Lezione 22 - Metodo di Galerkin

Ultima volta il problema era:

$$\begin{cases} -\mu_0 u''(x) + \sigma_0 u(x) = f(x) & x \in (0,L) \\ \mu_0 u'(0) = q_1 \\ \mu_0 u'(L) = q_2 \end{cases}$$

Abbiamo fattore la formulazione debole
Abbiamo fatto l'analisi di esistenza e unicità
con Lax-Milgram
Poi c'è una parte della discretizzazione.

Nota prima:

$$\begin{cases} \mu(x) u''(x) = 0 \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$$

si può avere $\mu(x)$ che cambia nello spazio, e.g. pezzi di metallo diversi in conduzione.

dovrebbe essere $(\mu(x)u'(x))'$ → con la derivata va al v nella integrazione per parti.

$$-\int_0^L \mu(x) u''(x) v(x) = \int_0^L f(x) v(x)$$

$$\underbrace{\int \mu(x) u'(x) v'(x) dx}_{a} - \cancel{\mu(x) u'(x) v(x) \Big|_0^L}^{\,0} = \underbrace{\int_0^L f(x) v(x) dx}_{F}$$

Dirichlet $\Rightarrow V = H^1_0$

Continuità per questa forma:

$$\left|\int_0^L \mu(x) u'(x) v'(x)\, dx\right|$$

↳ Non si può estrarre

Se un'altro risultato

Risultato / Richiamo 6 → Disuguaglianza di Hölder

Siano $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ tale che

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \text{e.g.} \begin{cases} p = q = 2 & \to \text{riporta a CS} \\ p = 1 \quad q = \infty & \to \text{quello che ci interessa} \end{cases}$$

Allora $\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^q(\Omega)}$

$$\leq \int_0^L |\underbrace{\mu(x)}_{g} \underbrace{u'(x) v'(x)}_{f}|\, dx$$

$$\leq \underbrace{\|\mu\|_{L^\infty(\Omega)}}_{\Rightarrow \mu \text{ deve avere quella regolarità}} \|u'v'\|_{L^1(\Omega)}$$

Hölder $p=1$, $q=\infty$

$$= \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^L |u'(x) v'(x)|\, dx =$$

$$= \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^L |u'(x)||v'(x)|\, dx$$

$$\left|\int_0^L u'(x)\, v'(x)\, dx\right|$$ → ci permette di usare CS.

$$\overset{CS}{\leq} \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)} \|u'\|_{L^2(\Omega)} \|v'\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\overset{R2}{\leq} \underbrace{\|\mu\|_{L^\infty(\Omega)}}_{M} \|u\|_V \cdot \|v\|_V$$

Tabellina

Serve:

a continua	R2 Hölder CS
a coerciva	Poincaré o Conseguenza
F limitata	R2 CS Traccia → Per termini di bordo

Corollario di Lax-Milgram

Sotto le ipotesi del lemma di Lax-Milgram, si ha che:

dipendente dai dati di problema

$$\|u\|_V = \frac{1}{\alpha}\|F\|_{V'}$$

V' spazio duale di V

costante di coercività

dipendente dai dati di problema

$= \{ F : V \to \mathbb{R}$ funzionali, lineari e limitati $\}$

non funzione

$$\|F\|_{V'} = \sup_{\substack{v\in V \\ v\neq 0}} \frac{|F(v)|}{\|v\|_V} \Rightarrow \frac{|F(v)|}{\|v\|_V} \le \|F\|_{V'}$$

$\forall F \in V'$

$$\longrightarrow |F(v)| \le \|F(v)\|_{V'} \cdot \|v\|_V$$

$\Longrightarrow$ u si può trovare in base ai dati del problema

<u>Dimostrazione</u>

$$a(u,v) = F(v) \qquad \forall v \in V$$

prendiamo $v = u$

definizione $\|\cdot\|_{V'}$

$$\alpha\|u\|_V^{\cancel{2}} \le a(u,u) = F(u) \le |F(u)| \le \|F\|_{V'} \cdot \cancel{\|u\|_V}$$

coercività

$$\alpha\|u\|_V^2 \le \|F\|_{V'}$$

$$\|u\|_V \le \frac{1}{\alpha}\|F\|_{V'}$$

Formula debole in più dimensioni (analisi in 2)

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = f(x,y) & \text{in } \Omega \\ u(x,y) = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

$$-\int_\Omega \Delta u(x,y)\, v(x,y)\, d\Omega = \int_\Omega f(x,y)\, v(x,y)\, d\Omega$$

$\longrightarrow$ Generalizzazione di integrazione per parti (teorema di Green)

↳

$$\int_\Omega \nabla u(x,y)\cdot\nabla v(x,y)\,d\Omega - \cancelto{0}{\int_{\partial\Omega} \underbrace{\nabla u(x,y)\cdot n(x,y)}_{\frac{\partial u}{\partial n}(x,y)}\cdot \underbrace{v(x,y)}_{=0}\,ds} = \int_\Omega f(x,y)\,v(x,y)\,d\Omega$$

? $u \in V$ tale che $a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in V$

$$a(u,v) = \int_\Omega \underbrace{\nabla u(x,y)}_{l} \cdot \underbrace{\nabla v(x,y)}_{m}\,d\Omega$$

$$F(v) = \int_\Omega f(x,y)\,v(x,y)\,d\Omega$$

$$|(l,m)| \leq \|l\|_{L^2(\Omega)}\,\|m\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow CS$$

$$\Rightarrow \nabla u \in \left[L^2(\Omega)\right]^2 \text{ e } \nabla v \in \left[L^2(\Omega)\right]^2$$

$$f \in L^2(\Omega) \text{ e } v \in L^2(\Omega)$$

$$\Rightarrow V = H^1_0(\Omega)$$

Dove $H^1 = \left\{ v \in L^2(\Omega) \text{ tali che } \underbrace{\nabla v \in \left[L^2(\Omega)\right]^2}\right\} \rightarrow$ In 2D

Alternativamente $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \in L^2(\Omega)$

↳ Sono la stessa richiesta

$$\text{E} \quad H^1_0 = \left\{ v \in H^1(\Omega) \text{ tale che } v\big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

Ci muoviamo verso la computazionabilità

↳ Il problema principale è che usiamo molto la gli integrali che usano il concetto dell'infinito.

dim ∞ — $\boxed{\text{Problema Forte}}$ — ha limiti modellistico (alcuni problemi non li solve) e usa dimensione ∞

e.g. $-u''=f$

↓

dim ∞ — $\boxed{\text{Problema Debole}}$ → Modello migliore, ma lo stesso dimensione ∞

↓

dim $<\infty$ — Problema Discreto (Formulazione di Galerkin) → Non ancora adatto per computer

↓ base

dim $<\infty$ — Sistema di Equazioni Lineari

↓ PC

Verifica Numerica

↑ Si fanno assimilare i risultati numerici e quelli veri.

⇅ Feedback e Data Assimilation

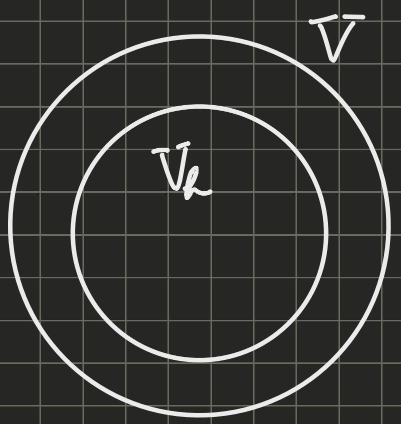
Validazione / Misurazione → Non lo facciamo questo

→ È una corrispondenza quantitativa.

Discretizzazione → Riguarda

$$? \, u \in V : a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in V$$

Problema Discreto (formulazione alla Galerkin)



$V_h \subset V$

con $\dim V_h < \infty$

Non è V ma abbiamo soluzioni in non infinite dimensioni.

La formulazione allora è:

$$? \, u_h \in V_h : a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

Proviamo ad espandere V_h tale che riempia V asintoticamente.

h → parametro di discretizzazione.

u_h → funzione trial discreta

v_h → funzione test discreta.

$\dim V_h = N_h < +\infty$

$\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_h}$ → base

Prendiamo $v_h = \varphi_i \quad i = 1, \dots, N_h$

$$a(u_h, \varphi_i) = F(\varphi_i) \qquad i = 1, \dots, N_h$$

Data la linearità, se vale per φ_i, varrà anche per una qualsiasi combinazione lineare della base.

$$u_h(x) = \underbrace{\sum_{j=1}^{N_h} u_j \varphi_j(x)}_{\text{Sfruttiamo la definizione di base.}}$$

$$a\left(\sum_{j=1}^{N_h} u_j \varphi_j(x), \varphi_i(x)\right) = F(\varphi_i(x)) \qquad i = 1, \dots, N_h$$

Sfruttiamo la bilinearità rispetto al primo argomento:

$$\sum_{j=1}^{N_h} u_j \, a(\varphi_j, \varphi_i) = F(\varphi_i(x)) \qquad i = 1, \dots, N_h$$

↳ È il sistema di N_h equazioni e N_h incognite u_j.

↳ i-esima equazione del sistema.

Lo possiamo scrivere come:

$$A\vec{u} = \vec{f}$$

$$\vec{u} = [u_1, u_2, \dots, u_{N_h}]^T \in \mathbb{R}^{N_h}$$

$$\vec{f} = [f_1, f_2, \dots, f_{N_h}]^T \in \mathbb{R}^{N_h}$$

dove $f_i = F(\varphi_i(x)) = \int_0^L f(x) \cdot \varphi_i(x)$

$-u'' = f(x)$ in $(0, L)$ Esempio con Dirichlet

$u(0) = u(L) = 0$

$[A]_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) \rightarrow$ è possibile che sia uguale a $a(\varphi_i, \varphi_j)$ ma non è detto, dipende dal caso.

Esempio: $\int_0^L \varphi_j'(x)\, \varphi_i'(x)\, dx$

↳ Sono uguali

se $\int_0^L \varphi_j'(x)\, \varphi_i(x)\, dx$

↳ Non lo sono, questo è il caso dove si inizia con u' non u''

$A \in \mathbb{R}^{N_h} \times \mathbb{R}^{N_h}$

↳ Matrice di Stiffness / Rigidezza

↳ perché nasce dai sistemi di travi.

<u>Proprietà della matrice A</u>

In base al PDE ← Problem Dependent	Base dipendenti $\{\varphi_i\}$
1 se $a(\cdot,\cdot)$ è coerciva $\Rightarrow$ A è sdp (dunque invertibile)	1 $k(A)$
2 $a(\cdot,\cdot)$ è simmetrica $\Longleftrightarrow$ A è simmetrica	2 sparsity pattern

simmetrica $\Rightarrow a(u,v)=a(v,u)$
$\forall u,v \in A$

Esempio: $a(u,v)=\int_\Omega u'v' + \int_\Omega uv$
simmetrico

invece se: $\int_\Omega u'v' + \int_\Omega u'v + \int_\Omega uv$
non simmetrico

In generali i PDE con differenziale di ordine pari sono simmetrici, se è dispari non lo sono

si usano $\underbrace{\text{chol}}_{\text{diretto}}$ o $\underbrace{\text{gradiente}}_{\text{iterativo}}$

Analisi Formulazione di Galerkin

- $\exists!$
- stabilità
- consistenza
- convergenza
- ortogonalità di Galerkin

$\exists!$ u_h

Un sistema di equazioni lineari ammette solo una soluzione se è invertibile, quindi se a è coerciva quindi in Lax-Milgram si ha $\exists!$

Stabilità

$$\underbrace{\|u_h\|_V}_{\text{Stima di Stabilità}} \le \underbrace{\frac{1}{\alpha}\|F\|_{V'}}_{\text{Uniforme rispetto ad } h.}$$

Come lo si conviene

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) = \int_\Omega f v_h \qquad \forall v_h \in V_h$$

Sistem Perturbato. $\rightarrow$ $a(w_h, v_h) = G(v_h) = \int_\Omega (f + p) v_h \qquad \forall v_h \in V_h$

p $\leftarrow$ Perturbazione sui dati.

$$w_h = u_h + \underbrace{\Sigma}_{\text{Perturbazione su soluzione}}$$

sfruttiamo la linearità:

$$a(u_h - w_h, v_h) = F(v_h) - G(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

Scegliamo apposta. $\rightarrow v_h = u_h - w_h$

Coercività

$$\alpha \|u_h - w_h\|_V \le a(u_h - w_h, u_h - w_h) = F(u_h - w_h) - G(u_h - w_h)$$

$$= \underbrace{(F - G)}_{\text{Differenza di funzionali}}(u_h - v_h) \le |(F - G)(u_h - w_h)|$$

$$\le \|F - G\|_{V'} \cancel{\|u_h - w_h\|_V}$$

$$\|u_h - w_h\|_V \le \frac{1}{\alpha}\|F - G\|_{V'}$$

La perturbazione sui dati da perturbazione sui risultati.
se $\|F - G\|_{V'}$ piccolo allora $\|u_h - w_h\|_V$ a patto di α piccolo

pò esser un problema

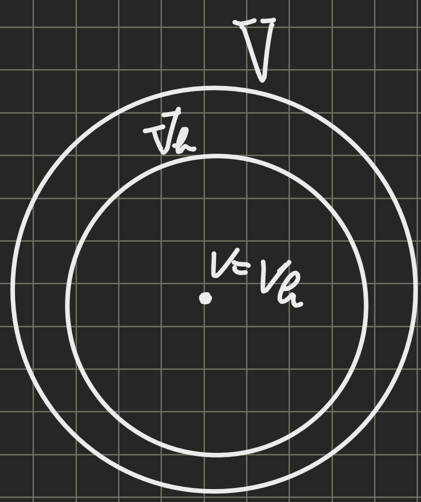
Ortogonalità di Galerkin

soluzione al problema debole

u_h soluzione di Galerkin tale che $a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$

$u - u_h \rightarrow$ errore di discretizzazione

Dimostrazione $\rightarrow$ ne esce anche la consistenza



$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V$

$a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$

$v = v_h \rightarrow$ prendiamo

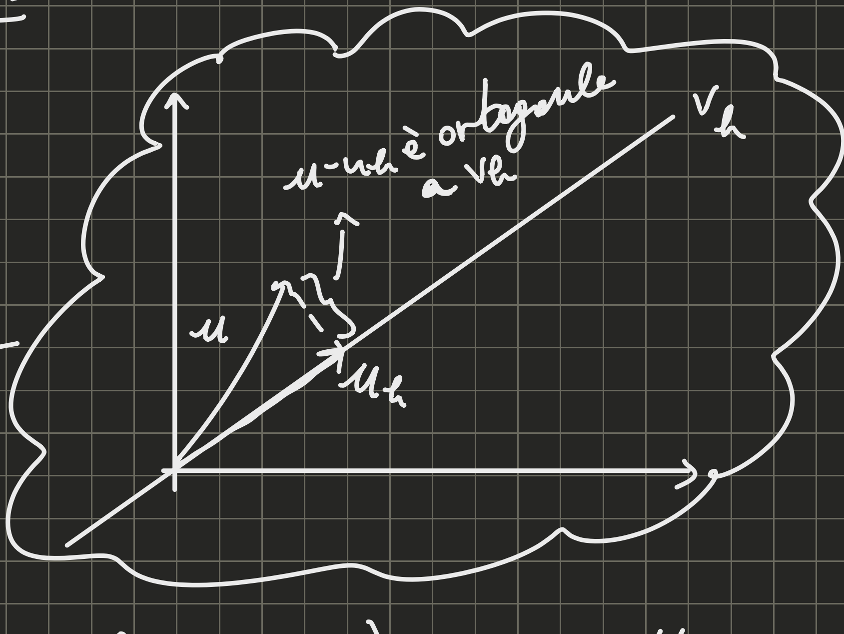
$a(u, v_h) = F(v_h) \rightarrow$ relazione di consistenza

Facciamo la differenza

$$\underbrace{a(u, v_h) - a(u_h, v_h)} = F(v_h) - F(v_h) = 0$$

$$a(u - u_h, v_h) = 0$$

se non consideriamo a e lo vediamo come un prodotto scalare



Se $a(\cdot,\cdot)$ è simmetrica, allora $a(u, v)$ è un prodotto scalare.

induce $\| \cdot \|_A = \left(a(u_a, u_a) \right)^{1/2}$

$= \left(\vec{a} A \vec{a}^T \right)^{1/2}$