Laboratorio 2

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n \ ?$$

Inizio

$$x^{(0)} \to x^{(1)} \to \ldots \to x^{(k+1)} \to \infty$$

$$k \to \infty \Rightarrow \underline{x}^{(k)} = \underline{x}$$

Forma

$$\text{I} \quad \underline{x}^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g \qquad k \geq 0$$

Metodi di Richardson stazionari

Forma

$$\text{R} \quad x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k P^{-1} r^{(k)} \qquad k \geq 0$$

Richardson

Servono $\alpha_k = \alpha$, P ?

Condizione necessaria e sufficiente per convergenza

$$\rho(B) < 1$$

$$\rho(B) = \max_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i(B)| \qquad \text{"max(abs(eig(B)))"}$$

Implementazione di Richardson

→ Dati $\underline{x}^{(0)}, P, \alpha, \varepsilon, k_{MAX}$

<u>Se $k < k_{MAX}$: e criterio di arresto non verificato</u>
<u>Ciclo</u>

1) $P\underline{z}^{(k)} = \underline{r}^{(k)}$ → per oggi il "\"

2) $\underline{x}^{(k+1)} = x^{(0)} + \alpha \underline{z}^{(k)}$

→ Residuo precondizione

3) $r^{(k+1)} = b - Ax^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha A z^{(k)}$

Strumenti per fine approssimazioni
Se $k < k_{MAX}$, arrestiamo:?

$$\underbrace{\frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|}}_{} \le \varepsilon \quad \text{oppure} \quad \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \le \varepsilon$$

Se è piccolo a sufficienza va bene

Ci dicono che siamo intorno alla risposta

Quello che implementiamo oggi

Non dobbiamo salvare $x^{(k+1)}$

Casi particolari di Richardson:

Jacobi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} \right]$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} \right]$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} \right]$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} \right] \qquad i=1,\dots,n$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}^{(k+1)} = D^{-1}\left(\underline{b} - (A-D)x^{(k)} \right)$$

Cambiando in forma I o R

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(D-A)\,x^{(k)} + D^{-1}\underline{b}$$

$$= (I - D^{-1}A)x^{(k)} + \underbrace{D^{-1}\underline{b}}_{g}$$ Forma (I)

Jacobi: $B_J = I - D^{-1}A$

$g_J = D^{-1}\underline{b}$

Invece nella forma Richardson $\quad P = D$, $\alpha = 1$

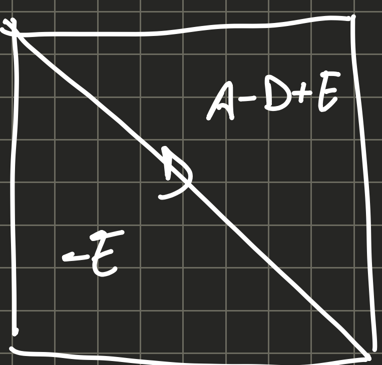
$$= x^{(k)} + D^{-1}\underline{b} - D^{-1}Ax^{(k)}$$

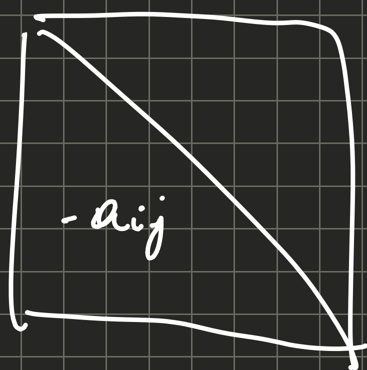
$$= x^{(k)} + D^{-1}(b - Ax^{(k)})$$

$$= x^{(k)} + D^{-1}r^{(k)}$$ $\rightarrow$ Forma Richardson, $\alpha = 1$

<u>Gauss-Seidel</u>

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right]$$

$A =$ 

$E =$ 

$$x^{(k+1)} = D^{-1}\left(\underline{b} + Ex^{(k+1)} - (A-D+E)x^{(k)}\right)$$

$$Dx^{(k+1)} = \underline{b} + Ex^{(k+1)} + (D-E-A)x^{(k)}$$

$$(D-E)x^{(k+1)} = \underline{b} + (D-E-A)x^{(k)}$$

$$x^{(k+1)} = (D-E)^{-1}(D-E-A)x^{(k)} + (D-E)^{-1}\underline{b}$$

$$\left(I - (D-E)^{-1}A\right)x^{(k)} + (D-E)^{-1}\underline{b} \quad \text{Forma } \mathrm{I}$$

<u>Gauss Seidel</u>

$$B_{GS} = \left(I - (D-E)^{-1}A\right) \qquad g = (D-E)^{-1}\underline{b}$$

$$\rightarrow x^{(k)} + (D-E)^{-1}\underline{b} - (D-E)^{-1}Ax^{(k)}$$

$$\rightarrow \underbrace{(D-E)^{-1}}_{P}\underbrace{(\underline{b} - Ax^{(k)})}_{r^{(k)}} + x^{(k)}$$

$$P = (D-E) \qquad \alpha = 1$$

Condizioni sufficienti per convergenza

<u>J</u>

- A dominanza diagonale stretta per righe e colonne

<u>GS</u>

- A dominanza diagonale stretta per righe e colonne
- A è sdp

Se A è tridiagonale, non singolare, con $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$

allora J e GS sono entrambi o convergenti o divergenti.

↳ Se sono entrambi convergenti allora $\rho(B_{GS}) = [\rho(B_J)]^2$

$\Rightarrow$ GS è ~2x più veloce nella convergenza.

↳ Confermato con calcolo di k_{min}

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & & \\ -2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \qquad \underline{x}^0 = [0, \dots, 0]^T$$

$\underline{b}$ tale che $\underline{x} = [1, \dots, 1]$

J = 277
GS = 143
iter con $\varepsilon = 10^{-12}$

Caso Generico di Tipo R

Se P e A sono sdp allora $0 < \alpha < \dfrac{2}{\lambda_{max}(P^{-1}A)}$

$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{max}(P^{-1}A) + \lambda_{min}(P^{-1}A)}$$

→ Numero di condizionamento

$$C = \frac{k(P^{-1}A) - 1}{k(P^{-1}A) + 1}$$

↳ Fattore di Abbattimento → quanto veloce è affidabile la convergenza.

Ricorda :

$$B = I - \alpha P^{-1} A$$

$$P^{-1} A = P \backslash A$$

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| = \alpha z^{(k)}$$

↳ Non ci serve tenere due variabili