Laboratorio 9 - Implementazione di FEM per problemi finiti.

Primo problema:

$$\begin{cases} -\mu_0 u''(x) = f(x) & x \in (0,L) \\ u(0) = 0 \\ u(L) = 0 \end{cases}$$

Primo passo: Formulazione debole

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Trovare } u(x) \in H_0^1(\Omega) \text{ tale che} \\ \mu_0 \int_0^L u'(x) v'(x)\, dx = \int_0^L f(x) v(x)\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{array}}$$

↳ Forma Debole

2) Formulazione di Galerkin

Trovare $u_h \in V_h \subset V = H_0^1(\Omega)$ con dimensione pari a $N_h < \infty$, tale che:

$$\mu_0 \int_0^L u_h' v_h' \, dx = \int_0^L f v_h \, dx \quad \forall v_h \in V_h$$

3) Elementi Finiti

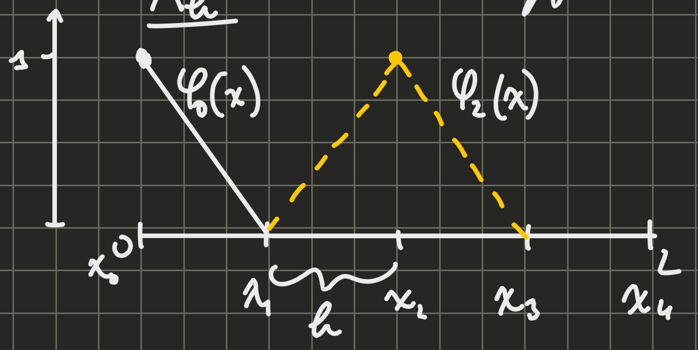
↳ Prendiamo V_h come possiamo gestire le sue funzioni.

$$V_h = X_h^1(\Omega) \underbrace{\cap V} \Rightarrow \dim V_h \neq \dim X_h^1 \text{ ma } = N$$

$\Rightarrow$ condizioni di bordo da imporre.

X_h^1

$N = 3$



Perchè non dobbiamo tenere a conto dei nodi di bordo perchè sono nulli

I nodi della partizione di $[0,L]$ sono $N+2$ (N interni, 2 di bordo)

Sui nodi di bordo è dove facciamo le operazioni di condizioni di bordo.

$$\{x_i\}_{i=0}^{N+1}, \quad \{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{N+1}$$

$$\phi_h \in X_h^1 \qquad \phi_h = \sum_{i=0}^{N+1} U_i \varphi_i(x)$$

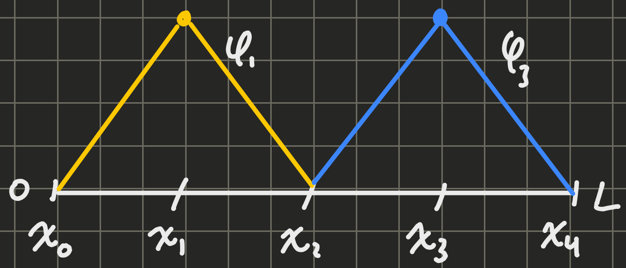
dim V_h con full Dirichlet $\rightarrow$ $$u_h = \sum_{j=1}^{N} U_j \varphi_j(x)$$

$$A\underline{u} = \underline{f}$$

$$A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \mu_0 \int_0^L \varphi_j' \varphi_i' \, dx \qquad \forall i,j$$

$$\underline{f}_i = F(\varphi_i) = \int_0^L f \varphi_i \, dx$$

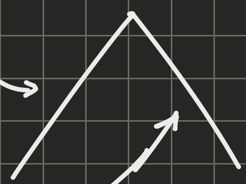
Possiamo sfruttare la forma delle basi sapendo che non ci sarà interazione tra alcune.



$$A_{13} = \int_0^L \varphi_1' \varphi_3' = 0 \to$$ nessuna parte dei loro supporti interseca

A_{ij} non nulli sono A_{ii} e $A_{i\,i-1}$ $A_{i\,i+1}$

$$\varphi_i = \begin{cases} \dfrac{x-x_0}{h} \\ \dfrac{x_2-x}{h} \end{cases}$$



derivata $= \frac{1}{h}$

derivata $= \frac{-1}{h}$

$$A_{ii} = \mu_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{h}\cdot\frac{1}{h} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{h}\cdot\frac{1}{h} = \mu_0 \cdot \frac{2}{h}$$

Per $A_{ii} = \mu_0 \cdot \frac{2}{h}$ (Per questo problema

$$A_{12} = \mu_0 \int_{x_1}^{x_2} \frac{-1}{h}\cdot\frac{1}{h}\,dx = -\frac{\mu_0}{h}$$

Parte dove prodotto è non nullo

$$A = \text{tridiag}\left(\mu_0\frac{-1}{h}, \mu_0\frac{2}{h}, \mu_0\frac{-1}{h}\right)$$

$$\underline{f} = [f_i] = h f(x_i)$$

$Au = f$

$A = \text{tridiag}(\dots)$ $f = $ vettore

$u = A \backslash f$

A assemblata dai nodi interni $\Rightarrow A \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $f \in \mathbb{R}^N$

$\Rightarrow u \in \mathbb{R}^N$

considerando i valori al bordo, dobbiamo aggiungere le celle per i bordi.

$$\underbrace{u}_{\text{completo}} = [u_0, u^T, u_2]^T$$

$$x_{compl} = [x_0, \dots, x_{N+1}]^T$$

Tra norme con h decrescente diminuisce

$u_{ex} \in H^{p+1}(\Omega)$ con H^1 si ha s

$$\|u_{ex} - u_h\|_{L^2} \leq C h^{s+1} \| u^{(s+1)} \|_{L^2}$$

$s = \min(r, p)$ r - grado elementi finiti

$r = 1 \Rightarrow s = \min\{1, p\}$ → caso per questo esercizio

Al variare di r e p si hanno diversi ordini di convergenza ordine di convergenza per H^1

	$u \in H^1$	$u \in H^2$	$u \in H^3$	$u \in H^4$
$r=1$	converge	1	1	1
$r=2$	"	1	2	2
$r=3$	"	1	2	3
$r=4$	"	1	2	3

Per L^2 si aggiunge un grado ad ognuno.

Ordine di convergenza con L^2

$r=1$	converge	2	2	2
$r=2$	"	2	3	3
$r=3$	"	2	3	4
$r=4$	"	2	3	4

questo è il caso per noi, avremo che:

$$\|u_{ex} - u_h\|_{L^2} \sim C h^2$$

$$\|\cdot\|_{L^2} = \sqrt{\int (u_{ex} - u_h)^2}$$

$$\sqrt{\text{simpcomp}(0, L, 1000, Err)}$$

$$Err = @(x)\left(u_{ex}(x) - \underbrace{u_h(x)}_{\text{interp1}(x_h,\, u_h,\, x)}\right).\wedge 2$$

3)

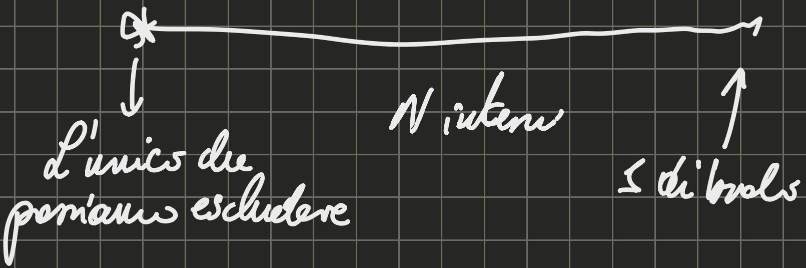
$$\begin{cases} -\mu_0 u''(x) + \sigma_0 u(x) = f(x) & x \in \Omega = (0,L) \\ u(0) = 0 \\ -\mu_0 u'(L) = 0 \end{cases}$$

Condizioni miste, dirichlet neumann omogenee.

$V = H^1_S$

↳ Dirichlet a bordo di sinistra

$V_h = X_h^1 \cap V$



dim $V_h = N+1$

Dobbiamo tenere a conto del termine di reazione e del nodo in più

$$K = [k_{ij}] = \mu_0 \int \varphi_i' \varphi_j'$$

$$M = [M_{ij}] = \sigma_0 \int \varphi_i \varphi_j$$

Formula Debole

$$\underbrace{\int \mu_0 u' v'}_{K} + \underbrace{\int \sigma_0 u v}_{M}$$

Derivati dalla discretizzazione

$$K = \text{tridiag}\left(-\frac{\mu_0}{h}, \frac{2\mu_0}{h}, \frac{\mu_0}{h}\right)$$

Prima abbiamo uguale al bordo, ma ora a destra c'è la capanna

$$K_{N+1,N+1} = \int \mu_0 \varphi'_{N+1} \varphi'_{N+1} = \frac{\mu_0}{h}$$

È diverso perché la capanna è a metà

$$M = \text{tridiag}\left(\frac{\sigma_0}{6} \cdot h, \frac{2\sigma_0}{3} h, \frac{\sigma_0}{6} h\right)$$

$$M_{N+1,N+1} = \frac{\sigma_0 h}{3}$$

Nello stesso modo

$$f_{N+1} = \frac{h}{2} \cdot f(x_{N+1})$$

$$\underline{U} = (K+M) \backslash f$$

$$\underline{U}_{compl} = [0, \underline{U}]$$