Lezione 19 - Fourier and Separazioni di Variabili

Esistono diversi strumenti per risolvere i PDE, noi ne guardiamo due:

- Fourier $\rightarrow$ per soluzione periodiche, e utiler per imporre condizioni di bordo perché per $\sin$ e $\cos$ sappiamo dove stanno a 0.

Serie di Fourier

Guardiamo Fourier in 1 dimensione. In una dimensione trasforma la funzione in valori reali.

Prendiamo per ipotesi che possiamo scrivere funzioni periodiche di periodo $2T$ come la serie trigonometrica:

$$u(x) = \underbrace{U}_{\frac{a_0}{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(k\omega x) + b_k \omega \sin(k\omega x)\}$$

Dove $U, a_k, b_k \in \mathbb{R}$

Prendiamo anche per ipotesi che la serie di Fourier converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

Definiamo le relazioni di ortogonalità:

1. $\displaystyle\int_{-T}^{T} \cos(k\omega x) \cdot \cos(m\omega x)\, dx = \int_{-T}^{T} \sin(k\omega x) \cdot \sin(m\omega x)\, dx = 0 \rightarrow \text{dove } k \neq m$
2. $\displaystyle\int_{-T}^{T} \cos(k\omega x) \cdot \sin(m\omega x)\, dx = 0$
3. $\displaystyle\int_{-T}^{T} \cos^2(k\omega x)\, dx = \int_{-T}^{T} \sin^2(k\omega x)\, dx = T$

Come ricaviamo i calori per a_k, b_k, U? Usiamo le relazioni.

Moltiplicando $u(x)$ per $\cos(n\omega x)$ e integrando, utilizzando tutte e tre le relazioni ricaviamo che:

$$\int_{-T}^{T} u(x) \cos(n\omega x)\, dx = Ta_n \rightarrow a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} u(x) \cos(n\omega x)\, dx$$

Se $n = 0$:

$$\int_{-T}^{T} u(x)\, dx = 2UT \rightarrow U = \frac{a_0}{2} \rightarrow a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} u(x)\, dx$$

Moltiplicando per $\sin(n\omega x)$ invece, ricaviamo:

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} u(x) \sin(n\omega x)\, dx$$

Osservazioni

Dispari

Se la funzione è dispari, cioè $u(x) = -u(-x)$, allora $a_k = 0$ e abbiamo che:

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T}^{T} u(x) \sin(k\omega x)\, dx$$

Allora abbiamo che la funzione è:

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega x)$$

Pari

Se la funzione è pari, cioè $u(x) = u(-x)$:

$b_k = 0$ per $k \geq 1$ e:

$$a_k = \int_{-T}^{T} u(x) \cos(k\omega x)\, dx$$

La funzione allora sarà:

$$u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega x)$$

Serie di Fourier in $\mathbb{C}$

Per lavorare nel campo complesso dobbiamo ricordarci la formula di Eulero:

$$e^{\pm ik\omega x} = \cos(k\omega x) \pm i \sin(k\omega x)$$

Possiamo allora scrivere la serie di Fourier come:

$$u(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x}$$

Dove:

$$c_k = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(x) e^{-ik\omega x}\, dx$$

Espandendo dovremmo trovare i diversi valori:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}; c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k); c_{-k} = \underbrace{\overline{c_k}}_{\substack{\text{Complesso} \\ \text{coniugato}}}$$

Espandiamo per avere una forma più leggibile:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

L'inverso di questa funzione può esser scritta in due modi:

$$\begin{gathered}\rightarrow e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) \\ e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)\end{gathered}$$

Facendo la somma e differenza:

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos(x) \rightarrow \cos(x) = \frac{1}{2}[e^{ix} + e^{-ix}]$$

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2\sin(x) \rightarrow \sin(x) = \frac{1}{2}[e^{ix} - e^{-ix}]$$

Utilizzando la formula di Eulero e le identità appena trovate, possiamo scrivere la serie di Fourier:

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2}(e^{ik\omega x} + e^{-ik\omega x}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2i}(e^{ik\omega x} - e^{-ik\omega x})$$

Spostando i valori e moltiplicando e dividendo per i:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{ik\omega x}\left[\frac{a_k}{2} - \frac{ib_k}{2}\right] + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-ik\omega x}\left[\frac{a_k}{2} + \frac{ib_k}{2}\right]$$

Infine:

$$\underbrace{\frac{a_0}{2}}_{c_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{e^{ik\omega x}}{2}[a_k - ib_k]}_{c_k e^{ik\omega x}} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{e^{-ik\omega x}}{2}[a_k + ib_k]}_{\bar{c}_k e^{-ik\omega x}}$$

Siamo riusciti a riesprimere la serie in un'altro modo e siamo riusciti a ricavare i valori nella forma che avevamo detto che li avremmo trovati.

Troncamento della Serie

Pensando sempre ai computer, come abbiamo detto molte volte, quando c'è un ∞ dobbiamo fare un troncamento. Vogliamo che questo troncamento per $n \to \infty$ che converga come fa la funzione.

Prendiamo la troncata n-esima:

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}\{a_k\cos(k\omega x) + b_k\sin(k\omega x)\} \overset{?}{\sim} u(x)$$

Questo troncamento per lo scopo di trovare una funzione è simile a quello che abbiamo fatto per interpolazione, ma in questo caso $u(x)$ è di tipo trigonometrico.

Vogliamo trovare se questo troncamento converge e a cosa converge.
Idealmente per $N \to \infty$ converge a $u(x)$.

Proprietà della Serie di Fourier troncata

Teorema: Convergenza in media quadratica integrale

Sia u una funzione a quadrato integrabile su $(-T, T)$. Allora:

$$\lim_{N \to \infty} \int_{-T}^{T} [S_N(x) - u(x)]^2 \, dx = 0$$

L'errore quadratico integrato va a 0, cioè come converge.
Inoltre vale l'identità di Parseval:

$$\frac{1}{T} \int_{-T}^{T} u^2(x) \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

Che indica a dove converge.
$(a_k^2 + b_k^2)$ non può fare altro che andare a 0, se no esploderebbe.

Se una funzione è quadrato integrabile l'integrale del suo quadrato è finito.

Corollario: Teorema di Riemann-Lebesgue

$$\lim_{k \to \infty} a_k = \lim_{b \to \infty} b_k = 0$$

Convergenza Puntuale

Diciamo che u soddisfa la condizione di Dirichlet in $[-T, T]$ se u è continua in $[-T, T]$ tranne che al più in un numero finito di punti di discontinuità di prima specie, e se l'intervallo $[-T, T]$ può esser suddiviso in un numero finito di sotto-intervalli in ciascuno di quali è monotono.

Se u soddisfa la condizione di Dirichlet in $[-T, T]$ allora S_n converge $\forall$ punto in $[-T, T]$ con:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x) = \begin{cases} \frac{u(x^+)+u(x^-)}{2} \to x \in (-T, T) \\ \frac{u(T^-)+u(-T^+)}{2} \to x = \pm T \end{cases}$$

Separazione di Variabili in Coordinate Cartesiane

Definiamo un problema:

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = 0 \to (x, y) \in \Omega \\ u(x, 0) = g_1(x) \to x \in (0, L) : \Gamma_1 \\ u(x, H) = 0 \to x \in (0, L) : \Gamma_2 \\ u(0, y) = u(L, y) \to y \in (0, H) : \Gamma_3 \text{ e } \Gamma_4 \end{cases}$$

Definiamo $U : \Omega \to \mathbb{R}$ come una funzione a variabili separabili, tale che:

$$u \simeq U(x, y) = X(x)Y(y)$$

Dove la funzione su x è $X : (0, L) \to \mathbb{R}$ e su y è $Y : (0, H) \to \mathbb{R}$.

Imponiamo le 5 condizioni su U per ricavare le forme di $X(x)$ e di $Y(y)$.

Passo 1

Imponiamo la prima condizione:

$$
\begin{aligned}
& -\Delta U = 0 \\
\implies & -\Delta U = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \\
& \to \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = X''(x)Y(y) \\
& \to \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = X(x)Y''(y) \\
\implies & \Delta U = X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0
\end{aligned}
$$

Possiamo riscrivere questo come:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \to x \in (0, L) \text{ e } y \in (0, H)$$

Tale che sia vera $\forall x, y$ serve che:

$$
\begin{aligned}
& \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = k \\
\implies & \begin{cases} X''(x) - kX(x) = 0 \\ Y''(y) + kY(y) = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Abbiamo scritto un problema di x e y, e siamo riusciti a riscriverlo come un problema in x e un problema in y.

Passo 2

Imponiamo Γ_3 e Γ_4.

$$U(0, y) = U(L, y) = 0 \to y \in (0, H)$$

Mettendo questi valori abbiamo:

$$
\begin{aligned}
& X(0)Y(y) = X(L)Y(y) = 0 \to \forall y \in (0, H) \\
\implies & X(0) = X(L) = 0
\end{aligned}
$$

Il nostro problema in x allora è:

$$\begin{cases} X''(x) - kX(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases}$$

Caso 1 $\to k = \lambda^2$

Come abbiamo visto nella esercitazione in questo caso la soluzione prende forma:

$$X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x} \to A, B \in \mathbb{R}$$

Abbiamo che:

$$\begin{cases} X(0) = A + B = 0 \\ X(L) = Ae^{\lambda L} + Be^{-\lambda L} = 0 \end{cases} \implies A = B = 0$$

Caso 2 $\rightarrow k = 0$

Le soluzione prende forma

$$X(x) = A + Bx \rightarrow A, B \in \mathbb{R}$$

E la soluzione sarà:

$$\begin{cases} X(0) = A = 0 \\ X(L) = BL = 0 \end{cases} \implies A = B = 0$$

Caso 3 $\rightarrow k = -\lambda^2$

La soluzione prende forma:

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) \rightarrow A, B \in \mathbb{R}$$

In questo caso la soluzione è:

$$\begin{cases} X(0) = A = 0 \\ X(L) = B\sin(\lambda L) \rightarrow \begin{cases} \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Non interessante} \\ \begin{cases} A = 0 \\ \lambda L = n\pi \rightarrow n = 1, \dots \end{cases} \implies \lambda = \frac{n\pi}{L} \end{cases} \end{cases}$$

Dal fatto che λ varia con n, ci sono ∞ soluzioni, di cui useremo altre per ridurne il numero ad una sola.

Per ora, le n soluzione al problema in x sono:

$$X_n(x) = B_n \sin(\lambda_n x)$$

X,B e λ dipendono tutti da n.

Possiamo riscrivere come:

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right)$$

Passo 3

Riportiamo la definizione di k che abbiamo trovato nell'ultimo passo:

$$k = k_n = -\lambda_n^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

La inseriamo nel problema di y:

$$Y''(y) - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Y(y) = 0 \rightarrow y \in (0, H), n = 1, \dots$$

Possiamo scrivere Y come:

$$Y(y) = D_{1,n} e^{(n\pi/L)y} + D_{2,n} e^{-(n\pi/L)y}$$

Abbiamo gli insiemi degli infiniti valori dei coefficienti $D_{1,n}$ e $D_{2,n}$.

Abbiamo allora trovato definito le infinite $X_n(x)$ e $Y_n(y)$.

Definiamo le soluzioni fondamentali come:

$$U_n(x,y) = X_n(x) \cdot Y_n(y)$$

Questo sono le infinite funzioni separabili U che aderiscono alle condizioni di differenziabilità e della condizione di Γ_3 e Γ_4.

La formula separabile è la somma di tutte queste soluzioni fondamentali:

$$U(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y)$$

Imponiamo ad ogni soluzione fondamentale la condizione di Γ_2:

$$\begin{gathered} U(x,H) = 0 \to x \in (0,L) \\ U_n(x,H) = X_n(x) Y_n(H) = 0 \to x \in (0,L) \\ \implies Y_n(H) = 0 \end{gathered}$$

Usiamo questo per eliminare uno di D_1 o D_2.

Riscriviamo questa equazione come:

$$Y_n(H) = D_{1,n} e^{(n\pi/L)H} + D_{2,n} e^{-(n\pi/L)H} = 0 \to n = 1, \dots$$

Isolando $D_{2,n}$ abbiamo:

$$D_{2,n} = \frac{D_{1,n} e^{(n\pi/L)H}}{e^{-(n\pi/L)H}} = -D_{1,n} e^{2(n\pi/L)H}$$

Avendo isolato $D_{2,n}$, possiamo scrivere la funzione separata in y come:

$$Y_n(y) = D_{1,n} [e^{(n\pi/L)y} - e^{2(n\pi/L)H} \cdot e^{-(n\pi/L)y}]$$

Sappiamo che:

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -\sinh(-z) = -\frac{e^{-z} - e^z}{2}$$

Vogliamo riscrivere la funzione in y nella stessa forma.
Iniziamo prendendo $Q = \frac{n\pi}{L}$, e riscrivendo la parte della funzione di y nelle parentesi quadre come:

$$\begin{aligned} & [e^{Qy} - e^{2QH} \cdot e^{-Qy}] \frac{e^{-QH}}{e^{-QH}} \\ &= \frac{e^{Q(y-H)} - e^{Q(H-y)}}{2e^{-QH}} \cdot 2 \\ &= 2 \cdot \frac{e^{Q(y-H)} - e^{-Q(y-H)}}{2e^{-QH}} \\ &= -2 \frac{e^{Q(H-y)} + e^{-Q(H-y)}}{2e^{-QH}} = -2 \cdot \frac{\sinh\left[\frac{n\pi}{L}(H-y)\right]}{e^{-QH}} \end{aligned}$$

$$\implies Y_n(y) = \underbrace{D_{1,n} \cdot -2 \cdot e^{QH}}_{D^*_{1,n}} \cdot \sinh\left[\frac{n\pi}{L}(H-y)\right]$$

La soluzione fondamentale allora è:

$$\begin{aligned} U_n(x,y) &= X_n(x)Y_n(y) \\ &= B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) D^*_{1,n} \sinh\left[\frac{n\pi}{L}(H-y)\right] \\ &= C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sinh\left[\frac{n\pi}{L}(H-y)\right] \end{aligned}$$

Questa soluzione soddisfa la differenziazione e le condizioni di bordo di $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$.

Passo 4

Imponiamo la condizione a Γ_1 per definire definitivamente la funzione si soluzione al problema.

La condizione di Γ_1 impone:

$$U(x,0) = g_1(x) \to x \in (0,L)$$

Possiamo scrivere allora che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right) = g_1(x)$$

Il $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ nella funzione è simile al $\sin(n\omega x)$ che è nella serie di Fourier, questo è un indizio che possiamo usare Fourier.

Se $g_1(x)$ è quadrato sommabile (che avevamo preso per ipotesi) si può espandere come serie di Fourier tale che:

$$g_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Consegue allora che:

$$C_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right) = a_n$$

$$C_n = \frac{a_n}{\sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)}$$

La funzione soluzione al problema differenziale allora è:

$$U(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{L}(H-y)\right)$$