LEZIONE 02 BIS

Δv e $\Delta\varphi$ misurano la deformazione

↳ Deformazioni "generalizzate"

→ Termine usato quando prendiamo una definizione leggermente impropria rispetto alla definizione nel modello elastico.

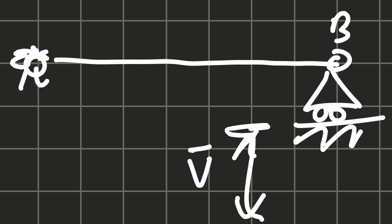
è valida

$$\underline{s}(\underline{x}) = A_i(\underline{x})\,\underline{U}_i \quad \forall \underline{x} \in \Omega_i$$

Non avevo visto che aveva tolto il pedice p

→ Questo sarebbe infinito e diverso per ogni punto,

→ ma avendolo reso algebraicamente lineare, è dipendente solo dalle variabili in $\underline{U}_i$ perciò lo abbiamo discretizzato da ∞ $\underline{x}$ a 3 variabili che possiamo imporre



se il vincolo non cede

$V_B = 0$

↳ Spostamento

se cede di $\bar{v}$ allora:

$V_B = \bar{v}$

m_v equazioni lineari omogenee

$$\sum_{j=1}^{3n_c} z_{ij}\, \tilde{U}_j = 0 \qquad i = 1, \dots, m_v$$

$3n_c \rightarrow$ Tutte le componenti di $\tilde{U}$

Generico coefficiente di composizione

Elemento di $\tilde{U}$

Componenti di spostamento generalizzato privo di vincoli

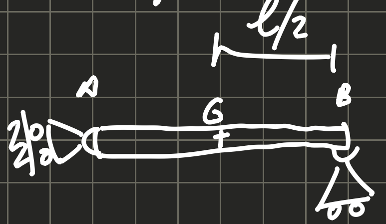
Ci sono m_v equazioni di vincolo che legano le componenti di $\tilde{U}$, che saranno 0, non 3 componenti di $\tilde{U}$ solo le equazioni di vincolo

Generica formula dell'equazione di vincolo

Nome z_{ij} è preso a caso

Ogni vincolo avrà una forma diversa di questa equazione per spiegare come opera

Esempio

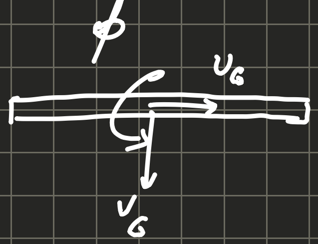


$u_A = 0$

$v_B = 0$

$u_G = u_A = 0$

$v_G = v_B - \phi\, l/2 = 0$



$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} u_G \\ v_G \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{U}_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{U}_3 \end{pmatrix}$$

Le entrate di questa matrice sono i componenti di z_{ij}

$z_{11} = 1$ etc...

↳ Il numero di colonne è uguale a m_v

2 equazioni di vincolo sono uguali a 0, cioè

$u_A = u_C = 0$ e $v_C = v_B - \phi\, l/2 = 0$

$$\sum_{1}^{3n_c} z_{ij}\, \tilde{U} = 0$$

È il prodotto delle due matrici.

Cambiamo sistema per sistema, sono i coefficienti che moltiplicano le coordinate lagrangiane del sistema privo di vincoli quando andiamo a porre i vincoli

↳ In forma matriciale è:

$$\underline{\underline{Z}}\ \underline{\tilde{U}} = \underline{0} \rightarrow m_v \times 1 \text{ equazioni omogenee}$$

Raccolta dei z_{ij}

$m_v \times 3n_c$

$3n_c \times 1$

Ipotesi: Tutte le equazioni di vincolo sono linearmente indipendenti, non ci sono vincoli esoterici.

$\text{Rango}(\underline{\underline{Z}}) = m_v$

↳ 3 casi di soluzioni

1) $m_v > 3n_c$

Cinematicamente Sovradeterminato

L'unica soluzione è che $\underline{\tilde{U}} = \underline{0}$, cioè $\underline{0}$ è l'unica

$\nexists \hat{C}$ soluzione

② $m_v = 3n_c$

Cinematicamente Determinato, l'unica soluzione possibile è $\underline{\hat{U}} = \underline{0}$, cioè C_0

$\nexists \hat{C}$

Sono diversi per il numero di soluzioni nel caso in cui ceda un vincolo.

Nel caso 1 e 2, se consideriamo corpi rigidi, non riusciremo mai a calcolare gli spostamenti.

③ → Caso che ci interessa

$m_v < 3n_c$

Ammette ∞^N soluzioni con $N = 3n_c - m_v$

È noto N° gdl del sistema

Troviamo che la dimensione del vettore di coordinate lagrangiane che possiamo usare per descrivere il sistema: $\underline{U}_{N \times 1}$

→ Numero N di spostamenti e rotazioni dei corpi rigidi

Abbiamo $\tilde{U} = \begin{pmatrix} \tilde{U}_{A\, m_v \times 1} \\ \tilde{U}_{B\, 3n_c - m_v \times 1} \end{pmatrix}$

$\underset{N}{\sim}$

Possiamo riarrangiare $\underline{\underline{Z}}$ per esser:

$$\underline{\underline{Z}}\,\underline{\tilde{U}} = \underline{0} \xrightarrow[\text{partizionata}]{\text{Forma}} \left(\underset{m_v \times m_v}{\underline{\underline{Z}}_A}, \underline{\underline{Z}}_{B_{m_v;N}} \right) \begin{pmatrix} \underline{\tilde{U}}_A \\ \underline{\tilde{U}}_B \end{pmatrix} = \underline{0}$$

Abbiamo fatto la partizione del sistema, isolando $\tilde{U}_A$ che sono le coordinate incognite e $\tilde{U}_B$ che saranno le lagrangiane che danno libertà al nostro sistema e ci permette di definirlo.

$\underline{\underline{Z}}_A$ ora è una matrice quadrata e quindi

$\text{rango}(\underline{\underline{Z}}_A) = \text{rango}(\underline{\underline{Z}}) = m_v$

In $\underline{\underline{Z}}$ ci sono meno righe che colonne, quindi perchè ogni equazione sia determinata una parte di $\tilde{U}$ sarà determinata arbitrariamente, questa parte è quella che definisce il nostro sistema.

$\Rightarrow \exists\, \underline{\underline{Z}}_A^{-1} \Rightarrow$ possiamo definire $\tilde{U}_A$ in funzione di $\tilde{U}_B$, e i coefficienti che non si determinano direttamente in $\underline{\underline{Z}}$ cioè Z_B, e finalmente i valori che rappresentano i vincoli in $\underline{\underline{Z}}_A$

$$\tilde{\underline{U}}_A = -\underline{\underline{Z}}_A^{-1}\,\underline{\underline{Z}}_B\,\tilde{\underline{U}}_B$$

$\Rightarrow$ Posso arbitrariamente fissare N valori in $\tilde{U}_B$, e le altre m_v in $\tilde{U}_A$ conseguono, cioè la geometria del sistema dipende dalla geometria dei punti arbitrari in $\tilde{\underline{U}}_B$

Con $\tilde{U}_B$ arbitrariamente fissato, $\tilde{U}_A$ consegue dalle equazioni di vincolo imposte in $\underline{\underline{Z}}_A$ e $\underline{\underline{Z}}_B$

$\tilde{\underline{U}}_B$ sono presi arbitrariamente dal vettore $\tilde{\underline{U}}$, i valori non sono arbitrari, cioè prendiamo N valori da $\tilde{U}$ e li fissiamo per poter risolvere le equazioni di vincolo

$\tilde{\underline{U}}_B$ è preso arbitrariamente, e $\tilde{U}_A$ consegue per effetto dei vincoli nel sistema.

$\tilde{U}_A$ è effetto delle equazioni cinematiche, che esprimono gli effetti dei vincoli nel sistema.

Ci sono ∞^N soluzioni per corrispondono agli infiniti N valori che posso dare alle coordinate lagrangiane in B.

Il sistema ha dei gradi di libertà che dobbiamo definire per determinare il resto del sistema, come a MAAM definiamo le variabili dei gradi di libertà e il resto del sistema consegue.

→ Fissando questi g.d.l in $\tilde{U}_B$, per come abbiamo definito il nostro sistema il resto dei valori saranno determinati.

Nell'esempio prima abbiamo determinato

$S = A_i U_i$ → $\tilde{U}_B$ → Da qui possiamo poi determinare

tutto il sistema. Invece di usare infinite variabili per ogni punto abbiamo fissato 3 e da lì possiamo determinare tutto il sistema.

Se non ci fossero vincoli potremmo fissare tutto $\tilde{U}$, ma dato che ci sono ne possiamo fissare solo $3n_c - m_v$

La esistenza delle soluzioni è determinato dal fatto che abbiamo preso l'ipotesi di avere m_v equazioni linearmente indipendenti.

$\tilde{U}_B$ è così arbitrario che gli diamo il nome $\underline{U}_{N\times 1}$

$$\tilde{U}_A = -\underline{\underline{Z}}_A^{-1} \, \underline{\underline{Z}}_B \, \underline{U}$$

$$\tilde{\underline{U}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\underline{\underline{Z}}_A \underline{\underline{Z}}_B & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{I}} \end{pmatrix}} \underline{U} = \underline{\underline{T}}_{3n_c \times N} \, \underline{U}_{N\times 1}$$

$$-\underline{\underline{Z}}_A \underline{\underline{Z}}_B \underline{U} + \underbrace{\underline{U}\,\underline{\underline{I}}}_{= \underline{U} = \underline{U}_B}$$

$$\tilde{\underline{U}} - \underline{U}_B = \tilde{\underline{U}}_A = -\underline{\underline{Z}}_A \underline{\underline{Z}}_B \underline{U}$$

In sistemi dove $n_v < 3n_c$ possiamo identificare un numero minimo di coordinate lagrangiane, che descrivono interamente tutte le roto-traslazioni di tutti i corpi, facciamo questo studiando il sistema di vincoli e descrivendo il sistema lineare. Per ogni punto possiamo scrivere $\underline{S}$ in base ad $\underline{U}$

⟨ !, Esempio alla fine del documento iniziale ⟩