Lezione 17 - Equazione di Lagrange

Equazione di Lagrange → Metodi di tipo energetico
↳ funziona bene per sistema a più gdl

q_i → generica coordinata libera
D → funzione dissipativa
E_c → energia cinetica
V → energia potenziale

i = indice di gdl n = gdl

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_c}{\partial q_i}} + \underbrace{\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial q_i}} = \frac{\delta L_i}{\delta q_i}$$

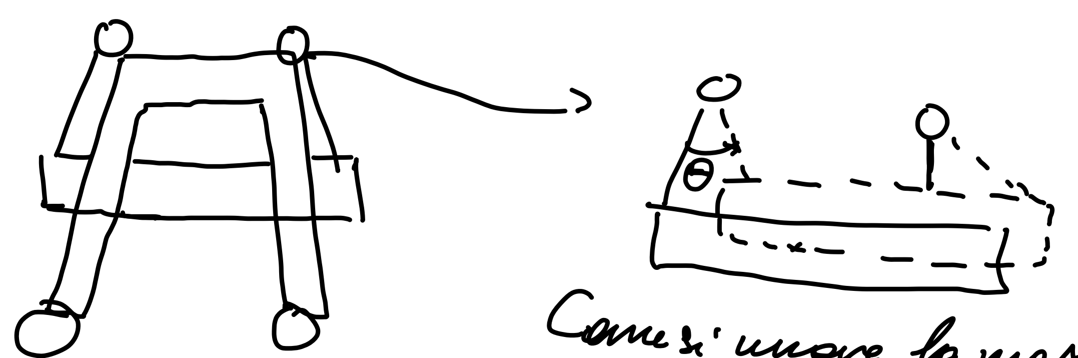
$\frac{\delta L_i}{\delta q_i} = Q$ ← Componente Lagrangiana

Abbiamo visto ma con d non ∂ perché ora

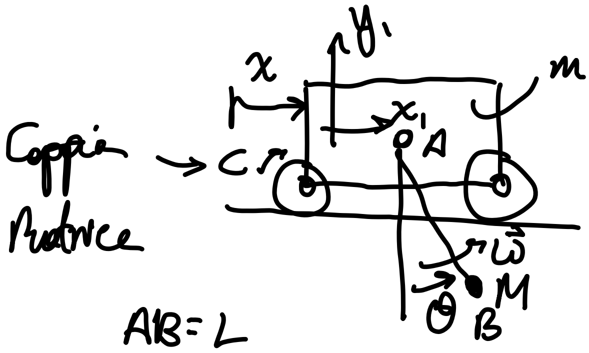
→ Azioni dissipative di tipo visto

ci sono più gradi

→ Azioni inerzia in tipo di azioni (?)



Come si muove la massa



AB = L

← Altro modo per rappresentare lo stesso movimento.

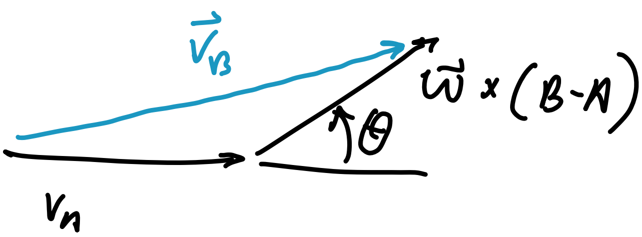
In questo caso $\underline{q} = \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix}$

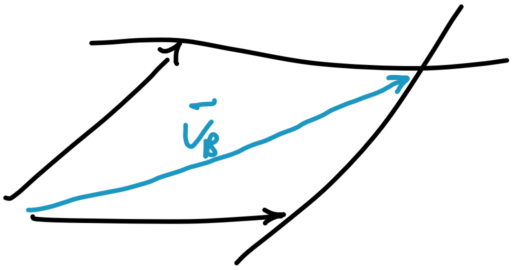
Dobbiamo esprimere le variabili per utilizzare Lagrange

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M V_B^2$$

Se non sappiamo come descrivere allora si usa un place holder per poi sapere la relazione dopo.

$$\begin{array}{cccc} \vec{V}_B = & \vec{V}_A + & \vec{\omega} \times (B-A) \\ ? & \dot{x} & \dot{\theta} L \\ ? & \parallel \hat{i} & \perp AB \end{array}$$





Modulo → $V_B^2 = \dot{x}^2 + L^2 \dot{\theta}^2 + 2 \dot{x} L \dot{\theta} \cos \dot{\theta}$

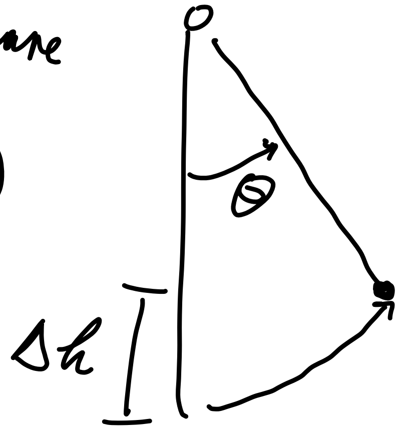
Possiamo scrivere allora

$$E_c = \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x} L \dot{\theta} \cos\theta$$

Prendiamo $D \equiv 0$

non lineare

Energia Potenziale $\rightarrow V = Mg\Delta h = Mg(L - L\cos\theta)$

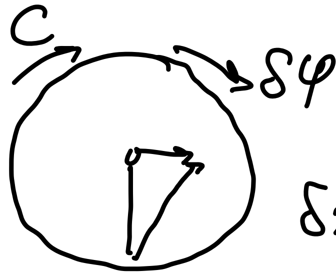


$\frac{\delta L_i}{\delta q_i}$

Lavoro

$$\delta W = C\,\delta\varphi = \frac{C}{R}\delta x$$

Coppia su ruota anteriore



$\delta x = R\,\delta\varphi$

Per ognuno di questi passi è un passaggio legami cinematico con variabili libere e.g $\Delta h \rightarrow f(\theta)$

$E_c \rightarrow f(\dot{x}, \dot{\theta})$

$i=1)\ q_i = x)$ $$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = (m+M)\dot{x} + ML\dot{\theta}\cos\theta \,;$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = (m+M)\ddot{x} + ML\ddot{\theta}\cos\theta - ML\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta$$

Secondo termine $\longrightarrow \frac{\partial E_c}{\partial x} = 0$

Funzione solo di $\dot{\theta}$, quindi rispetto a x è costante $\rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = 0$;

$$\delta L_x = \frac{C}{R}\delta x \rightarrow \frac{\delta L_x}{\delta x} = \frac{C}{R}$$

Lagrangiana su x) $(m+M)\ddot{x} + ML\ddot{\theta}\cos\theta - ML\dot{\theta}^2\sin\theta = \frac{C}{R}$

x)

$i=2) \rightarrow q_i = \theta)$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} = ML^2\dot{\theta} + M\dot{x}L\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt} = ML^2\ddot{\theta} + M\ddot{x}L\cos\theta - M\dot{x}\dot{\theta}L\sin\theta$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \theta} = -M\dot{x}L\dot{\theta}^2\sin\theta$$

si cancellano perché $-\frac{\partial E_c}{\partial \theta}$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = MgL\sin\theta \qquad \frac{\delta L_\theta}{\delta \theta} = 0$$

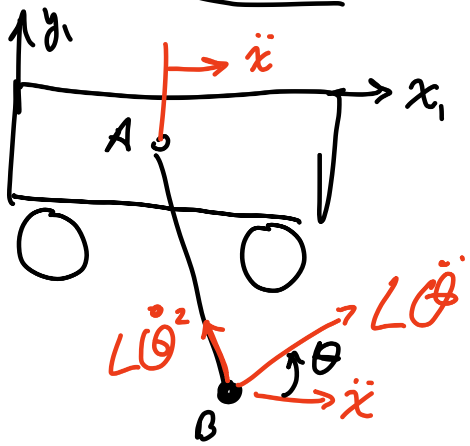
Lagrangiana per $q = \theta$)

θ) $ML^2\ddot{\theta} + M\ddot{x}L\cos\theta + MgL\sin\theta = 0$

$$\begin{aligned} x)&\ \begin{cases} (m+M)\ddot{x} + ML\ddot{\theta}\cos\theta - ML\dot{\theta}^2\sin\theta = C/R \\ ML^2\ddot{\theta} + M\ddot{x}L\cos\theta + MgL\sin\theta = 0 \end{cases} \\ \theta)&\end{aligned}$$

→ Forze
→ Coppie } Quello che rappresenta

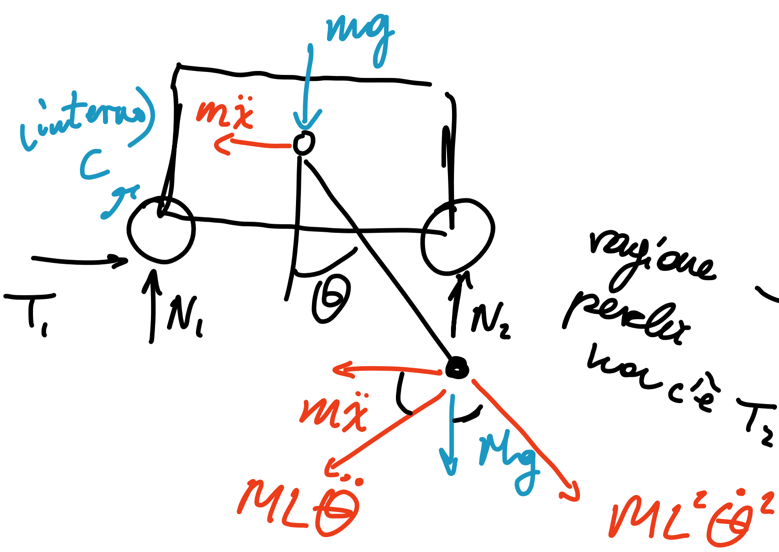
Equilibrio Dinamico



$$\vec a_B = \vec a_A + \vec\omega \times (B-A) - \omega^2 (B-A)$$

$\vec a_B$	$\vec a_A$	$\vec\omega \times (B-A)$	$\omega^2 (B-A)$
?	$\ddot x$	$\ddot\theta L$	$L\dot\theta^2$
?	// x	⊥AB	B→A

Schema delle forze

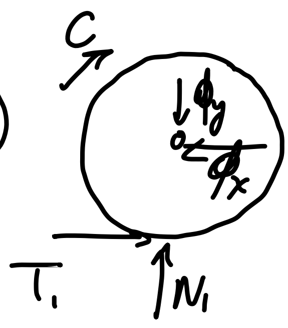


Abbiamo detto di 'guardare le variabili di moto', T_1 è lì solo per contrastare C

ragione perché non c'è T_2

③ $\xrightarrow{+} R_x$ (tutto) $T_1 - m\ddot x - M\ddot x - ML\ddot\theta\cos\theta + ML^2\dot\theta^2\sin\theta = 0$

② $+\circlearrowleft M_{o_1}$ (ruota)



$T_1 R = C \Rightarrow$ Combinando ③ e ②

$$(M+m)\ddot x + ML\ddot\theta\cos\theta - ML^2\dot\theta^2\sin\theta = \frac{C}{R}$$

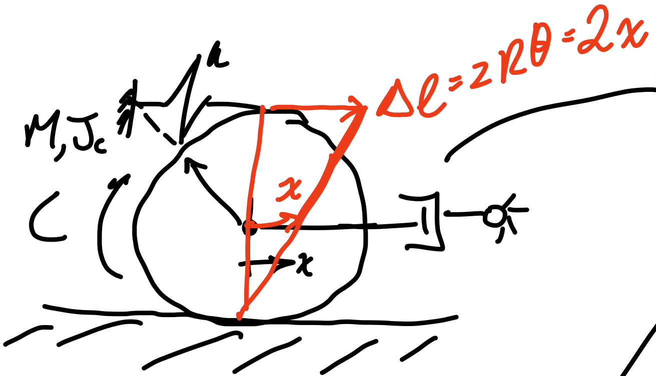
Prima equazione

③ $+)\ M_A (AB)$ $\quad M\ddot{x}L\cos\theta + ML^2\ddot{\theta} + MgL\sin\theta = 0$

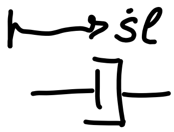
Seconda equazione

Inserendo le equazioni di energia con le variabili libere riusciamo ad avere gli equilibri dinamici delle forze e delle coppie.

Esempio (solo scrittura equazione)



Smorzatore viscoso:



$F_v = r\dot{\Delta l}$

Applica una forza di smorzamento viscosa.

↳ È sensibile alla velocità di allungamento, la molla è sensibile all'allungamento

Assumiamo come variabile x

$$D = \frac{1}{2} r \dot{\Delta l}^2$$

r = coefficiente di smorzamento $\left[\frac{Ns}{m}\right]$

$$E_c = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_c \dot{\theta}^2 \underset{\dot{x} = R\dot{\theta}}{=} \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_c \frac{\dot{x}^2}{R^2} = \frac{1}{2}\left(M + \frac{J_c}{R^2}\right)\dot{x}^2$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial x} = 0$$

↳ Non dipende da dove è piazzato

$$V = \frac{1}{2} k \Delta l^2 = \frac{1}{2} k (2x)^2 = 2kx^2$$

$$D = \frac{1}{2} r \Delta \dot{l}^2 = \frac{1}{2} r \dot{x}^2$$

$$\delta L = C\,\delta\theta = \frac{C\,\delta x}{R}$$

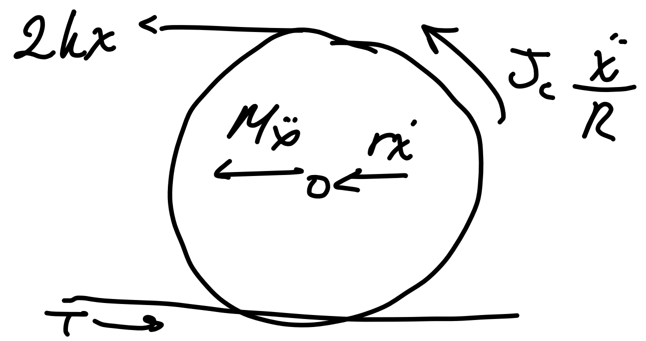
$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = \left(M + \frac{J_c}{R^2}\right)\dot{x}; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = \left(M + \frac{J_c}{R^2}\right)\ddot{x}$$

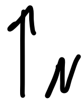
$$\frac{\partial E_c}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = r\dot{x}; \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 4kx$$

$$\delta L_x = C\frac{\delta x}{R} \rightarrow \frac{\delta L_x}{\delta x} = \frac{C}{R}$$

$$\boxed{\left(M + \frac{J_c}{R^2}\right)\ddot{x} + r\dot{x} + 4kx = \frac{C}{R}}$$

Ancora: si ottiene usando equilibrio dinamico e forze




N