Lezione 19 -

Domani laboratorio insieme in L.13

PDEs
↳ Strumenti per soluzioni analitiche
- ↳ Fourier ⇝ per soluzioni periodiche.
  - ↳ utile per imporre CB perché sin e cos sappiamo dove stanno.
- ↳ Separazione delle Variabili.

Fourier

1 Dimensione → $\mathbb{R}$ → Ipotesi

Funzione periodica di periodo $2T$ che si può scrivere come: $\omega = \frac{\pi}{T}$
(nella serie trigonometrica)

$$u(x) = \underbrace{\frac{U}{m}}_{a_0/2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{ a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x \}$$

$U, a_k, b_k \in \mathbb{R}$ Ipotesi: L'espansione converge uniformemente in $\mathbb{R}$

Relazione di Ortogonalità

i) $\displaystyle\int_{-T}^{T} \cos(k\omega x)\cos(m\omega x)\,dx = \int_{-T}^{T} \sin k\omega x \sin m\omega x\,dx = 0$ $k \neq m$

ii) $\displaystyle\int_{-T}^{T} \cos k\omega x \sin m\omega x\,dx = 0$

iii) $\displaystyle\int_{-T}^{T} \cos^2 k\omega x\,dx = \int_{-T}^{T} \sin^2 k\omega x = T$

↳ moltiplicando per $\cos n\omega x$ e integriamo:

$$\cos n\omega x \rightarrow \underbrace{\int_{-T}^{T} u(x)\cos n\omega x\, dx = T a_n}_{\text{Mettendo tutte e tre le relazioni}} \longrightarrow \boxed{a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} u(x)\cos n\omega x\, dx}$$

$$\rightarrow \text{Se } n=0 \quad \int_{-T}^{T} u(x)\, dx = 2UT \rightarrow U = \frac{a_0}{2} \rightarrow a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} u(x)\, dx$$

$$\sin n\omega x \longrightarrow \boxed{b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} u(x)\sin n\omega x\, dx}$$

8:43

a_n media filtrata rispetto a coseno associato
b_n media filtrata rispetto a seno associato

<u>Osservazione</u>

1) se la funzione è dispari $u(x) = u(-x)$

$a_n = 0 \rightarrow$ quelli associati a coseno

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T}^{T} u(x)\sin k\omega x\, dx$$

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_n \sin k\omega x$$

2) se pari

$b_n = 0 \qquad k \geq 1$

$$a_k = \int_{-T}^{T} u(x) \cos k\omega x \, dx$$

$$u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega x$$

3) Rappresentazione di Fourier in $\mathbb{C}$

Formula di Eulero $e^{\pm ik\omega x} = \cos k\omega x \pm i \sin k\omega x$

$$u(x) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x}}$$

Modo più comune di dover vederlo.

$$c_k = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(x) e^{-ik\omega x} \, dx$$

Complesso coniugato

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad ; \quad c_k = \frac{1}{2}\left(a_k - i b_k\right) \; ; \; c_{-k} = \overline{c_k}$$

Come è ricavato:

$e^{ix} = \cos x + i \sin x \rightarrow e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x)$

$\hookrightarrow e^{-ix} = \cos x - i \sin(x)$

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x \rightarrow \cos x = \frac{1}{2}\left[e^{ix} + e^{-ix}\right]$$

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2\sin x \longrightarrow \sin x = \frac{1}{2}\left[e^{ix} - e^{-ix}\right]$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2}\left(e^{ik\omega x} + e^{-ik\omega x}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2i}\left(e^{ik\omega x} - e^{-ik\omega x}\right)$$

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} e^{ik\omega x}\underbrace{\left[\frac{a_k}{2}-\frac{ib_k}{2}\right]}_{\times \frac{i}{i}}+\sum_{k=1}^{\infty} e^{-ik\omega x}\underbrace{\left[\frac{a_k}{2}+\frac{ib_k}{2}\right]}_{\times \frac{i}{i}}$$

già fatto

$$\underbrace{\frac{a_0}{2}}_{c_0}+\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{e^{ik\omega x}}{2}\left[a_k-ib_k\right]}_{c_k}+\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{e^{-ik\omega x}}{2}\left[a_k+ib_k\right]}_{\bar{c}_k}$$

$\mathbb{R} \to$ serie $\quad \mathbb{C} \to$ esponenziali

In realtà la serie è un po' difficile da fare per l'∞, si fa una troncatura, e troviamo se per la troncatura che tende a ∞ converge:

Nella pratica si considera la troncata n-esima:

$$S_N(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{N}\left\{a_k\cos k\omega x+b_k\sin k\omega x\right\}\overset{?}{\simeq} u(x)$$

Converge? Converge a cosa?

Simile ad un' approssimazione di funzione, come interpolazione con $u(x)$ di tipo trigonometrico.

$$S_N(x)\xrightarrow[N\to\infty]{} u(x)$$

Lebesgue

detto anche o L^2

$\boxed{C1} \to$ Convergenza in media quadratica integrale

<u>Teorema</u>

$\int_{-T}^{T} u^2 < \infty$ è finito l'integrale.

Sia u una funzione a <u>quadrato integrabile</u> su $(-T,T)$. Allora:

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-T}^{T} \left[S_N(x) - u(x)\right]^2 dx = 0$$

L'errore quadratico integrato va a 0.

Inoltre va l'identità di Parseval:

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} u^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{1}^{\infty} \underbrace{(a_n^2 + b_n^2)}_{}$$

↳ A dove converge

non possono che andare a 0, se no esploderebbe.

↳ Come converge

Corollario (teorema di Riemann-Lebesgue)

↳ Giovedì vedremo gli integrali di Lebesgue.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

$\boxed{C2}$ → Convergenza Puntuale

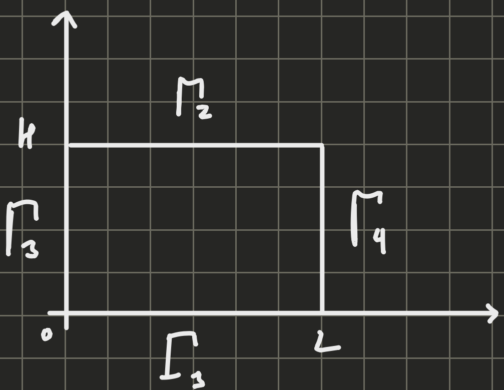
<u>Definizione</u>: Diciamo che u soddisfa la condizione di Dirichlet in $[-T,T]$ se u continua in $[-T,T]$ tranne che al più in un numero finito di punti di discontinuità di 1ª specie e se l'intervallo $[-T,T]$ può esser suddiviso in un numero finito di sottointervalli in ciascuno dei quali è monotona.

Se u soddisfa la condizione di Dirichlet in $[-T,T]$. Allora S_N converge $\forall$ punto in $[-T,T]$ con

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos k\omega x + b_k \sin k\omega x = \begin{cases} \dfrac{u(x^+)+u(x^-)}{2} & x\in(-T,T) \\[2mm] \dfrac{u(T^-)+u(-T^+)}{2} & x=\pm T\end{cases}$$

Separazione di Variabili in Coordinate cartesiane

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y)=0 & (x,y)\in\Omega \\ u(x,0)=g_1(x) & x\in(0,L) \quad \Gamma_1 \\ u(x,H)=0 & x\in(0,L) \quad \Gamma_2 \\ u(0,y)=u(L,y) & y\in(0,H) \quad \Gamma_3,\Gamma_4 \end{cases}$$



$U:\Omega\to\mathbb{R}$

$u \simeq U(x,y)=X(x)\,Y(y)$ $\qquad$ $X:(0,L)\to\mathbb{R}$, $\quad Y:(0,H)\to\mathbb{R}$

$\to$ Imponiamo le 5 condizioni su U

$\boxed{\text{Passo 1}}$

$-\Delta U=0$

$$-\Delta U = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=X''(x)Y(y)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=X(x)\,Y''(y)$$

$$X''(x)Y(y)+X(x)\,Y''(y)=0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{-Y''(y)}{Y(y)}= \qquad \underbrace{x\in(0,L) \text{ e } y\in(0,H)}$$

$= k$ Tale che sia vero $\forall x, y$

$$\Longrightarrow \begin{cases} X''(x) - k\,X(x) = 0 \\ Y''(x) + k\,Y(y) = 0 \end{cases}$$

Abbiamo scritto un problema di x e y in un problema di x e un problema di y.

$\boxed{\text{Passo 2}}$

Riscritto il problem in 2 problemi monodimensionali e imponiamo le condizioni di bordo.

Γ_3, Γ_4

$$U(0,y) = U(L,y) = 0 \qquad y \in (0,H)$$

$$X(0)\,Y(y) = X(L)\,Y(y) = 0 \quad \forall y \in (0,H)$$

$$\Longrightarrow X(0) = X(L) = 0$$

$$\begin{cases} X''(x) - k\,X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases}$$

<u>Caso 1</u> $\quad k = \lambda^2 \qquad \lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda \neq 0$

$$X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x} \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} X(0) = A + B = 0 \\ X(L) = Ae^{\lambda L} + Be^{-\lambda L} = 0 \end{cases} \Longrightarrow A = B = 0$$

$\Longrightarrow$ soluzione è identicamente nulla

Caso 2 $k=0$

$$X(x) = A + Bx \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} X(0) = A = 0 \\ X(L) = BL = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A = B = 0$$

Caso 3 $\to k = -\lambda^2$ con $\lambda \in \mathbb{R} \to \lambda \neq 0$

$$\begin{cases} X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) \to A, B \in \mathbb{R} \\ X(0) = A = 0 \\ X(L) = B\sin(\lambda L) \end{cases}$$

$\to \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \to$ Non interessante

$\to \begin{cases} A = 0 \\ \lambda L = n\pi \to n = 1, \dots, \end{cases}$

$\hookrightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L}$

$\hookrightarrow$ ci sono ∞ soluzioni.

$$X_n(x) = B_n \sin(\lambda_n x)$$

dipendono tutti dall'n scelto.

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right)$$

$\hookrightarrow$ si trova anche un corrispondente per y

$\boxed{\text{Passo 3}} \to k = k_n = -\lambda_n^2 = \left(\frac{-n\pi}{L}\right)^2$

$$Y''(y) - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Y(y) = 0 \qquad y \in (0, H) \quad n = 1, \dots$$

$$Y(y) = D_{1,n} e^{\left(\frac{n\pi}{L}\right)y} + D_{2,n} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)y}$$

$$\{D_{1,n}\} \qquad \{D_{2,n}\}$$

Abbiamo trovato la soluzione $X_n(x)$ e $Y_n(y)$

<u>Definizione</u>: Soluzioni Fondamentali

$$U_n(x,y) = X_n(x)\, Y_n(y)$$

Ancora infinite scelte.

Aderiscono alle condizioni

$$\begin{cases} -\Delta U_n = 0 \\ + CB\ \Gamma_3, \Gamma_4 \end{cases}$$

$$U(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\, Y_n(y)$$

Imponiamo la condizione Γ_2

$$U(x,H) = 0 \qquad x \in (0,L)$$

$$U_n(x,H) = X_n(x)\, Y_n(H) = 0 \qquad x \in (0,L)$$

$$\Rightarrow Y_n(H) = 0$$

Usiamo questo per eliminare uno di D_1 o D_2

$$Y_n(H) = D_{1,n}\, e^{\left(\frac{n\pi}{L}\right)H} + D_{2,n}\, e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)H} = 0 \qquad n = 1, \dots$$

$$D_{2,n} = \frac{D_{1,n}\, e^{\left(\frac{n\pi}{L}\right)H}}{e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)H}} = -D_{1,n}\, e^{2\left(\frac{n\pi}{L}\right)H}$$

$$Y_n(y) = D_{1,n}\left[e^{\left(\frac{n\pi}{L}\right)y} - e^{2\left(\frac{n\pi}{L}\right)H} \cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)y} \right]$$

$$\sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = -\sinh(-z) = -\frac{e^{-z} - e^{z}}{2}$$

$$\left[e^{Qy} - e^{2QH} \cdot e^{-Qy}\right] \cdot \frac{e^{-QH}}{e^{-QH}} = \qquad Q = \frac{n\pi}{L}$$

$$= \frac{e^{Q(y-H)} - e^{Q(H-y)}}{2e^{-QH}} \cdot 2$$

$$= 2\,\frac{e^{Q(y-H)} - e^{-Q(y-H)}}{2e^{-QH}}$$

$$= -2\,\frac{e^{Q(H-y)} + e^{-Q(H-y)}}{2e^{-QH}} = -\frac{2\sinh\left[\frac{n\pi}{L}(H-y)\right]}{e^{-QH}}$$

$$\Rightarrow Y_n(y) = \underbrace{D_{1,n} \cdot -2 \cdot e^{QH}}_{D_{1,n}^*} \cdot \sinh\left[\frac{n\pi}{L}(H-y)\right]$$

$$U_n(x,y) = X_n(x)\,Y_n(y)$$

$$= B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) D_{1,n}^* \sinh\left[\frac{n\pi}{L}(H-y)\right]$$

$$= C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sinh\left[\frac{n\pi}{L}(H-y)\right]$$

Soddisfa la differenziale e le CB a $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$

Passo 4 Imponiamo CB a Γ_1

$$U(x,0) = g_1(x) \qquad x \in (0,L)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \underbrace{\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}_{\text{simile a } \sin(n\omega x)} \sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right) = g_1(x)$$

simile a $\sin(n\omega x)$ → Utile per Fourier.

Se $g_1(x)$ è quadrato sommabile.

$$g_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$C_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right) = a_n$$

$$C_n = \frac{a_n}{\sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)}$$

$$U(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sinh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{L}(H-y)\right)$$