Lezione 04 - Metodi Iterativi

Abbiamo il sistema lineare:

$$Ax = b$$

Possiamo scrivere uno schema generale dell'iterazione come:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g \text{ ; per } k \geq 0$$

B e g nono possono esser qualsiasi, serve che siano consistenti, cioè $x = Bx + g$

Possiamo trovare che:

$$\begin{aligned} e^{(k+1)} &= Be^{^{(k)}} \\ e^{(k)} &= Be^{(k-1)} \\ |e^{(k)}| &= |Be^{^{(k-1)}}| \end{aligned}$$

Ci sono vari modi per trovare la norma di una matrice, un metodo è la norma 2, detta anche norma spettrale:

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow |A|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$$

Se A è simmetrica ($A^T = A$) allora:

$$|A|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^2)} = \sqrt{[\lambda_{max}(A)]^2} = \lambda_{max}(A)$$

Proprietà della compatibilità

Abbiamo definito l'errore come:

$$|e^{(k)}| = |Be^{(k-1)}|$$

Se i tipi di norma che prendiamo sono opportune è possibile che la norma della matrice del vettore siano compatibili, quindi si può scrivere:

$$|Be^{(k-1)}| \leq |B|_2 \cdot |e^{^{(k-1)}}|$$

In un altra approssimazione possiamo scrivere:

$$|B|_2| \cdot e^{^{(k-1)}}| \simeq \rho(B) \cdot |e^{(k-1)}|$$

Notiamo $\rho(B)$ come il raggio spettrale di B, come troviamo questa relazione è di un livello più alto che non guarderemo.

Come definito prima:

$$\rho(B) = \lambda_{max}(B)$$

Cioè il massimo degli autovalori in modulo.

Questa relazione con il raggio spettrale ci permette di scrivere che:

$$|e^{(k)}| \leq \rho(B) \cdot |e^{(k-1)}|$$
$$|e^{(k-1)}| \leq \rho(B) \cdot |e^{(k-2)}|$$
$$|e^{(k-2)}| \leq \rho(B) \cdot |e^{(k-3)}|$$
$$\vdots$$

Da qui allora possiamo scrivere:

$$|e^{(k)}| \leq \rho(B) \cdot |e^{(k-1)}| \leq \rho(B)^2 \cdot |e^{(k-2)}| \leq \rho(B)^3 \cdot |e^{(k-3)}| \leq \dots$$
$$\implies |e^{(k)}| \leq \rho(B)^k \cdot |e^{(0)}|$$

La condizione per la convergenza allora sarà che: $\rho(B) < 1$

Questo significa allora che anche un errore grande può esser corretto.
Note bene: Se non c'è consistenza tutto questo non si può fare perché la relazione passo per passo non vale più.

Teorema

Si consideri lo schema:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$$

e si supponga che sia consistente.
Allora lo schema è convergente $\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \iff \rho(B) < 1$

Più $\rho(B)$ è piccolo, più la convergenza è rapida.

Tra le opzioni di schemi che possiamo usare per determinare la soluzione ad un sistema, se possibile scegliamo lo schema con $\rho(B)$ più piccolo.

$\rho(B)$ è anche utile come condizione di arresto in base a quanto è abbattuto.

Trovare il numero minimo di iterazioni

La condizione di arresto in base alla errore è:

$$\frac{|e^{(k,min)}|}{|e^{(0)}|} \leq [\rho(B)]^{K_{min}} < \text{TOL}$$

Quello che controlliamo è la condizione alla destra.
Possiamo trovare il numero minimo di iterazioni come:

$$K_{min} = \log_{\rho(B)} TOL$$

Avendo visto l'errore andiamo a costruire una famiglia intera di schemi.

Metodi di Richardson

Come sempre abbiamo:

$$Ax = b$$

Prendiamo arbitrariamente $\alpha_k \in \mathbb{R}$, parametro di accelerazione, che verrà utilizzato per velocizzare la convergenza.

$$\alpha_k A x = \alpha_k b$$

Riscriviamo e facciamo delle manipolazioni algebriche.

Per prima prendiamo una matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, questa matrice è della precondizionatore, e deve esser invertibile e facile(spiegato dopo).

Scriviamo allora:

$$\alpha_k A = P - P + \alpha_k A$$
$$Px - (P - \alpha_k A)x = \alpha_k b$$
$$Px = (P - \alpha_k A) + \alpha_k b$$

Prendiamo allora arbitrariamente che la x alla sinistra della k+1-esima iterazione e che le x alla destra siano della k-esima iterazione.

Inserendo questi indici:

$$Px^{(k+1)} = (P - \alpha_k A)x^{(k)} + \alpha_k b$$
$$Px^{(k+1)} = Px^{(k)} + \alpha_k b - \alpha_k A x^{(k)}$$

Moltiplicando per P^{-1}:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k P^{-1}(\underbrace{b - Ax^{(k)}}_{r^{(k)}})$$

$r^{(k)}$ è il resto, cioè quello che rimane quando togliamo la soluzione e la nostra approssimazione.

$$\boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k P^{-1} r^{(k)}}$$

Questa è la forma più nota del metodo di Richardson.

Definiamo $P^{-1} r^{(k)} = z^{(k)}$ come il residuo precondizionato. Allora:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k z^{(k)} \ ; \ k \geq 0$$

Definiamo uno schema di Richardson come stazionario se $\alpha_k = cost \ \forall k$, invece è detto dinamico se $\alpha_k \neq cost \ \forall k$.

Se vogliamo riscriverlo nella forma $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$, allora partendo da:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k P^{-1} A x^{(k)} + \alpha_k P^{-1} b$$
$$x^{(k+1)} = (\underbrace{I - \alpha_k P^{-1} A}_{B_{\alpha_k}})x^{(k)} + \underbrace{\alpha_k P^{-1} b}_{g_{\alpha_k}}$$

Consistenza del metodo Richardson

Visto che siamo iniziati dalla posizione:

$$Px = Px + \alpha_k b - \alpha_k A x$$

Che è un sistema consistente, significa che quando andiamo ad aggiungere la iterazione, il sistema di Richardson sarà per come è costruito un sistema consistente.

$$Px^{(k+1)} = Px^{(k)} + \alpha_k b - \alpha_k Ax^{(k)}$$

Se viene chiesto all'esame possiamo dire che è consistente per costruzione senza dare un spiegazione.

Determinazione di P e α se

Proposizione: Caso Stazionario

Siano A e P sdp. Allora Richardson stazionario converge $\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \iff 0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_{max}(P^{-1}A)}$

Le scelta ottimale di α, quello che massimizza la velocità di convergenza, è:

$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{max}(P^{-1}A) + \lambda_{min}(P^{-1}A)}$$

Inoltre:

$$|e^{(k)}|_A \leq \underbrace{\left(\frac{K(P^{-1}A) - 1}{K(P^{-1}A) + 1}\right)^k}_{\substack{\text{Fattore di convergenza} \\ \text{k} \to \# \text{ di condizionamento}}} |e^{(k)}|_A$$

Dove $|w|_A = \sqrt{w^T Aw}\ ;\ w \in \mathbb{R}^n$.
Questo tipo di norma tiene traccia del problema che stiamo risolvendo

Dimostrazione della convergenza

Per verificare la prima parte della proposizione, dobbiamo verificare la convergenza. Sappiamo che è convergente se il sistema è consistente e se $\rho(B_\alpha) < 1$. È consistente per costruzione allora dobbiamo verificare che $\rho(B_\alpha) < 1$.

Sapiamo che: $B_\alpha = I - \alpha P^{-1}A$

Per $\lambda_i \in \mathbb{R}^n$ autovalori di $P^{-1}A$
Scriviamo che: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$

Prendiamo μ_i come gli autovalori di B_α. Questi autovalori avranno equazione: $\mu_i = 1 - \alpha\lambda_i$

Per confermare la convergenza dobbiamo chiedere che $|1 - \alpha\lambda_i| < 1\ \forall i \implies \rho(B_\alpha) < 1$

Questo è uguale a:

$$-1 < 1 - \alpha\lambda_i < 1$$

Dato che A e P sono sdp, sappiamo che tutti gli λ_i sono > 0, allora anche $\alpha > 0$. Troviamo anche che $\alpha\lambda_i < 2$.

Riscrivendo abbiamo che:

$$\alpha < \frac{2}{\lambda_i}$$

Affinché valga $\forall i$, la condizione più restrittiva è $\lambda_i = \lambda_{max}$, perché se vale per λ_{max} vale $\forall \lambda_i$:

$$\alpha < \frac{2}{\lambda_{max}(P^{-1}A)}$$

Mettendo insieme questa ultima condizione e la condizione $\alpha > 0$, verifica la condizione che $\rho(B_\alpha) < 1$, quindi la convergenza è verificata.

α_{opt} caso stazionario

Trovare $\alpha_{opt} \implies$ trovare l'α tra $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_{max}}$ che minimizza il raggio spettrale, cioè l'α che minimizza il massimo autovalore.

Supponiamo che:
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ autovalori di $P^{-1}A$ con $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ che significa $\frac{1}{\lambda_1} \leq \frac{1}{\lambda_2} \leq \frac{1}{\lambda_3}$

Ci ricordiamo la definizione che abbiamo posto prime che: $\mu_i = |1 - \alpha\lambda_i|$

Mappando graficamente ogni autovalore μ_i in base al valore α, troviamo:

Dobbiamo trovare α dove il valore massimo è il più basso possibile. Troviamo che questo punto è all'intersezione tra $\frac{1}{\lambda_3}$ e $\frac{1}{\lambda_1}$.

Cerchiamo μ_i massimo minimo tale per minimizzare $\rho(B)$.

L'α all'intersezione allora sarà l'α_{opt}.
Troviamo che:

$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_3}$$

In forma più generale si può scrivere:

$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{max} + \lambda_{min}}$$

Dato che $\rho(B_{\alpha opt})$ è definito come l'autovalore μ più grande, vogliamo ridurre il valore il minimo possibile per trovarlo, allora sarà:

$$\rho(B_{\alpha opt}) = 1 - \alpha_{opt}\lambda_{min} = 1 - \frac{2}{\lambda_{max} + \lambda_{min}}\lambda_{min} = \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}}$$

Proposizione: Caso Dinamico

Siano A e P sdp. Allora Richardson dinamico converge

$$\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \implies \alpha_{k,opt} = \frac{[z^{(k)}]^T r^k}{[z^{(k)}]^T A z^{(k)}} \ ; \ k \geq 0$$

> **Note**
>
> Converge per ogni vettore iniziale con $\alpha_{k,opt}$, se non lo usiamo allora non è garantito che convergerà per ogni vettore iniziale.

Inolte:

$$|e^{(k)}|_A \leq \left(\frac{K(P^{-1}A) + 1}{K(P^{-1}A) + 1}\right)^k |e^{(0)}|_A$$

L'$\alpha_{k,opt}$ è ricavato attraverso il metodo del gradiente precondizionato, questo ha delle complicazioni quindi per salvar tempo, dimostriamo il metodo del gradiente generico (dove P è spento, cioè con P = **I**).

Quando il precodizionatore è spento:

$$\alpha_{k,opt} = \frac{[r^{(k)}]^T r^{(k)}}{[r^{(k)}]^T A r^{(k)}}$$

Che è quello che andremo a dimostrare.

Dimostrazione di $\alpha_{k,opt}$ per Richardson Dinamico

Sappiamo che $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k r^{(k)}$.
Ricordiamo che A è sdp.

Risolvere $Ax = b \underbrace{\iff}_{\text{se A è sdp}} \text{minimizzare } Q(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b$

Questo mi ha aiutato a capire perché

https://math.stackexchange.com/questions/4322010/why-solving-ax-b-is-equivalent-to-minimize-frac12xtax-btx-over-x
In più $\nabla Q(x) = Ax - b$, quindi quando $\nabla Q(x)$ = 0 $\implies Ax - b = 0 \implies Ax = b$

La parte alla destra è detta forma quadratica e geometricamente è rappresentata da una parabola, questo si può vedere perché x viene moltiplicato due volte con i parametri di x creando la parabole mentre bx^T sposta la parabola. Quindi minimizzando effettivamente troviamo il minimo della parabola.

Questo metodo allora è un metodo dove ad ogni passo valutiamo la nostra posizione rispetto alla posizione in cui vogliamo esser e controlliamo cambiamo direzione alla direzione che ha gradiente maggior per permetterci di raggiungere il minimo più velocemente.

In forma matematica possiamo scrivere:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \gamma_k d^{(k)}$$

In questa equazione $d^{(k)}$ è la direzione di spostamento, questa direzione è la più rapida per raggiungere il minimo e ad ogni iterazione la ricalcoliamo per controllare che stiamo andando nella direzione migliore.
Troviamo questo valore con l'equazione:

$$d^{(k)} = -\nabla Q(x^{(k)}) = b - Ax^{(k)} = r^{(k)}$$

Vediamo allora che la direzione tattica è quella del residuo.

Per trovare la magnitudine di γ_k dobbiamo trovare dove Q inizia a tornare in su, per massimizzare l'effetto del passo.
Possiamo scrivere che:

$$Q(x^{(k)} + \gamma_k r^{(k)}) = \widetilde{Q}(\gamma_k)$$

È trovare dove:

$$\frac{d\widetilde{Q}}{d\gamma_k} = 0$$

La funzione completa è:

$$\underbrace{\frac{1}{2}(x^{(k)} + \gamma_k r^{(k)}) A (x^{(k)} + \gamma_k r^{(k)}) - (x^{(k)} + \gamma_k r^{(k)})^T b}_{Q(x^{(k)} + \gamma_k r^{(k)})} = \widetilde{Q}(\gamma_k)$$

La derivata sarà:

$$\frac{d\widetilde{Q}}{d\gamma_k} = [r^{(k)}]^T A x^{(k)} + \gamma_k [r^{(k)}]^T A r^{(k)} - [r^{(k)}]^T b = 0$$

Isolando γ_k troviamo:

$$\gamma_k = \frac{[r^{(k)}]^T b - [r^{(k)}]^T A x^{(k)}}{[r^{(k)}]^T A r^{(k)}} = \frac{[r^{(k)}]^T \cdot \overbrace{b - A x^{(k)}}^{r^{(k)}}}{[r^{(k)}]^T A r^{(k)}} = \frac{[r^{(k)}]^T r^{(k)}}{[r^{(k)}]^T A r^{(k)}}$$

Abbiamo trovare allora il valore di $\alpha_{k,opt}$, questo è l'unico valore che garantisce la convergenza $\forall x^{(0)}$ nel caso dinamico.