Lezione 18 - PDEs

$u : \Omega \to \mathbb{R}$

↳ Dominio di dimensione d

Operatori di ordine 1

↳ Gradiente (∇) : Scalare → Vettore

↳ $\nabla u \in \mathbb{R}^d \quad d = 2,3$

↳ se $d=2$ $\quad \nabla u = \left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right]^T$

↳ se $d=3$ $\quad \nabla u = \left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right]^T$

↳ divergenza ($\nabla \cdot$) : vettore → scalare

$v = [v_1, v_2, v_3]^T \quad \nabla \cdot v(x) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$

Operatori di Ordine 2

↳ Laplaciano (Δ) : Scalare → scalare

↳ $\Delta u = \nabla \cdot (\nabla u) = \nabla \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right]^T$

$= \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial z}$

$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

Classificazioni di PDEs

↳ Molto facile se è a coefficienti costanti lineare e di secondo ordine.

Prendiamo il PDE: $Lu = g$

Dove $$Lu = \underbrace{A\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + C\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{Blocco Derivate secondo}} + \underbrace{D\frac{\partial u}{\partial x_1} + E\frac{\partial u}{\partial x_2}}_{\text{Blocco derivate ordine 1}} + \underbrace{Fu}_{\text{Blocco Derivate Ordine 0.}}$$

$$\underbrace{A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}}_{\text{se fossero funzioni di u non sarebbe lineare.}}$$

$x_1, x_2 \in \{x, y, z, t\}$, sono due qualunque delle variabili indipendenti.

$$\overset{\text{Discriminante}}{\mathcal{D}} = B^2 - 4AC \rightarrow \text{Base della nostra classificazione}$$

se $\mathcal{D}$:
- < 0 PDE è ellittico → Complicate; Dis. elettrostatiche
- $= 0$ PDE è parabolico → sono evolutivi (derivate nel tempo)
- > 0 PDE è iperbolica → molto difficile
  ↳ onde, urti, diffusione, etc.

Navier-Stokes non sono nessuno dei 3 sono in un mondo a parte.

Esempio 1 → equazione di Laplace

Dimensione 1 : $\begin{cases} -u''(x) = 0 & \Omega = (a,b) \subset \mathbb{R} \\ + CB \text{ (condizione di bordo)} \end{cases}$

2/3 Dimensioni : $\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^d \\ + 2/3 \; CB \end{cases}$

$$-\Delta u \underset{|}{=} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

2 Dimensioni

↳ Non possiamo fare con 3 perché abbiamo preso Lu in 2D.

↳ La dimensione non cambia la classificazione.

$x_1 = x \qquad x_2 = y$

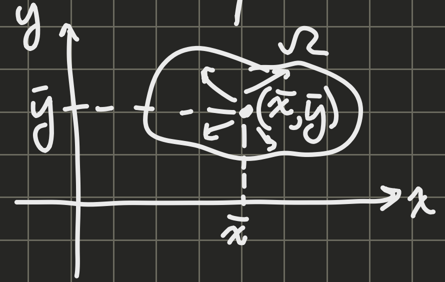
$A = -1$

$B = 0 \qquad \Longrightarrow \quad \Delta = B^2 - 4 \cdot A \cdot C = -4$

$C = -1 \qquad\qquad \Longrightarrow$ È di tipo ellittico.

$D, E, F = 0$

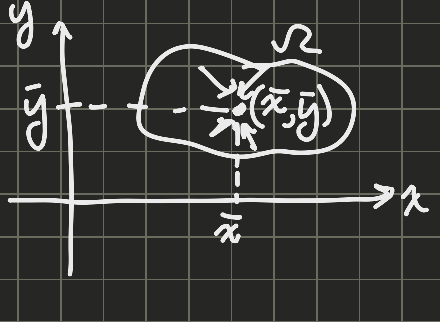
Una equazione ellittica di solito è isotropa (no distingue direzioni)



Quello che succede in $\bar{x}, \bar{y}$ influenza tutto il dominio.

e quello che succede al dominio influen

e



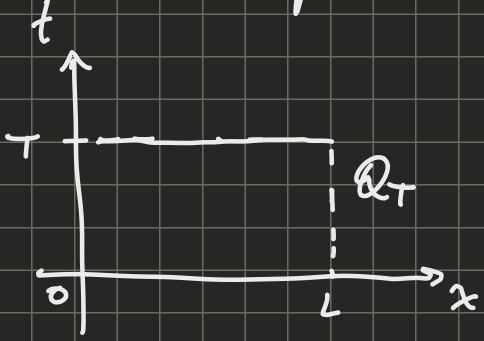
$\bar{x}, \bar{y}$.

Tutto influenza tutto.

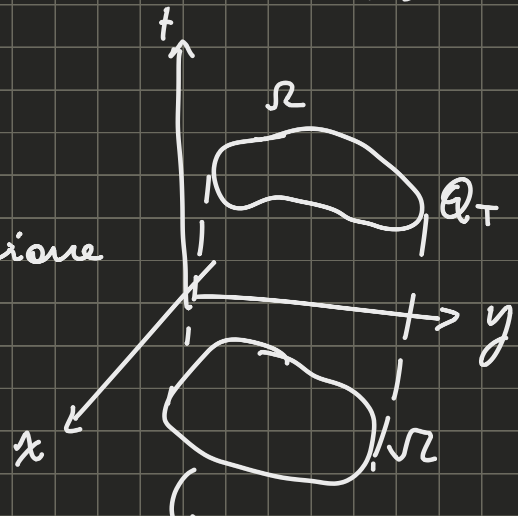
Esempio 2: Equazione del Calore

1 Dimensione:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{in } \underbrace{(0,L)\times(0,T)}_{\text{cilindro spazio temporale}} = Q_T \\ + 1CT \\ + 2CB \end{cases}$$

Coefficiente di diffusione di calore del materiale.



2D/3D
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \mu \Delta u = f & \text{in } \Omega \times (0,T) \\ + CB \\ + 1CI \end{cases}$$



Da più un idea di cilindro spazio tempo.
La funzione cambia nello spazio con il tempo.

Consideriamo 1 D per la classificazione

$x_1 = x$

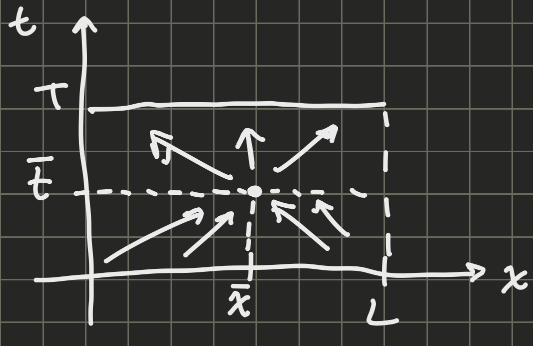
$x_2 = t$

$A = -\mu$

$E = 1$

$B, C, D, F = 0$

$$\Rightarrow D = \cancel{B}^{\,0} - 4A\cancel{C}^{\,0} = 0$$



u a $(\bar{x},\bar{t})$ dipende da tutti gli stati precedenti da tutti i punti dello spazio. Il passato influenza il presente, il presente non influenza del futuro.

$(\bar{x},\bar{t})$ è influenzato da tutto prima e influenza quello che succederà nel futuro

Esempio 3: Equazione delle Onde

Velocità di propagazione

$$1D \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sigma^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ 2\ CD \\ 2\ CI \end{cases} \qquad \text{in } \underbrace{(0,L)\times(0,T)}_{\text{lo stesso cilindro}} = Q_T$$

$$2/3D \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sigma^2 \Delta u = 0 \\ + CB \\ + 2CI \end{cases} \qquad \text{in } \Omega \times [0,T] = Q_T$$

Classificazione con 1D:

$x_1 = x$ e $x_2 = t$

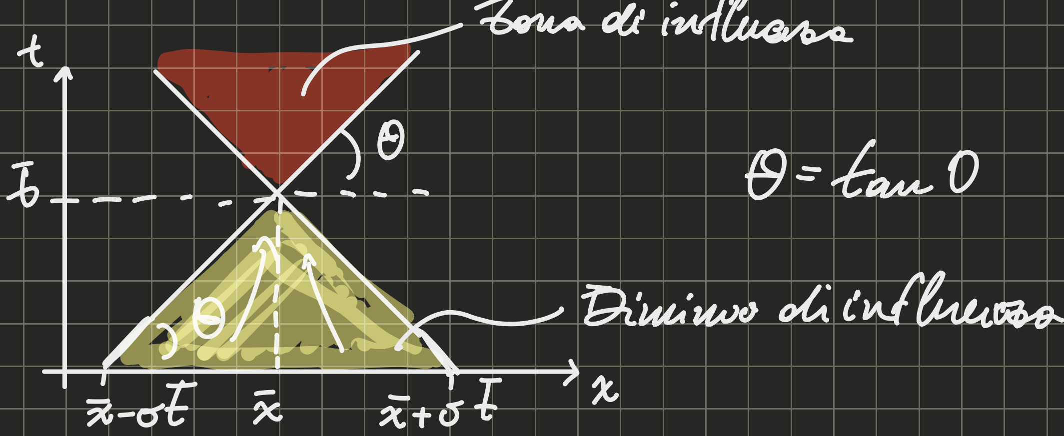
$A = -\sigma^2$

$C = 1$

$B, D, E, F = 0$

$\Longrightarrow D = B^2 - 4 \cdot A \cdot C = 4\sigma^2 > 0$

È di tipo iperbolico.



$\theta = \tan\sigma$

Più è alta la velocità, quindi σ, più aumenta l'area.

Di solito facciamo solo equazioni ellittiche.

Equazioni Ellittiche

Equazione di Poisson (Laplace generalizzato).

Poisson accende il forzante.

$$\text{1D} \begin{cases} -\overset{\text{Termine diffusivo}}{\mu}\, u'' = f \\ +CB \end{cases} \qquad \overset{\text{Laplace}}{(-\mu u'' = 0)}$$

$$\text{2/3D} \begin{cases} -\overset{\mu \text{ costante}}{\mu}\, \Delta u = f \\ +CB \end{cases} \qquad \overset{\text{Laplace}}{(-\mu \Delta u = 0)}$$

$\Delta = \nabla \cdot (\nabla \quad)$

↳ Funziona se μ è costante.

Però può essere una funzione.

Se μ è funzione lo scriviamo come:

$\underbrace{\nabla \cdot (\mu \nabla u)}_{\text{conservativo}} \rightarrow \mu$ non costante.

conservativo → preferito perché si conservano esattamente la massa e l'energia

$$-\underbrace{\mu(x)\,\Delta u(x)}_{\text{non conservativo}}$$

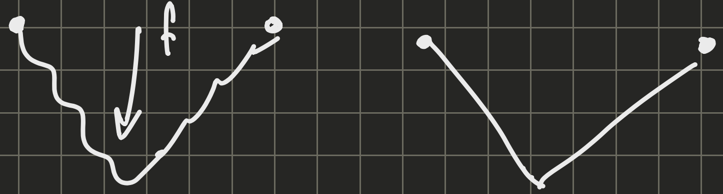
$(\mu u')'$ 1D

$\boxed{15:22}$

Le funzioni ellittiche rappresentano un caso di equilibrio. Infatti l'ellittico è il caso di equilibrio del parabolico. Poisson è l'equazione di equilibrio della equazione del calore

Esempi:

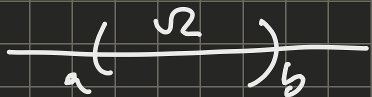
- → sbarretta surriscaldata (1D), dove è a temperatura stabile.
- → meccanica → filo elastico



- → fluido ("CFD")
  - ↳ diffusione di inchiostro in acqua, dove μ è la concentrazione

Bordo è aperto e definito dalle condizioni di bordo, noi isoliamo all'interno del dominio → bordo di Ω → $\partial\Omega$ simbolo per il bordo

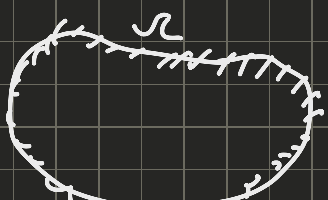
- ↳ 1D



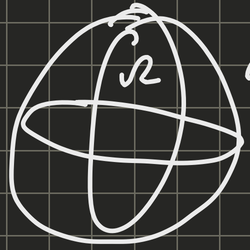
→ bordo è definito da a e b.

$$\partial\Omega = \{a, b\}$$

- ↳ 2D



↳ 3D



~ Superficie di bordo

<u>Condizioni al bordo</u> (CB) → Non sono le uniche, ma sono frequenti.

Tipi di Condizioni di Bordo:

1) Condizioni al bordo di Dirichlet (u)

↳ Assegno un valore al bordo per u.

$$u(x) = g(x) \quad \text{per } x \in \partial\Omega$$

Si può tenere i due lati della sbarretta a temperature con un termostato.

$$g(x) \begin{cases} = 0 \rightarrow \text{omogenea} \\ \neq 0 \rightarrow \text{non-omogenea.} \end{cases}$$

2) Condizioni al bordo di Neumann (derivata di u)

↳ Va ad imporre un valore per la derivata di u.

1D $\quad \mu\, u'(x) = h(x) \quad \text{per } x \in \partial\Omega$

2/3D $\quad \mu\, \underbrace{\nabla u \cdot n}_{\frac{\partial u}{\partial n}} = h$

$\frac{\partial u}{\partial n}$ → derivata normale al bordo.

Consideriamo variazione nella versione perpendicolare al punto del bordo.

3) Condizione al bordo di Robin (u, derivata di u)

Combina sia valori di u che i valori della sua derivata.

1D $\quad \alpha(x)\, u(x) + \mu\, u'(x) = g(x) \qquad x \in \Omega$

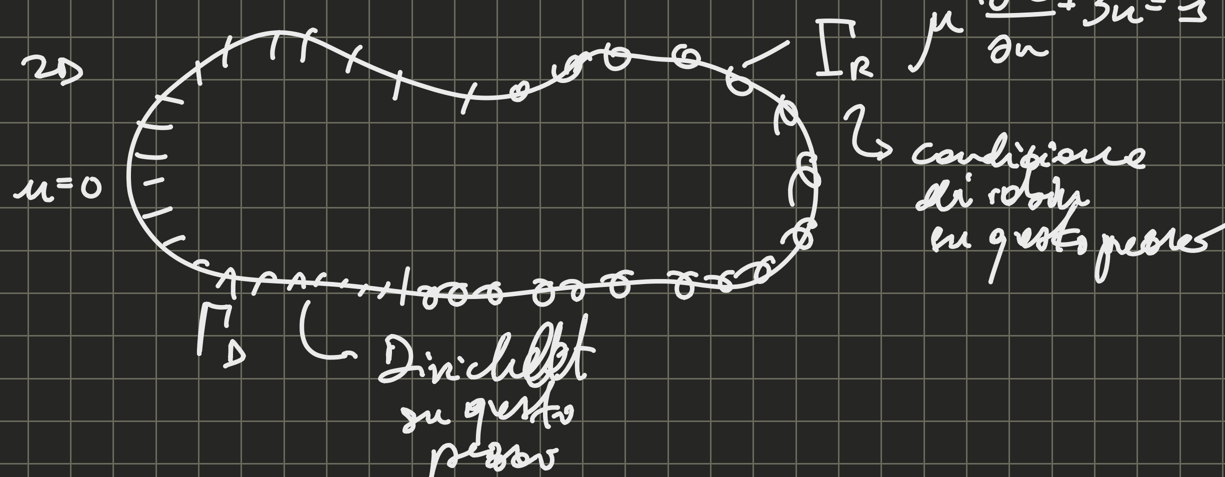
2D $\quad \alpha(x)\, u(x) + \mu\, \nabla u(x) \cdot n(x) = g(x)$

Simile ad un effetto elastico con Hooke

$\boxed{15:41}$

4) Condizioni miste

1D $\begin{cases} u(a) = 3 & \to \text{Dirichlet} \\ \mu u'(b) = -7{,}3 & \to \text{Neumann} \end{cases}$



In 2D, 3D può essere varietà quanto vogliamo.

$\Gamma_R \cap \Gamma_D \cap \Gamma_N = 0 \to$ I pezzi non devono avere intersezioni

$\bar{\Gamma}_R \cup \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N = \partial \Omega$ $\quad$ La loro unione deve comprendere tutto il bordo.

In modellistica esistono altre condizioni ma non le vediamo.

Fine di Nomenclatura

Chiusura di Ω

Poisson $\exists!$

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ limitato e con $\partial\Omega$ regolare ($\in C^1$).

Allora $\exists$ $\underbrace{\text{al più}}_{\text{1 o nessuna}}$ una funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$

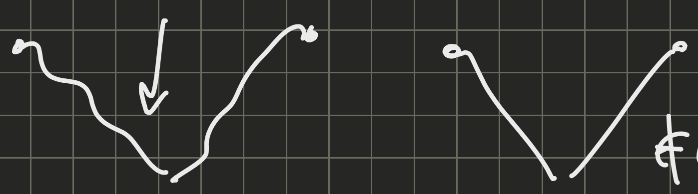
soluzione $-\mu\Delta u = f$ completato con CB di tipo D, R, miste D/N supposto di avere dati sufficientemente regolare

non Neumann
↳ non va bene con Neuman

Deve esser in $C^2(\Omega)$ perché il laplaciano deve aver senso e valere solo per Ω aperto.
$C^1(\bar{\Omega})$ fa stare in piedi la condizione di bordo per Neumann.

Al più, ci sono alcune configurazioni che possono non finire nella formulazione classica.

e.g



$\notin C^1$

Diamo delle formulazioni deboli per risolvere questi problemi.

Neumann:

$$\begin{cases} -\mu \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \mu \dfrac{\partial u}{\partial n} = h & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

si può garantire solo la esistenza

Perché se prendiamo $u+c$, con $c \in \mathbb{R}$

$$-\mu \Delta(u+c) = -\mu \Delta u - \cancel{\mu \Delta c}^{\,0} = f$$

se u è soluzione anche $u+c$ è soluzione, non può esistere una unica.

$$\mu \frac{\partial(u+c)}{\partial n} = \mu \nabla (u+c) \cdot n = \mu \nabla u \cdot n + \cancel{\mu \nabla c \cdot n}^{\,0} =$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial n} = h \rightarrow \text{Vale anche per Neumann.}$$

Esiste ma non è unica.

Anche se non volessimo la unicità, troviamo che f e h devono esser legate, vincolando il problema.

$$\int_\Omega f(x)\,dx = -\mu \int_\Omega \Delta u(x)\,dx = -\mu \int_\Omega \nabla \cdot (\nabla u)(x)\,dx$$

$$= -\mu \int_{\partial\Omega} \nabla u(s) \cdot n(s)\,ds$$

$$\boxed{\int_\Omega f(x)\,dx = -\int_{\partial\Omega} h(s)\,ds}$$

C'è la condizione in più della compatibilità dei dati.

Quello che si può fare è aggiungere una piccola correzione di ordine 0, cioè aggiungiamo γu.

$$\begin{cases} -\mu \Delta u \overset{-\gamma u}{\vee} = f & \text{in } \Omega \\ \mu \dfrac{\partial u}{\partial n} = h & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Significa che possiamo distinguere la soluzione di u e $u+c$.

Si tiene questa aggiunta piccola per non cambiare troppo il modello, mantenendo lo stesso la unicità.

2/3 D	1 D		tipo	
$(-\mu\Delta u)$	$-\mu u''$	ordine 2	diffusivo	isotropo
$(b\nabla u)$	u'	ordine 1	convettivo	anisotropo
	γu	ordine 0	reattivo	

↳ Valgono modellisticamente cose diverse

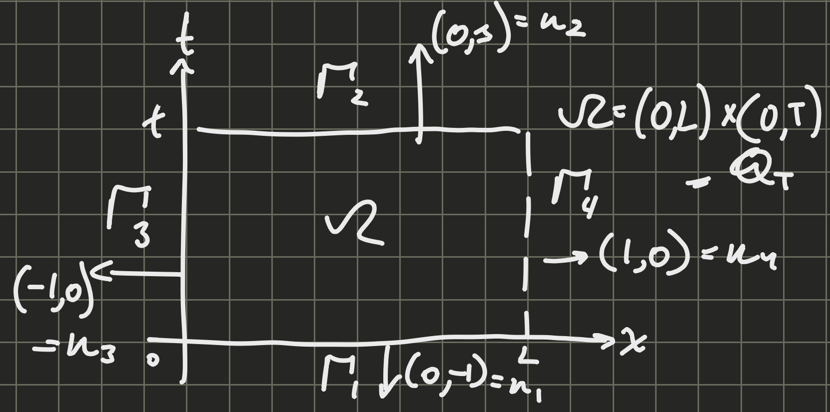
u'' modella una diffusione (isotropia)

u' modellano una convezione (trasporto direzionale) (anisotropo)

γu è di tipo reattivo, modellano aggiunte o tolte da sistemi.

Esercizio

$$\begin{cases} -\mu \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ -\mu \dfrac{\partial u}{\partial n} = q_i & \text{su } \Gamma_i \end{cases}$$



Qual è la condizione di compatibilità.
Le normali sono sempre uscenti.

$$f = \frac{1}{H}[q_1+q_2] - \frac{1}{L}[q_3+q_4]$$

Equazione di Laplace $\quad (-\mu \Delta u = 0)$

Proprietà di Laplace

Definizione

Una funzione u si dice armonica in $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ se $u \in C^2(\Omega)$ e se $\Delta u = 0$ in Ω

Osservazione: la soluzione di Laplace è armonica.

Teorema della media

Sia u funzione armonica in $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Allora $\forall B_R(x) = \{y \in \mathbb{R}^d, \|y-x\| < R\}$ tale che $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$ valgono le formule:

Palla centrata in x, di raggio R

La chiusura della palla è contenuta in Ω

$$u(x) = \frac{1}{|B_R(x)|}\int_{B_R(x)} u(y)\,dy \,;$$

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B_R(x)|}\int_{\partial B_R(x)} u(s)\,ds$$

→ $u(x)$ è il valore medio della palla intorno al punto.
→ È una soluzione puntuale.

$|B_R(x)|$ πr^2

Principio del Massimo

Teorema Sia $u \in C^0(\Omega)$ che soddisfa la proprietà della media (in $\Omega \subset \mathbb{R}^d$), e sia $p \in \Omega$ un punto interno e punto di estremo di u globale.

massimo o minimo globale.

Allora u è una costante.

$\Rightarrow$ Una funzione che soddisfa la proprietà della media che non è costante raggiunge il valore massimo o minimo al bordo.

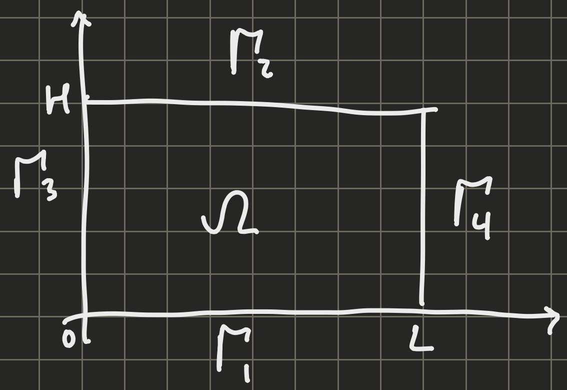
Significa che se vogliamo trovare il minimo o il massimo allora possiamo guardare al bordo se non è costante.

Il massimo e minimo $\displaystyle\max_{x \in \Omega}$ $u(x) = \max/\min_{x \in \partial\Omega} u(x)$.

Analogamente: $\displaystyle \min_{x \in \partial\Omega} u(x) \leq u(x) \leq \max_{x \in \partial\Omega} u(x)$

Possiamo trovare il valore puntuale e per il massimo e il minimo.

Esercizio di prova



costante come i q_i

$$\begin{cases} -\mu \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ -\mu \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = q_1 & \text{su } \Gamma_1 \\ -\mu \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,H) = q_2 & \text{su } \Gamma_2 \\ -\mu \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = q_3 & \text{su } \Gamma_3 \\ -\mu \dfrac{\partial u}{\partial x}(H,y) = q_4 & \text{su } \Gamma_4 \end{cases}$$

$$-\mu \frac{\partial u}{\partial n} = q_1$$

$$-\mu \nabla u \cdot n$$

$$\int_\Omega f(x)\,dx = f HL$$

$$-\int_{\partial\Omega} q(s)\,ds = -\sum_{i=1}^{4} \int_{\Gamma_i} \underbrace{q_i(s)}_{\text{costante}}\,ds = -\sum_{i=1}^{4} q_i |\Gamma_i| =$$

$$= -\left[(q_1+q_2)L + (q_3+q_4)H\right]$$

$$fHL = -\left[(q_1+q_2)L + (q_3+q_4)H\right]$$

$$f = -\frac{q_1+q_2}{H} - \frac{q_3+q_4}{L}$$