Lez 4

Vogliamo trovare $f(x) = 0$

Trovare $x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = 0$

Metodi:

Bisezione — Punto fisso — Newton

Punto Fisso

Un punto fisso è che $\phi(\alpha) = \alpha$, non si muove dal punto stesso

Analitico

Metodi Numerici

$$\underbrace{x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})}_{\text{Schema Del punto fisso}} \qquad k \geq 0 \qquad \{x^{(k+1)}\}$$

con $x^{(0)}$ dato

Ostrowsky

$$\{x^{(k+1)}\} \to \alpha \Leftarrow |\phi'(\alpha)| < 1$$

$\forall (x^{(0)})$ sufficientemente vicino ad α

Dobbiamo prendere $\phi(\alpha) = \alpha$ che coincide con $f(\alpha) = 0$

Esempio:

$$f(x) = \cos(x) + \tan(x) = 0$$

ϕ?

$\hookrightarrow \phi = f(x) + x = \cos x + \tan x + x$

se $f(x) = 0 \to \phi(x) = 0 + x = x$, quello che vogliamo.

In caso di convergenza

$$\lim_{k \to \infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{x^{(k)} - \alpha} = \phi'(\alpha) \neq 0$$

In generale la convergenza ha ordine $\boxed{p \in \mathbb{R}}$ se la p-esima derivata di ϕ è la prima non nulla.

Se $\phi' = \phi^2 = \dots = \phi^{p-1} = 0$ e $\phi^{(p)} \neq 0$

Newton

Metodo del punto fisso con ϕ preso opportunamente

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f(x^{(k)})}$$

$f'(x^{(k)}) \neq 0$

$k \geq 0$

con $x^{(0)}$ dato

La convergenza di Newton è locale di ordine $p=2$

dobbiamo iniziare vicino ad α con $x^{(0)}$

Casi di molteplicità pari

Se lo zero che stiamo cercando ha molteplicità $(m) > 1$, allora Newton (classico) ha ordine $p=1$. $\Rightarrow$ perde un ordine di convergenza $\rightarrow$ non ci piace

Per ripristinare $p=2$ lo schema viene modificato in Newton modificato:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{m\, f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

$$m: \quad f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(m-1)}(x) = 0 \quad e \quad f^{(m)}(x) \neq 0$$

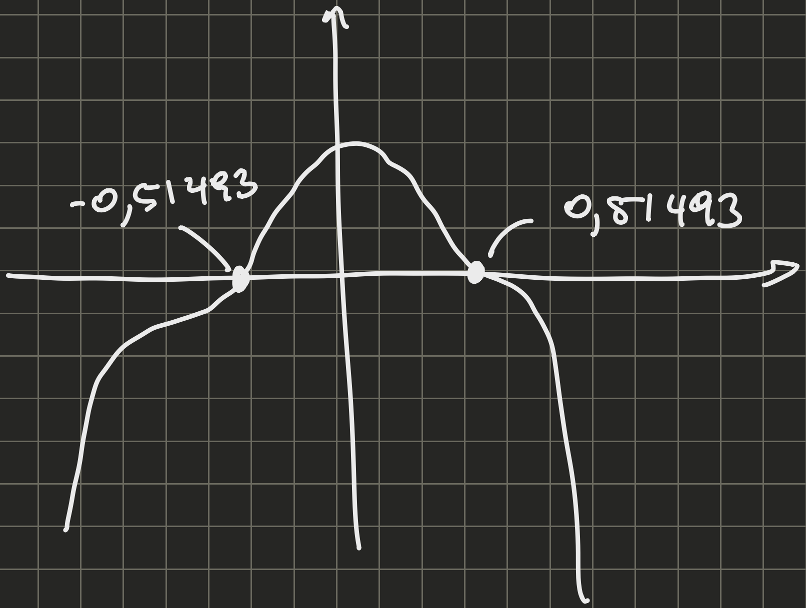
m è la prima derivata non nulla dello 0 di f

$m=1 \quad p=2$ ✓

$m>1 \rightarrow$ Newton Classico $p=1$ ✗

$\hookrightarrow$ Newton modificato con m $p=2$ ✓

ES 1



$$\phi'(x) = |1 + A f'(x)| < 1$$

$\cancel{-2 < A f'(x) < 0}$

$\cancel{x + A f(x) = 0}$

$$-1 < 1 + A f'(x) < 1$$

$$-2 < A \underbrace{f'(x)}_{<1} < 0$$

↳ per la funzione data

⇓

$A > 0$

$$\frac{-2}{f'(x)} > A > 0$$

cambio il segno perché $f'(\alpha)$ è negativo

$A = 0,1 \rightarrow 65$

$A = 0,05 \rightarrow 136$

$A = 0,2 \rightarrow 28$

3 → dovevamo durore

```
df = @(x) -4.*cos(2.*x).*sin(2.*x)-2.*x
Asup = -2/df(succ1(end))
```

Per avere $p=2$

$\phi'(\alpha)=0$ e $\phi''(\alpha)\neq 0$

↳ Per avere $\lambda = \dfrac{-1}{f'(\alpha)} \Rightarrow p>1$

$\phi_n = @(x) \quad x - f(x) ./ df(x)$

Non dimenticarsi il ., in questo caso è critico

$x^3-(2+e)x^2+(2e+1)x+(1-e)-\cosh(x-1)$

df $\quad 3x^2-(4+2e)x+2e+1+\sinh(1-x)$

$-\cosh(x-1)$

$g(f(x))$

sin cos -sin

~ 1, $\sim 3{,}6$ $\quad \sim 6{,}3$

$m=2 \quad m=1 \quad m=1$

$$\frac{1}{1+7\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} + \cos\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3\right) \cdot 3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2$$

Homework 7 $\rightarrow$ 2° risposta