Lezione 8 - Domani Lab: Equazioni Non-lineari

Terzo Argomento (su 5 per prova di itinere)

Approssimazione di funzioni e dati

Consideriamo $f \in C^0([a,b])$

$$\begin{array}{c} f \in C^0([a,b]) \\ \updownarrow \\ \tilde{f} \in \mathbb{P}_n \end{array}$$

Possiamo farlo per aiutarci durante l'integrazione in caso di funzioni difficilmente integrabili.

$\llcorner$ $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ ($\uparrow \tilde{f}$)

Cosa conosciamo già:

Taylor → Problema è che è locale e centrato in x_0

↳ deve esser sufficientemente regolare $f \in C^2$ — $\frac{1}{x}$, $x_0 = 1$; e^x, $x_0 = 0$

$\boxed{8:41}$

Vogliamo trovare un'alternativa a Taylor, che sia meglio in $[a,b]$

Approssimazione dei dati

↳ esempi stampi temporali e dati

$$\{(t_i, u_i)\}_{i=0}^{N} \rightarrow \text{servono coppie di dati}$$

t_i e.g. x_i

→ Dai dati tiro fuori una legge analitica

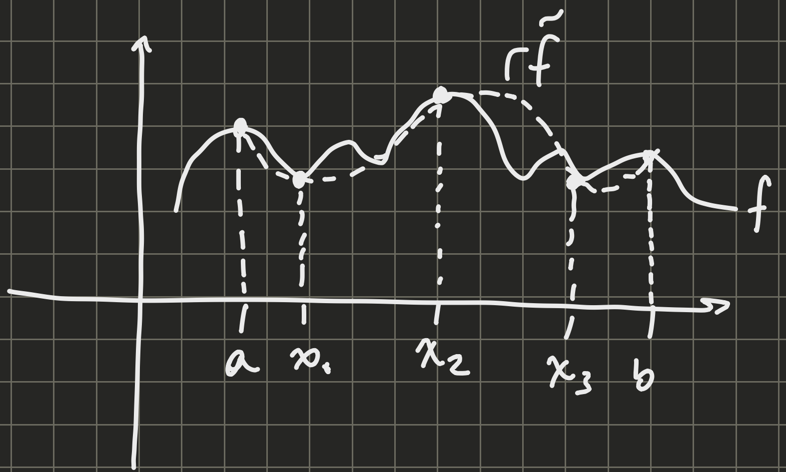
→ Per aver un modello in cui possiamo recuperare un valore dove non abbiamo una misura

→ e.g. minimi quadrati.

Forme (Tecniche) per approssimare funzioni e dati

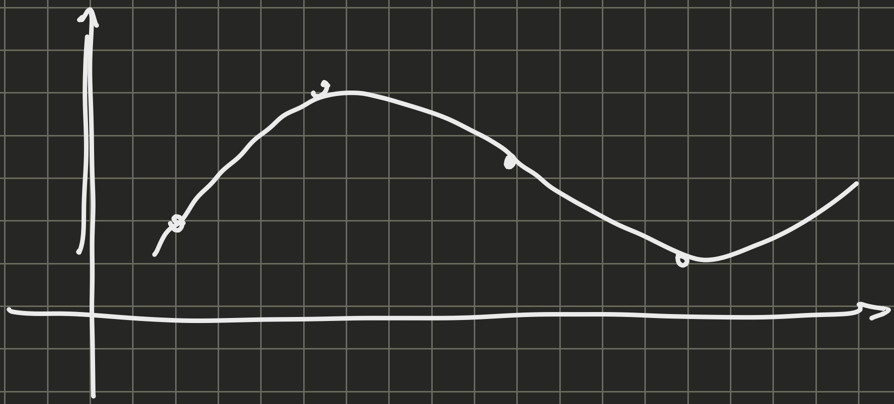
→ Interpolazione

→ Minimi-quadrati

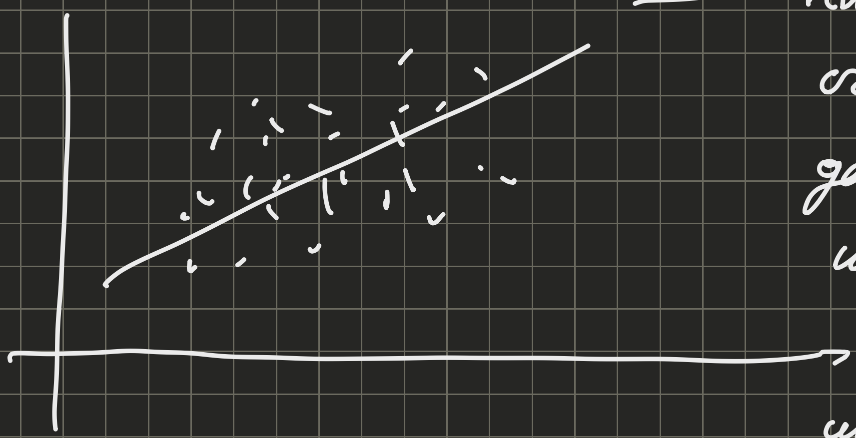


Cerco il polinomio che riproduce i valori y dato i valori x

$\tilde{f}$ interpola le coppie di valori, dato un numero finito di dati della funzione



Minimi-quadrati



→ Più adatto a creare un'andamento generale di una nuvola di dati, perchè un'interpolazione non sarebbe ragionevole.

Interpolazione

↳ Formalizzazione matematica 8:53

$$\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n} \qquad x_i \neq$$

$$f \to y_i = f(x_i), \quad x_i \text{ ascisse}$$

dati y_i = mi → valore

x_i punti / tempi

$$\boxed{?\ \tilde{f} \text{ tale che } \tilde{f}(x_i) = y_i \quad i = 0, \dots, n}$$

x_i nodi di interpolazione

y_i valori da interpolare

$n+1$ condizioni di interpolazione

$\tilde{f}$
- $\boxed{\in \mathbb{P}_n}$ → Per questa parte del corso
- Fourier
- rappresentazione razionale $= \dfrac{P_b(x)}{P_s(x)}$

$$\mathbb{P}_n = \{a_0 + a_1 x + \dots + a_q x^q,\ a_i \in \mathbb{R},\ q \in \mathbb{N}$$

Interpolazione polinomiale di Lagrange

Proposizione: $\left(f \in C^0([a,b]) \right)$

Siano $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ con x_i distinti.

Allora $\exists!$ un polinomio di grado $\leq n$, Π_n $(\Pi_n f)$

tale che $\Pi_n(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$

Π_n: Polinomio Interpolatore

Π_n: Per dati

$\Pi_n f$: Per interpolazione di funzioni

Polinomio Interpolatore

Se ho $n+1$ coppie di dati, il mio polinomio interpolatore avrà grado n.

→ Per invece per i minimi quadrati si hanno polinomi di grado 1 o 2 per n coppie di dati.

→ Meno incognite meno lavoro

Guarderemo il polinomio interpolatore di Lagrange

Dimostrazione unicità di Π_n → si dimostra per assurdo

Per assurdo esistono 2 polinomi interpolatori

$$\Pi_n \in \mathbb{P}_n \qquad \Pi_n(x_i) = y_i \quad i = 0, \dots, n$$

$$\Pi_n^* \in \mathbb{P}_n \qquad \Pi_n^*(x_i) = y_i \quad i = 0, \dots, n$$

$$\underset{\in \mathbb{P}^n}{\Gamma_n(x)} = \Pi_n(x) - \Pi_n^*(x)$$

$$\Gamma_n(x_i) = \Pi_n(x_i) - \Pi_n^*(x_i) = y_i - y_i = 0 \quad i = 0, \dots, n$$

↳ è un polinomio di grado n con $n+1$ zeri, è impossibile solo se sia identicamente nullo

$$\Rightarrow \Gamma_n(x) = 0 \ \forall x \Rightarrow \Pi_n(x) - \Pi_n^*(x) = 0 \ \forall n$$

$\Longrightarrow \Pi_n(x) = \Pi_n^*(x) \Longrightarrow$ Unicità

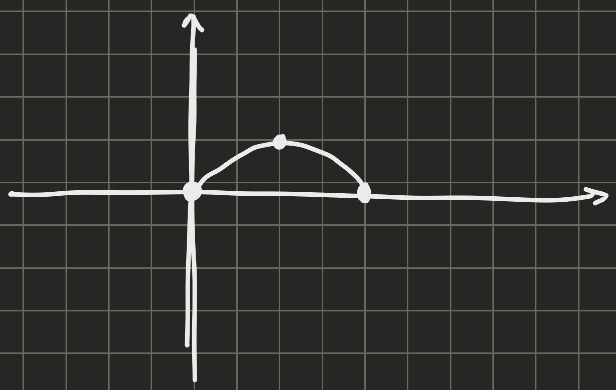
Costruiamo Π_n

$\boxed{9:12}$ → In caso → Circa

Partiamo da un caso semplice

$\exists$ → Dimostriamo esistenza, per ora in un caso specifico

x_0	x_1	x_2		$x_0 = 0$	$x_1 = 0{,}5$	$x_2 = 1$
y_0	y_1	y_2		$y_0 = 0$	$y_1 = 1$	$y_2 = 0$



$\varphi_1 \in \mathbb{P}_2$

Indice del nodo in cui abbiamo valore diverso da 0.

$\varphi_1(0) = 0 \leftarrow$

$\varphi_1(0{,}5) = 1$

$\varphi_1(1) = 0 \leftarrow$

Imponiamo

Potremmo imporre tutte le condizioni una ad 1, però le applichiamo in modo tattico

$\boxed{9:21}$

$x(x-1)$

Zeri: A, B $\qquad (x-A)(x-B)$

Imponiamo poi $\varphi_1(0{,}5)$ → Vediamo che per ora non lo segue, quindi modifichiamo le costanti

$$\varphi_1(x) = \frac{x(x-1)}{0{,}5(0{,}5-1)} = \frac{x^2 - x}{\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}} = 4(x - x^2)$$

↳ Abbiamo preso opportunamente

Vogliamo generalizzare ad un caso ad n nodi

$x_0, x_1, \dots, x_n$

Generalizziamo ad caso specifico

$y_0 = 0 \quad y_1 = 0 \quad y_{k-1} = 0,\ y_k = 1,\ y_{k+1} = 0,\ \dots,\ y_n = 0$

n nulli e 1 (il k-esimo) = 1

Guardiamo per primo tutti gli annullamenti.

$\varphi_k \in \mathbb{P}_n$

perché k è deve non è nullo

$$(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)$$

Prodotto di n monomi che si annullano i loro associati x

$$\varphi_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}$$

Produttoria non Π_n

$$\boxed{\varphi_k(x) = \prod_{i=0,\ i\neq k}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}}$$

Polinomio che stavamo cercando

Polinomio caratteristico di Lagrange

Caratteristiche:

$\varphi_k \in \mathbb{P}_n$

$\varphi_k(x_i) = \delta_k = \begin{cases} 1 : i = k \\ 0 : i \neq k \end{cases}$ → È palese che è un caso molto specifico.

$k = 0, \dots, n$

δ di Kronecker

Ci sono $n+1$ polinomi caratteristici, in base a quale x mettiamo $y = 1$

Vogliamo trovare Π_n quale, dove

Dimostriamo ∃ di Π_n

$\Pi_2 \in \mathbb{P}_n$

$\Pi_2(x_0) = y_0$ $\quad \Pi_2(x_2) = y_2$

$\Pi_2(x_1) = y_1$

$\boxed{9:39}$

Conosciamo che esistono $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$, dove

$\varphi_0(x_0) = 1 \quad \varphi_0(x_1) = 0 \quad \varphi_0(x_2) = 0$

$\varphi_1(x_0) = 0 \quad \varphi_1(x_1) = 1 \quad \varphi_0(x_2) = 0$

$\varphi_2(x_0) = 0 \quad \varphi_2(x_1) = 0 \quad \varphi_2(x_2) = 1$

Sfruttiamo questo facendo una combinazione lineare per trovare Π_2

$$\Pi_2(x) = \underline{A}\,\varphi_0(x) + \underline{B}\,\varphi_1(x) + C\,\varphi_2(x)$$

Combinazione lineare di polinomi di grado 2 è un polinomio di grado 2

<u>Imponiamo</u>

$$\Pi_2(x_0) = \underline{A}\,\underbrace{\varphi_0(x_0)}_{1} + \underline{B}\,\underbrace{\varphi_1(x_0)}_{0} + \underline{C}\,\underbrace{\varphi_2(x_0)}_{0} = y_0$$

$$\boxed{\Rightarrow \underline{A} = y_0}$$

$$\Pi_2(x_1) = \underline{A}\,\underbrace{\varphi_0(x_1)}_{0} + \underline{B}\,\underbrace{\varphi_1(x_1)}_{1} + \underline{C}\,\underbrace{\varphi_2(x_1)}_{1} = y_1$$

$$\boxed{\Rightarrow \underline{B} = y_1}$$

$$\Pi_2(x_2) = \underline{A}\,\underbrace{\varphi_0(x_2)}_{0} + \underline{B}\,\underbrace{\varphi_1(x_2)}_{0} + \underline{C}\,\underbrace{\varphi_2(x_2)}_{1} = y_2$$

$$\boxed{\Rightarrow \underline{C} = y_2}$$

$$\Pi_2(x) = y_0\,\varphi_0(x) + y_1\,\varphi_1(x) + y_2\,\varphi_2(x)$$

I coefficienti sono i valori da interpolare.

Per generalizzare $\Pi_n(x)$

$x_0, x_1, \dots, x_n$

$y_0, y_1, \dots, y_n$

$$\boxed{\Pi_n(x) = y_0\varphi_0(x) + y_1\varphi_1(x) + \dots + y_n\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \varphi_k(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \underbrace{\boxed{\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}}}_{\varphi_k(x)}}$$

↳ Polinomio Interpolatore secondo Lagrange

$$\Pi_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k \underbrace{\varphi_k(x_i)}_{\delta_k} = y_i \underbrace{\varphi_i(x_i)}_{=1} = y_i$$

↳ 0 se $k \neq i$
1 se $k = i$

↳ Si può applicare anche in più dimensioni

↳ Verifica che abbiamo fatto robe correttamente

Comandi Matlab rilevanti:

$\underbrace{\text{poly}}_{\text{polinomio}}\underbrace{\text{fit}}_{\text{fitting}}$ → costruisce Π_n

riprodurre

$c = \text{polifit}(x, y, n)$

grado del polinomio

Vettore nodi

Vettore valori da interpolare

Π_n

$c(1)$ è il coefficiente di grado massimo

↳ quello che va a moltiplicare x^n

$$\Pi_n(x) = c(1)x^n + c(2)x^{n-1} + \dots + c(n+1)$$

$d = \text{polyval}(c, z)$

Valuta Π_n nei punti contenuti in z

→ Possiamo usare per calcolare l'errore, sappiamo che nei nodi l'errore è 0, ma in altri punti non lo possiamo determinare.

Si può fare un plot di z e d.