# Lezione 8 -

Principio dei Lavori Virtuali

→ se $\doteq 0$ isostatico, se $\neq 0$ non isostatico

$\delta L = 0 \iff$ equilibrio di un sistema (formato da corpi rigidi)

virtuale

$$\delta L = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{P}_i + \sum_k \vec{c}_k \cdot \delta \vec{\theta}_k$$

spostamento virtuale

→ rotazione virtuale della stessa coppia / momento

Caratteristiche:

1) compatibile con i vincoli → tutto coordinato
2) reversibili → posso avere in un verso e il verso opposto
3) di ampiezza arbitraria
4) assimilabili ad infinitesimi (I° ordine)
   → piccoli ma non interessa quanto
5) Indipendente dal tempo

per eg. manovellismo è $\alpha$

Variabile indipendente

Velocità

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\,\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\,\hat{\jmath} \qquad x = x(t) \quad y = y(t)$$

Spostamenti Virtuali
(1 gdl = $q$)

se $q = q(t)$

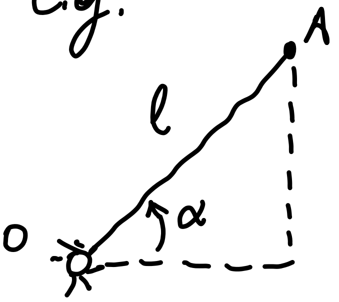
$$\vec{v} = \frac{dx}{dq}\dot{q}\,\hat{i} + \frac{dy}{dq}\dot{q}\,\hat{j}$$

$$\delta\vec{P} = \left(\frac{dx}{dq}\hat{i} + \frac{dy}{dq}\hat{j}\right)\delta\dot{q}; \quad x = x(q), \quad y = y(q)$$

stesso risultato

Con la geometria troviamo che le velocità e le velocità virtuali sono tangenti alla traiettoria che descrivono.

E.g.




$x_A = l\cos\alpha$

$y_A = l\sin\alpha$

$(A - O) = \vec{A} = l\cos\alpha\,\hat{i} + l\sin\alpha\,\hat{j}$

↳ Spostamento

Spostamento Virtuale

↳ $q = \alpha \Rightarrow \delta\vec{P} = \left(\frac{dx}{dq}\hat{i} + \frac{dy}{dq}\hat{j}\right)\delta\dot{q}$ $\quad x = x(q), \quad y = y(q)$

Velocità Virtuale

$$\delta\vec{A} = -l\sin\alpha\cdot\delta\alpha\,\hat{i} + l\cos\alpha\cdot\delta\alpha\,\hat{j}$$

Applicando uno spostamento virtuale vediamo come cambia. In realtà con il tempo, virtuale non c'è tempo.

Velocità reale: $\vec{v} = (-l\sin\alpha)\dot{\alpha}\,\hat{i} + (l\cos\alpha\,\dot{\alpha})\,\hat{j}$

↳ stesso risultato con metodi diversi

Ci sono 2 approcci per studiare, quello energetico e quello degli equilibri statici:
↳ li studiamo tutti e due e vediamo le analogie

PLV: $\sum_i \vec{F_i} \cdot \delta \vec{P_i} + \sum_k \vec{c}_k \cdot \delta \vec{\theta}_k = 0$

$$\sum_i \left( F_{ix}\, \delta x_i + F_{iy}\, \delta y_i \right) + \sum_k c_k \cdot \delta \theta_k =$$

↳ Si usa un sistema di riferimento dove F e ($\delta x_i$ e $\delta y_i$) sono definite

sarà sulla 3° asse

Portano indipendenza da t

$$= \sum_i \left( F_{ix} \frac{dx_i}{dq} \delta q + F_{iy} \frac{dy_i}{dq} \delta q_i \right) + \sum_k c_k \frac{d\theta_k}{dq} \delta q =$$

gli spostamenti sono infinitesimi del primo ordine

↳ devono rispettare i vincoli

$$= \left( \sum_i F_{ix} \frac{dx_i}{dq} + F_{iy} \frac{dy}{dq} + \sum_k c_k \frac{d\theta_k}{dq} \right) \delta q = 0$$

$Q$

Equilibrio è indipendente da $q$, ma da $Q$

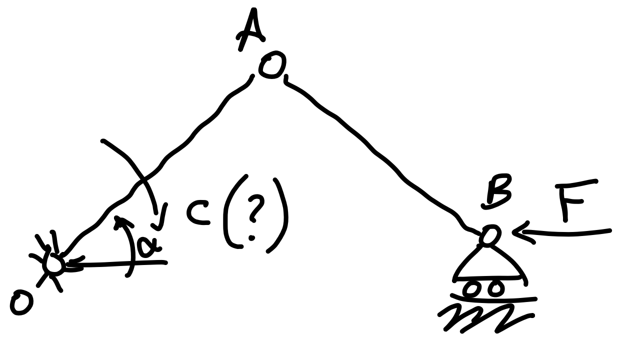
↳ È effetto F e C che applichiamo

$\delta L = Q \delta q$ $\boxed{\delta L = 0 \Rightarrow Q = 0}$ equazione risolvente

Dividiamo le forze e coppie e la lavoro efficace a trasmette lavoro

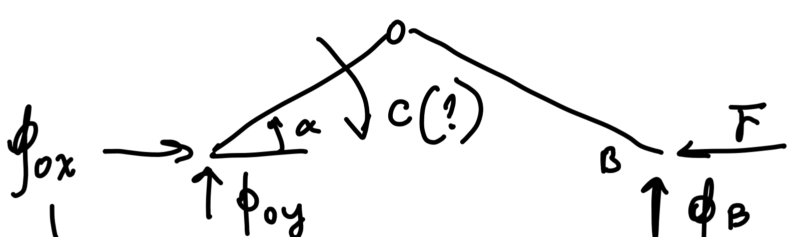
Uso di cinematica per studiare

<u>Esempio</u> - Manovellismo ordinario circolare

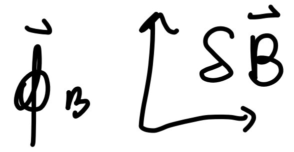



Staticamente

Togliamo le reazioni vincolari



I lavori sono nulli perché stiamo prendendo questo punto come punto di riferimento del sistema



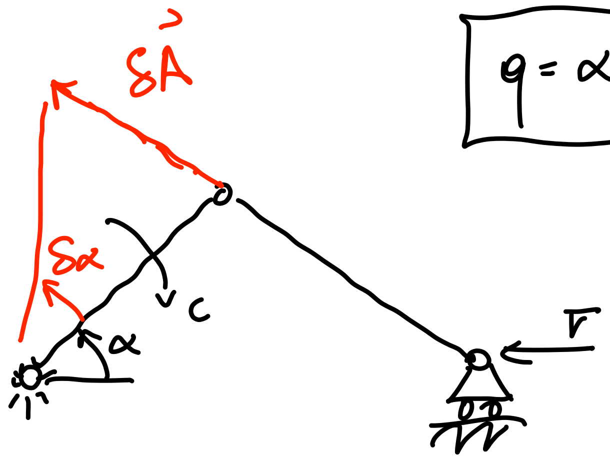

$\vec{\phi}_B \cdot \delta\vec{B} = 0 \not\Leftrightarrow \vec{\phi}_B = 0$

essendo $\perp$ tra loro

PLV e approccio energetico

Fermo se $\delta L = 0$

Pausa



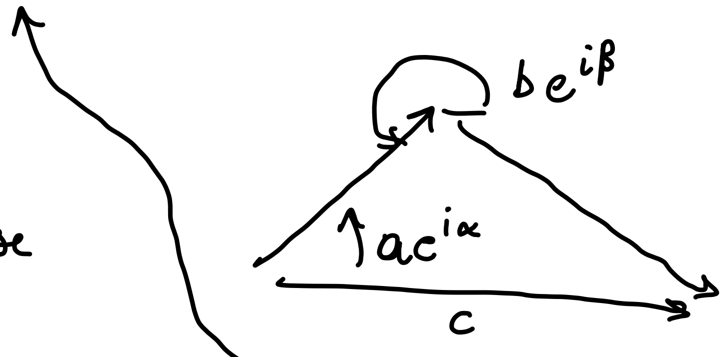

$\boxed{q = \alpha}$

Vogliamo risolvere rispetto allo spostamento di A

$$\vec{c}\cdot\delta\vec{\alpha} + \vec{F}\cdot\delta\vec{B} = 0$$

$$-c\cdot\delta\alpha - \underbrace{F\frac{dc}{d\alpha}\delta\alpha} = 0 \Rightarrow \overbrace{\left(-c - F\frac{dc}{d\alpha}\right)}^{Q}\delta\alpha = 0$$

↳ Perchè abbiamo preso direzioni diverse




$(B-O) = c(\alpha)\hat{i}$

$$\dot{c} = \Lambda(\alpha)\dot{\alpha} = (-a\sin\alpha + a\cos\alpha\tan\beta)\dot{\alpha}$$

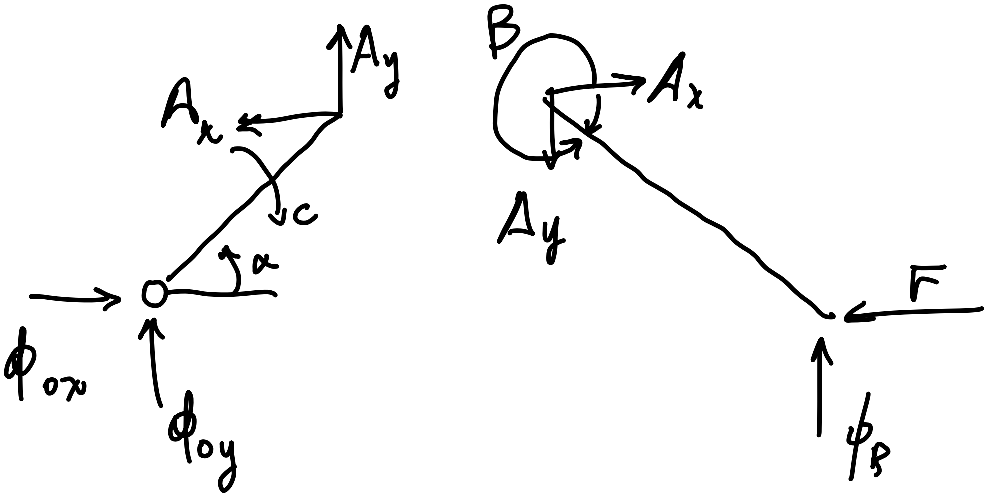
$$\delta c = \Lambda(\alpha)\delta\alpha$$

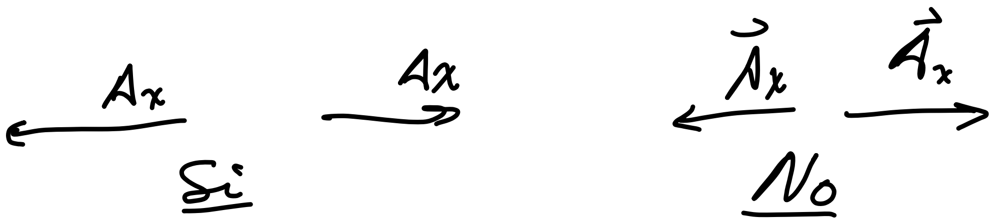
$$C = -F\Lambda(\alpha)$$

$$\Rightarrow C = Fa\sin\alpha - Fa\cos\alpha\tan\beta$$

↳ Equilibrio da bilancio di velocità

## Studio con equilibrio



Stesso modulo non stesso vettore

$R_x$(biella) $\quad A_x - F = 0$

↳ Si scrive che tipo che capire da dove deriva, si perdono meno punti

$R_y$(biella) $\quad -A_y + \phi_B = 0$

$+\circlearrowleft$ $M_A$(biella) $\quad \phi_B\, b\cos\beta - b\sin\beta(-F) = 0$

(-) perché induce antiorario

(-) perché scegliamo angolo interno

$+\circlearrowleft$ $M_0$ (manovella)

rette di azione, perché sono momenti

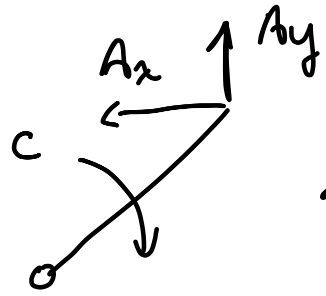
$$-c + A_y\, \overbrace{a\cos\alpha} + A_x\, \overbrace{a\sin\alpha} = 0$$

$$c = A_y\, a\cos\alpha + A_x\, a\sin\alpha$$

Abbiamo $A_x = F$ e $A_y = \phi_B = -F\tan\beta$

$$\Rightarrow \phi_B = -F\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = -F\tan\beta$$

↳ Essendo tangente ferma la rotazione della biella

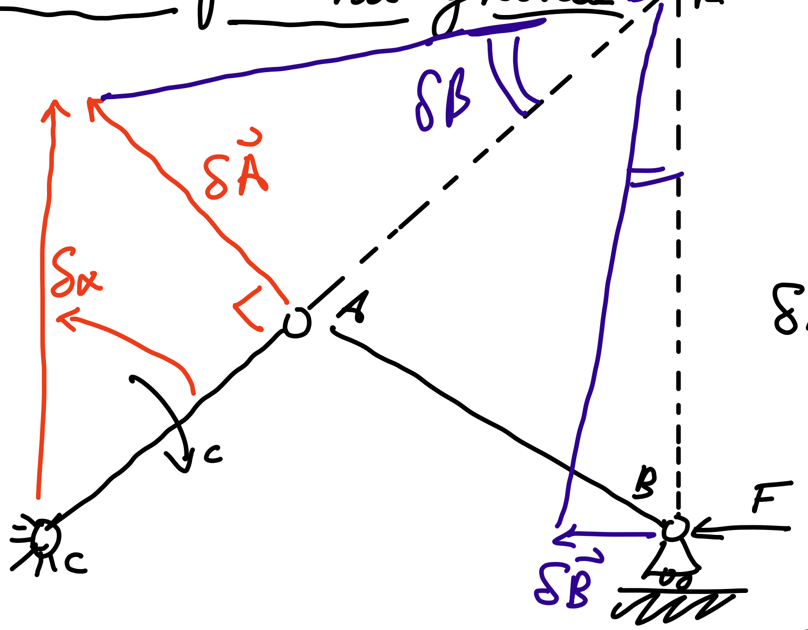



La coppia ferma il movimento della

$$c = -F\tan\beta \cdot a\cos\alpha + F a\sin\alpha = F(a\sin\alpha - a\cos\alpha\tan\beta)$$

Stessa coppia che abbiamo trovato prima con la cinematica ora abbiamo trovato con il momento dell'energia

Stesso ma per via grafica




$$\vec{c}\cdot\delta\vec{\alpha} + \vec{F}\cdot\delta\vec{B} = 0$$

$$\delta A = \overline{OA}\,\delta\alpha = \overline{AK}\,\delta\beta$$

$$\delta\beta = \overline{BK}\,\delta\beta$$

$$\delta\beta = \delta\alpha\,\frac{\overline{OA}}{\overline{AK}}$$

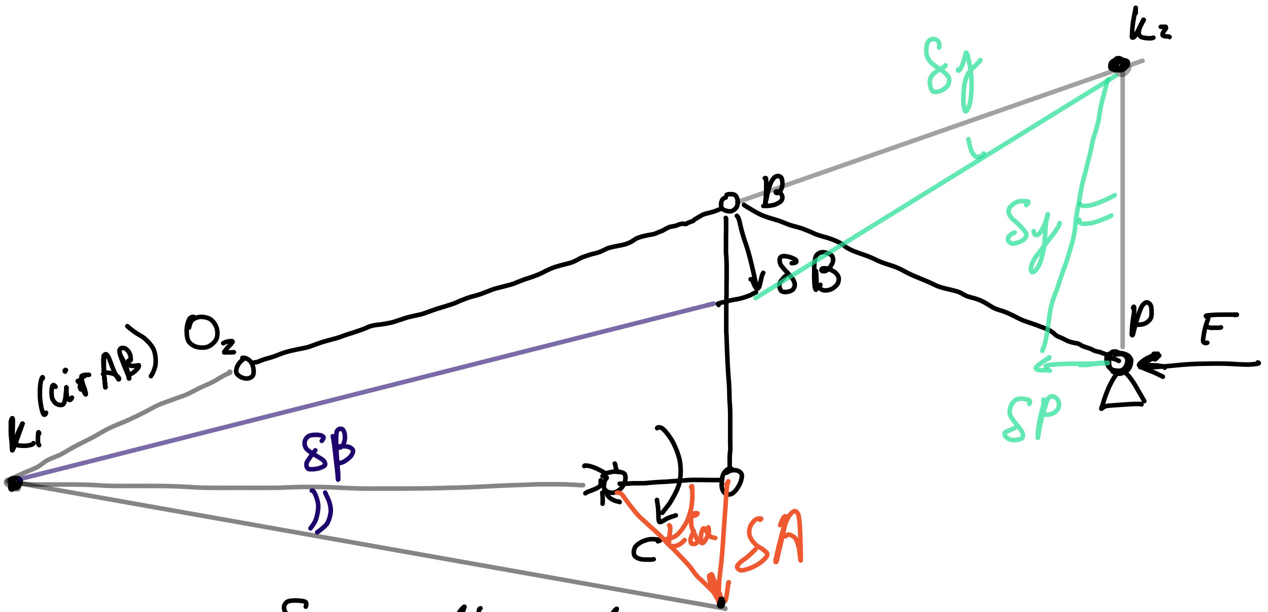
$$\boxed{\delta B = \overline{BK}\;\overline{OA}\;\delta\alpha}$$

$\overline{AK}$

$$-c\,\delta\alpha + F\,\delta B = 0$$

$$-c\,\delta\alpha + F\,\overline{OA}\,\frac{\overline{BK}}{\overline{AK}} = 0$$

$$\underbrace{\left(-c + F\,\overline{OA}\,\frac{\overline{BK}}{\overline{AK}}\right)}_{Q}\cancel{\delta\alpha} = 0 \Rightarrow Q = 0$$




Scopo di questo è aumentare il vantaggio di c su F

$$\vec{c}\cdot\delta\vec{\alpha} + \vec{F}\cdot\delta\vec{P} = 0$$

$$\overline{OA}\,\delta\alpha = \overline{AK_1}\,\delta\beta \qquad \delta P = \overline{PK_2}\,\delta\gamma$$

$$\delta B = \overline{BK_1}\cdot\delta\beta$$

$$\delta\beta = \delta\alpha \cdot \frac{\overline{OA}}{\overline{AK_1}}$$

$$\delta\gamma = \delta\beta \, \frac{\overline{BK_1}}{\overline{BK_2}}$$

$$\delta\gamma = \delta\alpha \, \frac{\overline{OA}}{\overline{AK_1}} \cdot \frac{\overline{BK_1}}{\overline{BK_2}}$$

$$\delta P = \underbrace{\overline{PK_2} \, \frac{\overline{OA}}{\overline{AK_1}} \, \frac{\overline{BK_1}}{\overline{BK_2}}}_{\text{tiene a conto tutte geometrie, vincoli e dimensioni}} \delta\alpha = \Lambda_{P\alpha} \, \delta\alpha$$

$$c\,\delta\alpha - F\,\delta P = 0$$

$$c = F \Lambda_{P\alpha}$$