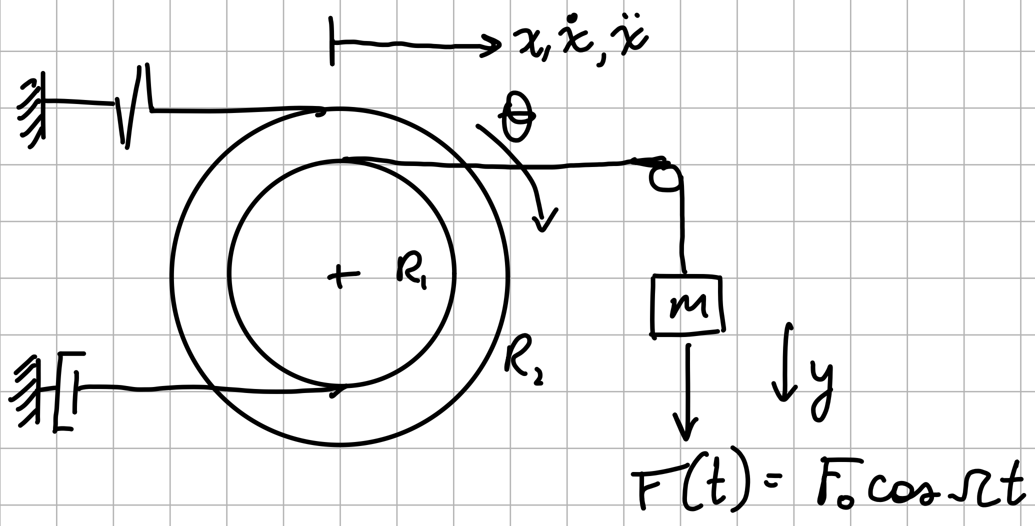
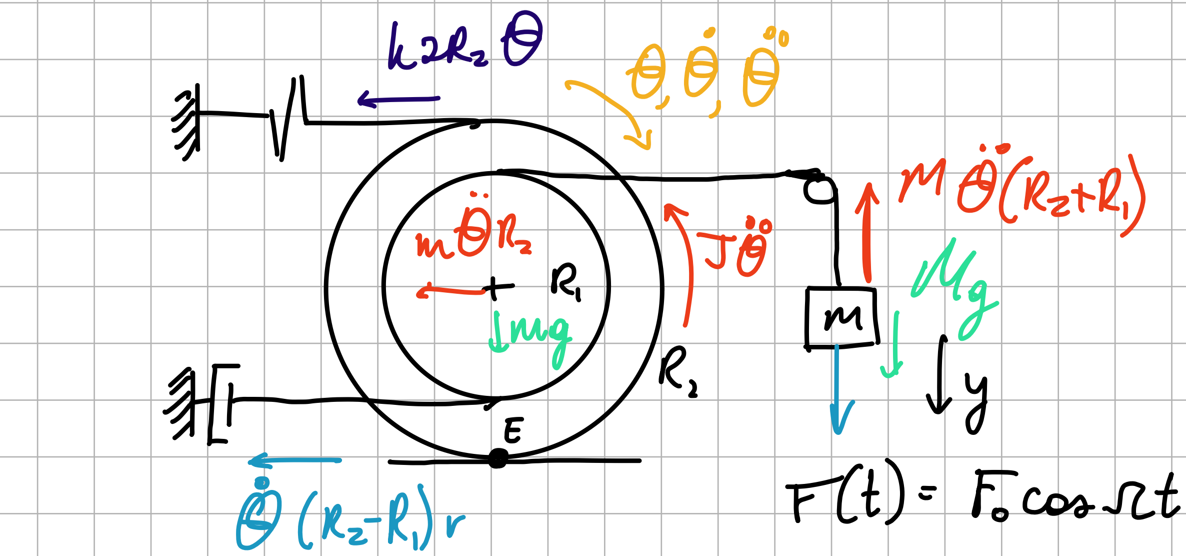
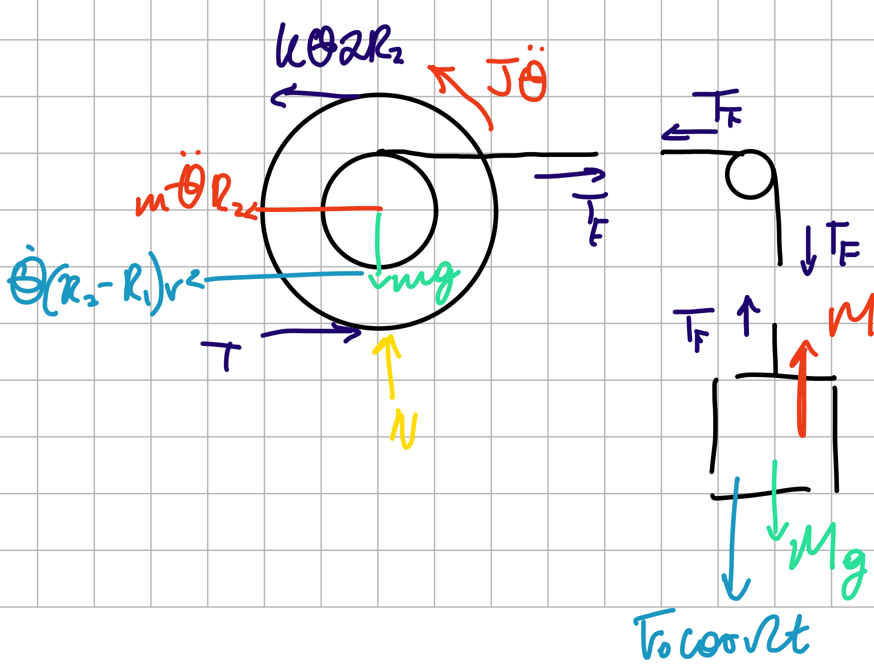
Esercitazione 23 -



Bilancio dei momenti





$$\sum F_v^{M} = 0 \qquad T_f = Mg + F_0\cos\Omega t - M\theta(R_2+R_1)$$

$$\sum M_E^{DISCO} = 0 \qquad J\ddot{\theta} + k\,2R_2\theta\,2R_2 + m\ddot{\theta}R_2^2 + r(R_2-R_1)^2\dot{\theta}$$
$$+ (R_2+R_1)\left[Mg + F_0\cos\Omega t - M\theta(R_2+R_1)\right] = 0$$

$$J\ddot{\theta} + mR_2^2\ddot{\theta} + M(R_2+R_1)^2 + r(R_2-R_1)^2\dot{\theta} + k4R_2^2\theta = (R_2+R_1)F_0\cos\Omega t + (R_2+R_1)Mg$$

$$m_{eq} = J + mR_2^2 + M(R_2+R_1)^2$$

$$r_{eq} = r(R_2-R_1)^2$$

$$k_{eq} = k4R_2^2$$

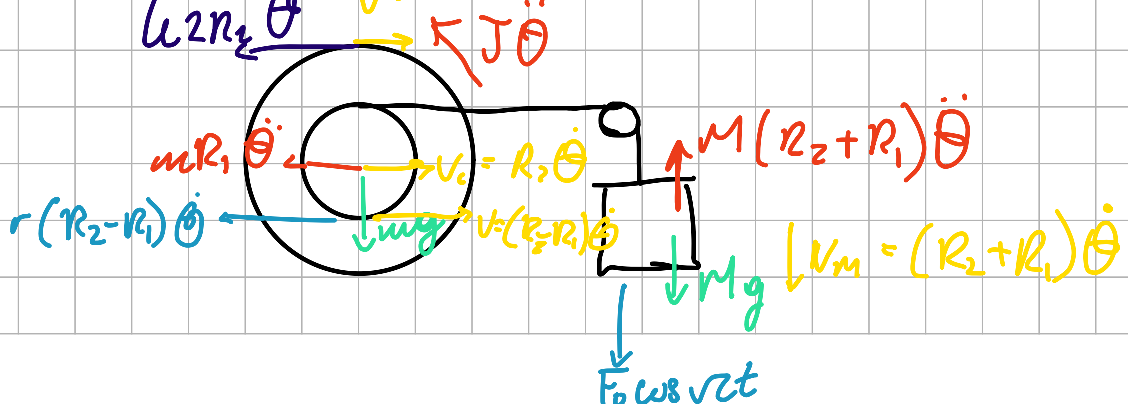
$$x(t) = X\cos(\Omega t - \varphi)$$

$$\theta(t) = \Theta\cos(\Omega t - \varphi)$$

$$J_{eq}\ddot{\theta} + r_{eq}\dot{\theta} + k_{eq}\theta = \ldots$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} \qquad h = \frac{r_{eq}}{r_c} = \frac{r_{eq}}{2m_{eq}\omega_0}$$

Bilancio delle potenze



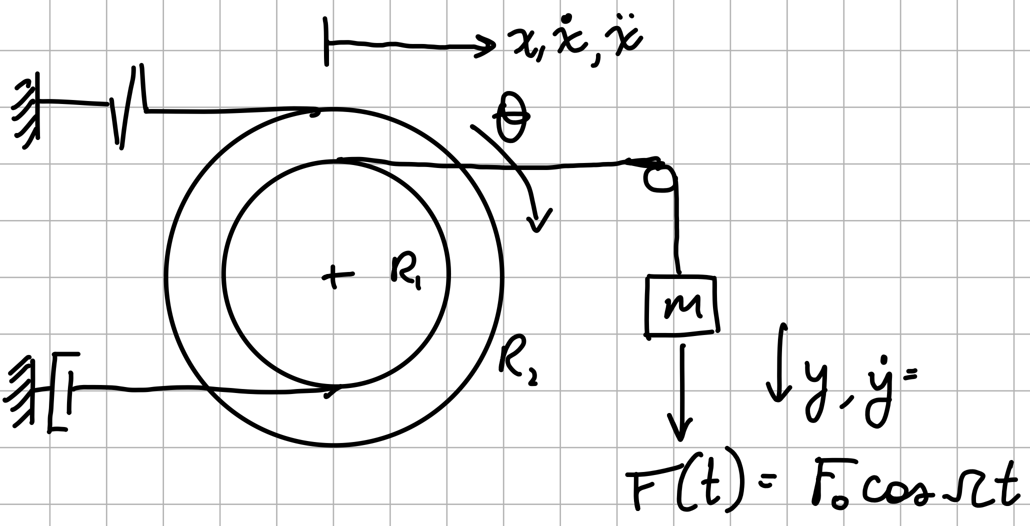
$$-k_2 2R_2\theta \cdot 2R_2 \cancel{\dot\theta} - J\ddot\theta\cancel{\dot\theta} - m R_2\ddot\theta R_2\cancel{\dot\theta} + mgR_2\dot\theta\cancel{\cos\frac{\pi}{2}}^{\,0} - r(R_2-R_1)\dot\theta \cdot (R_2-R_1)\cancel{\dot\theta}$$

$$-M(R_1+R_1)\ddot\theta(R_2+R_1)\dot\theta + F_0\cos\Omega t\,(R_2+R_1)\cancel{\dot\theta} + Mg(R_2+R_1)\cancel{\dot\theta} = 0$$

Vincoli ideali quindi le reazioni a terra non risultano nell'equazione

Come il PLV, ma invece di dare $\dot\theta$ potevamo dare $\delta\theta$, e il risultato sarebbe stato lo stesso.

Lagrange



$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial \dot q} + \frac{\partial D}{\partial \dot q} + \frac{\partial E_p}{\partial q} = \frac{\delta L}{\delta q}$$ → Forma che useremo noi

$$E_c = E_c^{DISS} + E_c^{M} = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} m J \dot\theta + \frac{1}{2} M \dot y^2 =$$

$v_c = \dot\theta \cdot R_2 \qquad \dot y = \dot\theta (R_2+R_1)$

$$= \frac{1}{2} m R_2^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M (R_2+R_1)^2 \dot{\theta}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left[J + m R_2^2 + M (R_2+R_1)^2 \right] \dot{\theta}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_{eq} \dot{\theta}^2$$

Velocità vista da smorzatore

$$D = \frac{1}{2} r \Delta \dot{l}^2 \qquad \Delta \dot{l} = (R_2 - R_1) \dot{\theta}$$

$$= \frac{1}{2} r (R_2 - R_1)^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} r_{eq} \dot{\theta}^2$$

$$E_p = E_{p,k} + E_{p,M} = \frac{1}{2} k \Delta l_k^2 + M g h_g =$$

$$\Delta l_k = 2 R_2 \theta \qquad = \frac{1}{2} k \, 4 R_2^2 \theta^2 - M g \theta (R_2 + R_1)$$

$$L = F_0 \cos \Omega t \, \theta (R_2 + R_1)$$

$$\dot{q} = \dot{\theta}$$

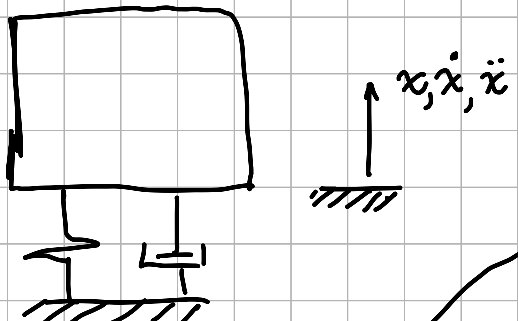
$$\frac{d}{dt}(m_{eq} \dot{\theta}) + r_{eq} \dot{\theta} + k_{eq} \theta - M g (R_2 + R_1) = F_0 \cos \Omega t (R_2 + R_1)$$

↳ Stessa equazione

$$m_{eq} \ddot{\theta} + r_{eq} \dot{\theta} + k_{eq} \theta = F_0 \cos \Omega t (R_2 + R_1) + M g (R_2 + R_1)$$

↳ Lo stesso risultato ma con gli altri ragioniamo sul fatto che c'è un equilibrio, che con Lagrange si vede meno.

Analisi dell'integrale generale



$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$$

$$x(t) = Ce^{\lambda t}$$

$$\begin{cases} x(t) = Ae^{-\alpha t}\cos\omega t \\ x(t) = Be^{-\alpha t}\sin\omega t \end{cases}$$

Facendo questo entriamo direttamente nel campo complesso

Con questi tipi di soluzioni rimaniamo nel campo reale ma diventa più complesso

$\Rightarrow$ è opportuno andare nel campo complesso

$$x(t) = Ce^{\lambda t}$$

$$\dot{x}(t) = C\lambda e^{\lambda t}$$

$$\ddot{x}(t) = C\lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$m\lambda^2 Ce^{\lambda t} + r\lambda Ce^{\lambda t} + kCe^{\lambda t} = 0$$

$$(m\lambda^2 + r\lambda + k)Ce^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - 4mk}}{2m}$$

r che azzera Δ

$$r_c^2 = 4mk \cdot \frac{m}{m} = 4m^2\omega_0^2$$

$$\Rightarrow r_c = 2m\omega_0$$

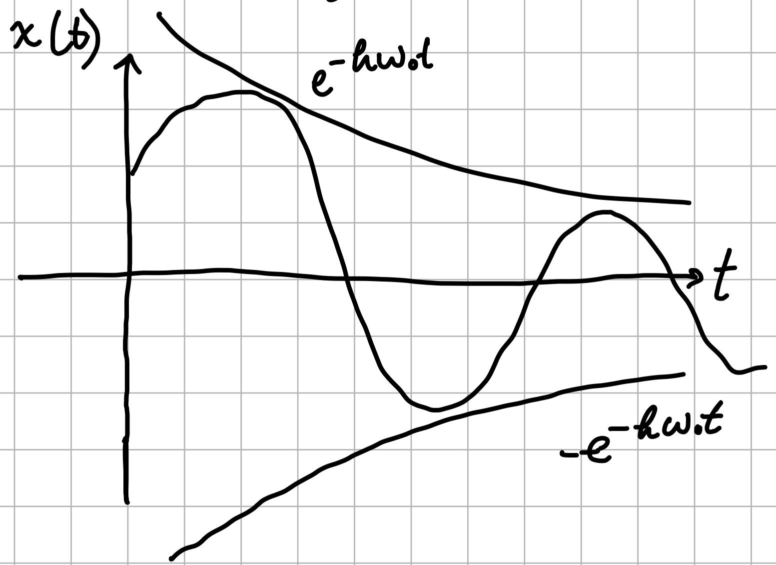
$h = \frac{r}{r_c}$ ⇝ $r = r_c$ → non oscilla e ritorna a posizione iniziale

↳ $0 - 1$

$$x(t) = e^{-h\omega_0 t}\left[\left(A\cos(\omega_0\sqrt{1-h^2}\,t\right) + B\sin(\omega_0\sqrt{1-h^2}\,t)\right]$$

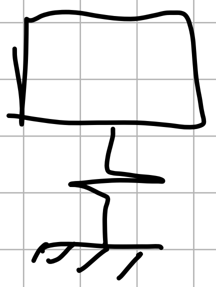
$$x(t) = e^{-h\omega_0 t} A\cos(\omega_0\sqrt{1-h_0^2}\,t + \varphi)$$

a $t=0$ $\begin{cases} x(0) = \Delta \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$



Nel gergo: A regime ⇒ in condizioni di integrale particolare

Questo ci permette di vedere il comportamento, perchè in realtà i sistema è:



Ma la molla non è ideale, quindi sarà:

$$\boxed{m\ddot{x} + k(x,\dot{x})\,x = 0}$$

Possiamo però aggiungere uno smorzatore non vero ma presente

$$m\ddot{x} + \underbrace{r\dot{x}}_{\text{VISCOSA EQUIVALENTE}} + kx = 0$$

→ Ideale

Ci sposta verso una equazione differenziale lineare.

Permettendoci di fare calcoli più facilmente per modellare un sistema reale che è più complesso.