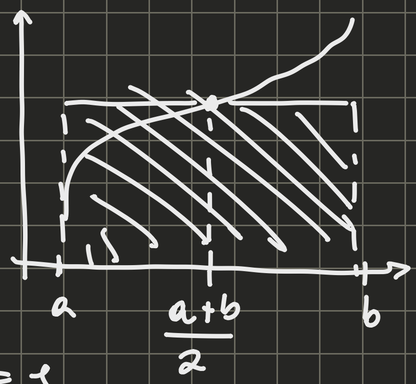
Laboratorio 6

Formule di Quadratura

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \tilde{I}$$

▶ Punto Medio

$$\tilde{I} \approx (b-a)\, f\left(\frac{b+a}{2}\right)$$



↳ grado di esatezza = 1

↳ grado del polinomio per cui trova il valore esatto, se si va oltre c'è errore

diventa un =

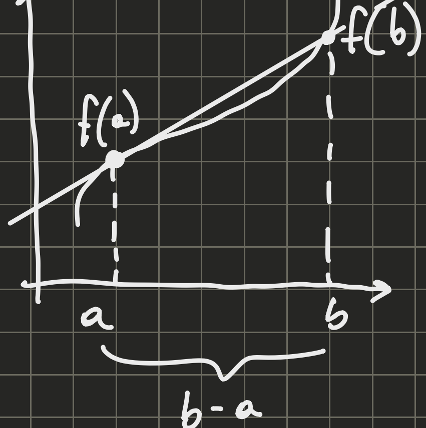
$$\text{Errore} = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi) \qquad \xi \in [a,b]$$

$$f \in C^2([a,b])$$

Possiamo trovare il grado di esatezza solo per i polinomi.

▶ Trapezio

$$\tilde{I} = \frac{(b-a)}{2}\big(f(a) + f(b)\big)$$



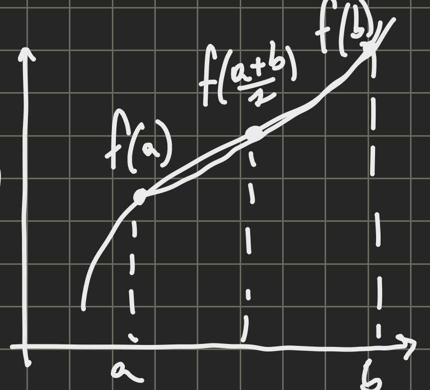
Grado di Esatezza = 1

$$\text{Errore} = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi) \qquad \xi \in [a,b] \qquad f \in C^2([a,b])$$

↳ Peggio

▶ Simpson

$$\tilde{I} = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

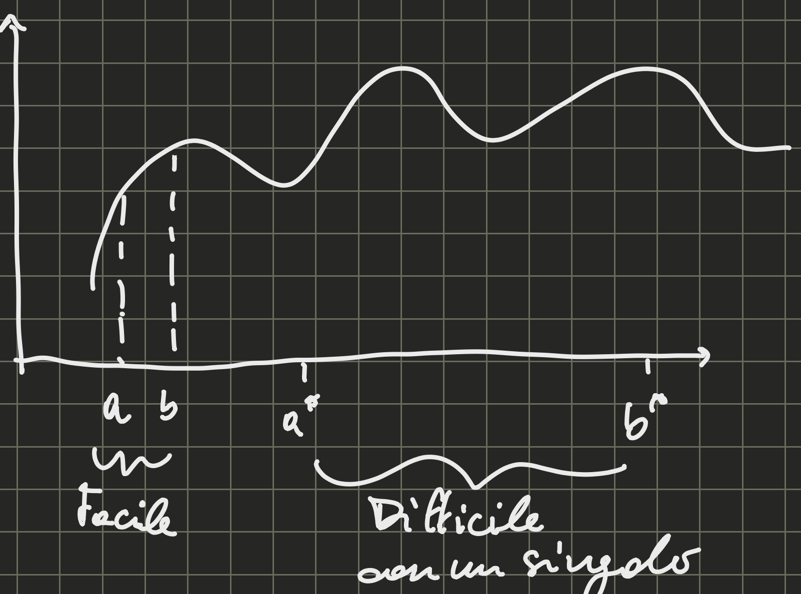


Grado di Esattezza = 3

↳ Meglio, può integrare esattamente un cubico

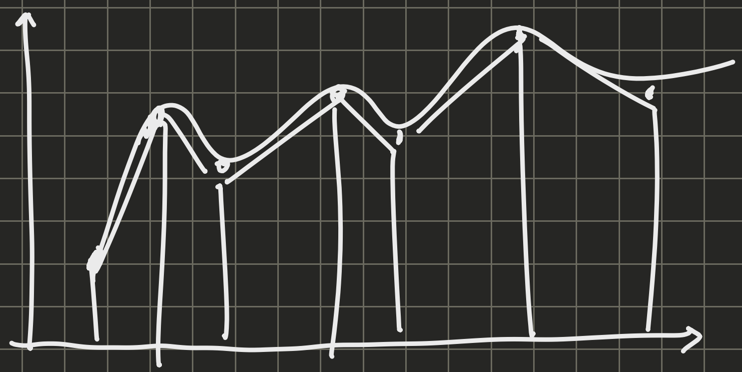
$$E = -\frac{(b-a)^5}{2880} \cdot f^{(IV)}(\xi) \qquad \xi\in[a,b] \quad f\in C^2([a,b])$$

Formule Composite



Le formule semplici non sono adatte ad integrare funzioni in domini grandi che cambiano molto.

Facciamo allora più integrazioni su semi-intervalli per adattarsi più alla forma della funzione



Facciamo N sotto intervalli

Formula composita

$$\tilde{I} = \sum_{n} \tilde{I}_N$$

Punto Medio

$$\tilde{I}_{pm}^{c} = h \sum_{N} f(\bar{x}_N) \qquad h = \frac{b-a}{N}$$

$$E \simeq h^2$$

Trapezio

$$\tilde{I}_T^c = h\left(\underbrace{\tfrac{1}{2} f(x_0)}_{\text{Estremo sx}} + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \underbrace{\tfrac{1}{2} f(x_n)}_{\text{Estremo dx}}\right)$$

$$E \sim h^2$$

Simpson

$$\tilde{I}_s^c = \frac{h}{6}\left[f(x_0) + 2\sum_{n=1}^{N-1} \underbrace{f(x_{2n})}_{\text{pari}} + 4\sum_{s=0}^{N-1} \underbrace{(x_{2s-1})}_{\text{dispari}} + f(x_{2N})\right]$$

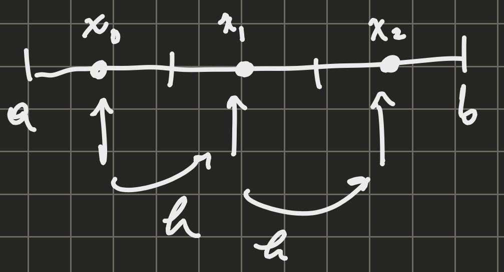
$$E \sim h^4$$

Più piccolo è h più piccolo è E

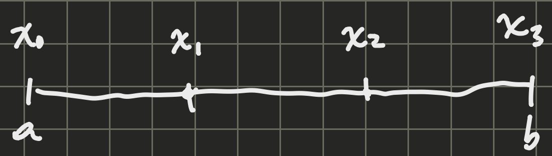
↳ Convergenza più veloce rispetto agli altri due.

Come prendiamo i nodi?

$N = 3$



Trapezio



Simpson

$$\sum_{N} \frac{h}{6}\left[f(x_1) + 4f(\bar{x}) + f(x_2)\right]$$