

Leczione 23 -

Ultima volta \rightarrow apprendiamo come dalla forma debolmente continua di Galerkin e abbiamo introdotto l'analisi di queste formulazioni per cui manca solo la convergenza.

Risultato iniziale per una buona convergenza:

$$a(u-u_h, u-u_h) = \underbrace{a(u-u_h, u-v_h)}_{\text{Errore di Discretizzazione}} + a(u-u_h, v_h - u_h) \stackrel{\text{Stabilità bilineare}}{=} a(u-u_h, v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

Per l'ottogonalità
 \Rightarrow è per un qualsiasi v_h
di V_h

$$\alpha \|u-u_h\|_V^2 \leq a(u-u_h, u-u_h) = a(u-u_h, u-v_h) \leq |a(u-u_h, u-v_h)|$$

Coercività

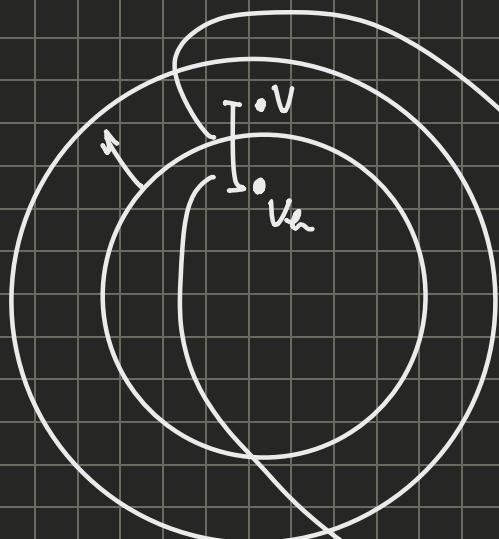
Costitutività $\leq M \|u-u_h\|_V \|u-v_h\|_V$

$$\|u-u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \|u-v_h\|_V \quad \forall v_h \in V$$

Se vale per ogni v_h
si può dire:

$$\|u-u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u-v_h\|_V \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Lemma di Céa} \\ \text{della} \\ \text{discretizzazione} \end{array} \right.$$

Stimare l'errore $\liminf_{h \rightarrow 0} \|v - v_h\|_V = 0$



$u \in \{v\}$, ci stimiamo solo sguaiando dalla soluzione vera.

$$\|v - v_h\|_V \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Caratterizza la deunite di V_h in V .

Ci certifica che V_h riempie O .

Per $h \rightarrow 0$, la migliore approssimazione di v in V_h tende a v .

Osservazione su C₀

→ Errore di migliore approssimazione.

Si può trovare un lower bound:

8:45)

$$\inf_{v \in V_h} \|u - v_h\|_V \leq \|u - v_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|_V$$

Potiamo usare la definizione dell'errore di migliore approssimazione per dire che al minimo l'errore deve esser al minimo l'errore minimo possibile.

Definizione di norme equivalenti:

$$C_1 \| \cdot \|_B \approx \| \cdot \|_A \leq C_2 \| \cdot \|_B$$

In questo caso $\|\cdot\|_A = \|\cdot\|_V$

$$\|\cdot\|_B = \inf_{v \in V_h} \|\cdot\|_V$$

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = \frac{M}{\alpha}$$

Definizione di \bar{V}_h

Portiamo dal problema più semplice

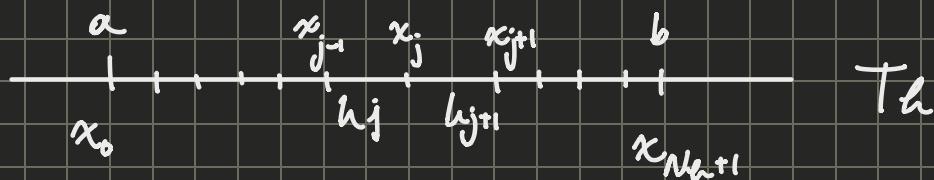
$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & x \in (a, b) = \mathbb{R} \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

\bar{V}_h è spazio degli elementi finiti

$$\bar{V}_h \subset H_0^1(\mathbb{R})$$

$$N_h = \dim V_h < +\infty$$

$$\{\varphi_j\}_{j=1}^{N_h} \rightarrow \text{base di } \bar{V}_h$$



Ta partizione di \mathbb{R}

$$T_h = \{h_j\}$$

$$h_j = [x_{j-1}, x_j]$$

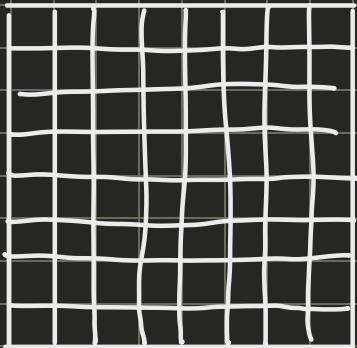
$\{x_j\} \rightarrow$ vertici

$$h_j = |h_j| = x_j - x_{j-1}$$

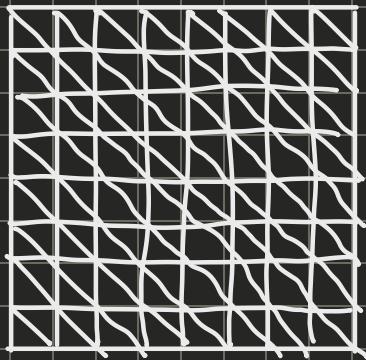
$h = \max_j h_j \rightarrow$ abbiamo preso una partizione
uniforme, ma più comune

Per Céa, $h \rightarrow 0 \Rightarrow$ che la partizione sta diventando
infinitamente fitta.

Partizione Th in 2D



Andronoglio



Tarelli

In 3D si ha tetrahedri o cubi.

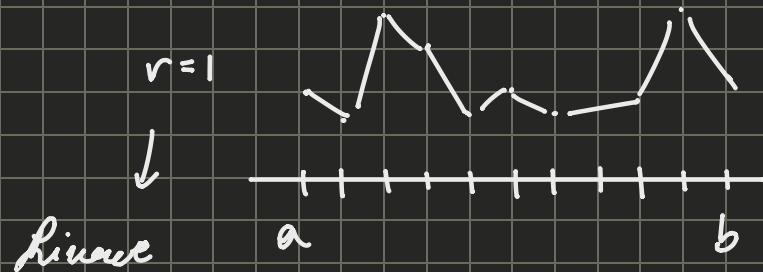
le forme possono esser altre ma queste sono le più
comuni.

polinomio di grado r

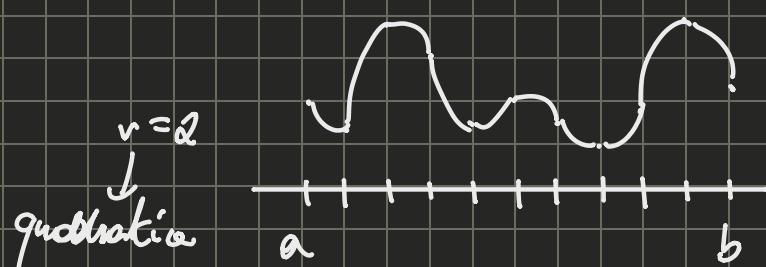
$$X_h = \left\{ v_h \in C^0([a, b]) \text{ tale che } v_h|_{h_j} \in \mathbb{P}_r(h_j), \forall h_j \in \mathcal{T}_h \right\}$$

↪ spazio degli elementi finiti \hookrightarrow insieme b_j

È come come una approssimazione a tratti.



Approssimazione a elementi finiti lineari a tratti.



Di solito si sceglie P^3 , a volte P^2 , ma quasi sempre P^1 per ridurre i calcoli e ridurre le oscillazioni. Serve anche una regolarità maggiore per $r=1$.

X_e^r non può essere V_h perché non segue le condizioni al bordo

$$\text{Allora } \bar{V}_h = \{ v_h \in X_e^r \text{ tale che } v_h(a) = v_h(b) = 0 \}$$

Le funzioni ad elementi finiti che rispettano le condizioni di bordo.

Dirichlet entra in \bar{V}_h , mentre le altre no.

Cos'è la base di \bar{V}_h ?

$$\{ \varphi_j \}$$

Proprietà delle basi che vogliamo:

- 1) facili di integrare
- 2) supporto di φ_j fatto piccolo
(\Rightarrow sparsità di A)
- 3) base lagrangiana

insieme dei valori
di x per cui φ_j è
diverso da 0.

$$\varphi_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{altrimenti} \\ 1 & i=j \end{cases}$$

$$\text{supp}(f) = \{x \in [a, b], \text{ tale che } f(x) \neq 0\}$$

$$f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Spazio X_h

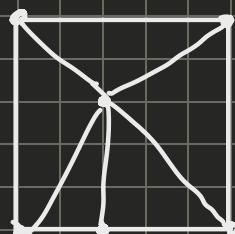
simile a funzioni
continuie.



9:15 |

Grande per "dof"

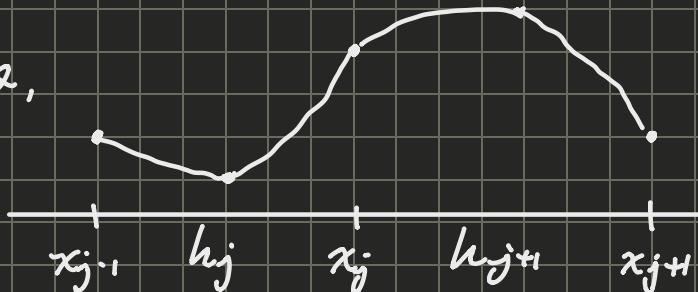
vertici



("nodi," "degrees of freedom")
"x", "y"

\hookrightarrow voler su h_j cheabbiamo amore per
definire la funzione nell'intervallo,
per $r=1$, avremo i vertici per poter
definire la funzione in X_h^r

Per $r=2$,



V=verticie

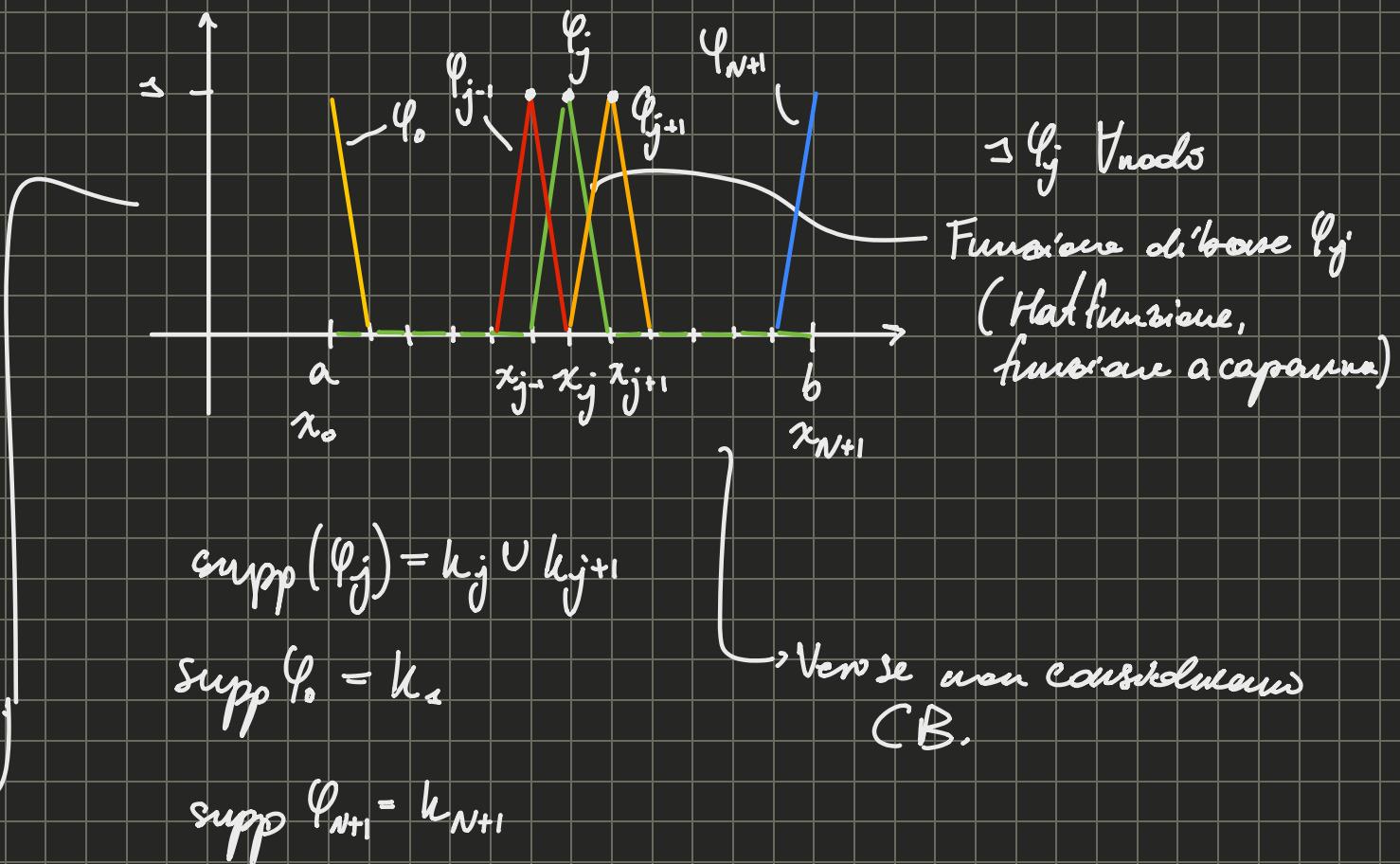


N - nodi

V/N N V/W N V/W

Vertici \leq Nodi

Per $r=1$ $V=N$



Conseguenze della nostra Scelta del base:

Per le condizioni di bordo:

3) CB

$\Leftrightarrow \varphi_j \text{ } \forall \text{ nodo non di Dirichlet}$

L'uso dei nodi di Dirichlet conosciamo
già così è la funzione.

Senza dirichlet abbiamo $N+2$ di base, $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N+1}$

Con Dirichlet abbiamo $\varphi_1, \dots, \varphi_n$

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n$$

$$u(a) = u(b) = 0$$

$$\varphi_s, \dots, \varphi_{n+1}$$

$$u(a) = 0 \quad u'(b) = c$$

$$\varphi_0, \dots, \varphi_n$$

$$3u(a) + u'(a) = 0 \quad u(b) = 0$$

$$2) \quad \varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_j}{x_j - x_{j-1}} & x \in k_j \\ \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} & x \in k_{j+1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$3) \quad \forall a \in V_h \quad v_a(x) = \sum_j v_j \varphi_j(x)$$

Come conseguenza delle Lagrangianità.

$$v_a(x_i) = \sum_j v_j \underbrace{\varphi_j(x_i)}_{\delta_{ij}} = v_i$$

$$4) \quad a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \int_a^b \varphi'_j(x) \varphi'_i(x) dx$$

Per il problema di dirima

$i, j = 1, \dots, N \rightsquigarrow$ salta via le prime e ultime per Dirichlet.

→ Considerando questo diagramma ci dà un'idea della griglia pattern, visto che interseca con quelle prime e dopo, ci dovrà una matrice tridiagonale.

$a_{ij} \neq 0$ per $j = i-1, i, i+1$

$$a_{i,i-1} = \int_a^b \varphi_i'(x) \varphi_{i-1}'(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i'(x) \varphi_{i-1}'(x) dx =$$

$$= - \int_{x_{i-1}}^{x_j} \frac{1}{h^2} dx = \frac{-1}{h^2} \cdot h = \frac{-1}{h}$$

$$a_{i,i+1} = \int_a^b \varphi_{i+1}'(x) \varphi_i'(x) dx$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_{i+1}'(x) \varphi_i'(x) dx = \frac{-1}{h^2} \cdot h = \frac{-1}{h}$$

Indica la simmetria

$$a_{ii} = \int_a^b [\varphi'(x)]^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\varphi_i'(x)]^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} [\varphi_i'(x)]^2 dx$$

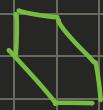
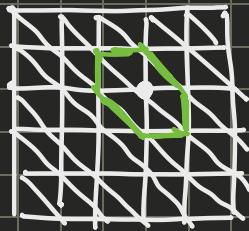
$$= \frac{1}{h^2} \cdot h + \frac{1}{h^2} \cdot h = \frac{2}{h}$$

$$A = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

per Poisson 1D, full Dirichlet, ad elementi finiti di grado 1 con passo uniforme h .

Nel 2D non si ha più questa struttura,

perché



→ dove il
coppellino
si arresta.

- è più difficile definire chi parla con chi, perché non
c'è modo definito per conteggiare i nodi.