

מבנה הבחינה :

- * יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.
- * משקל כל שאלה 25% .
- * אם תשיב/י על יותר מ- 4 שאלות, יחושב הציון לפי 4 התשובות הראשונות.

משך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: כל חומר עזר מותר, כולל מחשבון.

שימו לב:

- * יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה, אלא אם נאמר בשאלה שאין צורך לנמק.
- * מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.
- * אם ברצונך להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליך לחזור ולהוכיחן.
- * בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים

אין צורך להחזיר את השאלון בתום הבחינה

אנא קרא/י בתשומת-לב את כל ההנחיות שבעמוד הקודם !

שאלה 1

לכל אחת מהטענות א-ה, ציינו אם היא נכונה או לא.

הוכיחו את הטענות הנכונות. **תנו דוגמא נגדית** לכל אחת מהטענות שאינן נכונות.

(5 נק') א. לכל קבוצה A , $A \subseteq P(A)$.

(5 נק') ב. יהי R יחס (רלציה) מעל A .

אם $R \subseteq I_A$ אז R הוא סימטרי ואנטי-סימטרי בעת ובעונה אחת.

(5 נק') ג. יחס שהוא סימטרי וטרנזיטיבי, הוא בהכרח רפלקסיבי.

(5 נק') ד. תהי A קבוצה. לכל יחס R מעל A , $R \cdot R^{-1} = I_A$.

(5 נק') ה. תהי A קבוצה. נגדיר פונקציה s מקבוצת כל היחסים מעל A לקבוצת היחסים

הסימטריים מעל A : s מתאימה לכל יחס מעל A את **הסגור הסימטרי** שלו.

הטענה: s היא פונקציה על קבוצת היחסים הסימטריים מעל A .

שאלה 2

נגדיר יחס (רלציה) מעל $P(N)$:

עבור $X, Y \in P(N)$, נאמר ש- X שקול ל- Y אם $|X| = |Y|$

(כלומר אםם עוצמת X שווה לעוצמת Y).

מובן שזהו יחס שקילות (אינכם נדרשים להוכיח זאת). הוא מחלק את $P(N)$ למחלקות שקילות.

השאלה עוסקת ביחס השקילות הזה ובמחלקות השקילות האלה.

(10 נק') א. הראו שעוצמתה של **קבוצת מחלקות השקילות** הנ"ל היא \aleph_0 . במלים אחרות,

הראו שיחס השקילות הנ"ל מחלק את $P(N)$ בדיוק ל- \aleph_0 מחלקות שקילות.

(15 נק') ב. מכיון ש- $N \in P(N)$, ניתן לדבר על מחלקת השקילות שאליה שייך האיבר N .

הראו שעוצמתה של מחלקת השקילות שבה נמצא N היא C .

שאלה 3

(3 נק') א. מהו מספר הדרכים לסדר את המחרוזת 1223334444 ?

(4 נק') ב. מהו מספר הדרכים לסדר את המחרוזת הנ"ל כך **שיופיע** הרצף 333 ?

(18 נק') ג. חשב את מספר הדרכים לסדר את המחרוזת הנ"ל כך **שלא** תופיע המחרוזת 22,

לא תופיע המחרוזת 333, ולא 4444 (אפשר שיופיעו 33, 444)

הדרכה: עקרון ההכלה וההפרדה.

בכל הסעיפים בשאלה זו יש להגיע לתשובה סופית מספרית. נמק את תשובותיך.

שאלה 4

בכל סעיפי השאלה $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

(8 נק') א. מצאי כמה פונקציות f של A ל- B הן בעלות התכונה הבאה :

לכל $x \in A$, $x + f(x)$ הוא מספר **אי-זוגי** .

(8 נק') ב. מצאי כמה פונקציות f של A ל- B הן בעלות התכונה הבאה :

לכל $x \in A$, $x \cdot f(x)$ הוא מספר **זוגי** .

(3 נק') ג. הוכיחי שפונקציה של A ל- B המקיימת את התנאי של סעיף א , מקיימת גם את התנאי של סעיף ב.

(6 נק') ד. כמה פונקציות f של A ל- B אינן מקיימות אף אחד משני התנאים א, ב ?

יש לנמק את התשובות. בסעיפים א', ב', ד' יש להגיע לתשובה סופית מספרית.

שאלה 5

חמש הטענות הבאות עוסקות בדפים ברשת (web pages) :

1. קיים דף נוח לשימוש שאינו מעוצב יפה וקיים דף בעל עיצוב יפה שאינו נוח לשימוש.
2. כל דף נוח לשימוש מכיל הפניה לדף שהוא מעוצב יפה או נוח לשימוש.
3. יש דף, שכל ההפניות בו הן רק לדפים שאינם מעוצבים יפה.
4. כל דף שמכיל הפניה לעצמו אינו נוח לשימוש.
5. יש דף, שאף אחד מהדפים שהוא מפנה אליהם אינו מפנה חזרה אליו.

נסמן $U(x)$: x הוא דף נוח לשימוש ; $D(x)$: x הוא דף בעל עיצוב יפה.

יהי K סימן יחס נוסף. **תן פירוש מתאים ל- K בעולם שהוא קבוצת כל הדפים ברשת, ורשום תבניות $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5$ המייצגות בהתאמה את הטענות 1,2,3,4,5 בעולם זה.**

שים לב:

- * ציין איך מתפרש K , ואם הוא יחס חד-מקומי , דו-מקומי או אחר.
- * סימני היחסים היחידים בהם מותר להשתמש הם U, D, K . אין סימני פונקציות ואין קבועים.
- אין גם סימן עבור יחס השוויון. יתר מרכיבי השפה : הקשרים הלוגיים $\neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee$,
- סוגריים , הכמתים \forall, \exists וסימני משתנים כגון x, y, z עומדים לרשותך.
- * אין צורך בסימן עבור התכונה " x הוא דף ברשת", כי עולם האינטרפרטציה מכיל רק דפים ברשת.
- * כתיב מקוצר - מותר. במקום שייתכן ספק בקריאה, ובפרט ליד כמתים , הקפד לשים סוגרים.

בהצלחה!