Esercitazione 1 - Soluzioni di ODE di grado 1 e 2.

Equazioni Differenziali Ordinarie (EDO/ODE)

? $x(t)$, $y(t)$ — t variabile indipendente

Lo scopo è di trovare un'intera funzione non una parte.

$$\{ x'(t), x''(t), \dots \} = f(t, x, x', \dots)$$

Non dobbiamo trovare numeri, matrici o altri valori di funzioni; vogliamo la funzione stessa.

Noi guardiamo gli ODE di ordine 1 e 2.

Guardiamo ODE 1 lineari a coefficienti costanti

↳ ODE di grado 2 lineare coefficienti costanti omogenee.

ODE a variabili separabili

$$x'(t) = A(t)\, B(x(t)) \qquad A, B \text{ continue}$$

$$- \ x(t) = \bar{x} : B = 0 \rightarrow \bar{x} \text{ di equilibrio}$$

$$- \text{ ora } B \neq 0 \qquad \frac{x'(t)}{B(x(t))} = A(t)$$

↳ Abbiamo separato i termini dipendenti da x da quelli non.

$$\int \frac{x'(t)}{B(x(t))}\, dt = \int A(t)\, dt + C$$

$$\underbrace{\int \frac{dx}{B(x)}}_{I(x)} = \underbrace{\int A(t)\, dt}_{J(t)} + C$$

↳ $x(t) = \ldots$

Esempio:

$x'(t) + \underbrace{2t}\, x^2(t) = 0$ ordine I, non lineare, non costante

$$x'(t) = \underbrace{-2t}_{A(t)} \cdot \underbrace{x^2(t)}_{B(x(t))}$$

Equilibri → quando è che $B = 0$?

↳ per $x^2(t) = 0 \Rightarrow$ quando $x(t) = \bar{x} = 0$

Quando $B \neq 0$?

$$\int \frac{dx}{x^2}\, dx = \int -2t\, dt + C$$

$$\frac{-1}{x} = t^2 - C \qquad x(t) = \frac{1}{t^2 - C}$$

dando la condizione iniziale $x(0) = -1$

$$x(0) = -1 = \frac{1}{0^2 - C} \Rightarrow \frac{-1}{C} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{t^2 - 1}$$

Equazioni Lineari del Primo Ordine nella forma:

$$x'(t) = \underbrace{a(t)}_{\substack{\text{coefficiente} \\ \text{della } x, \\ \text{in generale non} \\ \text{è costante}}} x(t) + b(t)$$

$\downarrow$

noi guardiamo così in modo è.

Forma della soluzione

$$x(t) = e^{\int a(\tau)\, d\tau} \left\{ c + \int b(t)\, e^{-\int a(\tau) d\tau} \right\}$$

Può esser complesso in base alla forma di $a(t)$ e $b(t)$

Per semplificare usiamo coefficienti costanti

cioè $a(t) = a$ costante, allora la soluzione ha forma:

$$x(t) = e^{at} \left[C + \int b(t)\, e^{-at} dt \right]$$

Esempio:

$$x'(t) - 2t = e^{2t}$$

$$x'(t) = \underbrace{2}_{a}\underbrace{x(t)}_{x(t)} + \underbrace{e^{2t}}_{b(t)}$$

$$x(t) = e^{2t}\left\{ C + \int e^{2t} e^{-2t}\, dt \right.$$

$$= e^{2t}\left[C + t \right] = Ce^{2t} + te^{2t}$$

Equazioni Lineari del Secondo Ordine Omogenee

Hanno forma:

$$\underbrace{a\, x''(t) + b\, x'(t) + c}_{\text{costanti}}\, x(t) = \underbrace{f(t) = 0}_{\text{Omogenea}}$$

Polinomio Caratteristico Associato:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$b^2 - 4ac \to \Delta \to$ Determinante

Casi in base a Δ:

- se $\Delta > 0$ $\Rightarrow$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ con equazioni associate:

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t} \quad e \quad \varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

La soluzione $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

Esempio

$$x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = 0$$

$\rightarrow a = 1,\ b = -5,\ c = 6$

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} 2 = \lambda_1 \\ 3 = \lambda_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$$

Per determinare c_1 e c_2 servono le condizioni iniziali.

Per le ODE di grado 2 infatti si danno 2 condizioni, una su $x(t)$ e una su $x'(t)$

- se $\Delta = 0$

$$\lambda_{1,2} = \lambda = \frac{-b}{2a}$$

$$\varphi_1 = e^{\lambda t} \qquad \varphi_2 = t e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

Esempio:

$$x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = 0$$

$a=1 \qquad b=-4 \qquad c=4$

$$\Delta = 16 - 4\cdot 1\cdot 4 = 0$$

$$\lambda = \frac{4+\sqrt{0}}{2} = 2$$

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$$

$$x'(t) = 2c_1^{2t} + c_2 e^{2t} + 2c_2 t e^{2t}$$

$$x''(t) = 4c_1 e^{2t} + 2c_2 e^{2t} + 4c_2 t e^{2t} + 2c_2 e^{2t}$$

$$x'' - 4x' + 4x = 0$$

$$\cancel{4c_1 e^{2t}} + \cancel{4c_2 e^{2t}} + \cancel{4c_2 t e^{2t}} - \cancel{8c_1 e^{2t}} - \cancel{4c_2 e^{2t}} - \cancel{8c_2 t e^{2t}} +$$
$$+ \cancel{4c_1 e^{2t}} + \cancel{4c_2 t e^{2t}} = 0$$

↳ È vero per ogni scelta di c_1 e c_2

- se $\Delta < 0$

λ_1 e λ_2 saranno complesse coniugate

$$\lambda_{1,2} = \underbrace{\alpha}_{\text{parte reale}} \mp i\underbrace{\beta}_{\text{parte immaginaria}}$$

$$\varphi_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$$
$$\varphi_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

$$x(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2 e^{\beta t}\sin(\beta t)$$

Esempio:

$$\underbrace{x''(t)}_{a=1} + \underbrace{2x'(t)}_{b=2} + \underbrace{5x(t)}_{c=5} = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4\cdot 1\cdot 5 = 4 - 20 = -16$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \mp 4i}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = -1-2i \\ \lambda_2 = -1+2i \end{cases}$$

$$\alpha = -1 \quad e \quad \beta = 2$$

$$x(t) = C_1 e^{-t}\cos(2t) + C_2 e^{-t}\sin(2t)$$

se $f \neq 0$ → non lo vediamo, lo abbiamo già fatto in analisi 2.

$$x(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) + \bar{\varphi}(t)$$

Trasformata di Laplace

Trasforma una equazione differenziale in una algebrica, e possiamo convertire indietro con l'antitrasformata.

Esercizio 1.1

$$f(t) = \underbrace{5e^{-2t}}_{(1)} - \underbrace{e^{-t}\cos(4t)}_{(2)}$$

$$?\ \mathcal{L}[f(t)](s) = (1) - (2) \rightarrow \text{linearità}$$

$$(1) \rightarrow \mathcal{L}[5e^{-2t}](s) = 5\cdot\mathcal{L}[e^{-2t}](s)$$

$$\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a}$$

$$= 5 \cdot \frac{1}{s-a} = \frac{5}{s-2}$$

(2) $\mathcal{L}[e^{-t}\cos(4t)](s)$

$\left(\mathcal{L}[e^{at} f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s-a) \right)$

$\rightarrow \mathcal{L}[\cos(4t)](s-(-1)) = \mathcal{L}[\cos(4t)](s+1)$

$\left(\mathcal{L}[\cos(at)] = \frac{s}{s^2+a^2} \right)$

$$\rightarrow \frac{(s+1)}{(s+1)^2+4^2}$$

$$\rightarrow \mathcal{L}[f(t)](s) = (1)-(2) = \frac{5}{s+2} + \frac{s+1}{(s+1)^2+16}$$

Esercizio 2.1 $\rightarrow$ Antitrasformata

$$F(s) = \frac{3s+3}{(s+1)^2(s-1)}$$

$\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$?

Proviamo a scoporre in parte più semplici

↳ Scomposizioni in fratti semplici

$$F(s) = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s-1}$$

$$= \frac{(As+B)(s-1) + C(s^2-1)}{(s^2+1)(s-1)}$$

$$= \frac{As^2 - As + Bs - B + Cs^2 + C}{(s^2+1)(s-1)}$$

$$= \frac{s^2(A+C) + s(-A+B) + (-B+C)}{(s^2+1)(s-1)} \quad *$$

$$\begin{cases} A+C = 0 \\ -A+B = 3 \\ -B+C = 1 \end{cases}$$

Troviamo A, B, C che soddisfano.

$$\begin{cases} A = -2 \\ B = 1 \\ C = 2 \end{cases}$$

$$F(s) = \frac{-2s+1}{s^2+1} + \frac{2}{s-1} = \underbrace{\overset{(1)}{\frac{-2s}{s^2+1}} + \overset{(2)}{\frac{1}{s^2+1}} + \overset{(3)}{\frac{2}{s-1}}}$$

Molto più facile per usare l'antitrasformata.

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = (1) + (2) + (3)$$

$$(1) \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-2s}{s^2+1}\right](t) = -2\cos(1 \cdot t = -2\cos(t)$$

$$\left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right](t) = \cos(at)\right)$$

$$(2) \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right](t) = \sin(1 \cdot t) = \sin(t)$$

$$\left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right](s) = \sin(at)\right)$$

(3) $$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s-1}\right](t) = 2e^t$$

$$\left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right](t) = e^{at}\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left[F(s)\right](t) = -2\cos(t) + \sin(t) + 2e^t$$

Applicazione a Cauchy

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}[f''(t)](s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Non un prodotto

$$\begin{cases} y''(t) = -2y(t) + \underbrace{H(t-3)}_{\text{equazione di Heaviside a } t-3} - \underbrace{H(t-4)}_{\text{Heaviside a } t-4} \\ y'(0)=0,\ y(0)=0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[y(t)](s) = Y(s)$$

$$\underbrace{\mathcal{L}[y''(t)](s)}_{(1)} = \underbrace{\mathcal{L}[-2y(t) + H(t-3) - H(t-4)](s)}_{(2)}$$

$$\hookrightarrow (1) = s^2Y(s) - s\cancelto{0}{y'(0)} - s\cancelto{0}{y(0)} = s^2Y(s)$$

$(2) \to$ (2a) : $\mathcal{L}[-2y(t)](s)$

(2b) : $\mathcal{L}[H(t-3)](s)$

$$(2c): \mathcal{L}[H(t-4)](s)$$

$$(2a) \quad -2\mathcal{L}[y(t)](s) = -2\,Y(s)$$

$(2b)$

$$\left(\mathcal{L}[H(t-a)\cdot f(t-a)](s) = e^{-as}\,F(s)\right)$$

$$2b \begin{cases} a = 3 \\ f(t-3) = 1 \end{cases} \implies = e^{-3s}\cdot \mathcal{L}[1](s) = \frac{e^{-3s}}{s}$$

$$(2c) = \frac{e^{-4s}}{s} \rightarrow \text{stesso ragionamento di } (2b)$$

$$s^2\,Y(s) = -2\,Y(s) + \frac{e^{-3s}}{s} - \frac{e^{-4s}}{s}$$

$$Y(s)\,(s^2+2) = \frac{e^{-3s} - e^{-4s}}{s}$$

$$Y(s) = \frac{e^{-3s} - e^{-4s}}{s(s^2+2)}$$

Per trovare la soluzione in forma differenziale, facciamo la anti-trasformata

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)](t)$$

$$Y(s) = \frac{e^{-3s} - e^{-4s}}{s(s^2+2)} = (1) + (2)$$

$$(1) \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3s}}{s(s^2+2)}\right] = H(t-3)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+2)}\right](t-3) = \rightarrow *$$

$$\left(\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}\,F(s)](t) = H(t-a)\cdot f(t-a)\right)$$

$$* \to \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+2)}\right](t-3)$$

Separiamo in fratti semplici

$$\frac{1}{s(s^2+2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2} = \frac{As^2+2A+Bs^2+Cs}{s(s^2+2)}$$

$$= \frac{(A-B)s^2+Cs+2A}{s(s^2+2)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ 2A=1 \end{cases} \longrightarrow A = \frac{1}{2}, \; B = -\frac{1}{2}, \; C = 0$$

$$= \frac{1/2}{s} + \frac{1/2\, s}{s^2+2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+2)}\right](t-3) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2+2}\right](t-3)$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right](t-3) - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+2}\right](t-3)$$

$$(1) = \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{2}\,(t-3)\right) \cdot H(t-3) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{2}\,(t-3)\right) \cdot H(t-3)$$

(2) = Analogo, quindi lo shift è 4 non 3

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{2} \cdot (t-4)\right) \cdot H(t-4)$$

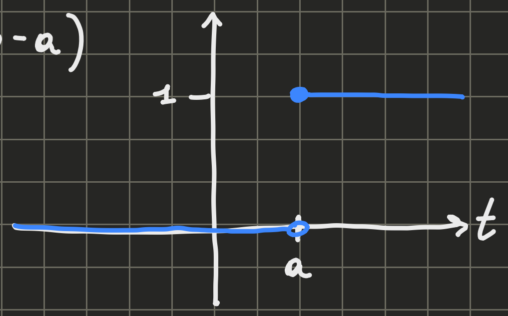
$$\Rightarrow y(t) = \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{2}\,(t-3)\right) \cdot H(t-3) - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{2}\,(t-4)\right) \cdot H(t-4)$$

$$= \frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{2}\,(t-4)\right) \cdot H(t-4) - \frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{2}\,(t-3)\right) \cdot H(t-3)$$

Esercizi 1.2, 2.2 e 3,8

Esercizio 1.2

Heaviside



$$f(t) = (t-\sqrt{5})^2 H(t-\sqrt{5})$$

$$q = t-\sqrt{5}$$

$$q^2 \cdot H(q)$$

$$\mathcal{L}[H(t-a)f(t-a)](s) \overset{=}{} e^{-as} \cdot F(s) = e^{-\sqrt{5}s} \cdot \frac{2}{s^3} = \frac{2 \cdot e^{-\sqrt{5}s}}{s^3}$$

(?)

$$\mathcal{L}[(t-a)^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{2}{s^3}$$

Esercizio 2.2

$$Y(s) = e^{-7s} \cdot \frac{s}{s^2+9}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[H(t-a) \cdot F(s)](t) = H(t-a) \widetilde{f}(t-a)$$

$$y(t) = H(t-7) \cdot \cos(3\underbrace{(t-7)}_{a'(t-a)})$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}\right](t-7)$$

↳ Costruisco il shift solo per cos non dato dal fatto che stiamo controllando in $(t-a)$

Esercizio 3,8

$$\begin{cases} x''(t) = -x'(t) - x(t) - y(t) & t \geq 0 \\ y''(t) = x'(t) & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(0) = y'(0) = 0 \\ x(0) = 0,\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[x''(t) + x'(t) + x(t)](s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$$

$$s^2 X(s) - s\cancel{x(0)}^{\,0} - \cancel{x'(0)}^{\,0} + sX(s) + X(s) = Y(s)$$

$$X(s)(s^2 + s + 1) = Y(s)$$

$$s^2 Y(s) - s\cancel{y'(0)}^{\,0} - y(0) = sX(s) - \cancel{x(0)}^{\,0}$$

$$X(s)(s^2 + s + 1) = Y(s)$$

$$s^2 Y(s) - 1 = sX(s)$$

$$Y(s) = \frac{sX(s)}{s^2 - 1}$$

$$X(s) = \frac{-1}{s^3 + s^2 + s + 1}$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^3 + s^2 + s + 1}$$

<u>Esercizio 1</u>

1.1

$$f(t) = \underset{(1)}{5e^{-2t}} \cdot \underset{(2)}{e^{t}\cos}(4t)$$

$$\mathcal{L}[5e^{-2t}](s) + \mathcal{L}[e^{-t}\cos(4t)](s)$$

$$(1)\quad 5\mathcal{L}[e^{-2t}](s) = \frac{5}{s+2}$$

$$(2)\quad \mathcal{L}[e^{t}\underbrace{\cos(4t)}_{f(t)}] = \frac{s+1}{(s+1)^2+4^2}$$

1.2

$$y(t) = \underbrace{(t-\sqrt{5})^2}_{f(t-a)}\underbrace{H(t-\sqrt{5})}_{H(t-a)}$$

$$a = \sqrt{5}$$

$$F(s) = e^{-\sqrt{5}s} \cdot \frac{2}{s^3} = \frac{2e^{-\sqrt{5}s}}{s^3}$$

$$(t-\sqrt{5})^2 = \frac{2}{s^3}$$

1.3

$$y(t) = e^{-3t}\sin(t)$$

$$F(s-a)$$

$$\mathcal{L}[\underbrace{\sin(t)}](s+3)$$

$$f\left[\frac{1}{s^2+1}\right](s+3) \rightarrow \frac{1}{(s+3)^2+1}$$

1.4

$$f(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{a} \rightarrow \frac{-1}{s^2} + \frac{1}{s} \\ 0 \rightarrow \mathcal{L}[0] = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}$$

Esercizio 2

1. $F(s) = \dfrac{3s+1}{(s^2+1)(s-1)}$

$$\frac{C}{(s-1)} + \frac{As+B}{s^2+1}$$

$$\frac{Cs^2 + C + As^2 - As + Bs - B}{(s-1)(s^2+1)}$$

$A+C = 0$

$B-A = 3$

$C - B = 1$

$$\begin{cases} A = -2 \\ B = 3 \\ C = 2 \end{cases}$$

$A = -C$

$B+C = 3$

$B = 3-C$

$C - (3-C) = 3$

$2C = 4 \Rightarrow C = 2$ ✓

$B = 1 \qquad A = -2$

$$\frac{2}{s-1} + \frac{-2s+1}{s^2+1}$$

$2e^{t} + -2\cos(t) + \sin(t)$

2.2

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-7s}\frac{s}{s^2+9}\right](t)$$

$$e^{-7s}\underbrace{\frac{s}{s^2+9}}_{F(s)}$$

$a = 7$

$H(t-a)$

$$f(t-a) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t-a)$$

$$y(t) = H(t-7)\cos(3(t-7))$$

2.3

$$Y(s) = \frac{-5s^2 + 2s - 239}{s^3 + 3s^2 + 49s + 147}$$

$s(s^2+49) + 3(s^2+49)$

$(s+3)(s^2+49)$