



Quantitative & Financial Modeling Master

Spécialité : Quantitative Modeling

Stage PFE 2023/2024

---

Étude Numérique de la Convection-Diffusion  
2D avec Diffusion Non Linéaire

---

Brahim MOKNASSI

Encadré Par :

Encadrant(s) Interne(s) :

Pr. Imad Kissami

Encadrant(s) Externe(s) :

Pr. Fayssal Benkhaldoun

Soutenu Le – Devant :

---

27 mars 2024



## Résumé

---

— the abstract here —

---

## TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Méthode de Volumes Finis</b>	<b>3</b>
1.1 Définitions . . . . .	3
1.2 Exemples . . . . .	4
1.2.1 Équation de transport 1D . . . . .	4
1.2.2 Équation de Burgers 1D . . . . .	4
1.3 Méthode de Volumes Finis . . . . .	4
1.3.1 Schéma aux volumes finis . . . . .	5
<b>2 Tests numériques en 1D</b>	<b>8</b>
2.1 Équation de transport linéaire . . . . .	8
2.1.1 Sans diffusion . . . . .	8
2.1.2 Avec diffusion linéaire . . . . .	9
2.1.3 Avec diffusion non linéaire . . . . .	11
2.2 Équation de Burger . . . . .	17
2.2.1 Sans diffusion . . . . .	17
2.2.2 Avec diffusion linéaire . . . . .	17
2.2.3 Avec diffusion non linéaire . . . . .	17

La méthode des volumes finis pour les lois de conservation représente une approche fondamentale en modélisation numérique, consistant à approximer les flux de manière discontinue. Cette approximation peut être réalisée à l'aide de divers schémas, notamment ceux de VFC, Roe, Rusanov, Lax-Friedrichs... Chacun de ces schémas présente ses propres avantages et limites, dépendant du problème considéré ainsi que des conditions spécifiques qui lui sont associées.

L'objectif principal de ce travail est de procéder à une comparaison approfondie des différents schémas disponibles pour résoudre une variété de problèmes, d'abord en une dimension (1D) puis en deux dimensions (2D). Nous débuterons notre analyse en nous concentrant sur une équation de transport 1D caractérisée par une convection linéaire. Par la suite, nous introduirons progressivement une diffusion linéaire, puis une diffusion non linéaire dans le cadre de cette équation. Nous répéterons ensuite le même processus pour une équation de convection non linéaire, notamment l'équation de Burgers, afin de capturer les différentes nuances et performances des schémas dans des situations variées.

(...)

# CHAPITRE 1

---

## MÉTHODE DE VOLUMES FINIS

### 1.1 Définitions

Soit le système suivant de  $p$  équations aux dérivées partielles du premier ordre pour  $p$  fonctions inconnues,  $u = (u_1, \dots, u_p)$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_j(u)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \dots, p, \quad (1.1)$$

avec  $u = u(x, t)$ ,  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $t \in ]0, \infty[$ .

**Définition 1.1.1.** La forme du système (1.1), appelée forme conservative, est équivalente à :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_{ji}(u)}{\partial x_j} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \quad F_{ji} \in M_{p,N}(\mathbb{R}). \quad (1.2)$$

On note  $A_j(u) := \nabla_u F_j(u)$ , alors le système (1.1) s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^N A_j(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, \quad (1.3)$$

où  $A_j(u)$  est la matrice jacobienne de la fonction  $F_j$  au point  $u$  définie par :

$$A_j(u) = \left( \frac{\partial F_{ij}(u)}{\partial u_i} \right)_{1 \leq i \leq p}.$$

**Définition 1.1.2. (Hyperbolicité)**

- Le système (1.1) est dit hyperbolique si pour tout  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$ , la matrice  $A(\alpha, u) = \sum_{j=1}^N \alpha_j A_j(u)$  a des valeurs propres réelles et est diagonalisable.
- Si la matrice  $A(\alpha, u)$  a des valeurs propres réelles deux à deux distinctes, elle est alors diagonalisable, et on parle alors de système strictement hyperbolique.

## 1.2 Exemples

### 1.2.1 Équation de transport 1D

La forme conservative du cas scalaire 1D est donnée par :

$$\partial_t u + a \partial_x u = 0$$

Avec

$$a \in \mathbb{R}, N = 1, \Omega \subset \mathbb{R}, t \in ]0, T] \text{ et } F(u) = au$$

### 1.2.2 Équation de Burgers 1D

(...)

## 1.3 Méthode de Volumes Finis

Dans un contexte unidimensionnel, la méthode des volumes finis repose sur la partition du domaine en  $N$  intervalles ouverts  $I_i = [x_{i-1}, x_{i+1}]$ , formant ce que l'on appelle "les volumes de contrôles". Ensuite, une estimation de l'intégrale de  $u$  sur chaque volume est effectuée. À chaque itération temporelle, ces valeurs sont calculées en utilisant une approximation du flux à travers les limites des intervalles.

Pour un domaine  $\Omega = [a, b] \times [0, T]$  :

$$0 = t^0 < t^1 < \dots < t^{n-1} < t^{n+1} < \dots < t^{N+1} = T$$

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_{i+1} < \dots < x_{N-1} < x_{N+1} = b$$

Par commodité, on pose aussi  $x_0 = a$  et  $x_{N+1} = b$ .

La valeur  $u_i$  est une approximation de la valeur moyenne sur le  $i$ -ème intervalle au temps  $tn$  donnée par :

$$u_i^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x, t^n) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} u(x, t^n) dx, \quad (1.4)$$

avec

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i$$

Un système conservatif homogène en dimension 1 prend la forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0. \quad (1.5)$$

En intégrant (1.5) sur  $I_i$ , on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x, t) dx + F(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) - F(u(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) = 0. \quad (1.6)$$

Nous pouvons utiliser cette expression pour élaborer un schéma explicite. Étant donné  $u_i^n$ , la moyenne de la cellule au temps  $t^n$ , nous cherchons une approximation  $u_i^{n+1}$  de la moyenne de la cellule au temps suivant  $t^{n+1}$  après un pas de temps de durée  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ . En intégrant (1.6) par rapport au temps de  $t^n$  à  $t^{n+1}$ , puis en divisant par  $\Delta x$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x, t^{n+1}) dx - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x, t^n) dx + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} F(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} F(u(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt = 0 \\ \Rightarrow & \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x, t^{n+1}) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x, t^n) dx - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n] \end{aligned}$$

Avec

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} F(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt$$

Cela nous indique comment calculer exactement la moyenne de la cellule de  $u$  en un seul pas de temps. Nous étudierons les méthodes numériques de la forme :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n], \quad (1.7)$$

On peut utiliser une formule de la forme :

$$\begin{aligned} F_{i-\frac{1}{2}}^n &= \mathbb{F}(u_{i-1}^n, u_i^n), \\ F_{i+\frac{1}{2}}^n &= \mathbb{F}(u_i^n, u_{i+1}^n), \end{aligned}$$

où  $\mathbb{F}$  est une fonction flux numérique. Ainsi, (1.7) devient :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbb{F}(u_i^n, u_{i+1}^n) - \mathbb{F}(u_{i-1}^n, u_i^n)]. \quad (1.8)$$

### 1.3.1 Schéma aux volumes finis

On considère le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

où  $F$  est la fonction de flux physique.



**Définition 1.3.1.** On appelle schéma aux volumes finis le schéma :

$$u_i^{n+1} = \mathbb{H}(u_{i-q}^n, \dots, u_{i+q}^n), \quad (1.9)$$

**Exemple 1.3.1.** Le schéma décentré linéaire à 3 points ( $q = 1$ ) :

$$\begin{aligned} F(u) &= au \\ u_i^{n+1} &= u_i^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n) \\ \mathbb{H}(u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n) &= a \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{i-1}^n + \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) u_i^n + 0 u_{i+1}^n \end{aligned}$$

**Forme conservative**

**Définition 1.3.2.** Le schéma (1.9) sera dit conservatif si :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbb{F}(u_{i-q+1}, \dots, u_{i+q}) - \mathbb{F}(u_{i-q}, \dots, u_{i+q-1})), \quad (1.10)$$

où  $\mathbb{F}$  est la fonction de flux numérique.

**Exemple 1.3.2.** .

*(Schéma Upwind dans le cas linéaire)* La forme conservative du schéma Upwind est donné par :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n)$$

Avec :

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = \mathbb{F}(u_i, u_{i+1}) = au_i$$

*(Schéma de Roe)* La forme conservative du schéma de Rusanov est donné par :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n)$$

Avec :

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = \mathbb{F}(u_i, u_{i+1}) = \frac{1}{2} (F(u_i) + F(u_{i+1})) - \max(|F'(u_i)|, |F'(u_{i+1})|) (u_{i+1} - u_i)$$

(...)

### Forme incrémentale

**Définition 1.3.3.** Un schéma aux volumes finis admet une forme incrémentale s'il peut s'écrire :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + C_{i+\frac{1}{2}}^n \Delta u_{i+\frac{1}{2}}^n - D_{i-\frac{1}{2}}^n \Delta u_{i-1}^n$$

avec :

$$\Delta u_{i+\frac{1}{2}}^n = u_{i+1}^n - u_i^n$$

**Exemple 1.3.3.** .

(...)

**Proposition 1.3.4.** Sous les conditions :  $\forall i \in Z, \forall n \geq 0$

$$C_{i+\frac{1}{2}}^n \geq 0, \quad D_{i+\frac{1}{2}}^n \geq 0$$

$$C_{i+\frac{1}{2}}^n + D_{i+\frac{1}{2}}^n \leq 1$$

le schéma aux volumes finis à forme incrémentale est TVD.

**Proposition 1.3.5.** Sous les conditions :  $\forall i \in Z, \forall n \geq 0$

$$C_{i+\frac{1}{2}}^n \geq 0, \quad D_{i-\frac{1}{2}}^n \geq 0$$

$$C_{i+\frac{1}{2}}^n + D_{i-\frac{1}{2}}^n \leq 1$$

le schéma aux volumes finis à forme incrémentale est  $L_\infty$  stable.

## 2.1 Équation de transport linéaire

### 2.1.1 Sans diffusion

Dans ce cas, on considère l'équation de transport linéaire définie par :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{pour } t \in ]0, T], \quad x \in [l, L] \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{pour } \forall x \in [l, L] \end{cases} \quad (2.1)$$

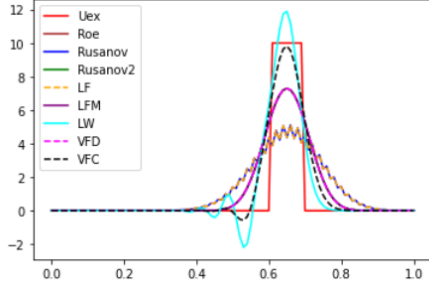
avec  $a$  la vitesse d'écoulement,  $[l, L]$  l'intervalle sur lequel  $x$  varie et  $T$  est le temps final.

La solution exacte est donnée par l'expression suivante :  $u(x, t) = u_0(x - at)$ .

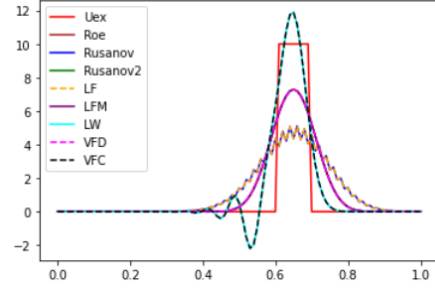
Nous considérons l'intervalle  $[l, L] = [0, 1]$ , une durée maximale  $T = \frac{1}{4}$ , et une solution initiale  $u_0$  définie par le créneau suivant :

$$u_0(x) = \begin{cases} 10 & \text{si } 0.1 \leq x \leq 0.2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

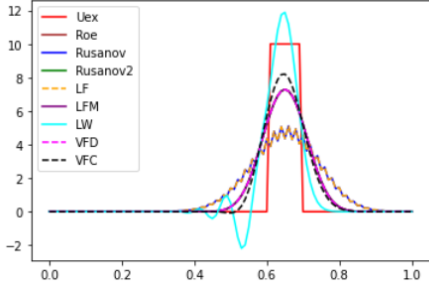
Notre objectif est d'approximer cette solution en utilisant différents schémas, notamment le schéma de Roe, le schéma de Rusanov, le schéma de Rusanov2, le schéma de Lax-Friedrichs, le schéma de Lax-Friedrichs modifié, le schéma de volumes finis centrés, le schéma de Lax-Wendroff, et le schéma de volumes finis caractéristique. Voici les résultats obtenus :



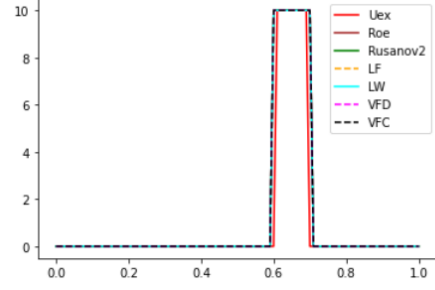
(a)  $\alpha = 0.7$ ,  $CFL = 0.5$  et  $N = 100$



(b)  $\alpha = 0.5$ ,  $CFL = 0.5$  et  $N = 100$



(c)  $\alpha = 1.5$ ,  $CFL = 0.5$  et  $N = 100$



(d)  $\alpha = 0.5$ ,  $CFL = 1$  et  $N = 100$

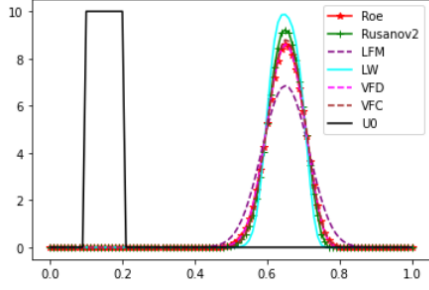
FIGURE 2.1 – Convection linéaire sans diffusion

### 2.1.2 Avec diffusion linéaire

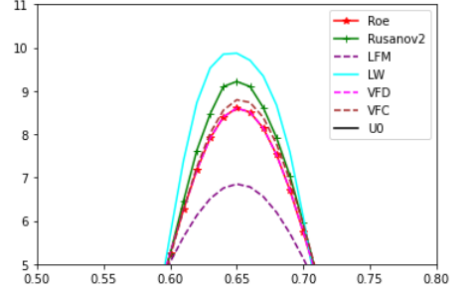
Considérons maintenant l'équation (2.1), mais avec l'ajout d'un terme de diffusion linéaire de rapport  $\epsilon$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{pour } t \in ]0, T], \quad x \in [l, L] \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [l, L] \end{cases} \quad (2.2)$$

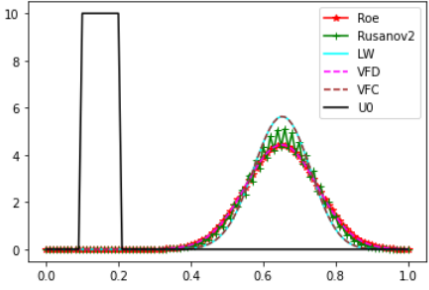
Nous approximations la solution en utilisant les mêmes schémas et en considérant les mêmes conditions initiales que dans le test précédent, tout en prenant en compte une condition CFL qui assure la stabilité à la fois pour la convection et la diffusion. La figure suivante montre les résultats obtenus :



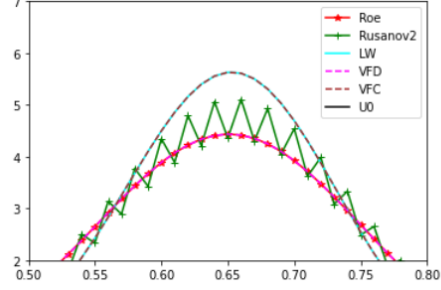
(a)  $\epsilon = 0.001$ ,  $\alpha = 0.6$ ,  $CFL = 0.9$  et  $N = 100$



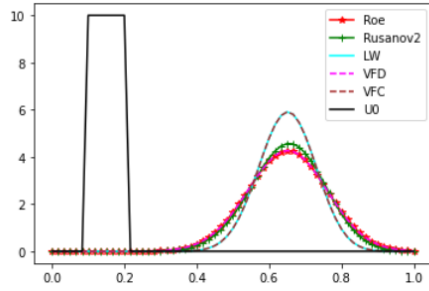
(b)  $\epsilon = 0.001$ ,  $\alpha = 0.6$ ,  $CFL = 0.9$  et  $N = 100$



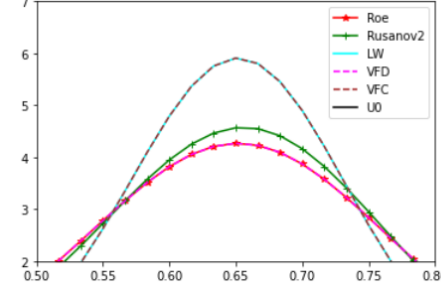
(c)  $\epsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $CFL = 0.9$  et  $N = 100$



(d)  $\epsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $CFL = 0.9$  et  $N = 100$



(e)  $\epsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $CFL = 0.9$  et  $N = 60$



(f)  $\epsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $CFL = 0.9$  et  $N = 60$

FIGURE 2.2 – Convection linéaire avec diffusion linéaire

On peut observer que le choix de  $\epsilon$  et de  $N$  peut affecter la stabilité de certains schémas, ce qui se traduit par l'apparition d'une condition de stabilité TVD et  $L_\infty$  dépendant de  $\epsilon$ ,  $\Delta x$  et de la vitesse  $a$ .

En effet, la forme incrémentale du schéma de Rusanov 2, Par exemple, est donnée par :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + C_{i+\frac{1}{2}}^n \Delta_{i+\frac{1}{2}}^n - D_{i-\frac{1}{2}}^n \Delta_{i-\frac{1}{2}}^n$$

Avec :

$$C_{i+\frac{1}{2}}^n = \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$D_{i-\frac{1}{2}}^n = a \frac{\Delta t}{\Delta x} - \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

Pour que le schéma soit TVD et  $L_\infty$  stable, il faut que :

$$\begin{cases} \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \geq 0 \\ a \frac{\Delta t}{\Delta x} - \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \geq 0 \\ a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \end{cases}$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{aligned} a \frac{\Delta t}{\Delta x} &\leq 1 \\ \epsilon &\leq a \Delta x \end{aligned}$$

### 2.1.3 Avec diffusion non linéaire

#### Premier Exemple

Considérons toujours l'équation (2.1), en ajoutant dans ce test un terme de diffusion non linéaire donné par  $\epsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \frac{\partial u}{\partial x} \right)$  où  $p$  est un entier. L'équation sera donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \frac{\partial u}{\partial x} \right) & \text{pour } t \in ]0, T], \quad x \in [l, L] \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [l, L] \end{cases} \quad (2.3)$$

La résolution par la méthode des volumes finis de tels problèmes comme (2.3) peut se faire en intégrant l'équation sur une cellule  $I_i = ]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} * \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{I_i} u \, dx &\approx \Delta x \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}. \\ * \quad \int_{I_i} a \frac{\partial u}{\partial x} \, dx &\approx F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n. \\ * \quad \int_{I_i} \frac{\partial}{\partial x} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \frac{\partial u}{\partial x} \right) \, dx &\approx Fd_{i+\frac{1}{2}}^n - Fd_{i-\frac{1}{2}}^n. \end{aligned}$$

$$\textbf{Avec :} \quad Fd_{i+\frac{1}{2}}^n = \left| (u_x)_{i+\frac{1}{2}} \right|^p (u_x)_{i+\frac{1}{2}} \quad \textbf{Et} \quad (u_x)_{i+\frac{1}{2}} \approx \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x}$$

Ce qui donne par la suite le schéma :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n] + \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x} [Fd_{i+\frac{1}{2}}^n - Fd_{i-\frac{1}{2}}^n]$$

En approximant les  $F_{i+\frac{1}{2}}^n$  par des schémas différents et en variant la puissance  $p$  et le rapport  $\epsilon$ , on arrive à obtenir les résultats suivants :

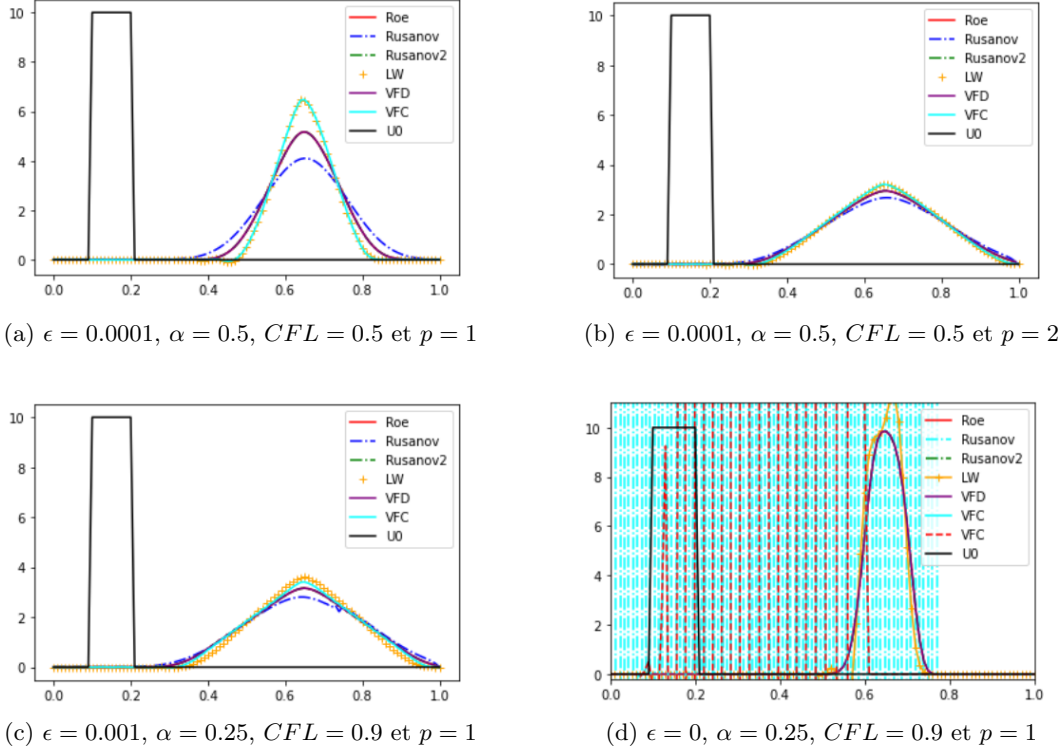


FIGURE 2.3 – Convection linéaire avec diffusion non linéaire

On peut observer, à partir des deux derniers tests, que le terme de diffusion non linéaire peut affecter la stabilité de certains schémas. Cela se manifeste par le fait que les schémas VFC et Rusanov demeurent stables pour  $\alpha = \frac{1}{4}$  et  $CFL = 0.9$  dans le cas où il y a une diffusion non linéaire, alors que lorsque l'on élimine la diffusion, ces schémas deviennent instables.

Pour analyser cela d'un point de vue analytique, nous devons examiner la stabilité TVD et  $L_\infty$ .

■ Pour le schéma de Rusanov, la forme incrémentale dans le cas où il n'y a pas de diffusion est donnée par :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + C_{i+\frac{1}{2}}^n \Delta_{i+\frac{1}{2}}^n - D_{i-\frac{1}{2}}^n \Delta_{i-\frac{1}{2}}^n$$

Avec :

$$C_{i+\frac{1}{2}}^n = a \frac{\Delta t}{2\Delta x}$$

$$D_{i-\frac{1}{2}}^n = a \frac{3\Delta t}{2\Delta x}$$

Ce qui implique que le schéma est TVD et  $L_\infty$  stable si :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} a \leq \frac{1}{2}$$

En ajoutant le terme de diffusion non linéaire :

$$\begin{aligned}
\epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( Fd_{i+\frac{1}{2}}^n - Fd_{i-\frac{1}{2}}^n \right) &= \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \left| \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \right|^p \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} - \left| \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \right|^p \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \right] \\
&= \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left| \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \right|^p \Delta_{i+\frac{1}{2}} - \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left| \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \right|^p \Delta_{i-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

La forme incrémentale dans ce cas est donnée par :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + C_{i+\frac{1}{2}}^n \Delta_{i+\frac{1}{2}}^n - D_{i-\frac{1}{2}}^n \Delta_{i-\frac{1}{2}}^n$$

Avec :

$$\begin{aligned}
C_{i+\frac{1}{2}}^n &= a \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left| \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \right|^p \\
D_{i-\frac{1}{2}}^n &= a \frac{3\Delta t}{2\Delta x} - \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left| \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \right|^p
\end{aligned}$$

Alors, pour que le schéma soit TVD stable, il faut que :

$$\begin{cases} C_{i+\frac{1}{2}}^n \geq 0 \\ D_{i+\frac{1}{2}}^n \geq 0 \\ C_{i+\frac{1}{2}}^n + D_{i+\frac{1}{2}}^n \leq 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left| \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \right|^p \geq 0 \\ a \frac{3\Delta t}{2\Delta x} - \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left| \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \right|^p \geq 0 \\ 2a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \end{cases}$$

Ainsi, en plus de la condition précédente  $\frac{\Delta t}{\Delta x} a \leq \frac{1}{2}$ , nous avons une autre condition découlant de la deuxième inégalité que nous pouvons exprimer comme suit :

$$\frac{\epsilon}{\Delta x} \max_i \left| \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \right|^p \leq 3 \frac{a}{2}$$

Pour la stabilité  $L_\infty$ , on a comme conditions :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} C_{i+\frac{1}{2}}^n \geq 0 \\ D_{i-\frac{1}{2}}^n \geq 0 \\ C_{i+\frac{1}{2}}^n + D_{i-\frac{1}{2}}^n \leq 1 \end{cases} &\implies \begin{cases} a \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left| \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \right|^p \geq 0 \\ a \frac{3\Delta t}{2\Delta x} - \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left| \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \right|^p \geq 0 \\ 2a \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left[ \left| \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \right|^p - \left| \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \right|^p \right] \leq 1 \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} \frac{\epsilon}{\Delta x} \max_i \left| \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \right|^p \leq 3 \frac{a}{2} \\ 2a \frac{\Delta t}{\Delta x} + 2\epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \max_i \left| \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \right|^p \leq 1 \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} \frac{\epsilon}{\Delta x} \max_i \left| \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \right|^p \leq 3 \frac{a}{2} \\ \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( a + \frac{\epsilon}{\Delta x} \max_i \left| \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \right|^p \right) \leq \frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Par conséquent, si on considère ces conditions dans notre code au cas où il y a le terme de diffusion, le schéma de Rusanov sera stable même dans certains cas où  $\frac{\Delta t}{\Delta x} a > \frac{1}{2}$ .

■ Pour le schéma VFC, dans le cas où il n'y a pas de diffusion, il est donné par :



$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [u_{i+\frac{1}{2}}^n - u_{i-\frac{1}{2}}^n] \quad (2.4)$$

Où :

$$u_{i+\frac{1}{2}}^n = u(t^n + \alpha \Delta t, x_{i+\frac{1}{2}}) = u(t_n, X_{i+\frac{1}{2}})$$

Avec les courbes caractéristiques :

$$X_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+\frac{1}{2}} - \alpha \Delta t a$$

En utilisant l'interpolation linéaire, on obtient :

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{u_i^n + u_{i+1}^n}{2} - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} a (u_{i+1}^n - u_i^n)$$

Remplaçons dans (2.4) :

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \left( \frac{1}{2} - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} a \right) \Delta_{i+\frac{1}{2}} \right] - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \left( \frac{1}{2} + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} a \right) \Delta_{i-\frac{1}{2}} \right] \\ &= u_i^n + C_{i+\frac{1}{2}} \Delta_{i+\frac{1}{2}} - D_{i-\frac{1}{2}} \Delta_{i-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Avec :

$$C_{i+\frac{1}{2}} = a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} a - \frac{1}{2} \right) \quad \text{et} \quad D_{i+\frac{1}{2}} = a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} a + \frac{1}{2} \right)$$

On peut vérifier que le schéma est TVD et  $L_\infty$  stable pour les conditions suivantes :

$$\frac{1}{2\alpha} \leq a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$$

En ajoutant le terme de diffusion, on obtient la forme incrémentale suivante :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + C_{i+\frac{1}{2}}^n \Delta_{i+\frac{1}{2}}^n - D_{i-\frac{1}{2}}^n \Delta_{i-\frac{1}{2}}^n$$

Avec :

$$\begin{aligned} C_{i+\frac{1}{2}}^n &= a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} a - \frac{1}{2} \right) + \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left| \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \right|^p \\ D_{i-\frac{1}{2}}^n &= a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} a + \frac{1}{2} \right) - \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left| \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \right|^p \end{aligned}$$

• Stabilité TVD :

$$\begin{aligned} C_{i+\frac{1}{2}} \geq 0 \text{ et } D_{i+\frac{1}{2}} \geq 0 &\implies \begin{cases} a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} a - \frac{1}{2} \right) + \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left| \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \right|^p \geq 0 \\ a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} a + \frac{1}{2} \right) - \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left| \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \right|^p \geq 0 \end{cases} \\ &\implies \left| \frac{a}{2} - \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left| \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \right|^p \right| \leq \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{i+\frac{1}{2}} \geq 0 \text{ et } D_{i+\frac{1}{2}} \geq 0 &\implies \begin{cases} a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} a - \frac{1}{2} \right) + \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left| \frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x} \right|^p \geq 0 \\ a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} a + \frac{1}{2} \right) - \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left| \frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x} \right|^p \geq 0 \end{cases} \\
&\implies \left| \frac{a}{2} - \frac{\epsilon}{\Delta x} \left| \frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x} \right|^p \right| \leq \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} a^2
\end{aligned}$$

et :

$$C_{i+\frac{1}{2}} + D_{i+\frac{1}{2}} \leq 1 \implies a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$$

• Stabilité  $L_\infty$  :

$$\begin{aligned}
C_{i+\frac{1}{2}} \geq 0 \text{ et } D_{i-\frac{1}{2}} \geq 0 &\implies \begin{cases} a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} a - \frac{1}{2} \right) + \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left| \frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x} \right|^p \geq 0 \\ a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} a + \frac{1}{2} \right) - \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left| \frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x} \right|^p \geq 0 \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} \left| \frac{a}{2} - \frac{\epsilon}{\Delta x} \left| \frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x} \right|^p \right| \leq \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} a^2 \\ \left| \frac{a}{2} - \frac{\epsilon}{\Delta x} \left| \frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x} \right|^p \right| \geq -\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} a^2 \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} \left| \frac{a}{2} - \frac{\epsilon}{\Delta x} \max_i \left| \frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x} \right|^p \right| \leq \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} a^2 \\ \left| \frac{a}{2} - \frac{\epsilon}{\Delta x} \max_i \left| \frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x} \right|^p \right| \geq -\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} a^2 \end{cases} \\
&\implies \left| \frac{a}{2} - \frac{\epsilon}{\Delta x} \max_i \left| \frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x} \right|^p \right| \leq \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} a^2
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
C_{i+\frac{1}{2}} + D_{i-\frac{1}{2}} \leq 1 &\implies 2\alpha \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 + \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left( \left| \frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x} \right|^p - \left| \frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x} \right|^p \right) \leq 1 \\
&\implies 2\alpha \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 + 2\epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \max_i \left| \frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x} \right|^p \leq 1
\end{aligned}$$

## Deuxième Exemple

Ici,  $\mu$  est la viscosité et  $\tau_y$  est la contrainte seuil. Considérons l'équation de transport linéaire avec diffusion non linéaire suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \mu + \frac{\tau_y}{\sqrt{\epsilon^2 + \partial_x u}} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right) & \text{pour } t > 0, \quad x \in [l, L] \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [l, L] \end{cases} \quad (2.5)$$

De la même manière que pour l'équation précédente, on approxime le terme de diffusion dans (2.5) en intégrant le terme sur une cellule  $I_i = ]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$ , ce qui donne :

$$* \int_{I_i} \frac{\partial}{\partial x} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \approx F d_{i+\frac{1}{2}}^n - F d_{i-\frac{1}{2}}^n.$$

$$\textbf{Avec :} \quad Fd_{i+\frac{1}{2}}^n = \left( \mu + \frac{\tau_y}{\sqrt{\epsilon^2 + (u_x)_{i+\frac{1}{2}}^2}} \right) (u_x)_{i+\frac{1}{2}} \quad \textbf{Et} \quad (u_x)_{i+\frac{1}{2}} \approx \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x}$$

Prenons le schéma de Roe comme exemple pour déterminer les conditions de stabilité :

Dans le cas où il n'y a pas de diffusion, la forme incrémentale du schéma de Roe est donnée par :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + C_{i+\frac{1}{2}}^n \Delta_{i+\frac{1}{2}}^n - D_{i-\frac{1}{2}}^n \Delta_{i-\frac{1}{2}}^n$$

Avec :

$$C_{i+\frac{1}{2}}^n = 0$$

$$D_{i-\frac{1}{2}}^n = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

En ajoutant le terme de diffusion non linéaire, on obtient :

$$C_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left( \mu + \frac{\tau_y}{\sqrt{\epsilon^2 + (u_x)_{i+\frac{1}{2}}^2}} \right)$$

$$D_{i-\frac{1}{2}}^n = a \frac{\Delta t}{\Delta x} - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left( \mu + \frac{\tau_y}{\sqrt{\epsilon^2 + (u_x)_{i-\frac{1}{2}}^2}} \right)$$

• Stabilité TVD :

On a  $C_{i+\frac{1}{2}} \geq 0 \checkmark$ .

Et

$$D_{i+\frac{1}{2}} \geq 0 \implies a\Delta x \geq \mu + \frac{\tau_y}{\sqrt{\epsilon^2 + (u_x)_{i+\frac{1}{2}}^2}}$$

$$\implies a\Delta x \geq \max_i V_{i+\frac{1}{2}} \quad \textbf{Avec} \quad V_{i+\frac{1}{2}} = \mu + \frac{\tau_y}{\sqrt{\epsilon^2 + (u_x)_{i+\frac{1}{2}}^2}} \quad \forall i$$

Et

$$C_{i+\frac{1}{2}} + D_{i+\frac{1}{2}} \leq 1 \implies a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

• Stabilité  $L_\infty$  :

On a toujours  $C_{i+\frac{1}{2}} \geq 0 \checkmark$ .

Et

$$D_{i-\frac{1}{2}} \geq 0 \implies a\Delta x \geq \max_i V_{i+\frac{1}{2}}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
C_{i+\frac{1}{2}} + D_{i-\frac{1}{2}} \leq 1 &\implies a \frac{\Delta t}{\Delta x} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left( V_{i+\frac{1}{2}} - V_{\frac{1}{2}} \right) \leq 1 \\
&\implies a \frac{\Delta t}{\Delta x} + 2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} V_{i+\frac{1}{2}} - V_{\frac{1}{2}} \leq 1 \\
&\implies \Delta t \leq \frac{1}{\frac{a}{\Delta x} + \frac{a}{\Delta x^2} \max_i V_{i+\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

Après avoir calculé les conditions de stabilité pour les autres schémas utilisés, et en prenant  $\mu = 10^{-3}$  et  $\tau_y = 2$ , on arrive à obtenir les résultats suivants :

## 2.2 Équation de Burger

### 2.2.1 Sans diffusion

### 2.2.2 Avec diffusion linéaire

### 2.2.3 Avec diffusion non linéaire

## BIBLIOGRAPHIE