקיים את כל אקסיומות המערכת אך אינו שקול למודל מסעיף א', שכן לשני המודלים יש מספר שונה של נקודות. מכאן שהמערכת לא קטגורית.

ד. עלינו להוכיח כי בכל מודל של המערכת קיימות לפחות שלוש נקודות שונות.
נבחר מודל כלשהו של המערכת. לפי אקסיומה 1 קיימים שלי ישרים שונים ℓ_1 ו- ℓ_2. אז מאקסיומה 2 נובע שקיימות שתי נקודות שונות A, B כך ש- $A, B \in \ell_1$ ו- $A, B \in \ell_2$. מאחר ש- $\ell_1 \neq \ell_2$ הרי אלה קבוצות שונות של נקודות ולכן קיימת נקודה C כך שלמשל $C \in \ell_1$ אבל $C \notin \ell_2$. אז $C \neq A, B$, (שכן $A, B \in \ell_2$ אך $C \notin \ell_2$). מכאן ש- A, B, C הן נקודות שונות זו מזו ולכן בכל מודל של המערכת קיימות לפות שלוש נקודות שונות.

שאלה 6

(13 נק׳) א. הוכיחו כי לא קיים מספר טבעי n כך ששארית החילוק של $n^2 + 2n$ ב- 3 תהיה 1.

(12 נק׳) ב. הוכיחו באינדוקציה שלכל מספר טבעי n מתקיים:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

תשובה

א. לפי משפט החלוקה עם שארית לכל מספר טבעי n יש הצגה יחידה מהצורה $n = 3k + r$ כאשר $r, k \in \mathbf{N}_0$ ו- $0 \le r < 3$ (כלומר $r = 0$, $r = 1$ או $r = 2$).

לכן בכל מקרה, $n = 3k$, $n = 3k + 1$ או $n = 3k + 2$. נמצא את שאירת החילוק של $n^2 + 2n$ בכל אחד מן המקרים האלה.

אם $n = 3k$ אז:

$$n^2 + 2n = (3k)^2 + 2(3k) = 9k^2 + 6k = 3(3k^2 + 2k)$$ (שארית 0 בחילוק ב- 3)

אם $n = 3k + 1$ אז:

$$n^2 + 2n = (3k+1)^2 + 2(3k+1) = 9k^2 + 12k + 3 = 3(3k^2 + 4k + 1)$$ (שארית 0 בחילוק ב- 3)

ואם $n = 3k + 2$ אז:

$$n^2 + 2n = (3k+2)^2 + 2(3k+2) = 9k^2 + 18k + 8 = 3(3k^2 + 6k + 2) + 2$$ (שארית 2 בחילוק ב- 3)

לכן לכל מספר טבעי n, שארית החילוק של $n^2 + 2n$ ב- 3 היא 0 או 2 (לעולם לא 1).

ב. נבדוק תחילה שהטענה נכונה עבור $n = 1$.

כאשר $n = 1$ השוויון הנתון הוא: $\frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2}$ וזה כמובן, נכון.

נניח כעת כי הטענה נכונה עבור n מסוים כלומר:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

עלינו להוכיח כי אז הטענה נכונה גם עבור $n + 1$ כלומר:

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

נתחיל מן האגף השמאלי של השוויון הנ״ל:

$$\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+2}=-\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$$

לפי הנחת האינדוקציה, הביטוי שבסוגריים שווה ל- $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$ לכן:

$$\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+2}=-\frac{1}{n+1}+\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$$

מאחר ש- $\frac{1}{2n+2}$ הוא החצי של $\frac{1}{n+1}$ הרי ש- $-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{2n+2}$. נציב זאת באגף ימין בשוויון האחרון ונקבל:

$$\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+2}=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}$$

לפיכך מנכונות הטענה עבור n נובע כי היא נכונה גם עבור $n+1$ ולכן, לפי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

סוף.