Lezione 12 - Metodo delle Potenze per ricavare Autovalori e Autovettori

Autovalori e Autovettori

Per $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

Abbiamo $\lambda \in \mathbb{C}$ e $v \in \mathbb{C}^n$ tale che $Av = \lambda v$.

Ci sono diversi metodi per il ricavo degli autovalori e autovettori.

Quoziente di Rayleigh

Noto v allora $\lambda = \frac{v^H A v}{||v||^2}$.

Dove $|| \; v \; ||^2 = v^H v$ e v^H è la generalizzazione al campo complesso del trasposto.

Trovato l'autovettore abbiamo l'autovalore.

Polinomio Caratteristico

Gli autovalori si trovano per il polinomio caratteristico con:

$$p_{_A}(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Questo non è il metodo preferito perché con matrici grandi richiede risolvere un'equazione non-lineare di grado molto alto, quindi se si può evitare si fare.

> **A questo punto ha detto qualcosa che devo ricontrollare.**

Matrice Diagonalizzabile

A è diagonalizzabile se $\exists U \in C^{n \times n}$ invertibile tale che $U^{-1}AU = daig(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

Se non si può usare questo allora si usano i metodi vediamo ora.
Le matrici diagonali e triangolari hanno λ facili da trovare.

Esempio fisico degli autovalori

Prendiamo il sistema

Le masse concentrate hanno equazione:

$$m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) - kx_1$$
$$m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2)$$

In forma matriciale possiamo avere:

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2k & k \\ k & -k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Possiamo definire il moto in modo generale come:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} e^{i\omega t}$$
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} i\omega e^{i\omega t}$$
$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} - \omega^2 e^{i\omega t}$$

Imponendo queste equazioni del moto generalizzato nella equazione nella forma matriciale, abbiamo:

$$-m\omega^2 \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \cancel{e^{i\omega t}} = \begin{bmatrix} -2k & k \\ k & -k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \cancel{e^{i\omega t}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}}_{v} = \underbrace{-m\omega^2}_{\lambda} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}}_{v}$$

È un problema di autovalori di ordine 2 perché ci sono 2 ω che soddisfano la equazione.

Metodi Computazionali

Ci sono due tipi di metodi computazionali per calcolare autovalori.

I metodi che calcolano lo spettro intero (QR), sono utili ma non li guardiamo in questo corso.

Altri metodi sono usati per calcolare 1 autovalore target e il corrispondente autovettore, questi sono quelli che guardiamo. Guardiamo:

- Metodo delle potenze
- Metodo delle potenze inverse

Metodo delle Potenze

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con autovettori linearmente indipendenti e autovalori tale che:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

Prendiamo il guess iniziale $x^{(0)} \in \mathbb{C}$ e calcoliamo:

$$y^{(0)} = \frac{x^{(0)}}{|| \, x^{(0)} \, ||}$$

Questo è perché la richiesta computazionale è x unitario, non x stesso.
Cerchiamo allora in effetti (λ_1, x_1), autovalore e autovettore unitario associato.

Quindi oggetti di tipo y trovano x_1.

Algoritmo

Per $k = 1, \ldots$

$$x^{(k)} = Ay^{(k-1)}$$
$$y^{(k)} = \frac{x^{(k)}}{|| \, x^{(k)} \, ||}$$
$$\lambda^{(k)} = (y^{(k)})^H A y^{(k)}$$

Per $k \to \infty$, $y^{(k)} \simeq x_1$ e $\lambda^{(k)} \simeq \lambda_1$
Il primo passo in questo algoritmo è preso in modo simile ad un punto fisso perché prende $\lambda = 1$ che significa che la equazione per $k \to \infty$ è $Av = v$

Criterio d'Arresto

N_{max} in questo caso è:

$$N_{max} = \underbrace{\frac{|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}|}{|\lambda^{(k)}|}}_{\text{Incremento Relativo}} < \mathcal{E}$$

Perché si chiama metodo delle potenze?

Per capire perché si chiama metodo delle potenze, scriviamo alcune iterazioni:

$$\begin{array}{llll} k=1 & x^{(1)} = Ay^{(0)}; & y^{(1)} = \dfrac{Ay^{(0)}}{\|\ x^{(1)}\ \|}; & \lambda^{(1)} = (y^{(1)})^H Ay^{(1)} \\ k=2 & x^{(2)} = Ay^{(1)}; & y^{(2)} = \dfrac{Ay^{(1)}}{\|\ x^{(2)}\ \|}; & \lambda^{(2)} = (y^{(2)})^H Ay^{(2)} \end{array}$$

$y^{(2)}$ può esser riscritto come:

$$y^{(2)} = \frac{A^2 y^{(0)}}{\|\ x^{(1)}\ \| \cdot \|\ x^{(2)}\ \|} = \beta^{(2)} A^2 y^{(0)}$$

In questa equazione:

$$\beta^2 = (\|\ x^{(1)}\ \| \cdot \|\ x^{(2)}\ \|)^{-1}$$

Iterazione k-esima:

$$\begin{aligned} x^{(k)} &= Ay^{(k-1)} \\ y^{(k)} &= \beta^{(k)} A^k y^{(0)} \\ \beta^{(k)} &= \left(\prod_{i=1}^{k} \|\ x^{(i)}\ \| \right)^{-1} \\ \lambda^{(k)} &= (y^{(k)})^H Ay^{(k)} \end{aligned}$$

Da qui vediamo perché chiamato metodo delle potenze e vediamo anche la forma più computazionalmente utile del metodo.

Analisi della convergenza

Per fare questa analisi sfruttiamo la ipotesi 2, che dice che i nostri autovettori sono linearmente indipendenti e perciò formano base di $\mathbb{C}^{n \times n}$

Il nostro guess iniziale possiamo scriverlo come:

$$x^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\alpha_i}_{\in \mathbb{C}} x_i \implies y^{(0)} = \gamma^{(0)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

In questo caso x_i sono gli autovettori che formano la base di A.

È $\gamma^{(0)}$ è:

$$\gamma^{(0)} = \frac{1}{|| \, x^{(0)} \, ||}$$

La convergenza in questo caso implica che $x^{(k)}$ ha la direzione x_1 e $\lambda^{(k)}$ ha il valore di λ_1.

Nella prima iterazione:

$$x^{(1)} = Ay^{(0)} = \gamma^{(0)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{Ax_i}_{\lambda_i x_i} = \gamma^{(0)} \sum \alpha_i \lambda_i x_i$$
$$y^{(1)} = \gamma^{(1)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i x_i$$
$$\gamma^{(1)} = (|| \, x^{(0)} \, || \cdot || \, x^{(1)} \, ||)^{-1}$$

La seconda iterazione è:

$$x^{(2)} = Ay^{(1)} = \gamma^{(1)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \underbrace{Ax_i}_{\lambda_i x_i} = \gamma^{(1)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^2 x_i$$
$$y^{(2)} = \gamma^{(2)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^2 x_i$$
$$\gamma^{(2)} = (|| \, x^{(0)} \, || \cdot || \, x^{(1)} \, || \cdot || \, x^{(2)} \, ||)^{-1}$$

Per la iterazione k allora questi sono:

$$y^{(k)} = \gamma^{(k)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k x_i$$
$$\gamma^{(k)} = \left(\prod_{i=0}^{k} || \, x^{(i)} \, || \right)^{-1}$$

Ora possiamo sfruttare la ipotesi 1 dell'ordine degli autovalori, isoliamo il termine dell'autovalore dominante e possiamo scrivere

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= \gamma^{(k)} \left[\alpha_1 \lambda_1^k x_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \lambda_i^k x_i \right] \\ &= \alpha_1 \lambda_1^k \left[x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k x_i \right] \text{con } \alpha_1 \neq 0 \end{aligned}$$

L'ipotesi 1 ci dice che:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

Per $k \to \infty$ allora:

$$\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k \to 0 \implies \underbrace{\sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k x_i}_{=0}$$

Implica che $y^{(k)}$ si allinea con x_1 per $k \to \infty$
Che in se implica che $\lambda^{(k)}$ tende a λ_1

Troviamo il $\lambda^{(k)}$ con il quoziente di Rayleigh

Osservazioni

Velocità di Convergenza

$$
\begin{aligned}
|| x_1 - y^{(k)} || = \\
&=|| x_1 - x_1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k x_i || \\
&=|| \sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k x_i = \left[\sum_{i=2}^{n} \left[\frac{\alpha_i}{\alpha_1}\right] \cdot \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)\right]^{1/2}
\end{aligned}
$$

Dentro alle parentesi si ha:

$$
\frac{|\ \lambda_1\ |}{|\ \lambda_1\ |} > \frac{|\ \lambda_2|}{|\lambda_1|} \geq \cdots \geq \frac{|\ \lambda_n|}{|\lambda_1|}
$$

Questo significa che nel caso migliore dove ogni λ_i con $i \neq 1$ è uguale a λ_2, la equazione la possiamo scrivere come:

$$
\leq | \frac{\lambda_2}{\lambda_1} |^k \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\alpha_i}{\alpha_1}\right]^2\right]^{1/2}
$$

Il termine alla sinistra tende a 0, ed è l'indicatore della velocità di convergenza. Più sono lontani più è veloce la convergenza.

Metodo delle Potenze Inverse

Questo metodo è usato per trovare l'autovalore minimo e l'associato autovettore.

Questo metodo richiede che A sia invertibilie.

Gli autovalori di A, λ, sono gli inversi degli autovalori di A^{-1}, $\frac{1}{\lambda}$.

Applichiamo il metodo delle potenze su A^{-1} e troviamo $\frac{1}{\lambda_n}$ che invertiamo per trovare λ_n.

Gli autovettore delle matrice non si trovano in modo immediato, dobbiamo fare dei calcoli:

$$
\begin{gathered}
Ax = \lambda x \\
A^{-1}Ax = \lambda A^{-1}x \\
x = \lambda A^{-1}x \\
A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x
\end{gathered}
$$

Gli autovettore di A sono gli autovettori di A^{-1}

La ipotesi che usiamo per questo metodo è:

$$
\frac{1}{|\ \lambda_1\ |} < \frac{1}{|\ \lambda_2\ |} \leq \cdots < \frac{1}{|\ \lambda_n\ |}
$$