

Les Schémas Utilisés

brahim.moknassi

March 2024

1 Cas Linéaire

Dans le cas linéaire on considère l'équation de transport suivante:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + a \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0$$

La forme conservative du schéma aux volumes finis est donnée par:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n \right)$$

1.1 Schéma Upwind [1]

$$F_{i+\frac{1}{2}} = f(u_i)$$

1.2 Schéma de Roe [1]

$$F_{i+\frac{1}{2}} = f(u_i)$$

1.3 Schéma de Rusanov

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (au_i + au_{i+1}) - a (u_{i+1} - u_i)$$

1.4 Schéma de Rusanov2 [2]

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (au_i + au_{i+1}) - \frac{a}{2} (u_{i+1} - u_i)$$

1.5 Schéma de Lax-Friedrichs [3]

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (au_i + au_{i+1}) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} (u_{i+1} - u_i)$$

1.6 Schéma de Lax-Friedrichs Modifié

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (au_i + au_{i+1}) - \frac{\Delta x}{4\Delta t} (u_{i+1} - u_i)$$

1.7 Schéma de VFC [4]

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f(u_{i+\frac{1}{2}}^n) - f(u_{i-\frac{1}{2}}^n) \right)$$

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{u_i^n + u_{i+1}^n}{2} - \alpha^n \frac{\Delta t}{\Delta x} a(u_{i+1}^n - u_i^n)$$

2 Cas Non Linéaire

Dans le cas non linéaire on considère l'équation de Burger suivante:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + u \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0$$

La forme conservative du schéma aux volumes finis est donnée par:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n \right)$$

2.1 Schéma de Roe

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (f(u_i) + f(u_{i+1})) - \frac{|u_i + u_{i+1}|}{2} (u_{i+1} - u_i)$$

2.2 Schéma de Rusanov

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (f(u_i) + f(u_{i+1})) - |\max\{u_i, u_{i+1}\}| (u_{i+1} - u_i)$$

2.3 Schéma de Rusanov2

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (f(u_i) + f(u_{i+1})) - \frac{|\max\{u_i, u_{i+1}\}|}{2} (u_{i+1} - u_i)$$

2.4 Schéma de Lax-Friedrichs

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (f(u_i) + f(u_{i+1})) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} (u_{i+1} - u_i)$$

2.5 Schéma de Lax-Friedrichs Modifié

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (f(u_i) + f(u_{i+1})) - \frac{\Delta x}{4\Delta t} (u_{i+1} - u_i)$$

2.6 Schéma de Lax-Wendroff

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(F(u_i) + F(u_{i+1}) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{|u_i + u_{i+1}|}{2} (F(u_i) - F(u_{i+1})) \right)$$

References

- [1] Cours VOLUMES FINIS Du Pr. Imad El Mahi.
- [2] Page 42. *Finite volume schemes for scalar conservation laws*.
- [3] Cours 'INTRODUCTION A LA METHODE DES VOLUMES FINIS POUR SYSTEMES DE CONVECTION DIFFUSION REACTION' Du Pr. Fayssal Benkhaldoun.
- [4] Moussa Ziggaf. Study and implementation of an Eulerian-Lagrangian method on 2D/3D unstructured meshes for the numerical simulation of fluid flow models. Mathematical Physics [math-ph]. UniversitéParis-Nord - Paris XIII; Université Mohammed VI Polytechnique (Benguérir, Maroc), 2023. English.