Lezione 8 - Interpolazione

Approssimazione di funzioni e dati

Il terzo argomento che studiamo è la approssimazione di funzioni e dati in una spazio.

Consideriamo per semplicità una funzione $f \in C^0([a,b])$, e il nostro lavoro sarà di trovare $\widetilde{f} \in \mathbb{P}_n$ che rappresenti il meglio possibile la funzione originale f con i punti di f che ci vengono dati.

Possiamo farlo per aiutarci durante l'integrazione in caso di funzioni difficilmente integrabili, rimpiazzando f con $\widetilde{f}$, nella formula: $I(f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Un metodo di interpolazione che conosciamo già è Taylor. Ma Taylor ha dei problemi, il cui principale è che Taylor è locale, non rappresenta tutta la funzione come vogliamo quindi non ci è utile.
In più Taylor è molto restrittivo, richiedendo che la funzione f sia $\in C^2$, che ci riduce molto i casi che sarebbero lo stesso risolvibili.

Nella approssimazione di dati e funzioni, ci viene dato un insieme di coppie di dati, e dai dati tiriamo fuori una legge analitica.

Tecniche per l'approssimazione di funzioni e dati

La due tecniche per l'approssimazione di funzioni e dati che guardiamo sono:

- interpolazione (per l'approssimazione di funzioni)
- minimi-quadrati (per l'approssimazione di dati)

Nell'interpolazione cerco il polinomio che riproduce i valori di y associati ai valori x. $\widetilde{f}$ interpola le coppie di valori, dato un minimo finito di dati della funzione

Invece nella tecnica dei minimi-quadrati troviamo una retta o parabola che rappresenta l'andamento generale dei dati, nel caso in cui i dati non ragionevolmente interpolabili:

Interpolazione

Dato un insieme di coppie di dati:

$$(x_i, y_i)_{i=0}^n$$

Dove $x_i \neq x_j$, i valori di x_i sono i punti o tempi che creano l'ascisse, e i valori di y saranno $y_i = f(x_i)$

Dobbiamo trovare $\widetilde{f}$ tale che $\widetilde{f}(x_i) = y_i \ \rightarrow \ i = 0, \ldots, n$

Gli x_i sono i nodi di interpolazione e gli y_i sono i valori da interpolare.

Il fatto che i varia da 0 ad n, significa che abbiamo n+1 condizioni da interpolazione.

Ci sono modi diversi per definire e ricavare $\widetilde{f}$ che includono:

- $\in \mathbb{P}_n \rightarrow$ quello che vediamo in questa parte del corso
- Fourier $\rightarrow$ quello che vedremo più tardi nel corso

- Rappresentazione razionale = $\frac{P_t(x)}{P_s(x)}$, che non vedremo

La definizione di $\mathbb{P}_n$ è:

$$\mathbb{P}_n = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_q x^q,\ a_i \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{N}\}$$

Interpolazione Polinomiale di Lagrange

Proposizione

Siano $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ con x_i distinti. Allora $\exists!$ polinomio interpolatore di grado $\leq n$, Π_n tale che $\Pi_n(x_i) = y_i \ \rightarrow \ i = 0, \ldots, n$

Commenti:

Se Π_n è usato per interpolare funzione la notazione corretta sarebbe $\Pi_n f$, ch è un simbolo unico.

Se ho n+1 coppie di dati, il mio polinomio interpolatore avrà grado n. Invece per i minimi quadrati si hanno polinomi di grado 1 o 2 per n coppie di dati.

Meno incognite ci sono meno lavoro computazione dobbiamo fare.

Dimostrazione di Unicità di Π_n

La unicità si dimostra per assurdo.

Per assurdo esistono 2 polinomi interpolatori tale che:

$$\begin{gathered} \Pi_n \in \mathbb{P} \rightarrow \Pi_n(x_i) = y_i \ \rightarrow \ i = 0, \ldots, n \\ \Pi_n^* \in \mathbb{P} \rightarrow \Pi_n^*(x_i) = y_i \ \rightarrow \ i = 0, \ldots, n \end{gathered}$$

Definiamo la funzione Γ:

$$\underbrace{\Gamma_n(x)}_{\in \mathbb{P}_n} = \Pi_n(x) - \Pi_n^*(x)$$

Questo significa che:

$$\Gamma_n(x_i) = \Pi_n(x_i) - \Pi_n^*(x_i) = y_i - y_i = 0 \ \forall i$$

È un polinomio di grado n con n+1 zeri, questo è vero solo se la funzione è la identità nulla,cioè:

$$\begin{gathered} \Gamma_n(x) = 0 \ \forall x \implies \Pi_n(x) - \Pi_n^*(x) = 0 \ \forall n \\ \implies \Pi_n(x) = \Pi_n^*(x) \implies \text{Unicità} \end{gathered}$$

Dimostrazione delle esistenza/Costruzione di Π_n

Polinomio Caratteristico di Lagrange

Partiamo da un caso semplice.
In generale abbiamo x_0, x_1, x_2 e y_0, y_1, y_2.
In questo caso semplice i dati saranno:
$x_0 = 0,\ x_1 = 0,5,\ x_2 = 1$ e $y_0 = 0,\ y_1 = 1,\ y_2 = 0$

Mappando i dati avremo:

Definiamo $\varphi_1 \in \mathbb{P}$, dove l'indice è il nodo in cui abbiamo valore diverso da 0.

φ_1 è tale che:
$\varphi_1(x=0) = 0$, $\varphi_1(x=0,5) = 1$ e $\varphi_1(x=1) = 0$

Possiamo imporre tutte le condizioni dove il φ si annulla, applicandole in modo tattico per creare il polinomio e avremmo:

$$x(x-1)$$

Questo polinomio è congruente con le due condizioni annullanti ma non è congruente con quella che ci da 1. In generale il primo passo nella generazione del polinomio è imporre gli zeri.

Per imporre $\varphi_1(0,5)$ vediamo modifichiamo le costante in modo appropriato tale che ci dia il valore giusto.

Visto che vogliamo che sia 1, scriviamo:

$$\varphi_1(x) = \frac{x(x-1)}{0.5(0,5-1)} = 4(x-x^2)$$

Scriviamo il denominatore tale che al valore dove vogliamo un valore diverso i valori di cancellano l'un l'altro lasciano l'uno che stiamo cercando.

Per generalizzare:
Di vengono dati $x_0, x_1, \dots, x_n$ e valori associati
$y_0 = 0, y_1 = 0, \dots, y_{k-1} = 0, y_k = 1, y_{k+1} = 0, \dots, y_n = 0$

Abbiamo allora n nulle e il k-esimo valore è 1 valore unitario.

Guardiamo per primo tutti gli annullamenti:
Prendiamo $\varphi_k \in \mathbb{P}_n$

Scriviamo allora il polinomio:

$$(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)$$

Produciamo allora n monomi che si annullano al loro associato x.

Per soddisfare la condizione unitarià, φ_k sarà:

$$\varphi_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}$$
$$\varphi_k(x) = \prod_{i=0}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)} \text{ per } i \neq k$$

Questo è il polinomio generale che stavamo cercando, lo nominiamo il polinomi caratteristico di Lagrange.

Possiamo dire anche che:

$$\varphi_k(x_i) = \delta_k \to k = 0, \dots, n$$

x
Dove δ_k è il δ di Kronecker, che ha valore 1 quando i=k e valore 0 quando i $\neq$ k

Si hanno n+1 polinomio caratteristici, in base a quale indice mettiamo y = 1.

Polinomio Interpolatore Generale di Lagrange

Il limite delle funzioni che abbiamo appena visto è che possiamo trovare solo funzioni in cui solo un valore è diversa 1.
Cerchiamo quindi una funzione che può avere più di un valore diverso da 0.

Prendiamo $\Pi_2 \in \mathbb{P}$, tale che $\Pi_2(x_0) = y_0$, $\Pi_2(x_1) = y_1$ e $\Pi_2(x_2) = y_2$.

Conosciamo che esistono φ_0,φ_1 e φ_2 tale che:

$$\begin{array}{lll} \varphi_0(x_0) = 1 & \varphi_0(x_1) = 0 & \varphi_0(x_2) = 0 \\ \varphi_1(x_0) = 0 & \varphi_1(x_1) = 1 & \varphi_1(x_2) = 0 \\ \varphi_2(x_0) = 0 & \varphi_2(x_1) = 0 & \varphi_2(x_2) = 1 \end{array}$$

Sfruttiamo il fatto che possiamo definire tante φ e facciamo un combinazione lineare per trovare Π_2.

Abbiamo allora che:

$$\Pi_2(x) = \underline{A}\varphi_0(x) + \underline{B}\varphi_1(x) + \underline{C}\varphi_2(x)$$

Avendo l'equazione, imponiamo le condizioni per trovare i diversi valori.

$$\begin{gathered} \Pi_2(x_0) = \underline{A}\underbrace{\varphi_0(x_0)}_{1} + \underline{B}\underbrace{\varphi_1(x_0)}_{0} + \underline{C}\underbrace{\varphi_2(x_0)}_{0} = y_0 \\ \implies \underline{A} = y_0 \\ \Pi_2(x_1) = \underline{A}\underbrace{\varphi_0(x_1)}_{0} + \underline{B}\underbrace{\varphi_1(x_1)}_{1} + \underline{C}\underbrace{\varphi_2(x_2)}_{0} = y_1 \\ \implies \underline{B} = y_1 \\ \Pi_2(x_2) = \underline{A}\underbrace{\varphi_0(x_2)}_{0} + \underline{B}\underbrace{\varphi_1(x_2)}_{0} + \underline{C}\underbrace{\varphi_2(x_2)}_{1} = y_2 \\ \implies \underline{C} = y_2 \end{gathered}$$

Mettendo tutto insieme allora troviamo che l'equazione è:

$$\Pi_2(x) = y_0\varphi_0(x) + y_1\varphi_1(x) + y_2\varphi_2(x)$$

Allora per trovare Π_n generale ci servirà sapere solo $x_0, x_1, \dots, x_n$e $y_0, y_1, \dots, y_n$.

La formulazione generale per il due ricavo sarà:

$$\begin{aligned} \Pi_n(x) &= y_0\varphi(x) + y_1\varphi_1(x) + \cdots + y_n(x)\varphi_n(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} y_k\varphi_k(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(y_k \cdot \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{(x_k - x_i)}\right)\right) \end{aligned}$$

Questa è la formula generale del Polinomio Interpolatore di Lagrange

Possiamo vedere che funzione perché facendo:

$$\Pi_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k \underbrace{\varphi_k(x_i)}_{\delta_k} = y_i \underbrace{\varphi_i(x_i)}_{1} = y_i$$

Questo vale perché per x_i l'unica φ che non si annulla, e quella che a lo stesso pedice.

Questo verifica che per un qualsiasi caso di x_i si annulla.