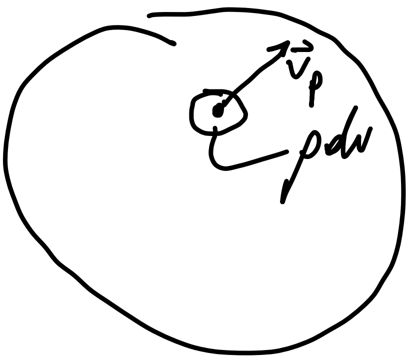
# Lezione 12 - Potenza

## Energia cinetica di un singolo corpo rigido

↳ Sistema: somma di ogni energia individuale

Punto materiale: $E_c = \frac{1}{2} M v^2$

Singolo corpo rigido: $E_c = \int \frac{1}{2} v_P^2 \rho\, dV = \frac{1}{2}\int_V \vec{v}_P \cdot \vec{v}_P \rho\, dV$




Sappiamo:

$\vec{v}_P = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times (P-G)$

$$\Rightarrow E_c = \frac{1}{2}\int \left[\vec{v}_G + \vec{\omega}\times(P-G)\right]\cdot\left[\vec{v}_G + \vec{\omega}\times(P-G)\right]\rho\, dV =$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \vec{v}_G\cdot\vec{v}_G\, \rho\, dV + \frac{1}{2}\int_V \left[\vec{\omega}\times(P-G)\right]\cdot\left[\vec{\omega}\times(P-G)\right]\rho\, dV$$

$$+ \frac{1}{2}\int_V \vec{v}_G\cdot\left[\vec{\omega}\times(P-G)\right]\rho\, dV + \frac{1}{2}\int_V \left[\vec{\omega}\times(P-G)\right]\vec{v}_G\, \rho\, dV$$

$$= \frac{1}{2} v_G^2 \int_V \rho\, dV + \frac{1}{2}\int \omega^2 |P-G|^2 \rho\, dV + \frac{1}{2} v_G\cdot\left[\vec{\omega}\times\int_V (P-G)\rho\, dV\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[\vec{\omega}\times\int_V (P-G)\rho\,dv\right]\cdot\vec{v}_G$$

$\int_V \rho\,dv$

$$E_c=\frac{1}{2}Mv_G^2+\frac{1}{2}\omega^2\underbrace{\int_V |P-G|^2\rho\,dv}_{J_G}+\cancel{M(G-G)}+\cancel{M(G-G)}$$

Somma dei punti è G

$$\boxed{E_c=\frac{1}{2}Mv_G^2+\frac{1}{2}J_G\omega^2}$$ Teorema di König

## Bilancio delle Potenze (sistema singolo gdl)

↳ come lo scriviamo noi

= PLV + D'Alambert

In dinamico non statico

$$\underbrace{\sum_i \vec{F}_i\cdot\delta\vec{P}_i+\sum_j \vec{C}_j\cdot\delta\vec{\theta}_i}_{\text{Reazioni Attive (interne ed esterne)}}+\underbrace{\sum_k \vec{F}_{iGk}\cdot\delta\vec{G}_k+\sum_k \vec{C}_{iGk}\cdot\delta\vec{\theta}_k}_{\text{Inerzia}}=0$$

Inerzia
↳ Aggiunto per studiare il caso dinamico

$$\vec{F}_{iGk}=-M_k\vec{a}_{Gk}$$

$$\vec{C}_{iGk}=-J_{Gk}\dot{\vec{\omega}}_k$$

Prendiamo lo spostamento virtuale come lo spostamento effettivo

$$\delta \vec{P}_i \rightarrow d\vec{P}_i \rightarrow \frac{d\vec{P}_i}{dt} \rightarrow \vec{v}_{pi}$$

A tutti gli spostamenti virtuali cambiamo con la velocità date le stesse caratteristiche

I^a forma

$$\underbrace{\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_{pi} + \sum_j \vec{C}_j \cdot \vec{\omega}_i}_{\Pi_{ATT}} = \sum_k M_k \vec{a}_{Gk} \cdot \vec{V}_{Gk} + \sum_k J_{Gk} \dot{\vec{\omega}}_k \vec{\omega}_k$$

$\Pi_{ATT}$ = " "

$\downarrow$

Potenze Attive

$$\vec{a}_{Gk} \cdot \vec{V}_{Gk} = \frac{d\vec{V}_{Gk}}{dt} \cdot \vec{V}_{Gk} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}\left(\vec{V}_{Gk} \cdot \vec{V}_{Gk}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{d\vec{V}_{Gk}}{dt} \cdot \vec{V}_{Gk} + \vec{V}_{Gk} \cdot \frac{d\vec{V}_{Gk}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} V_G^2\right)$$

Perchè abbiamo il doppio del valore iniziale

$$\Rightarrow \Pi_{ATT} = \sum_k M_k \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} V_G^2\right) + \sum_k J_{Gk} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \omega^2\right)$$

$$= \sum_k \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} M_k v_{Gk}^2 + \frac{1}{2} J_{Gk} \omega_k^2\right) =$$

$$= \sum_k \frac{d}{dt} E_{ck} = \frac{d}{dt} \sum_k (E_{ck}) = \frac{dE_c}{dt}$$ ← Del sistema

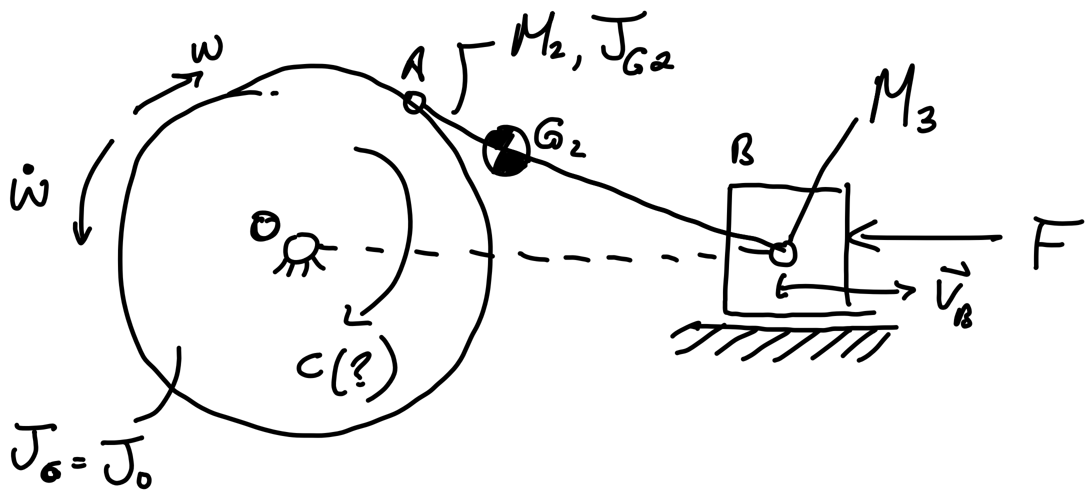
↳ Energia cinetica del k-esimo corpo

$$\Rightarrow \boxed{\Pi_{ATT} = \frac{dE_c}{dt}}$$

Potenza Azioni Attive

↳ Possiamo vedere la potenza come flussi di energia nel tempo

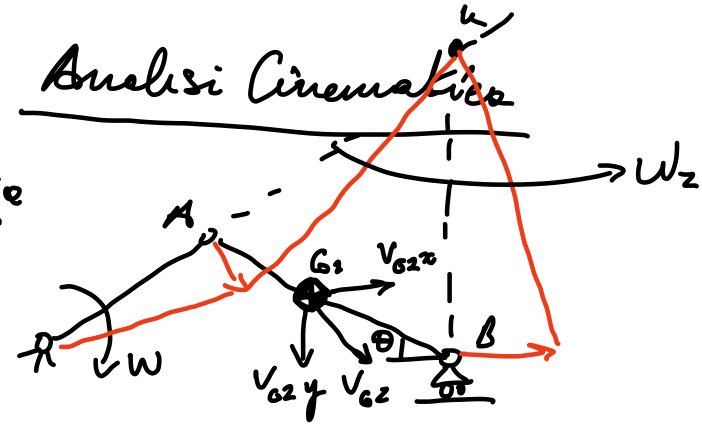
Esempio




$$\vec{C} \cdot \vec{\omega} + \vec{F} \cdot \vec{V}_B = J_0 \dot{\vec{\omega}} \cdot \vec{\omega} + M_2 \vec{a}_{G2} \cdot \vec{V}_{G2} + J_{G2} \dot{\vec{\omega}}_2 \omega_2 + M_3 \dot{a}_B \vec{V}_B$$

Analisi Cinematica

Velocità




$$\omega_2 = \frac{V_k}{AK}$$

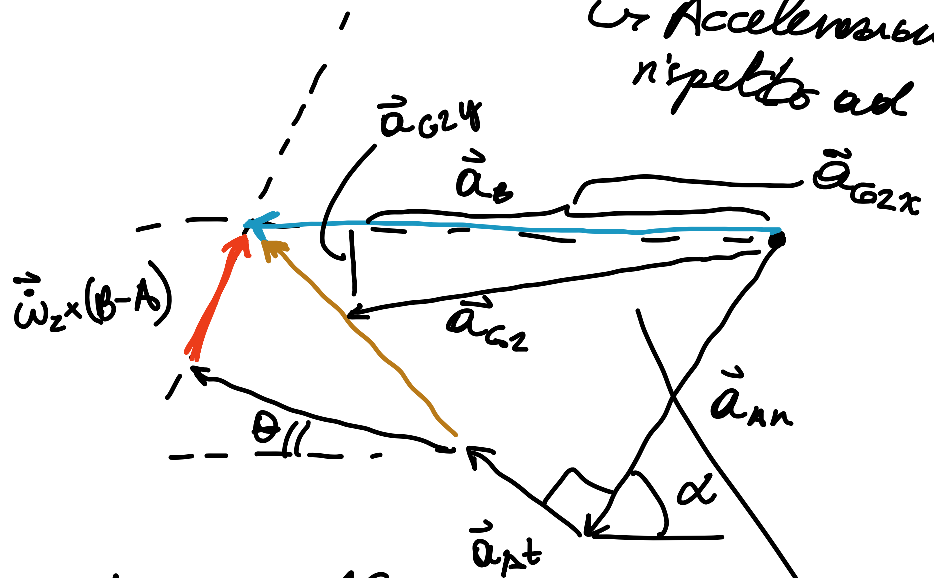
# Accelerazione

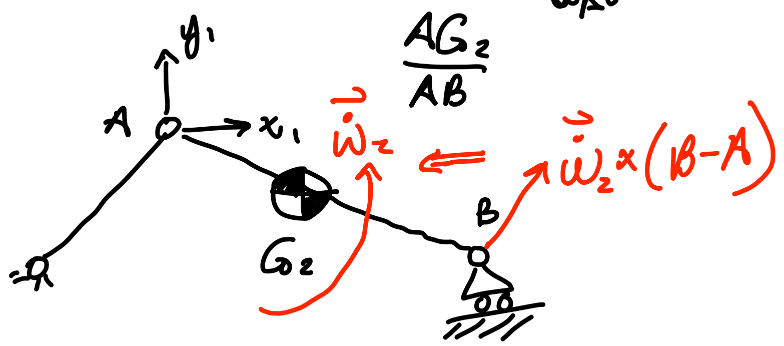
$$\vec a_B = \vec a_{At} + \vec a_{An} + \dot{\vec\omega}_2 \times (B-A) - \omega_2^2 (B-A)$$

| $\vec a_B$ | $\vec a_{At}$ | $\vec a_{An}$ | $\dot{\vec\omega}_2 \times (B-A)$ | $-\omega_2^2 (B-A)$ |
|---|---|---|---|---|
| ? | $\dot\omega \overline{OA}$ | $\omega^2 \overline{OA}$ | $\dot\omega_2 \overline{AB}$ | $\omega_2^2 \overline{AB}$ |
| $// x$ | $\perp OA$ | $A \to O$ | $\perp AB$ | $B \to A$ |

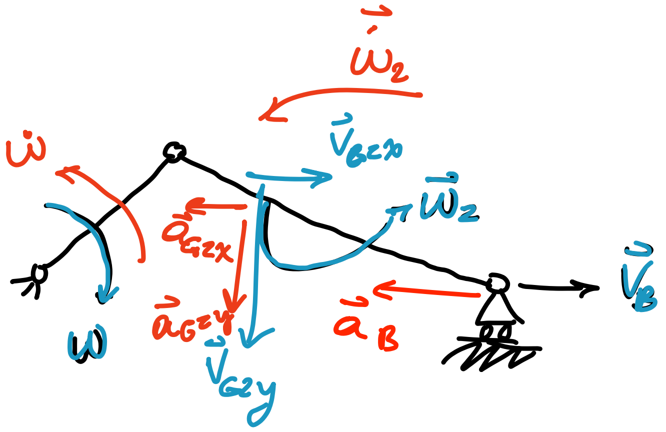
$$\underbrace{\dot{\vec\omega}_2 \times (B-A) - \omega_2^2 (B-A)}_{\vec a_{BA}}$$

↳ Accelerazione di B rispetto ad A




da posizione cambia dipende solo dalla posizione di $G_2$



?

$$c\omega - F v_B = -J_o \dot{\omega}\omega + M_2\left(-a_{G2} v_{G2x} + a_{G2y} v_{G2y}\right) +$$

$$+ J_{G2} \dot{\omega}_2 \omega_2 - M_B a_B v_B$$

$$c\omega - F\omega_B + J_o \dot{\omega}\omega + M_2 a_{G2x} v_{G2x} - M_2 a_{G2y} v_{G2y}$$

$$- J_{G2} \dot{\omega}_2 \omega_2 + M_B a_B v_B = 0$$