Lezione 6

Dove siamo arrivati

$$\underline{\underline{\Phi}} = ? \quad \begin{cases} p\underline{\underline{I}} \\ f(\underline{\underline{D}}) \end{cases}$$

$f(\underline{\underline{D}}) \rightarrow$ lo sforzo non è la sola pressione

↳ lo stato di sforzo deve essere legato alle velocità di deformazioni, con $\underline{\underline{D}}$ tensore delle velocità delle deformazione.

Come è fatta $\underline{\underline{\Phi}} = f(\underline{\underline{D}}) =$

↳ Si può fare perché me lo sto inventando

$$= \underbrace{p\underline{\underline{I}} + f_2(\underline{\underline{D}})}_{\text{Ipotesi di Stokes}}$$

Ipotesi di Stokes

(Fluido Stokesiano

Tutto ipotesi (non si può dimostrare)

$f_2(\underline{\underline{D}})$: $\underline{\underline{\Phi}}_D(\underline{\underline{D}})$

↳ deviatore degli sforzi

Fluido reale = Fluido ideale + qualcosa che lo fa deviare

Seconda ipotesi: f_2 è funzione lineare

→ Ipotesi di Newton

→ Fluidi Newtoniani

Quello che guardiamo vale per fluidi reali stokesiani-Newtoniani

Componenti:

$\underline{\underline{\Phi}}_D$ 6

$\underline{\underline{D}}$ 6

f_2 36 → Usato per legare tutti i componenti indipendenti

Prendendo $\underline{\underline{\Phi}}$ e $\underline{\underline{D}}$ diagonali, f_2 avrà solo 9 coefficienti. → Deviatore degli sforzi, quello che si deriva dal caso perfetto

$$\underline{\underline{\Phi}}_D = \begin{vmatrix} \phi_{Dx} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{Dy} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{Dz} \end{vmatrix} \qquad \underline{\underline{D}} = \begin{vmatrix} D_x & 0 & 0 \\ 0 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \phi_{Dx} = a_{xx} D_x + a_{xy} D_y + a_{xz} D_z \\ \phi_{Dy} = a_{yx} D_x + a_{yy} D_y + a_{yz} D_z \\ \phi_{Dz} = a_{zx} D_x + a_{zy} D_y + a_{zz} D_z \end{cases}$$

servono 9 componenti a_{ij}

È un legame lineare, che deve passare per $(0,0,0)$ per mancanza di costanti. Infatti questi tipi di fluidi non hanno sforzi se non c'è velocità di deformazione.

Ammettiamo che ci sono 2 coefficienti a_{ii} e a_{ij},

Ipotesi $\Downarrow$ si può fare

cioè $a_{xx} = a_{yy} = a_{zz}$

e $a_{xy} = a_{xz} = a_{yx} = \dots = a_{yz}$

Li prendiamo che:

$a_{ii} = -2\mu - \mu'$

$a_{ij} = -\mu'$

Tutti questi calcoli sono presi con molte ipotesi, non ci sono dimostrazioni per

Mettendo nel sistema

$$= -2\mu D_x - \mu' D_x - \mu' D_y - \mu' D_z = -2\mu' D_x - \mu' \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) =$$

$=$

$=$

$$= -2\mu D_x - \mu' \operatorname{div} \underline{v}$$

$$= -2\mu D_y - \mu' \operatorname{div} \underline{v}$$

$$= -2\mu D_z - \mu' \operatorname{div} \underline{v}$$

Riscrivendo in modo vettoriale

$$\underline{\underline{\Phi}}_D = -2\mu \underline{\underline{D}} - \mu' \operatorname{div} \underline{v} \, \underline{\underline{I}}$$

Legame costitutivo per un fluido reale stokesiano - Newtoniano

$$\underline{\underline{\Phi}} = (p - \mu' \operatorname{div} \underline{v}) \underline{\underline{I}} - 2\mu \underline{\underline{D}}$$

Questo vale anche quando le matrice non è diagonali

Come ci risolve il problema dello sbilanciamento delle incognite ed equazioni

Equazione indefinita dell'equilibrio dinamico

↳ Abbiamo già visto

$$\rho(\underline{f} - \underline{a}) = \operatorname{div} \underline{\underline{\Phi}}$$ Generalmente si prende questo e si mette il $\underline{\underline{\Phi}}$ trovato

$$\underline{\underline{\Phi}} = p\underline{\underline{I}} \Rightarrow \rho\left(\underline{f} - \frac{d\underline{v}}{dt}\right) = \operatorname{grad} p \rightarrow \text{Eulero}$$

$$\underline{\underline{\Phi}} = (p - \mu' \operatorname{div} \underline{v}) \underline{\underline{I}} - 2\mu \underline{\underline{D}}$$

$$\Rightarrow \rho\left(\underline{f} - \frac{d\underline{v}}{dt}\right) = \operatorname{div}\left[(p - \mu' \operatorname{div} \underline{v}) \underline{\underline{I}} - 2\mu \underline{\underline{D}}\right]$$

Ancora fluido perfetto per qualcos'altro, e questo qualcos'altro è equazione lineare

$$= \operatorname{grad}(p - \mu' \operatorname{div} \underline{v}) - 2\mu \operatorname{div} \underline{\underline{D}}$$

Espandiamo div $\underline{\underline{D}}$ =

$$\underline{\underline{D}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

div di matrice → vettore   div semplifica

Per semplicità

$$\text{div } \underline{\underline{D}} = \left| \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right) \right| =$$

Nota personale

$$\boxed{\text{div } \underline{\underline{M}} = \underline{M} \cdot \underline{\nabla}}$$

Sommiamo i termini in under brace, perchè sono derivate seconde nelle direzione della stessa quantità

Divergenza

$$\underline{\nabla} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \left| \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right) \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \Delta u + \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div} \underline{v}) \\ \Delta v + \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{div} \underline{v}) \\ \Delta w + \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{div} \underline{v}) \end{vmatrix}$$

Laplaciano: Δ o $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

div di un vettore → scalore

$$\underbrace{\operatorname{div} \underline{V}}_{\text{scalore}} = \underline{V} \cdot \underline{\nabla}$$

$$\underline{\nabla} \to \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{div} \underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} \underbrace{\Delta \underline{v}}_{\text{Laplaciano del vettore velocità}} + \operatorname{grad}(\operatorname{div} \underline{v})$$

gradiente di scalare → vettore

$$\rho\left(\underline{f} - \frac{d\underline{v}}{dt}\right) = \operatorname{grad}(p - \mu' \operatorname{div} \underline{v}) - 2\mu\left(\frac{1}{2}\left(\Delta \underline{v} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{v}\right)\right)$$

$$= \operatorname{grad}\left[p - (\mu' + \mu)\operatorname{div}\underline{v}\right] - \mu \Delta \underline{v} \quad \text{RSN}$$

Equilibrio Dinamico per fluido reale Stokesiano-Newtoniano

$\operatorname{div} \underset{\approx}{\phi} \rightarrow$ perfetto $\Rightarrow$ grad p

$\operatorname{div} \underset{\approx}{\phi} \rightarrow$ reale stokesiano - newtoniano $\Rightarrow$ "

$\operatorname{div} \underset{\approx}{\phi} \rightarrow$ reale $\rightarrow$ qualcos'altro

Con la equazione della divergenza di $\underset{\approx}{\phi}$ abbiamo chiuso il sistema

$$\rho\left(\underline{f} - \frac{d\underline{v}}{dt}\right) = \operatorname{div} \underset{\approx}{\phi}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{v}) = 0$$

$$\rho \ldots$$

5 equazioni

10 incognite

$\leftarrow$ Sistema Generale

Mettendo l'equazione di RSN in sistema

$$\begin{cases} \rho\left(\underline{f} - \frac{d\underline{v}}{dt}\right) = \operatorname{grad}\left[p - (\mu' + \mu)\operatorname{div}\underline{v}\right] - \mu \Delta \underline{v} \quad \text{RSN} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{v}) = 0 \\ \rho = \ldots \end{cases}$$

$\leftarrow$ Sistema RSN

5 incognite, ρ, p e $\underline{v}$

μ' e μ non sono incognite, sono parametri del problema, sono parametri del modello e legame costitutivo

$\partial \rho = 0$

RSN I $\Leftarrow$ Incomprimibile $\Rightarrow$ div $\underline{v} = 0$

Se sistema sono

da ragione perciò la abbiamo tolto

$$\begin{cases} \rho\left(\underline{f} - \frac{d\underline{v}}{dt}\right) = \text{grad}\, p - \mu\, \Delta u \\ \text{div}\, \underline{v} = 0 \end{cases}$$

4 equazioni, 4 incognite

Sistema RSN I

Sistema perfetto

$$\rho\left(\underline{f} - \frac{d\underline{v}}{dt}\right) = \text{grad}\, p$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{v}) = 0$$

$$\rho = \dots$$

$$\rho\left(\underline{f} - \frac{d\underline{v}}{dt}\right) = \text{grad}\left[p - (\mu + \mu')\, \text{div}\, \underline{v}\right] - \mu\, \Delta \underline{v}$$

RSN

$$\rho\left(\underline{f} - \frac{d\underline{v}}{dt}\right) = \text{grad}\, p - \mu\, \Delta v$$

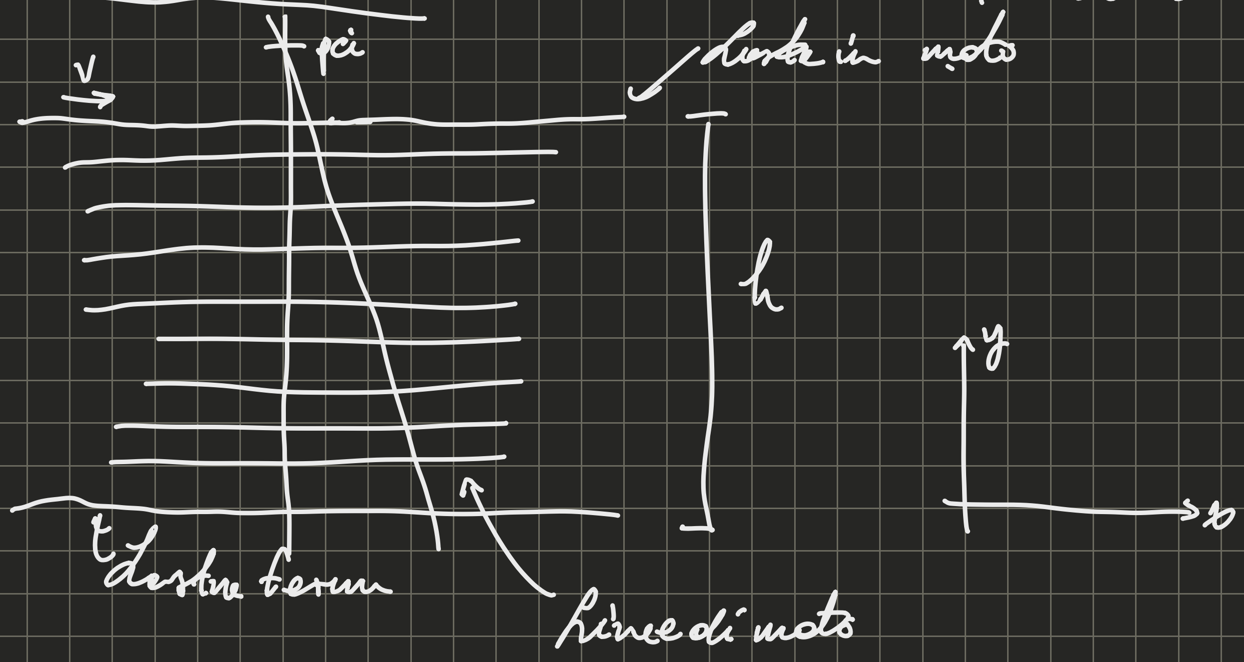
RSN I

Equazioni di Navier-Stokes

Navier-Stokes in casi semplici hanno tante soluzioni

Esempi Applicativi

Flusso di Couette → è RSNI ⇒ soffre dell'attrito



$$\begin{cases}\rho\left(\underline{f}-\frac{d\underline{v}}{dt}\right)=\text{grad}\, p-\mu\Delta\underline{v}\\[2ex] \text{div}\,\underline{v}=0\end{cases}$$

Visto che il fluido obbedisce all'attrito dovremmo trovare moto concordante

$$\begin{cases}\rho\left(f_x-\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial p}{\partial x}-\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\\[2ex] \rho\left(f_y-\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial p}{\partial y}-\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\end{cases}$$

2 incognite ↳ perché siamo sul piano quindi non guardiamo a w.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

u c'è perché c'è la derivata in x

→ Come sempre $\frac{d\underline{v}}{dt}$ due componente locale e convettivo

Soluzioni aspettate:

$$\left.\begin{aligned}&p=p(x,y)\\&u=u(x,y)=u(y)\end{aligned}\right\}$$ Flusso è permanente quindi non rientra t

$\cancel{v}=v(x,y)$ → per come è fatto il campo di moto

La geometria è semplice, quindi tutti termini si cancellano, quindi è risolvibile, in casi più complessi dove non tutto si cancella non possiamo risolvere

non motivato ma lo ha fatto

Risolvendolo:

fluido pesante

Permanente

$$\rho\left(f_x - \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + u\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} - \cancel{v\frac{\partial u}{\partial y}}\right) = \cancel{\frac{\partial p}{\partial x}} - \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\rho\left(f_y - \cancel{\frac{\partial v}{\partial t}} + u\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}} - v\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}}\right) = \frac{\partial p}{\partial y} - \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial v}{\partial y}} = 0 \quad v = 0$$

$\Rightarrow$ la velocità è solo funzione di x

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Moto permanente e non c'è v

$\Downarrow$

$u(y)$

è una retta

$\Downarrow$

importante, ci spiega il flusso

$$\left\{ \frac{\partial p}{\partial y} = \rho f_y = -\gamma \right.$$

$\rightarrow$ x pesante $\Rightarrow$ distribuzione lineare delle pressioni alla stevino per una corrente lineare

$\hookrightarrow$ come abbiamo visto

Integrando $\rightarrow$ $\frac{\partial u}{\partial y} = A \quad u(y) = Ay + b$

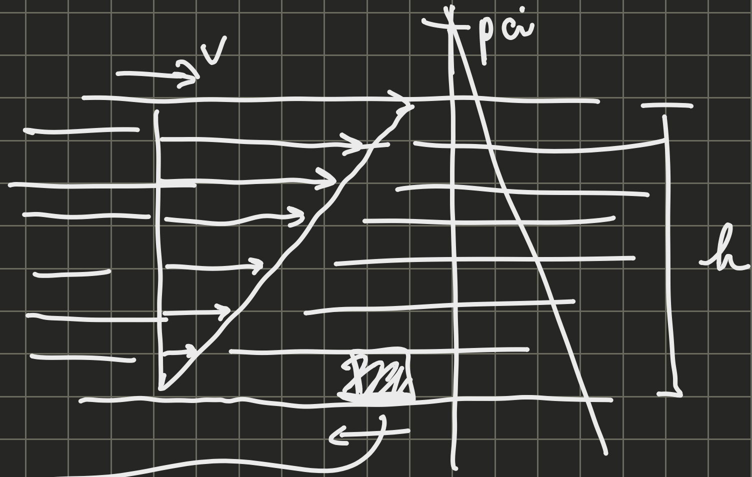
$\Rightarrow$ Si crea una distribuzione di velocità uniforme in x e lineare in y

Condizioni al contorno: condizioni di aderenza

$\hookrightarrow u(y=0) = 0 \Rightarrow B = 0$

$\hookrightarrow u(y=h) = V \Rightarrow Ah = V \Rightarrow A = \frac{V}{h}$

$$\boxed{\Rightarrow u(y) = \frac{V}{h}\, y}$$



Dimostrazione che μ è la viscosità

↳ Introduciamo un campo di sforzo

Sappiamo: $\underline{\underline{\Phi}} = p\underline{\underline{I}} - 2\mu\underline{\underline{D}}$

↳ forma semplificata dove $\operatorname{div}\underline{v} = 0$

$\underline{\Phi} = \underline{\underline{\Phi}}\,\underline{n}$

↳ vettore di sforzo

$$\underline{\underline{D}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{V}{2h} \\ \frac{V}{2h} & 0 \end{vmatrix}$$

In 2D come questo problema

Generalmente non si può identificare $\underline{\underline{D}}$, lo possiamo solo risolvere perché abbiamo già risolvere il problema.

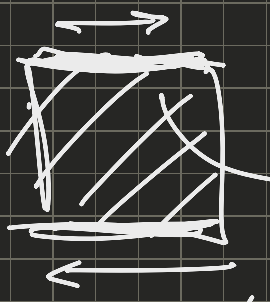
Deviatore degli sforzi

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Phi}}_D = -\mu \begin{vmatrix} 0 & V/h \\ V/h & 0 \end{vmatrix}$$

↳ Prendiamo una particella di fluido e troviamo il vettore di sforzo sulla superficie sotto

$$\underline{\phi} = \begin{vmatrix} 0 & -\mu\frac{v}{h} \\ -\mu\frac{v}{h} & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} -\mu\frac{v}{h} \\ 0 \end{vmatrix}}$$

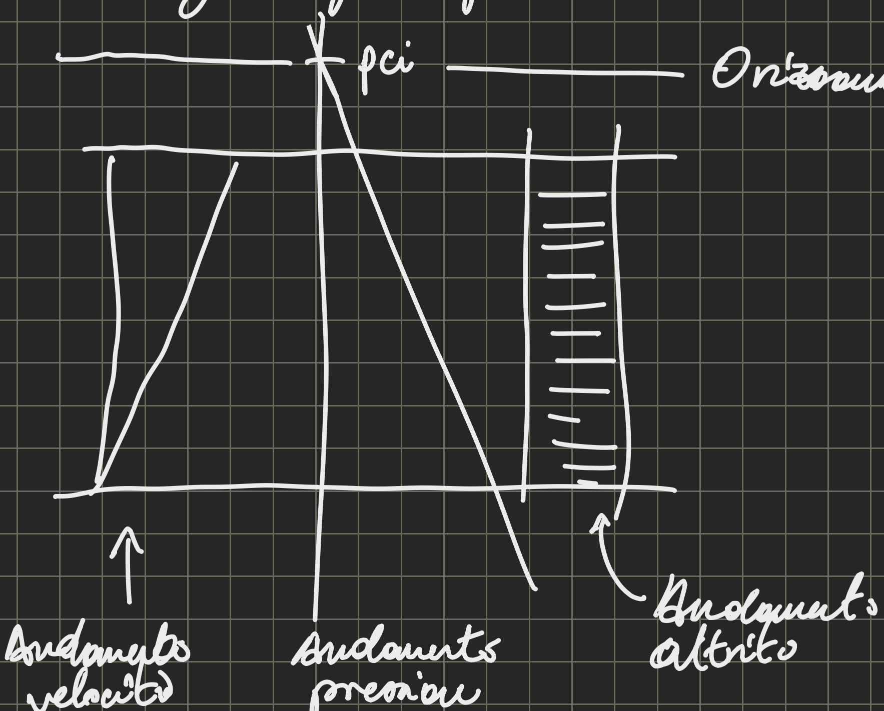
Diretto lungo x, nella direzione opposta al moto



$$\tau = \mu\frac{v}{h}$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \underline{\phi} = \begin{vmatrix} \mu\frac{v}{h} \\ 0 \end{vmatrix}$$

Lo sforzo si può trovare su una colonna ed avrà sempre lo stesso andamento, non dipende da y, ogni particella tira le altre



$$F = \mu\frac{v}{h}A$$

↳ la viscosità dinamica del fluido

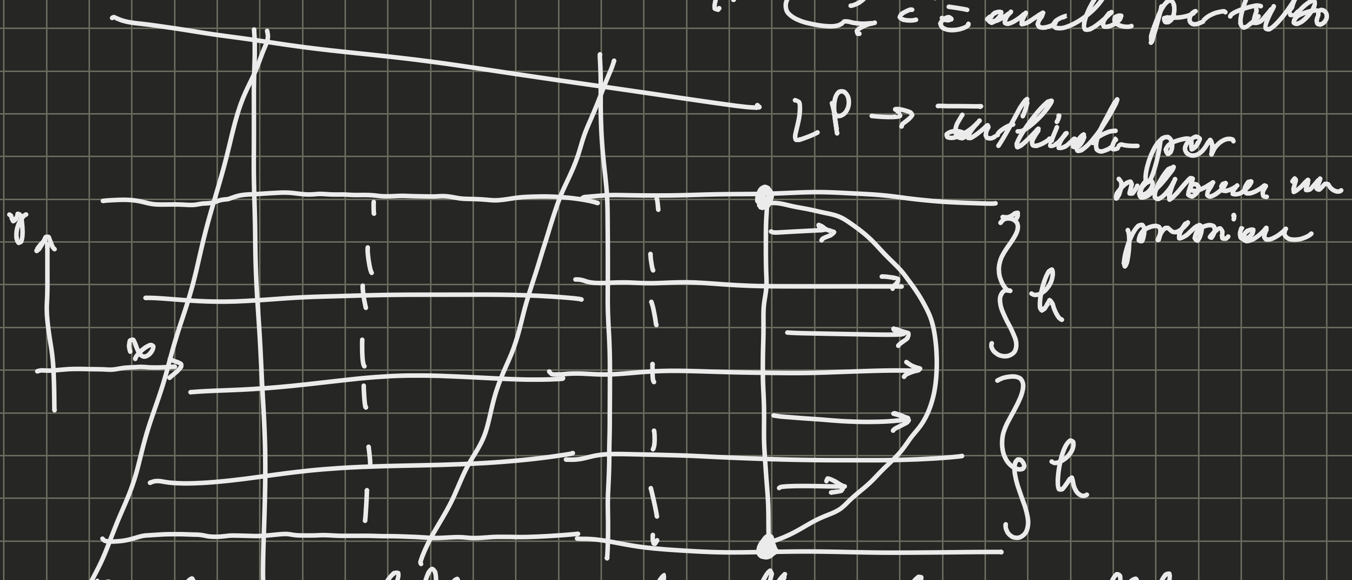
μ' → secondo coefficiente di viscosità / viscosità di volume

↳ perché è legato a div $\underline{v}$ quindi è legato ad un contributo di volume.

La linea di carico totale non è unica perché LP è costante ma la velocità non lo è.

Flusso di Poiseuille (piano)

c'è anche per tubo



Anche qui il flusso è a traiettorie linee parallele

$$\begin{cases} -\rho\left(\overset{\text{permanente}}{\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}} + u\overset{0}{\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}} + v\overset{v=0}{\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}}}\right) = \frac{\partial p}{\partial x} - \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} - \gamma \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \underset{v=0}{\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}}} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

non si può portare via

Il fluido si muove per il gradiente di pressione, se non ci sono forze, questa è l'unica ragione per cui fluisce. Prima c'era moto per la lastra superiore quindi $\frac{\partial p}{\partial x}$ non serviva.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}y + A$$

$$u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}y^2 + Ay + B$$

⇓

In questo caso il profilo che si viene a creare è una parabola

Le condizioni al contorno sono: $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$ perché la pressione sta spingendo il fluido alla sinistra

$$u(\pm h) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} h^2 + B = 0 \qquad B = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} h^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(y=0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

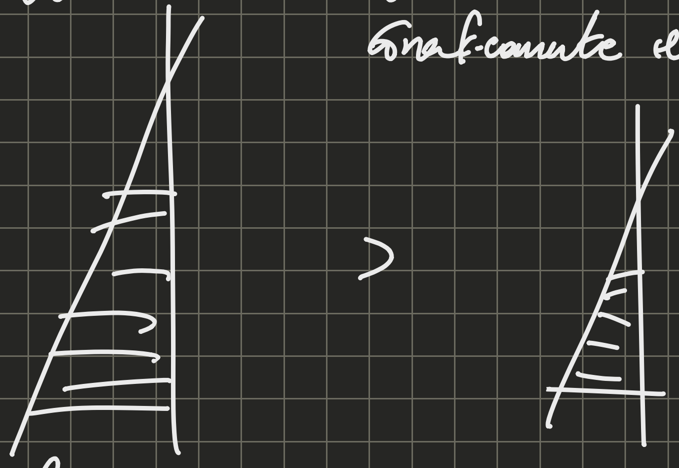
$$u(y) = \frac{1}{\mu}\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{<0}\underbrace{(y^2 - h^2)}_{\substack{y \le h \\ \Rightarrow <0}}$$

⇒ la velocità > 0, come abbiamo visto.

La distribuzione delle pressioni è lineare perché è CCV

Spinta perché la spinta generata dalle pressioni maggiori è maggiore delle pressioni minori

Graficamente il trapezio è minore in area.



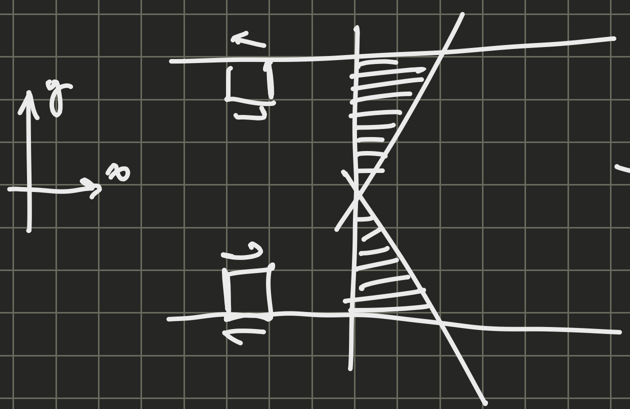
→ La spinta è causata dalla diminuzione delle pressioni

$$\underline{\underline{D}} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} y \\ \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} y & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\Phi}}_D = -2\mu\, \underline{\underline{D}} = - \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial p}{\partial x} y \\ \frac{\partial p}{\partial x} y & 0 \end{vmatrix}$$

Sforzo di attrito:

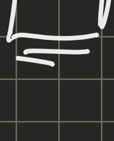
$\underline{\Phi} = \underline{\underline{\Phi}}\, \underline{n}$ → l'attrito è lineare con y, essendo 0 quando $y=0$, e massimo alle pareti

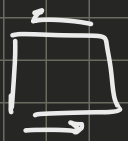


→ Fisicamente è così, matematicamente è

ma questo non è garantito

Fisicamente è giusto, diminuendo al centro e massimizzando alle pareti.

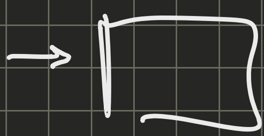
Sotto è  → la particella sopra sta tirando con la sua velocità maggiore

Sopra è  → ha particelle sotto ''

'' '' ''

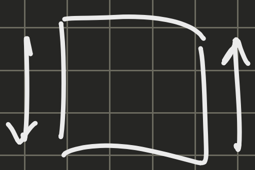
↳ Il comportamento cambia per il cambio della derivata

Invece lungo x della particella



$$\underline{u} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\Phi = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial p}{\partial x} y \\ \frac{\partial p}{\partial x} y & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x} y \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$ 

Particelle sotto

non orizzontali

Nascono attrito verticali per la deformazione delle particelle non per le condizioni di aderenza