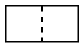
מטלת מנחה (ממ"ן) 17

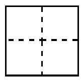
הקורס: 20283 - מתמטיקה דיסקרטית
חומר הלימוד למטלה: קומבינטוריקה פרקים 6-7
מספר השאלות: 4
משקל המטלה: 3 נקודות
סמסטר: 2009א
מועד אחרון להגשה: יום א' 11.1.09

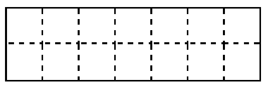
קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1

בידינו מספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל 1×2  :

ומספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל 2×2 : 

עלינו לרצף מלבן שממדיו $2 \times n$:
(בציור $n = 7$). 

אסור לחרוג מגבולות המלבן. בלוק של 1×2 אפשר להניח כרצוננו "שוכב" או "עומד".
יהי a_n מספר הריצופים השונים האפשריים.

(9 נק') א. רשום יחס נסיגה עבור a_n (הסבר אותו) ותנאי התחלה מספיקים.

(10 נק') ב. פתור את יחס הנסיגה.

(6 נק') ג. חשב את a_4 בשתי דרכים: מתוך יחס הנסיגה שבסעיף א',
ומתוך הנוסחה המפורשת שקיבלת בסעיף ב'.

שאר הממ"ן עוסק בפונקציות יוצרות. ראו בעמוד הבא רשימה של נוסחאות שימושיות.

שאלה 2

חזרו ופתרו את שאלה 4 בממ"ן 15, בעזרת פונקציה יוצרת:
כתבו פונקציה יוצרת עבור מספר פתרונות המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = n$ תחת האילוצים הנתונים בשאלה, ומצאו את המקדם של x^{29} בפונקציה שרשמתם.
את הטיפול בעובדה שלא נתון איזה מהמשתנים הם הזוגיים אפשר לעשות כמו בפתרון שאלה 4 בממ"ן 15, ורק את שאר הפתרון לבצע בעזרת פונקציה יוצרת. יש להגיע לתשובה מספרית.

שאלה 3

יהושע נוטל תרופות שונות: כדור נגד כאב-ראש: לכל היותר 3 ביום (אפשר 0). כדור מרץ: לכל היותר 3 ביום (אפשר 0). ויטמין C וויטמין B ללא הגבלה (אפשר 0), כל זה בכפוף לתנאי הבא, שלגביו הוא מחויב כחבר באגודת ההיפוכונדרים: מספר הכדורים הכולל, מכל 4 הסוגים יחד, שהוא לוקח כל יום יהיה בדיוק n. ערכו של n מוגדר מדי פעם בפרסומי האגודה.

נסמן ב- a_n את מספר ההרכבים השונים של n כדורים שיכול יהושע לקחת ביום אחד, כאשר אין חשיבות לסדר נטילת התרופות, ותרופות מאותו סוג הן זהות.

א. מצא את הפונקציה היוצרת עבור הסדרה $\{a_n\}$. הסבר!

ב. מצא ביטוי מפורש עבור a_n (שאלה 7.10 בעמ' 129 בספר הלימוד יכולה לסייע).

שאלה 4

דוגמא לתרגיל מסוג זה נמצאת בסוף הקובץ "מבוא לפונקציות יוצרות" שבאתר הקורס.

חשב את המקדם של x^{2m} בכל אחד מאגפי הזהות האלגברית: $\frac{(1-x^2)^n}{(1-x)^n} = (1+x)^n$.

קבל מכאן זהות על סכומים של מקדמים בינומיים, מהצורה: $\sum_{k=0}^{?} ?? = \binom{n}{2m}$.

בדוק את תשובתך עבור המקרה $n = 5\,, m = 2$ ועבור המקרה $n = 5\,, m = 3$.

הדרכה: את אגף שמאל בזהות האלגברית הנתונה רשום כמכפלה.
היעזר בנוסחאות שבתחתית העמוד.

להלן סיכום כמה נוסחאות שימושיות בפונקציות יוצרות:

(i)! סכום טור הנדסי סופי: $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ ואינסופי: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$

(ii)! כפל פונקציות יוצרות:

אם $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$, ו- $f(x)\cdot g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$

אז $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ (ראו ראש עמוד 122 בספר הלימוד).

(iii)! $\frac{1}{(1-x)^n} = (1+x+x^2+\ldots)^n = \sum_{k=0}^{\infty} D(n,k) x^k$.

במלים אחרות: המקדם של x^k בפיתוח הביטוי $\frac{1}{(1-x)^n}$ הוא $D(n,k)$.

ראו שאלה 7.9 או שאלה 7.10 בעמ' 129 בספר.