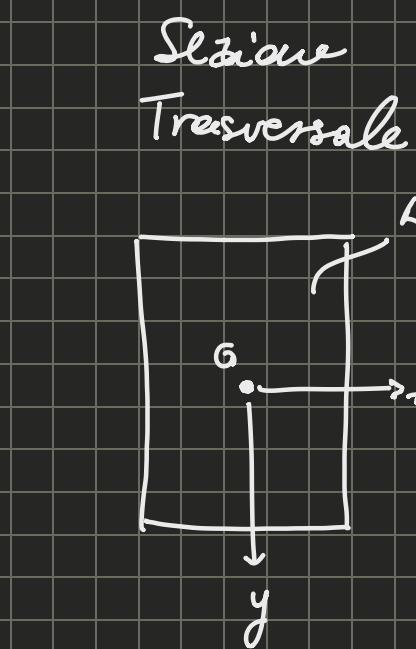
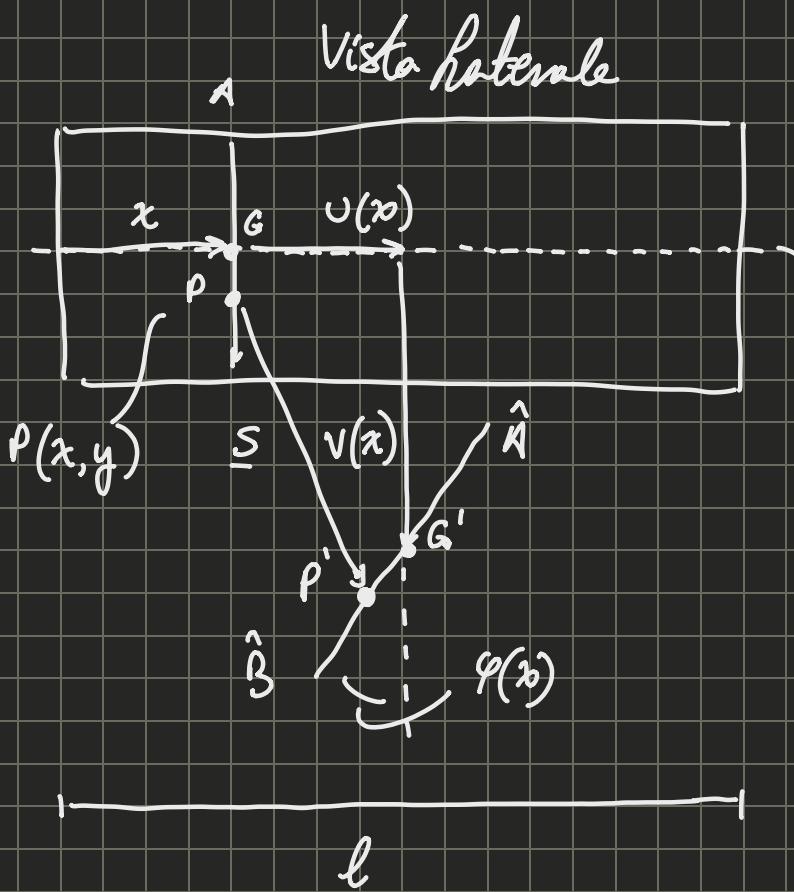


Ressione 8



Cinematica

$$\Sigma(x, y) = (S_x, S_y)^T : P(x, y) \rightarrow \hat{P}$$

$$\begin{cases} S_x(x, y) = v(x) - y \varphi(x) \\ S_y(x, y) = v(x) \end{cases}$$

↳ Sotto ipotesi di piccoli spostamenti

Definendo: $\underline{v}(x) = (v, v, \varphi)^T$

$$\Rightarrow \underline{\Sigma} = \underline{A}(y) \underline{v}(x)$$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ci sono
della
analoga
ai
sistemi
di
corpi
rigidi
che
abbiamo
già
visto

Vogliamo descrivere lo stato di una
barra elastica a piccole spostamenti, non usiamo
la soluzione del carico da DSV, ma vogliamo
ricavare risultati portando ad un
approccio simile all'MDS per le strutture
rigide che abbiamo visto.

ad elasticità concentrata

Per MDS le aree restano rigide durante la
deformazione della struttura

Per questo la ipotesi è che le sezioni trasversali
rimangono rigide durante la deformazione.

Quest'approccio è ispirato da DSV ma non è sempre
uguale.

↳ La deformazione al taglio è diversa

↳ Questo è iperincolato rispetto a DSV

Le aree $y \geq 0$ devono esser principi di cinematica, cioè
le linee di area non scese dal piano.

↳ Possiamo risolvere sistemi più

$$S_2 = \int_A y \, dA = 0 \quad I_2 = \int_A y^2 \, dA > 0$$

↳ Il momento statico

Momento cinetico
rispetto a z


Abbiamo descritto il generico moto delle fibre

Per i sistemi rigidi ci siamo chiesti in quali condizioni siamo congruenti con la rigidità della fibra e con i vincoli

↳ Dobbiamo trovare un equivalente per i sistemi elastici!

↳ Ricavare le congruenze, chiediamo:

- Che il moto campo di "spostamenti", il moto atti di moto, sia tale da non strappare il materiale
 - creare compenetrazioni.

↳ Come lo garantiamo

↳ U, v, ψ sono tali per soddisfare le equazioni di congruenza intorno del continuum, cioè il tenore delle piccole deformazioni del modello continuo.

↳ E e γ

↳ Deformazione \rightarrow Scorrimento Angolare

↳ Quanto ruota l'angolo all'dx, dx inizialmente puramente indicati a Com.

Per la congruenza interna del nostro modello nel corso della trave piano ci serve descrivere

$$\varepsilon_x = \frac{\partial S_x(x,y)}{\partial x} = \frac{dU}{dx} - y \frac{d\varphi}{dx} = U' - y\varphi' \text{ in funzione del nostro modello}$$

cinematico:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial S_y(x,y)}{\partial y} = 0 \rightarrow \text{non dipende da } y$$

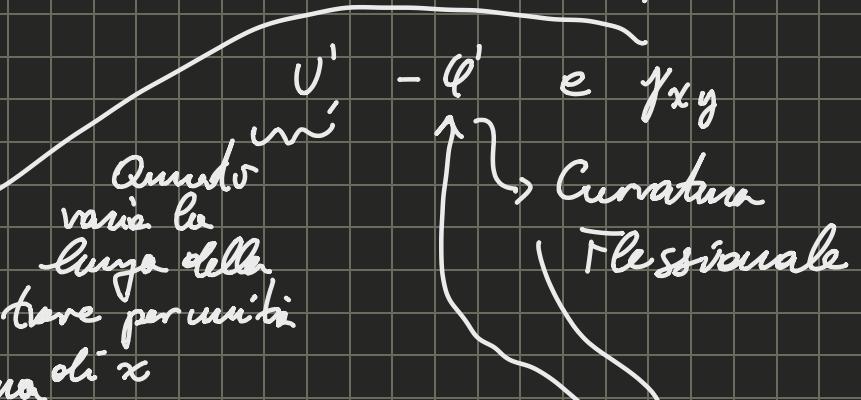
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial S_y(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial S_x(x,y)}{\partial y} = \frac{dU}{dy} - \varphi'(x) = U' - \varphi'$$

→ Faranno perché la sezione è rigida, non c'è ragione per cui la altezza debba variare.

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x,y) = (\varepsilon_x, \gamma_{xy})^T$$

↳ Definizione dell'entroporto del mezzo continuo non nullo

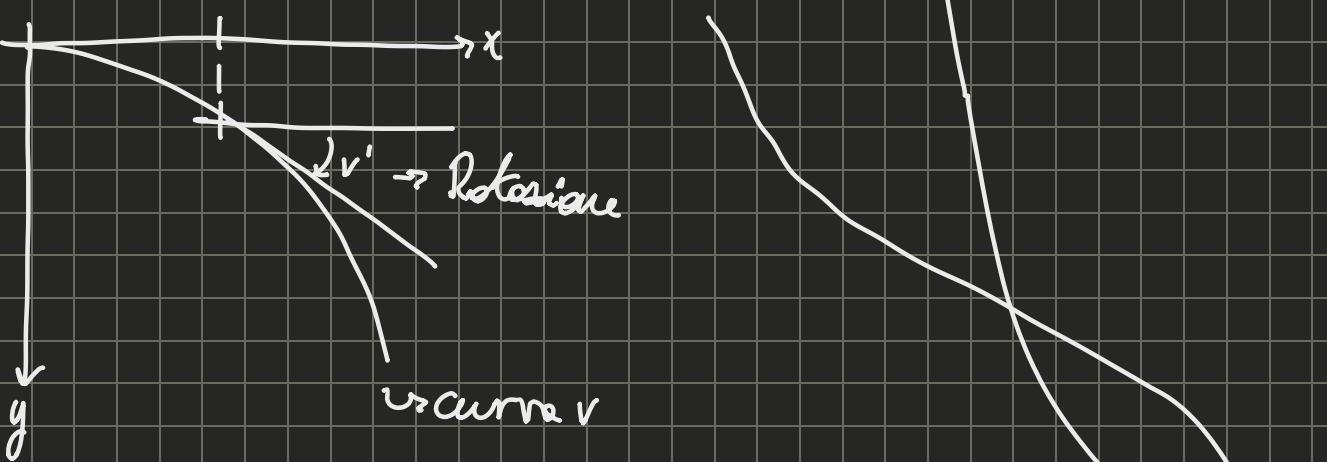
→ Distinguiamo delle quantità che dipendono solo per x :



↳ allungamento unitario alla linea d'asse →

Definiamo allora: $\eta(x) = U'$

Definiamo:
 $x(x) = -\varphi'$



$\begin{array}{c} + \\ \curvearrowleft \end{array}$ $v'' > 0$ Variazioni per unità
 di lunghezza della rotazione
 Curvatura \hookrightarrow Senso significativo di ϕ'

$f_{xy} = v' - \varphi \rightarrow$ In blocco dipende da x

Definiamo: $\tilde{\tau}(x) \rightarrow$ Scorrimento angolare medio

Nel caso del continuo, questo è diverso per ogni punto, nel nostro caso con l'ipotesi della sezione rigida, quello che era variabile per ogni punto nella sezione ora è un solo valore per l'intera sezione.

È anche scorrimento angolare, ma non dipende più dal punto che stiamo guardando

Definiamo: $q(x) = (\eta, \chi, \tau)^T$

Deformazione generalizzata

Possiamo allora scrivere in forma matriciale le equazioni di conservazione del nostro modello

Definizioni di spostamenti locali del mezzo continuo

$$\underline{\varepsilon}(x, y) = \underline{B}(y) q(x)$$

$$\underline{B}(y) = \begin{pmatrix} 1 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definizioni generalizzate,

che dipendono solo da x ,

È un legame come $\underline{\varepsilon} = \underline{B} q$, dove consideriamo che uno spostamento generalizzato q , ad una quantità coordinata che vogliamo trovare.

Modelli diversi di trave,

Timoshenko : $\tau = v' - \varphi + \alpha \rightarrow$ Quelli che abbiamo fatto fin ora.

Euler - Bernoulli : $\tau = v' - \varphi = 0$

$\Rightarrow \gamma_{xy} = 0$, \Rightarrow la trave

è indetormentibile per taglio.

non esiste uno scorrimento

angolare. E poiché

se la trave è molto

sulla.

$\varphi = v'$ è equazione \rightarrow

di vincolo, riduciamo

di 2 le coordinate

i indipendenti / spostamenti generalizzati per descrivere l'atto di moto della sezione

$\Rightarrow \varphi = v' \Rightarrow \chi = -v''$.

la curvatura bressiana

diventa costante

la curvatura geometrica

dell'arco della trave

Prima avevamo bisogno di 3 coordinate lagrangiane, U, V, φ (funzioni di x), per descrivere lo spostamento della sezione trasversale, ora solo 2. Perché $\varphi = v'$

$$\hookrightarrow \underline{U}_{EB}(x) = (U(x), v(x))^T$$

\hookrightarrow vettore degli spostamenti generati nello caso di Euler - Bernoulli.

$\Rightarrow \underline{\varepsilon}_{EB} = (\varepsilon_x)$ \rightarrow Vettore delle deformazioni si riduce ad un scalare.

\Rightarrow l'unica equazione di congruenza si limita a specificare \dot{x} in funzione dell'allungamento della linea d'asse $y(x)$ e della curvatura fluiante $\kappa(x)$, non c'è più effetto del Taylor dato dalla seconda equazione.

$$\Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}}_{EB} = \begin{pmatrix} 1 & y \end{pmatrix}$$

d'introduzione del vincolo intorno della indipendenza per Taylor, riduce di I gli spostamenti necessari per descrivere il moto della sezione.

Come nei corpi rigidi, introducendo un vincolo, significa ridurre di 2 le variabili indipendenti.

Fine alla cinematica del modello in trave.
atto di moto congruente

Statica della Trave

\hookrightarrow Come definiscono le azioni interne e come stanno in equilibrio con i carichi esterni

$\underline{Q}(x) = ? \rightarrow$ Come definiscono le azioni interne nel

caso della trave.

Cos'è l'azione interna?

È la quantità statica, che compie lavoro diretto per una deformazione generalizzata.

$$(\eta, \chi, \tau) \downarrow \downarrow \xrightarrow{\text{Somma}} \begin{array}{l} \text{Attivanti Curvatura Torsione} \\ \text{Alleganti Curvatura Torsione} \end{array}$$

Quali sono le quantità statiche che compiono lavoro diretto per le quantità cinematiche.

Facciamo un modello semplice per la trave che poi possiamo applicare alle piastre, gresci e qualsiasi altro tipo di struttura → dove le deformazioni sono più complicate.

$$L_{INT} = \int_0^l \int_A (\hat{E}_x \sigma_x + \hat{E}_y \sigma_y + \hat{f}_{xy} \tau_{xy}) dA dx$$

dovendo compiuto dagli sforzi, per le associate deformazioni generaliche figlie di un'atto di moto congruente.

Possiamo inserire il nostro modello cinematico

$$= \int_0^l \int_A [\sigma_x (\dot{\eta} + y \dot{\chi}) + \sigma_y \cdot 0 + \tau_{xy} \cdot \dot{\tau}] dA dx$$

σ_y non è sempre 0, ma moltiplica sempre 0 quindi non importa.

$\underline{\sigma} = (\sigma_x, \tau_{xy})^T \rightarrow$ vettore sforzi che compiono lavoro, per le deformazioni in $\underline{\epsilon}$

In forma compatto: $\int_0^l \int_A \underline{\sigma}^T \cdot \underline{\underline{B}} \hat{q} dA dx =$

\hat{q} dipende da x , non y quindi possiamo toglierlo dal primo integrale

$$= \int_0^l \left[\int_A \underline{\sigma} \underline{\underline{B}} dA \right] \hat{q} dx$$

Funzione di x

Abbiamo definito \underline{Q} come la quantità dei generici lavori diretti per deformazioni generalizzate. Introduciamo una definizione implicita.

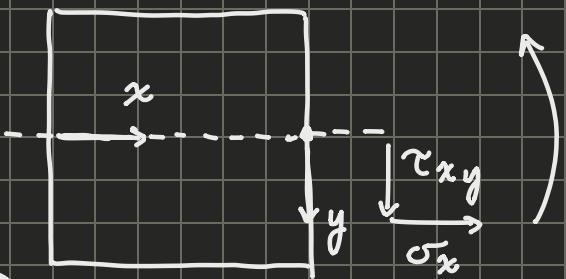
Cioè vogliamo: \underline{Q} tale che $L_{\text{INT}} = \int_0^l \underline{Q}^T(x) \hat{q}(x) dx$

questa è la stessa forma della forma implicita

$$\Rightarrow \underline{Q}(x) = \int_A \underline{\underline{B}}^T \underline{\sigma} dA =$$

$$= \int_A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dA =$$

$$= \int_A \begin{bmatrix} \sigma_x \\ y \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dA = \begin{bmatrix} N \\ M \\ T \end{bmatrix}$$



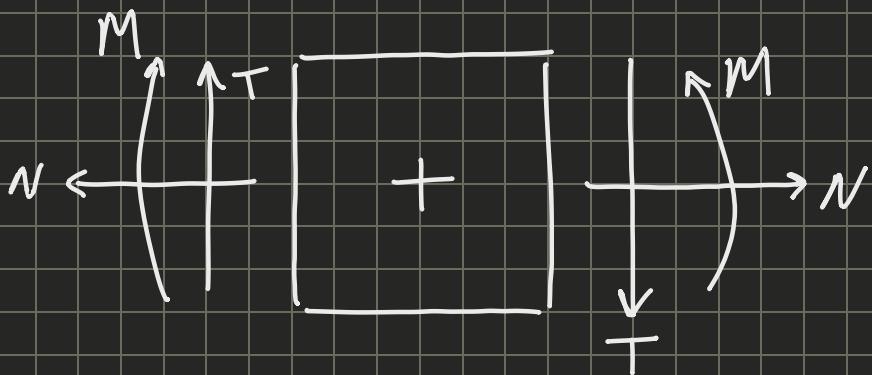
Dal modello vediamo che

$$dA = dx dy$$

Nell'effetto di σ_x e T c'è effetto

di M , Ma effetto di σ_x posto ay , che crea un momento.

Possiamo vedere anche il verso delle azioni:



Nel modello della trave alla Timoshenko (quello generale), le azioni interne associate alle tre variabili della deformazione generalizzata (η, X, τ), sono le N, M e T che abbiamo ricavato con DSV.

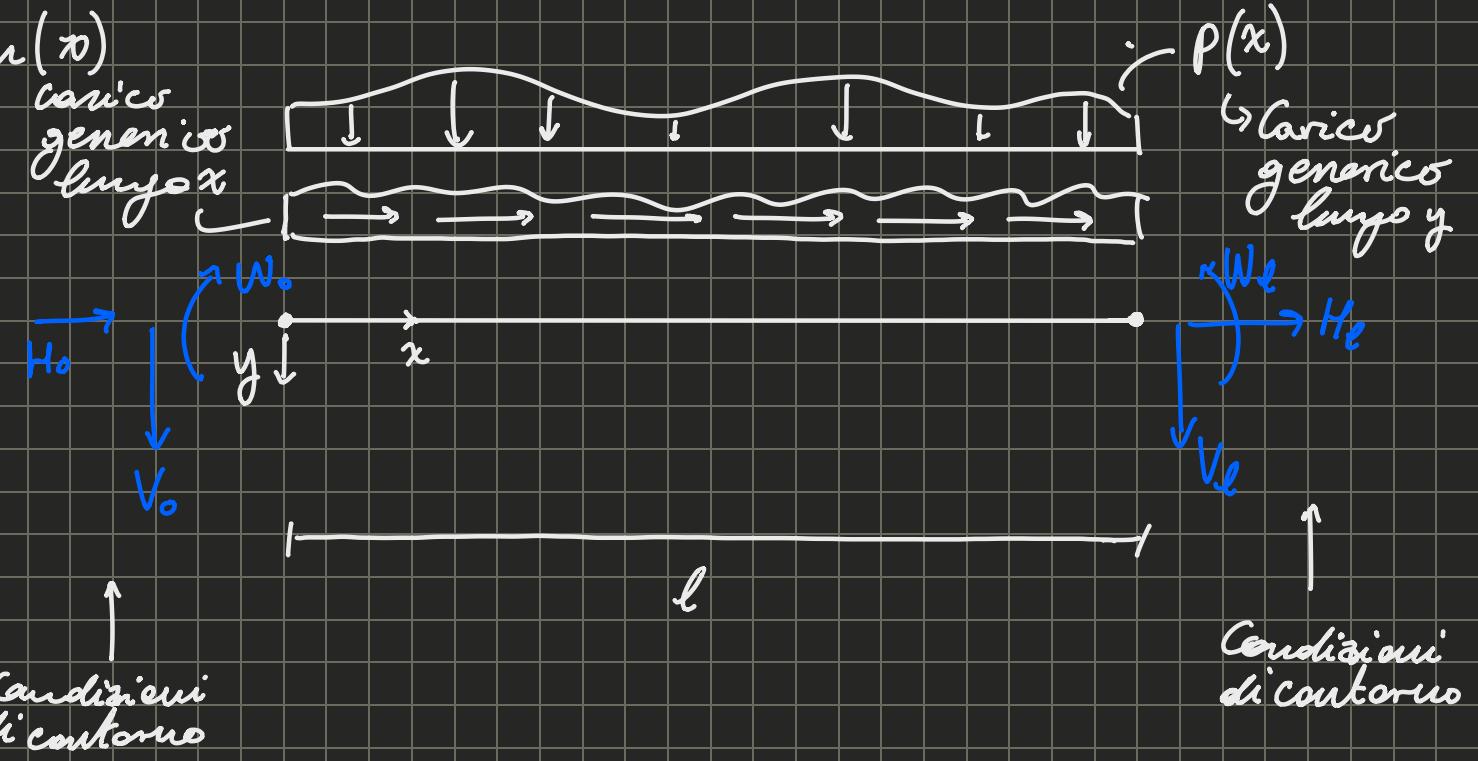
Con DSV abbiamo risolto un problema di elasticità 3D in maniera esatta, quindi le abbiamo ricavate a partire da un'ipotesi cinematica sulla base di una considerazione puramente energetica.

$Q_{EB} = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}$ → l'azione di taglio c'è solo che non entra negli sforni generalizzati nel modello di trave.

Visto che $\tau = 0$, non è possibile calcolare τ_{xy} , quindi non possiamo trovare T .

Calcolo di Q , dati carichi esterni → 2^a domanda della statica

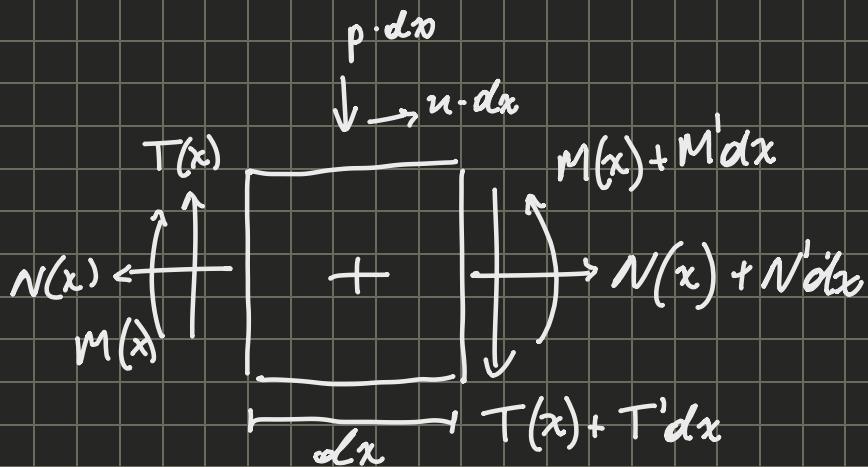
Per semplificare il disegno andiamo dalla rappresentazione 2D a solo l'asse dell'orta.



Approccio Diretto concio

3 equilibri \rightarrow 2 ad un concio infinitesimo delle fibre,
 1 volta all'estremo sinistro, 1 volta all'estremo destro

Concio Generico



Equazioni indeterminate di equilibrio

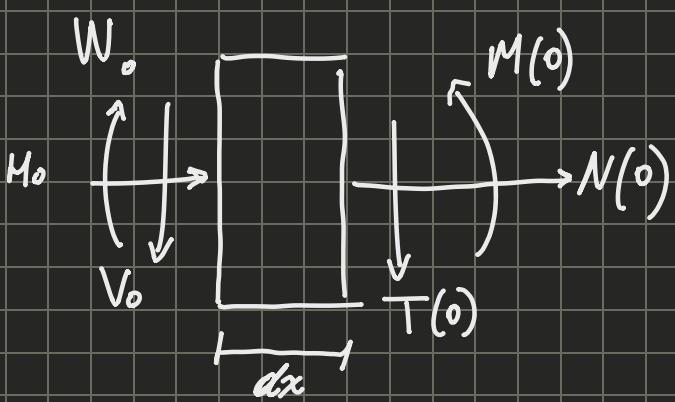
$$\begin{aligned}
 & \text{Assiale} \quad -\int -N + (N + N'dx) + n dx = 0 \Rightarrow N' + n = 0 \\
 & \text{Flessionale} \quad \left\{ \begin{array}{l} M'dx - T'dx = 0 \Rightarrow M' - T = 0 \\ T' + p = 0 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Il problema assiale è completamente indipendente dal problema flessionale, che è retto dalle due equazioni di momento e faylie.

Nota:

$$\begin{cases} M' = T \\ M'' + p = 0 \quad \text{se } p = \text{cost} \Rightarrow M \text{ è parabolico} \Rightarrow T \text{ lineare} \end{cases}$$

$x=0 \rightarrow \text{Equilibrio all'estremo sinistro}$



$$\begin{cases} N(0) + H_0 < 0 \\ T(0) + V_0 = 0 \\ M(0) - W_0 = 0 \end{cases}$$

$x=l \rightarrow \text{Equilibrio all'estremo destro}$

$$\begin{cases} N(l) - H_l = 0 \\ T(l) - V_l = 0 \\ M(l) + W_l = 0 \end{cases}$$

In pratica
si userà uno
dei due, di
solito quello al
lato non vincolato

Questo è l'appuccio che utilizza le equazioni cordiali della statica.

PLV come condizione sufficiente di equilibrio

Informazione
 e impre-
 also

$$\begin{cases}
 \text{Se } L_{\text{EXT}}(F, \hat{C}) = L_{\text{INT}}(Q, \hat{C}) \quad \forall C \\
 \Rightarrow F \in Q \text{ sono in equilibrio} \quad \{(F, Q)\} \subset C^*
 \end{cases}$$

$$L_{\text{ext}} = \int_0^l (p \hat{v} + n \hat{U}) dx + H_0 \hat{U}(0) + H_e \hat{U}(l) + V_0 \cdot \hat{v}(0) + V_e \cdot \hat{v}(l) \\
 + W_0 \hat{\varphi}(0) + W_e \cdot \hat{\varphi}(l)$$

↑ forse concentrat
 Termini di Bordo

$$L_{\text{INT}} = \int_0^l \underline{Q}^+(x) \hat{q}(x) dx = \int_0^l (N \hat{v} + M \hat{x} + T \hat{z}) dx =$$

$$= \int_0^l [N \hat{v}' - M \hat{\varphi}' + T (\hat{v}' - \hat{\varphi})] dx$$

↓ Integrandi per parti per aver termini che

$$\int_0^l N \hat{v}' dx = \left[N \hat{v} \right]_0^l - \int_0^l N' \hat{v} dx \quad \begin{array}{l} \text{equilibrio} \\ \text{quelli al bordo} \\ \text{e qualche che} \\ \text{è moltiplicato} \end{array}$$

$$- \int_0^l M \hat{\varphi}' dx = - \left[M \hat{\varphi} \right]_0^l + \int_0^l M' \hat{\varphi} dx \quad \begin{array}{l} \text{per gli spontanei} \\ \text{generalizzati} \end{array}$$

$$\int_0^l T \hat{v}' dx = \left[T \hat{v} \right]_0^l - \int_0^l T' \hat{v} dx$$

$$L_{\text{INT}} = - \int_0^l [N' \hat{v} - M' \hat{\varphi} + T' \hat{v}] dx + \left[N \hat{v} \right]_0^l + \left[M \hat{\varphi} \right]_0^l + \left[T \hat{v} \right]_0^l$$

$$L_{\text{ext}} - L_{\text{INT}} = \int_0^l [(N' + n) \hat{U} + (M' - T) \hat{\varphi} + (T' + \varphi) \hat{v}] dx$$

$$+ [H_0 + N(0)] \hat{U}(0) - [H_e - N(l)] \hat{U}(l) + \dots \quad \begin{array}{l} \text{Termini} \\ \text{di Bordo} \end{array}$$

$$= 0$$

\hookrightarrow Vogliamo che sia vera $\forall \hat{C} \Rightarrow$ Deve esser vera $\forall \left\{ \hat{V}(x), \hat{v}(x), \hat{\varphi}(x) \right\}$

Funzioni arbitrarie

$$\Leftrightarrow N^+_{|n=0} = 0 \quad \forall x \in (0, l)$$

$$M'_- - \tau = 0$$

$$T'^+ + \varphi = 0$$

"

"

Dall'integrale abbiamo
si annulli vengono
fornite condizioni
qui equilibrio per il caucio
generico

+

Condizioni di
Contorno

$$h_0 + N(0) = 0$$

$$h_e + N(l) = 0$$

:

Non abbiamo disegnato
un caucio, ma siamo
riusciti a ricavarli in base
a energetica portando
dal PLV concordanze
sufficiente di equilibrio

Viene dall'annullamento
di ciascun termine nelle
parentesi quando

Caso di trova Euler - Bernoulli:

$$\mathcal{L}_{INT} = \int_0^l (N \hat{v}' + M \hat{v}'') dx$$

\uparrow

$\hat{\varphi} = \hat{v}'' \quad \text{e} \quad \tau = 0$

$$-\int_0^l M v'' dx = - \left[M v' \right]_0^l + \int_0^l M' v' dx = - \left[M \hat{v}' \right]_0^l + \left[M v \right]_0^l - \int_0^l M'' v dx$$

Sviluppare per esercizio se vogliamo

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} N' + n = 0 \\ M'' + p = 0 \end{array} \right. \rightarrow \text{Stesso problema oriale}$$

→ Equazione del problema flessionale
che abbiamo scritto facendo
spazio il taglio nell'approssimazione
diretta.

Il taglio esiste lo stesso si può
trovare come la sforzante prima
dal momento

Il taglio c'è infatti anche presente nel termine:

$$[M^i \hat{v}]_e \quad \text{che nelle condizioni di fondo procura}$$

$$M^i(x=0, e) + V_{0,e} = 0$$

→ Ci sta dicendo infatti che il momento
equilibrio la forza verticale applicata
agli estremi.

TB → Ci dà la condizione al contorno associata
alla forza verticale in termini di sforzante del
momento, senza esplicitare il taglio.