Lezione 4

descrive vettore di parametri

Cinematica $\rightarrow \hat{C}$, coordinate Lagrangiane $\underline{u}$ $(N\times 1)$

$\exists\, \infty^{\nu}$ soluzioni congruenti

Statico $\rightarrow C^*$, Strutture
- Ipostatiche : In generale $\nexists C^*$
- Isostatiche : $\exists! C^*$
- Iperstatiche : $\exists\, \infty^s C^*$

$S = n_r - 3n_c$

$\underline{X}$ $(s\times 1)$

Incognite iperstatiche

$$\underline{G} = (\underline{R}^T, \underline{Q}^T)^T \quad : \quad \tilde{\underline{F}}$$

$$\boxed{\underline{\underline{Y}}\,\underline{G} + \underline{\underline{\tilde{W}}}\,\underline{\tilde{F}} = \underline{0}}$$

Equazioni di Equilibrio dei corpi rigidi

$3n_c$ equazioni lineari

Forze reattive

Risultante forze attive esterne

Obbiettivo è calcolare questo

Definiamo vettore termini noti:

$$\underline{y}_0 = -\underline{\underline{\tilde{W}}}\,\underline{\tilde{F}}$$

Nel caso isostatico

$$\underline{G} = \underline{\underline{Y}}^{-1}\underline{y}_0$$

Per strutture iperstatiche

↳ Possiamo definire da s parametri per definire ∞^s soluzioni

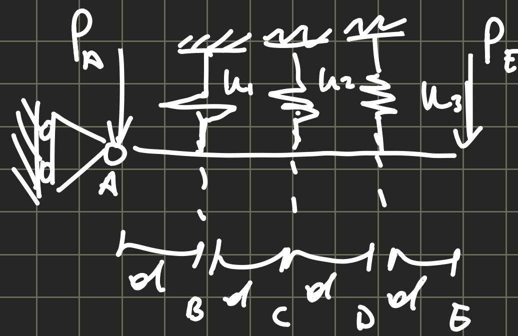
√ Insieme di s parametri

$\underline{X}$ → Incognite iperstatiche

↳ Oggi: come calcoliamo $\underline{X}$

Note: Le molle non le tagliamo

Esempio numerico di ricavo di $\underline{X}$



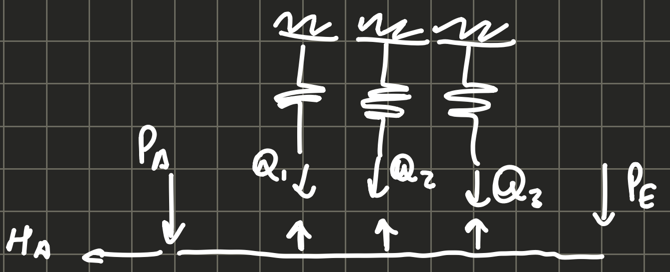
$l = 4d$

carrello + 3 molle

$S = 4 - 3 = 1$

1 corpo

Condizioni di equilibrio



$$\begin{cases} H_A = 0 \\ Q_1 + Q_2 + Q_3 = P_A + P_E \\ (Q_3 - Q_1)d + (P_A - P_E)2d = 0 \end{cases}$$

Abbiamo 2 equazioni, per 3 incognite

↳ Poniamo $\underline{X} = Q_2$

↳ Poteva esser anche $\underline{Q_1}$ o $\underline{Q_3}$

$Q_3 = P_A + P_E - X - Q_1$ → Sostituito nella seconda

$$-2Q_1 - X + P_A + P_E + 2P_A - 2P_E = 0$$

$$Q_1 = \frac{3P_A - P_E}{2} - \frac{X}{2} \rightarrow \text{sostituisco lì}$$

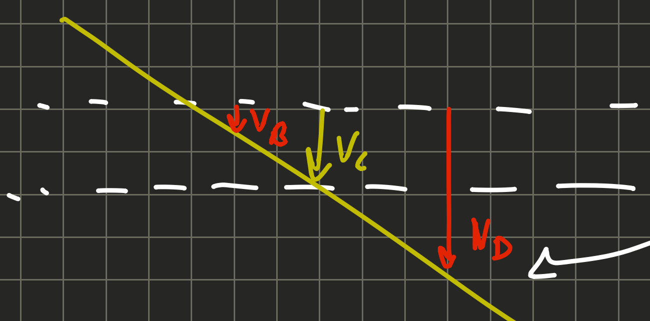
$$Q_3 = -\frac{X}{2} + \frac{3P_E - P_A}{2}$$

↳ Abbiamo scritto le forze reattive come quelle esterne e le incognite

Problema Elastico: equilibrata e congruente

È congruente / rispetta i vincoli?

Nella cinematica



$$q_1 = v_B = \frac{Q_1}{k_1} = \frac{-X}{2k_1} + \frac{(3P_E - P_A)}{2k_1}$$

$$q_2 = v_C = Q_2/k_2 = \frac{X}{k_2}$$

$$q_3 = v_D = Q_3/k_3 = \frac{-X}{2k_3} + \frac{(3P_E - P_A)}{2k_3}$$

Per essere congruenti devono stare sulla stessa retta (graficamente)

Algebricamente:

$$\frac{v_C - v_B}{d} = \frac{v_D - v_C}{d} \leftarrow \text{Equazione di congruenza}$$

Salto dei passi per brevità

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2k_1}+\frac{2}{k_2}+\frac{1}{2k_3}\right)}_{\eta}X_1=\frac{3P_n-P_t}{2k_1}+\frac{3P_t-P_A}{2k_3}$$

Coefficiente all'inverso delle rigidezze
↳ Flessibilità/Cedevolezza della struttura

Degli infiniti valori X_1 per C° solo uno rispetta la congruenza

$\Longleftrightarrow$

→ Sarà vero se e solo se

$$X=\eta^{-1}\left[\frac{3P_n-P_t}{2k_1}+\frac{3P_t-P_n}{2k_3}\right]$$

→ Esiste solo uno che è la soluzione X per il problema elastico

→ Esiste una delle infinite staticamente ammissibili che rispetta la congruenza

Metodo delle Forze

→ In una struttura iperstatica, cerco la soluzione del problema elastico come l'unica configurazione cinematicamente ammissibili fra le ∞^s configurazione staticamente ammissibili.

↳ Uno dei due metodi per risolvere sistemi iperstatiche

↳ Troveremo un mezzo per ricavare la condizione di congruenza velocemente e automatico

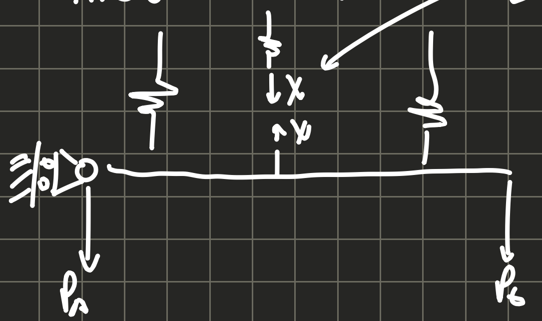
↳ Per risolvere dobbiamo trovare un modo intelligente per descrivere

La condizione di congruenza.

serve → parle molto

11.06 se serve

Q_2 che avevamo eletto come l'incognita iperstatica



Struttura isostatica

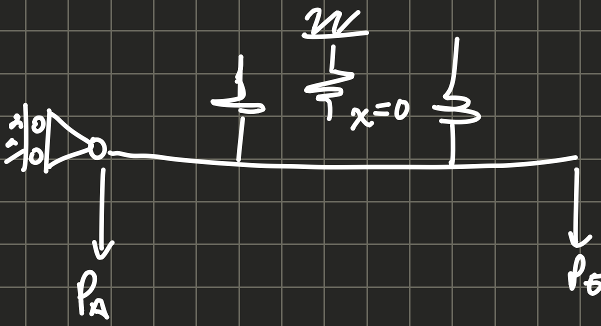
principale

↳ Se vedo X come carico esterno,

e lo trattiamo come sistema isostatico

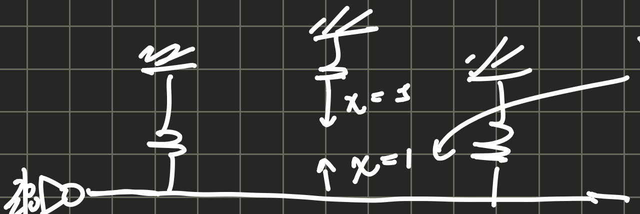
Equivale alla somma di due problemi

Creiamo una struttura isostatica, dove reazione agisce come forza esterna



Struttura ausiliaria "0"

Prendiamo 1 per semplicità



Struttura ausiliaria "1"

Dato questo

soluzione a "0"

qualsiasi variabile statica del sistema sarà $Q_i = Q_i^{(0)} + Q_i^{(1)} \cdot X$ → Moltiplicando per X, lo stesso risultato che averlo in "1"

soluzione ad "1"

Perchè avrai sempre "0" dove spegni gli X e metti solo i carichi esterni

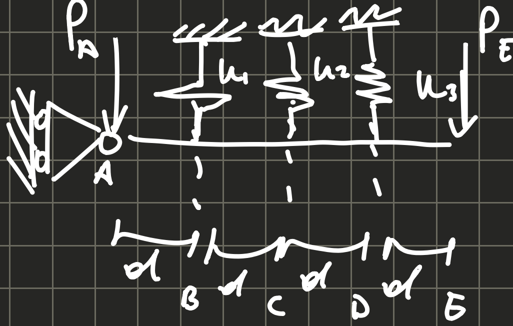
Risolviamo 1+1 problemi isostatici invece di risolvere un singolo valore

→ Funzione lineare dei carichi, e soluzione lineare di X

Metodo Alternativo per risolvere lo stesso problema

↳ lead-in per metodo degli spostamenti

sempio



$\boxed{11:15}$

Ĉ di questo sistema possiamo definirlo in base a $N=2$ gradi di libertà e definiamo $\underline{U}$ come:

$$\underline{U} = (v_c, \phi)^T = (U_1, U_2)^T$$

$$\begin{cases} q_1 = v_c - \phi d = U_1 - U_2 d \\ q_2 = v_c = U_1 \\ q_3 = v_c + \phi d = U_1 + U_2 d \end{cases}$$

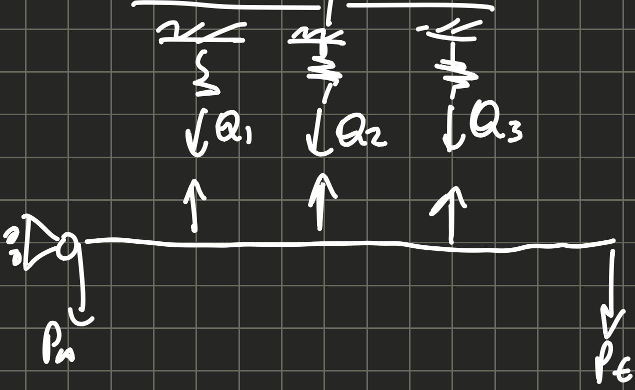
$$\downarrow$$

Legame Elastico

$$\left.\begin{cases} Q_1 = k_1 q_1 = k_1 (U_1 - U_2 d) \\ Q_2 = k_2 q_2 = k_2 (U_1) \\ Q_3 = k_3 q_3 = k_3 (U_1 + U_2 d) \end{cases}\right\} \text{Congruente}$$

Mettiamo qui

<u>È in equilibrio</u>



$$\begin{cases} Q_1 + Q_2 + Q_3 = P_A + P_E \\ (Q_3 - Q_1) d + (P_A - P_E) 2d = 0 \end{cases}$$

$$(k_1+k_2+k_3)\,U_1 + (k_3-k_1)\,d\,U_2 = P_n + P_t$$

$$(k_3-k_1)\,d\,U_1 + (k_1+k_3)\,d^2 U_2 = 2(P_s-P_A)\,d$$

Come matrice delle rigidezza

Lo possiamo scrivere come $\underline{\underline{k}}\,\underline{U} = \tilde{\underline{F}}$

L'equilibrio è soddisfatto se $\underline{U} = \underline{\underline{k}}^{-1}\tilde{\underline{F}}$

Sistema di equilibrio

- Metodo degli Spostamenti

Cerco la soluzione del problema elastico come l'unica configurazione staticamente ammissibile fra le ∞^n configurazioni cinematicamente ammissibili

→ In questo caso l'incognita principale non è $\underline{X}$, ma è $\underline{U}$

→ Se vogliamo trovare le azioni interne possiamo usare $\underline{U}$ nelle equazioni di congruenza per trovare i valori

I due metodi sono i duali.

→ Sempre applicabile sempre che abbia almeno 1 soluzione

→ isostatico e iperstatico

→ Metodo delle forze solo iperstatico

→ Più facile da programmare

→ Padre del metodo degli elementi finiti

In corso

11:33 Principio dei Lavori Virtuali → Madre di tutto

→ Calcolo degli spostamenti senza condizioni di congruenza

→ Deriva metodo delle forze e spostamenti.

Definizione:

$\hat{C}$ → Cinematica ammissibile senza cedimenti vincolari

↳ Cosa descrive

$$\hat{C} : \left\{ \underbrace{\hat{\underline{U}},\ \hat{\underline{\tilde{U}}} = \underline{\underline{T}}\,\hat{\underline{U}},\ \underbrace{\hat{\underline{q}}}_{\text{spostamenti dei corpi elastici}} = \underline{\underline{B}}\,\hat{\underline{U}}}_{\text{Descrivono}} \right\} \quad C_0 \to \hat{C}$$

Specificare $\hat{C}$ significa specificare $\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{\tilde{U}}}, \hat{\underline{q}}$

Configurazione stati carichi ammissibile

Quello che avevamo scritto prima

$$C^* : \left\{ \underline{\tilde{F}}^*, \underline{X}^*, \underline{R}^* = \underline{\underline{M}}^{(0)}\underline{\tilde{F}}^* + \underline{\underline{M}}^{(x)}\underline{X}^*\ \underline{Q}^* = \underline{Q}^{(0)} + \sum_{j=1}^{s} \underline{Q}^{(j)} X_j^* = \underline{\underline{N}}^{(0)}\underline{\tilde{F}}^* + \underline{\underline{N}}^{(x)}\underline{X}^* \right\}$$

↳ Vettore azioni interne

↳ Dipende linearmente da $\underline{\tilde{F}}$

Se iperstatico per aver equilibrio serve aggiungere $\underline{X}^*$

coefficienti sistema per sistema

→ Funzione lineare dei carichi e coordinate iperstatiche

uno famiglia di congruenti, l'altra famiglia di equilibrati

1. $\hat{C}$ non dipende da C^*, sono stati del sistema che possiamo definire, inoltre sono diverse dalle soluzione del problema elastico

11:45

Lavoro virtuale esterno

2. $L_{ext} = \underline{\tilde{F}}^{*T} \hat{\underline{U}}$ → Risultanti applicate ai baricentri, per i corrispondenti spostamenti.

Risultanti ai baricentri

→ virtuale non perché si muove per le forze applicate, ma per gli spostamenti che testiamo, non c'è rapporto perciò non sono figlio dell'altro

→ generica famiglia
↳ definiti come ci pare
→ spostamenti test

3. $L_{int} = \underline{Q}^{*T} \hat{q}$

Legame Legame → Il legame non è tra le forze e gli spostamenti è tra le forze e forze e spostamenti e spostamenti.

Assioma → Non c'è metodo per dimostrare, solo in retrosi.

Principio dei Lavori Virtuali

$$L_{ext} = \tilde{F}^{*T} \hat{\underline{U}} = \underline{Q}^{*T} \hat{q} = L_{int} \text{ è vera } \forall \hat{C}, C^*$$

↳ Questo considera corpi non rigidi

Conseguenze del PLV

11:55

Metodo Degli Spostamenti

se $L_{ext} = \underline{\tilde{F}}^T \hat{\underline{U}} = \underline{Q}^T \hat{q} = L_{INT}$

è vera $\forall \{\hat{\underline{U}}, \hat{q}\} \in \hat{C} \Longleftrightarrow \underbrace{\{\underline{\tilde{F}}, \underline{Q}\}}_{\text{equilibrato}} \in C^*$

F e Q sono staticamente ammissibili

Noto Non noto

Metodo delle Forze

se L_{ext} $\underline{\tilde{F}}^{*T}\, \underline{\tilde{U}} = \underline{Q}^{*T}\, q = L_{INT}$

è vero $\forall \{ \underline{\tilde{F}}^{*}, \underline{Q}^{*} \} \in C^{*} \iff \underbrace{\{ \underline{\tilde{U}}, q \}}_{\text{congruente}} \in \hat{C}$