Lezione 14 -

Stiamo cercando $y \in I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Che risolve il problema
$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in I = [0,T] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Ipotesi che significano la buona posizione:

- $\exists!$ di soluzione
- dipendenza continua dai dati

Continuità + Lipschitzianità $\Rightarrow \exists!$

$$f \in C^1 \quad < \quad L$$

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2| \qquad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \quad \forall t \in I$$

$$L = \max_{\substack{y \in \mathbb{R} \\ t \in I}} \left| \frac{\partial}{\partial y} f(t, y(t)) \right|$$

<u>Dipendenza continua dai dati</u> $\to$ Stabilità a perturbazioni.

Ha scritto z

$? \; z : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Perturbazione $\to \delta : I \to \mathbb{R}$

$\delta_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) + \delta(t) & t \in I \\ z(0) = y_0 + \delta_0 \end{cases}$$

Il problema di Cauchy è stabile (secondo Lyapunov) su intervallo I, se $\forall$ perturbazione $(\delta_0, \delta(t))$ con $|\delta_0| < \varepsilon$ e $|\delta(t)| < \varepsilon$, $\forall t \in I$, con $\varepsilon > 0$, tale che

per piccole perturbazioni

$\exists!\, z(t)$ soluzione del problema perturbato, allora $\exists C > 0$ tale che $|y(t) - z(t)| = C\varepsilon$, $\forall t \in I$,

Parole povere: piccole perturbazioni sui dati significa perturbazione ai dati.

Osservazione

Assintotica stabile se per $\lim_{t \to \infty} |\delta(t)| = 0$ allora

$$\lim_{t \to \infty} |y(t) - z(t)| = 0$$

Metodi Analitici

Equazioni differenziali Autonome

↳ Equazioni che non dipendono esplicitamente da t variabile indipendente

$$(*) \quad y'(t) = f(y(t))$$

↳ È banale ma rende la soluzione più snella.

$f \in C^1(\bar{I})$

È utile per modelli biologici e ambientali

Esempio: modello logistico → modello di crescita di popolazione

$$y' = r\, y(t) \left[1 - \frac{y(t)}{M}\right]$$

tasso di crescita

Capacità portante di ambiente

Proprietà 1

Confronto

$$y' = 3y(t)$$

$\underbrace{}_{f(y(t))}$

Autonomo

↳ C'è legame diretto tra stato e velocità

Proprietà

$\bar{t}$ $\quad y(\bar{t}) = 10$

$y'(\bar{t}) = 30$

$$y'(t) = 3ty(t)$$

Non Autonomo

↳ Non solo dipende dallo stato ma anche dall'istante in cui c'è quello stato.

$\bar{t}: \; y(\bar{t}) = 10$

? $\; y'(\bar{t}) = \dots$

↳ Non ricavabile perché dobbiamo avere anche $\bar{t}$

Proprietà 2 → Invarianza rispetto ad una traslazione di tempo

se $\varphi = \varphi(t)$ è soluzione di (A), allora lo è anche la funzione $\psi(t) = \varphi(t - \tau)$ con $\tau \in \mathbb{R}$

↳ Se siamo capaci risolvere in un intervallo opportuno possiamo shiftare con τ per essere nell'intervallo di interesse.

$$\psi'(t) = \varphi'(t-\tau) = f(\varphi(t-\tau)) = f(\psi(t))$$

$$\psi'(t) = f(\psi(t))$$

Non è vero per ogni ODE perché:

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

$$\psi'(t) = \varphi'(t-\tau) = f(\underbrace{t-\tau}_{\text{non si può ingnorare qui}}, \varphi(t-\tau)) = f(t-\tau, \psi(t))$$

quindi non si può fare

Proprietà 3 punto di equilibrio o stato stazionario

sono i valori di y^* tale che $f(y^*) = 0$

$\Rightarrow$ $y' = 0$, il sistema in y^* non evolve.

$$y'(t) = f(y(t)) \qquad y(0) = y_0$$

se $f(y_0) = 0 \Rightarrow \underbrace{y(t)}_{\text{soluzione}} = y_0$

↳ se stato iniziale è di equilibrio

se $f(y_0) \neq 0 \Rightarrow y'(t) = \dfrac{dy}{dt} = f(y(t))$

$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\tau}{f(\tau(t))} = \int_{y_0}^{y} dt$$

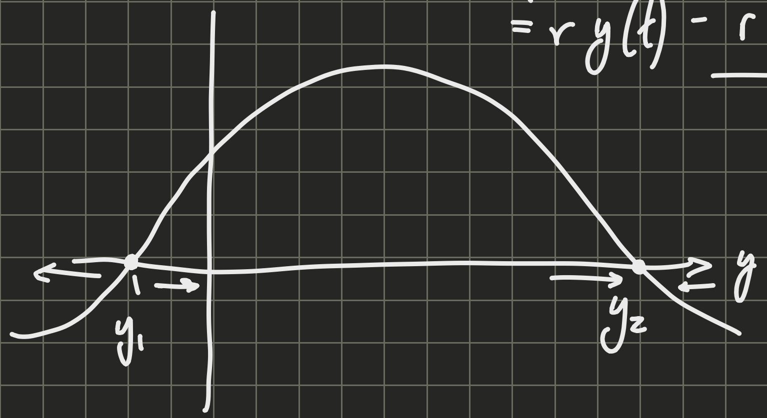
Proprietà 4 - Analisi di Stabilità

Diagramma di fase

$f(y) = 0 \longrightarrow$ punti di equilibrio y_1, y_2

Esempio $f(y(t)) = r\,y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{M}\right)$ $y(t) = M$

$= r\,y(t) - \frac{r\,[y(t)]^2}{M}$ $y(t) = 0$



$f'(y(t)) = \frac{r - 2r\,y(t)}{M}$

$f'(M) = -r < 0$ stabile

$f'(M) = r > 0$ instabile

Come determiniamo la stabilità

se $f'(y_i) < 0 \rightarrow$ stabile

se $f'(y_i) > 0 \rightarrow$ instabile

funzione + perturbazione

se lo spostamento ha una derivata negativa allora ci riporta indietro al punto di equilibrio.

y_1 è repulsore e y_2 è attrattore.

Definizione di Stabilità

se y^* punto equilibrio

1) stabile se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0$ tale che $|y_0 - y^*| < \delta_\varepsilon$;

la soluzione associata a y_0 $(y(t,y_0))$ $\exists \ \forall t \geq 0$ e

$$|y(t,y_0) - y^*| < \varepsilon \quad \forall t$$

↳ data una perturbazione piccola, la soluzione è lo stesso vicino

2) instabilità

3) Asintotica instabilità: se è stabile e aggiunta $\exists\, \delta_1 > 0$ tale che $|y_0 - y^*| < \delta_1$, ne segue

$$y(t,y_0) \to y^* \quad \text{per } t \to \infty$$

converge alla soluzione

Importano solo 1 o 2. il modo migliore è guardare ai grafici o alle derivate.

Trasformata di Laplace

↳ Il metodo analitico principe per risolvere ODE a coefficienti costanti.

Trasforma una ODE in problema algebrico

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{ODE}} \arrow[r, bend left, "\mathcal{L}"] & \boxed{\text{Algebrico}} \arrow[l, bend left, "\mathcal{L}^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{L}^{-1}$ ← Antitrasformata

<u>Definizione:</u> Data $f = f(t)$ con $t \geq 0$, la trasformata di Laplace di f è

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt \qquad s \in \mathbb{R}$$

Laplace ↑

$\int_0^\infty \Rightarrow$ perciò t può essere qualunque

La variabile indipendente è s non più t.

Vice versa, data $F = F(s)$, trovare $f = f(t)$ tale che $\mathcal{L}^{-1}[f(t)](s) = F(s)$ richiede il calcolo dell'antitrasformata:

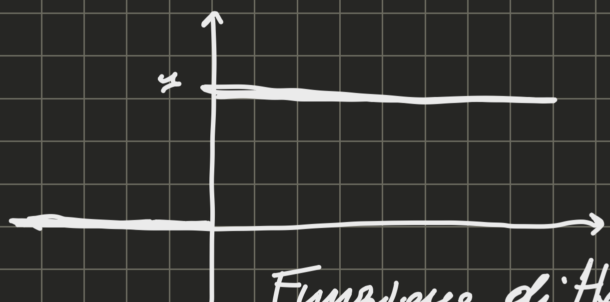
$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = f(t) \iff \mathcal{L}[f(t)](s) = F(s)$$

Ci sono tabelle per andare da f a F e da F a f

Prima dobbiamo calcolare la primitiva poi gestire il ∞.

<u>Esempi:</u>

1) $f(t) = 1$



Funzione di Heaviside

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty 1\, e^{-st}\, dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty =$$

Per gestire ∞ si fa il limite:

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-1}{s} e^{-st} \right]_0^b = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-1}{s} e^{-s\cdot b} + \frac{1}{s} e^{0} \right] = \frac{1}{s}$$

per $s>0$, se $s<0$, allora il termine alla sinistra diventa ∞.

2) $f(t) = e^{at}$

$$F(s) = \mathcal{L}[e^{at}](s) = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t} dt =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{(a-s)b} dt = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{e^{(a-s)t}}{(a-s)} \right]_0^b =$$

se $a-s<0$ $\quad = \frac{1}{s-a}$

termine associato a b sparisce

$s>a$

3) $f(t) = e^{t^2}$

$$F(s) = \mathcal{L}[e^{t}](s) = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{t^2} e^{-st} dt =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{t^2-st} dt$$

$$\int_0^b e^{t^2-st} dt \geq \int_{|s|}^b e^{t^2-st} dt \geq \int_{|s|}^b e^{0} dt = 1(b-|s|) \to \infty$$

$b > |s|$

$t \geq |s|$ perché parte da $|s|$ e va a b

$$t^2 \geq |s|\, t$$

$$t^2 - |s|t > 0$$

$$t^2 - st \geq t^2 - |s|t \geq 0$$

peggio per noi

$$\Rightarrow \nexists\, \mathcal{L}\left[e^{t^2}\right](s)$$

Proprietà della Trasformata di Laplace

Proprietà 1 → linearità

Trasformata di Laplace

siano $f(t)$ e $g(t)$ due funzioni che ammettono $\mathcal{L}$, ovvero esistono $F(s)$ e $G(s)$. Allora:

$$\mathcal{L}\left[f(t)+g(t)\right](s) = F(s) + G(s)$$

$$\mathcal{L}\left[c\, f(t)\right](s) = c\, F(s) \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

↳ Vale anche per $G(s)$ ovviamente.

$\forall s$ tale che $F(s)$ e $G(s)$ siano definite.

Inoltre si ha:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)+G(s)\right](t) = f(t) + g(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[c\, F(s)\right] = c\, f(t) \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

Esempio PS trasformata

$$f(t) = \sin(3t) + 2$$

$$F(s) = \mathcal{L}[\sin(3t+2] = \mathcal{L}[\sin(3t)](s) + \mathcal{L}[2](s)$$

$$= \frac{3}{s^2+9} + 2\mathcal{L}[1](s) = \frac{3}{s^2+9} + \frac{2}{s}$$

Questa la abbiamo appena vista

Da tabelle:

$$f(t) \rightarrow F(s)$$

$$\sin(\alpha t) \rightarrow \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$$

$$e^{at} - e^{bt} \quad \frac{a-b}{(s-a)(s-b)}$$

Per questo

Esempio PS antitrasformata

$$F(s) = \frac{3}{s^2+16} - \frac{7}{(s-5)(s-12)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{s^2+16} - \frac{7}{(s-12)(s-5)}$$

Abbiamo moltiplicato e diviso per 4 per avere il valore che ci permette di fare l'antitrasformata

$$f(t) = \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s^2+16}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{7}{(s-12)(s-5)}\right](t)$$

$$= \frac{3}{4}\sin(4t) - e^{12t} + e^{5t}$$