Lezione 13 - Fine Prima parte, inizio seconda
(Fine autovalori, inizio equazioni differenziali)

Nell'ultima lezione, abbiamo visto il metodo delle potenze per trovare λ_{max} e il metodo delle potenze inverso per trovare λ_{min}.

$$A: \{x, \lambda\} \rightarrow A^{-1}: \left\{x, \frac{1}{\lambda}\right\}$$

Gli autovalori si invertono, gli autovettori si preservano.

$$\left(\frac{1}{\lambda_{min}(A)}\right)^{-1} \rightarrow \lambda_{min}(A)$$

Ipotesi 1 per inverse: $\left|\frac{1}{\lambda_1}\right| < \left|\frac{1}{\lambda_2}\right| < \left|\frac{1}{\lambda_3}\right| \leq \dots \leq \left|\frac{1}{\lambda_{n-1}}\right| < \left|\frac{1}{\lambda_n}\right|$

Ipotesi 2 per inverse

Partendo da $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$; $y^{(0)} = \frac{x^{(0)}}{\|x^{(0)}\|}$

$k = 1, 2, \dots$

$$x^{(k)} = A^{-1} y^{(k-1)}$$

$\rightarrow Ax^{(k)} = y^{(k-1)}$ → Fattorizzazione LU (\ in matlab) per ogni iterazione.

1 volta e poi si fa avanti e indietro con vettori diversi.

$$y^{(k)} = \frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|} \simeq x_n$$

→ autovettore associato a λ_n → autovettore minimo

$$\lambda^{(k)} = \underbrace{\left(y^{(k)}\right)^H A^{-1} y^{(k)}}_{\text{Rayleigh}} \simeq \frac{1}{\lambda_n} \xrightarrow[\text{Possiamo scrivere in modo furbo}]{} \mu^{(k)} = \left(y^{(k)}\right)^H A y^{(k)} \simeq \lambda_n$$

Perché x_n è autovettore di A e A^{-1}, è lo stesso associato a λ_n, quindi togliendo l'inversione di A troviamo lo stesso λ_n.

2ª variazione del Metodo delle Potenze

↳ Troviamo λ di A più vicino ad un valore che fissiamo noi.

$\mu \in \mathbb{C}$? autovalore di A più vicino a μ

↓

Shift

λ_i, x_i: coppia di autovalore autovettore più vicina a μ.

Invece di usare A o A^{-1}, ma usiamo invece:

$$A_\mu = A - \mu I$$ → Da qui viene il significato shift

$$\underbrace{\lambda(A_\mu)}_{\text{Autovalori di } A_\mu} = \lambda(A) - \mu$$

$\lambda_1 - \mu$

$\lambda_2 - \mu$

⋮

$\lambda_i - \mu$ → Quello di modulo minimo

⋮

$\lambda_n - \mu$

$$\lambda_{MIN}(A_\mu) = \lambda_i - \mu$$

Quello di minimo (in distanza) è il λ_i che da il minimo di λ_{MIN}

λ_i è il più vicino a μ, quindi $\lambda_i - \mu$ sarà il più vicino a λ_{MIN}.

→ Lo troviamo con le potenze inverse, poi aggiungiamo il shift per trovare λ_i

$A: \{\lambda_i, x_i\}$ $\quad$ $A_\mu: \{\lambda_i - \mu, x_i\}$

$\hookrightarrow A_\mu^{-1}: \left\{ \frac{1}{\lambda_i - \mu}, x_i \right\}$

$\hookrightarrow$ Perché usiamo metodo delle potenze inverse

$$Ax = \lambda x$$

$$Ax - \mu I x = \lambda x - \mu x$$

$$(A - \mu I) x = (\lambda - \mu) x$$

Se λ_i è autovettore di A, con associato x, l'autovettore di A_μ è x_i.

Potenze inverse con Shift

$$x^{(0)} \in \mathbb{C}^n, \quad y^{(0)} = \frac{x^{(0)}}{\|x^{(0)}\|}$$

$k = 1, 2, \dots$

$$x^{(k)} = A_\mu^{-1} y^{(k-1)} \rightarrow A_\mu x^{(k)} = y^{(k-1)} \rightarrow \text{Fattorizzazione LU}$$

1 volta poi avanti e indietro ogni volta.

$$y^{(k)} = \frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|} \simeq x_i$$

$$\sigma^{(k)} = \left(y^{(k)}\right)^H A_\mu^{-1} y^{(k)} \simeq \frac{1}{\lambda_{MIN}(A_\mu)}$$

$\hookrightarrow$ Computazionalmente la cosa più furba è metter A

$$\sigma^{(k)} = \left[y^{(k)}\right]^H A \, y^{(k)} \simeq \lambda_i \rightarrow \text{Ce lo da direttamente.}$$

Possiamo farlo lo stesso perché x_i è sempre lo stesso per le 3 matrici.

Scelta delle Shift

$$\|\cdot\|_2 = \sqrt{\lambda_{MAX}(A^T A)}$$

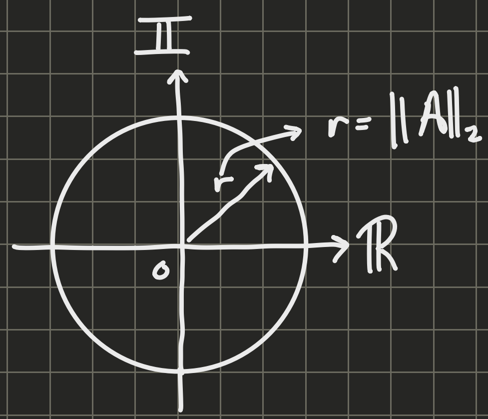
1) $\lambda v = Av$

$$|\lambda|\cdot\cancel{\|v\|} = \|\lambda v\| = \|Av\| \leq \|A\|_2 \cancel{\|v\|}$$

Per scelta di norme di matrice e vettore compatibili

$$\Downarrow$$

$$|\lambda| \leq \|A\|_2$$



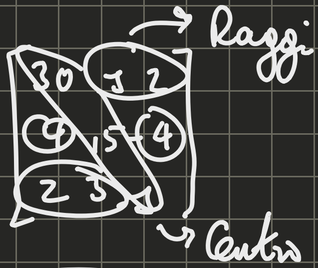
È utile solo se r è piccolo, è più facile identificare λ

Tutti gli autovalori sono dentro al cerchio, prendiamo μ lì dentro.

2) Cerchi di Gershgorin

cerchio riga $\quad C_i^r = \left\{ z \in \mathbb{C} \text{ tale che } |z - a_{ii}| \leq \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|}_{} \right\} \quad i = 1, \dots, n$

Cerchio riga ii di raggio



Cerchio colonna ii di raggio

$$C_i^c = \left\{ z \in \mathbb{C} \text{ tale che } \overbrace{|z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ji}|}^{} \right\} \quad i = 1, \dots, n$$

Cerchio i colonna

Proposizione: Gli autovalori di $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ appartengono alla regione del piano complesso identificata dalla relazione:

$$\left[\bigcup_{i=1}^{n} C_i^r \right] \bigcap \left[\bigcup_{i=1}^{n} C_i^c \right]$$

$\rightarrow$ Dentro ci dovrebbero esser tutti λ lambda

Unione $\quad$ Intersezione

dentro all'intersezione.

Inoltre, se esistono m cerchi riga (colonna) con,

$1 \leq m < n$, disgiunti dai rimanenti $n-m$ cerchi, allora la loro unione contiene esattamente m autovalori.

Vogliamo allora trovare aree poco affollate per aiutare il nostro algoritmo.
Trova cerchi di riga e colonna ii, il centro è lo stesso, cambia il raggio.
I cerchi possono esser vuoti, se sono in unione con altri cerchi. Se un cerchio è da solo deve contenere 1 autovalore.

→ Cambiando il segno della disuguaglianza, vediamo che è l'equazione della dominanza per righe e colonne.
→ Questa equazione copre sempre l'origine perché il raggio è strettamente maggiore della traslazione del centro, quindi una matrice a dominanza per colonne e righe non può mai avere autovalori nulli.

$\boxed{15:38}$ → Ricontrolla per chiarire confusione.

2^a parte del corso

→ Equazioni Differenziali Ordinarie
→ Equazioni Differenziali Parziali

Molta più roba analitica.

Roba più usata in realtà. Simulazioni usano più le PDE

Equazioni Differenziali Ordinarie (ODE/EDO)

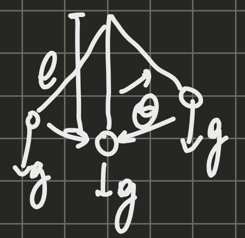
ODE → derivate ordinarie
PDE → derivate parziali.

Usi delle ODE:

ODE di ordine 2

(1) Legge di Newton $\quad m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = f(t)$

(1 bis) $f = f(x(t)) \qquad m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) \quad k>0$

(2) 

$$l\,\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \alpha\,\frac{d\theta(t)}{dt} + g\sin\theta(t) = 0$$

α: costante di smorzamento

Se vogliamo generalizzare una ODE:

Generica formula ODE

$$F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(p)}(t)) = 0 \qquad t\in I=[t_0, T]$$

t: Variabile Indipendente, di solito tempo o spazio

$y(t)$: Funzione che stiamo cercando

I: se tempo è ambientato in una finestra temporale.

Di solito la scriviamo in "forma normale" come:
→ ODE generica

$$y^{(p)}(t) = f(t, y(t), \dots, y^{(p-1)}(t)) \qquad t\in I$$

p: ordine dell'equazione differenziale = massimo ordine di derivata coinvolto

→ generica ODE di ordine p.

Noi ci limitiamo a $p=1$, cioè:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \qquad t \in I$$

Vogliamo approssimare $y(t)$

Perché ci sia una e una sola soluzione, dobbiamo dare un dato iniziale, la configurazione iniziale:

$$\boxed{\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}}$$

→ Problema di Cauchy

→ Configurazione iniziale

Sono noti: I, y_0, f

→ Traduce la legge con cui varia l'oggetto che stiamo andando a modellare.

Incognita: $y : I \to R$

→ Quello vogliamo trovare

$$f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Dove varia t

Prodotto cartesiano

Dove varia $y(t)$

Dove varia $y'(t)$

<u>Casi di</u> y:

Scalare → caso dove y prende un $t \in I$ e ne associamo scalare

Vettoriale $\vec{y}'(t) = \vec{f}(t, \vec{y}(t))$ → Simile a newton per sistemi.

Vettore delle derivate delle n funzioni incognite

$y_i : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, n$ → Vettore di funzioni incognite

$\vec{y}(t) = [y_1(t), \dots, y_n(t)]^T$ → n funzioni incognite

$$\vec{f}(t, \vec{y}(t)) = [f_1(t, \vec{y}(t)), f_2(t, \vec{y}(t)), \dots, f_n(t, \vec{y}(t))]$$

Vettore delle funzioni note

↳ Funzione di t e di potenzialmente tutte le funzioni incognite

$$f_i : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad i = 1, \dots, n$$

Perché $\vec{y}(t)$ è vettore delle n funzioni incognite.

$$\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$$

$$\left.\begin{aligned} y_1(t_0) &= y_{1,0} \\ y_2(t_0) &= y_{2,0} \\ &\vdots \\ y_n(t_0) &= y_{n,0} \end{aligned}\right\} \text{ n dati iniziali}$$

Se sappiamo gestire questo

Sappiamo definire questo.

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \qquad t \in I = [t_0, T]$$

usando delle equazioni ausiliare, per permetterci di scrivere questa ODE di ordine n, come un sistema di n ODE di ordine 1, che possiamo trattare come una ODE di ordine 1.

Inventiamo

$$y_1(t) = y(t)$$

$$y_2(t) = y'(t) = y_1'(t)$$

$$y_3(t) = y''(t) = y_2'(t)$$

$$\vdots$$

$$y_n(t) = y^{(n-1)}(t) = y_{n-1}'(t)$$

con le derivate prime di ogni incognita

Questo è un ODE di ordine 1. Definiamo in questo modo n ode, ad un ad una derivata della $y(t)$ iniziale

Ora scriviamo il sistema di n ODE di ordine 1:

Condizioni Iniziali per il sistema

$$y_1'(t) = y_2(t)$$

Fin ad arrivare a $y_n'(t) = y^{(n)}(t)$, $\quad y_1(t_0) = y_0$

$y_2'(t) = y_3(t)$ che è effettivamente $y_2(t_0) = y_{1,0}$
la funzione che
stiamo solvendo,
$\vdots$ ma abbiamo ricavato $\vdots$
$y_{n-1}'(t) = y_n(t)$ le ODE interne $y_{n-1}(t_0) = y_{n-2,0}$
per risolvere più velocemente

$y_n'(t) = f(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$ $y_n(t_0) = y_{n-1,0}$

Se l'ODE di ordine 1 ci serviva 1 condizione iniziale, qui ce ne servono n per una ODE di ordine n, che saranno:

$$y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_{1,0},\ \dots,\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1,0}$$

Se impariamo a risolvere le ODE di primo grado scalari riusciamo a risolvere le ODE di qualsiasi altro grado.

Analisi del Problema di Cauchy Scalare ($n = 1$)

Possiamo categorizzare il problema in base alla natura dif

problemi di Cauchy

→ lineare f è lineare rispetto a $t, y(t)$

e.g. $y'(t) = 3y(t) - 3\sqrt{t}$

→ Non lineare

$y'(t) = 3y(t) - 3t$

→ lineare

$y(0) = 1$ $t > 0$

→ non lineare e.g. $\begin{cases} y'(t) = \sqrt[3]{y(t)} & t > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

con solo
soluzione locale

Possiamo trovare soluzioni (forse) solo in una sezione dell'intervallo.

$$\begin{cases} y(t) = \tan(t) \\ 0 < t < \pi/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + [y(t)]^2 \quad t > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Osservazione: se f è continua rispetto alla prima variabile, possiamo risolvere integrando:

$$\int_{t_0}^{T} \frac{dy(\tau)}{d\tau}\, d\tau = \int_{t_0}^{T} f(\tau, y(\tau))\, d\tau$$

e se $y \in C^1(I)$, possiamo integrare, allora:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\, d\tau$$

Se sappiamo calcolare la primitiva di F, è facile risolvere, non è sempre possibile!

<u>Analisi del problema di Cauchy</u>

- Condizioni tale che $\exists!$ soluzione
- dipendenza continua dai dati
  - il concetto della stabilità è il più simile, a piccole perturbazioni su risultati sono hanno piccole perturbazioni sui dati.
    - $\|\delta x\|$ è roba simile.

Se troviamo tutte e due diciamo che il nostro problema di Cauchy è ben posto.

Risultato delle analisi: se f è continua rispetto ad entrambi gli argomenti, allora $\exists$ almeno una funzione

locale

$y \in C^1(\overline{I}_{t_0})$, soluzione del problema di Cauchy.

Intorno di t_0

Ci potrebbero esser più soluzioni → problema, ne vogliamo solo 1.

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{3}{2}[y(t)]^{1/3} & t > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzioni:

$y(t) = 0$

$y(t) = t^{3/}$

Lipschitzianità Uniforme → Lipschitz Continua

$f: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è Lipschitziana rispetto a y in I, uniformemente rispetto a t se $\exists$ costante $L > 0$ tale che

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2| \quad \forall t \in I$$

$$\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

Il rapporto incrementale è limitato, ma non ci dice niente al limite, quindi richiede meno della derivabilità.

Con la prima condizione implica la esistenza globale

$$\begin{cases} y'(t) = 3y(t) - 3t & t > 0 \\ y(0) = 1 & f(t, y(t)) \end{cases}$$

$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)| = |3y_1 - \cancel{3t} - 3y_2 + \cancel{3t}| = 3|y_1 - y_2|$$

$L>0 \Rightarrow$ è Lipschitziana.

Esempio lipschitz continua ma non C^1

$$f(t, y(t)) = |y(t)| \notin C^1(I)$$

$$||y_1| - |y_2|| \leq 1\,|y_1 - y_2|$$

<u>Esistenza e unicità globale</u> (Esistenza locale + Lipschitziana)

<u>Teorema</u> ($\exists!$ globale)

Se $f: I\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è:

i) continua rispetto ad entrambi gli argomenti
ii) Lipschitziana rispetto ad y, uniformemente rispetto a t

allora $\exists!\ y: I \to \mathbb{R}$ soluzione di $\begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)) : t\in I = [t_0, T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

e $y \in C^1(I)$