MANI-L03

Domani laboratorio

Ultima lezione:
↳ Determinazione LU con MEG
↳ Determinazione condizioni se matrice A è pertibile

È possibile che la matrice non entri nelle 4 condizioni

Per garantire il MEG dobbiamo garantire che A non singolare ⇒ utile anche per risolvere

A_{n-1} È singolare

$$A = A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$l_{21} = 2$

$l_{31} = 3$

$l_{32} = \frac{3}{0}$

Possiamo scambiare le righe 2 e 3 Non va bene

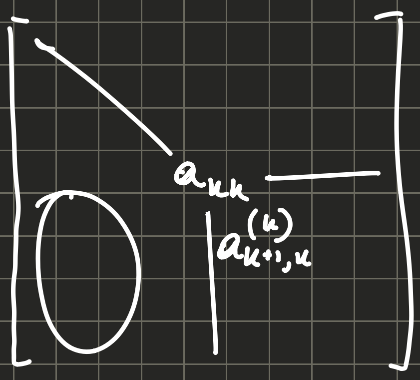
$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad l_{31} = 0$$

A_{n-1} non è singolare ✓

Va bene

Ci permette trovare una soluzione è saltare un passo nel MEG.

Supponiamo di aver una matrice grande



$n = 1000$

$a_{kk}^{(k)} = 0$

$k = 733$

Scambiare una riga dopo esser ritornato all'inizio e rinizziare non è computazionalmente efficiente.

Quando facciamo?

↳ Invece di tornare all'inizio e fare lo scambio possiamo fare lo scambio quando affrontiamo il problema perchè i numeri non cambiano.
Facciamo quando serve quando $a_{pivot} = 0$

Scambio con quelle sotto perchè distruggiamo la struttura se usiamo quelli sopra.

Quali righe scambio?

Semplice: Prendi la riga sotto

Complicato: Vedremo

PIVOTING → scambio tra righe.

P- Matrici di permutazione

↳ Matrici usate per scambiare righe nella matrice

↳ Sono ortogonali $P^TP = PP^T = I \Rightarrow P^T = P^{-1}$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Per scambiare la prima e terza riga scambiamo la prima e terza riga nella matrice identità e la applichiamo alla matrice

$$P_{13}A \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{32} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

Sì è il risultato

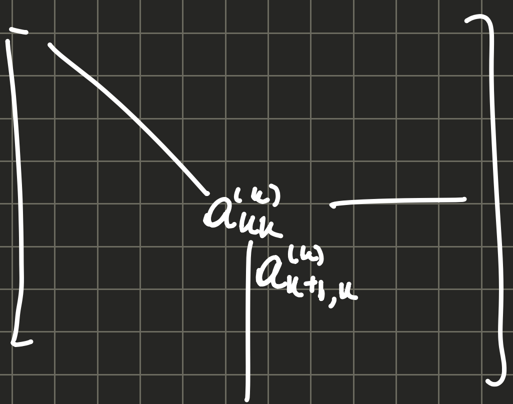
$$P_{13}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

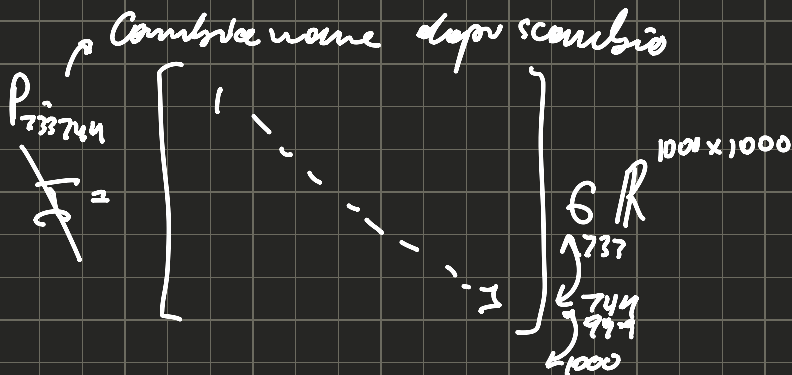
$$A P_{13} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{bmatrix}$$

↳ Questo ordine di operazione scambia le colonne invece che le righe.

$n = 1000$ $\quad a_{kk}^{(k)} = 0$

$k = 733$





Se troviamo che $a_{999\,999}^{(999)} = 0$

$$[L, U, P] = lu(A)$$

Sintassi migliore

Se $P = I$ implica che non c'è stato pivoting, se no allora c'è stato

LU la trovo per PA non per A stessa

P può esser I.

$$PA = LU$$

$Ax = b$

↳ Non possiamo lavorare solo su A anche su P

Riscriviamo il sistema come

$$PAx = Pb$$

$$L\underbrace{Ux}_{y} = Pb$$

Primo sistema

$$Ly = \underline{Pb}$$

→ Cambia solo questo

$$Ux = y$$

Utilizzo minimale del pivoting

Secondo Utilizzo del pivoting

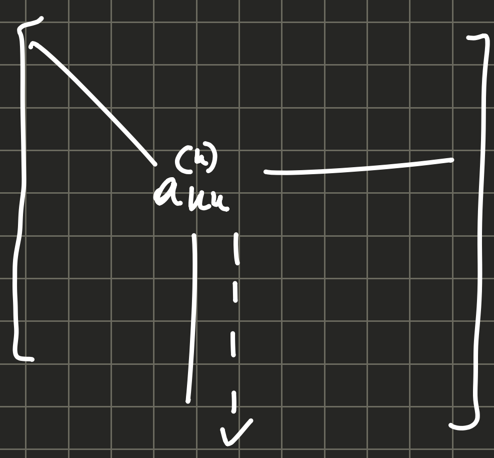
Supponiamo $a_{kk}^{(k)} = 10^{-15}$

$$\left.\begin{aligned} l_{k+1,k} &= \frac{a_{k+1,k}^{(k)}}{a_{k,k}} \\ &\vdots \\ l_{n,k} &= \frac{a_{n,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} \end{aligned}\right\}$$

Sono grandi, ci sono problemi di arrotondamento da 10^{-15} che sono amplificati

Vogliamo tenere i l piccoli per non peggiorare gli errori floating point

Cosa facciamo:



$a_{kk}^{(k)}$ non nullo ma molto piccolo. andiamo giù per la colonna e andiamo a prendere il valore di a più grande possibile, per minimizzare gli errori di approssimazione.

→ Prima di ogni operazione possiamo trovare l'elemento migliore e facciamo il pivoting per minimizzare l'errore

Esempio:

Parziale singolarità

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1+0{,}5\cdot 10^{-15} & 3 \\ 2 & 2 & 20 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Se la rappresentazione è accurata:

$$A - LU = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Per quest'esempio la differenza è $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

→ Errore molto molto grande

⇒ Il pivoting per righe lo attiviamo sempre per minimizzare l'errore della fattorizzazione

$[\tilde{L}, U] = lu(A)$

$[L, U, P] = lu(A)$ ← Usiamo questo

diario

→ Senza P, la $\tilde{L}$ potrebbe esser una matrice triangolare inferiore. È lo stesso vero che $A = \tilde{L}U$ e fa $PA = LU$, prende però che $A = \underbrace{P^{-1}L}_{\tilde{L}}U$

↓

Si sommano cambi di righe

⇒ Non è più triangolare

→ $lu(A)$ fa il pivoting di sé, dipende se lo fa su L o se lo riporta a te

Se faccio la LU di A speciale ⇒ ha certa struttura particolare.

LU di A "speciale" $\begin{cases} \text{simmetrica definita e positiva} \\ \text{tridiagonali} \end{cases}$

Scritto bene

$$A = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Non nulle sulla prima e seconda diagonali

$$LU = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}}_{U}$$

Bidiagonale inferiore

Elementi non nulli

I costi sono $O(n)$

$\left.\begin{matrix} Ly = b \\ Ux = y \end{matrix}\right\}$ Si usano algoritmi diversi che risolvono il sistema in $O(n)$

↳ Algoritmo di Thomas

$a_{ij} = a_{ji}$ <u>Fattorizzazione di Cholesky</u>

$A = R^T R$ → LU diventano trasposte di l'un l'altro, diventano simmetriche

Costo calc $\left(\frac{n^3}{3}\right)$

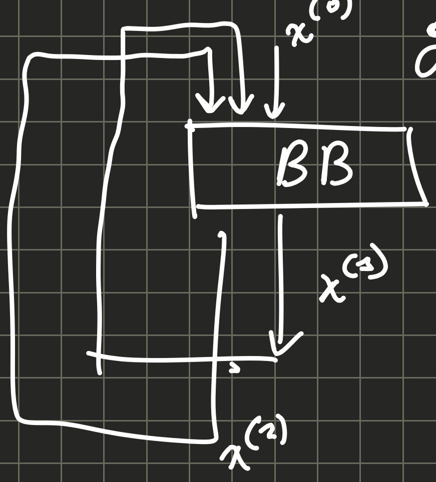
Matlab → chol

$L_{ij} \neq I$ ma tutte positive

Metodi diretti → ci danno un approssimazione di I.

<u>Metodi Iterativi</u> → Da approssimazioni sempre migliori.

Metodi Iterativi



guess iniziale

BB → Black Box

$x \simeq x^{(0)}$

$x \simeq x^{(1)}$

$x \simeq x^{(2)}$

Possiamo creare $\{x^{(k)}\}$ iterazioni approssimanti.

$x^{(k)} \simeq x$ si spera che per $k \to \infty$ $x^{(k)} \to x$

$$\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = x$$ Convergenza

$e^{(k)} = x - x^{(k)} \to$ Non è un numero per noi, sarà

$\lim_{k \to \infty} e^{(k)} = 0$ convergenza un vettore

per un vettore guardiamo elemento per elemento.

Ci sono criteri d'arresto per fermare l'errore

1. Accuratezza $|e^{(k)}| \leq 10^{-9}$

A volte non sappiamo l'errore quindi quello che facciamo $|e^{(k)}| \leq S \leq 10^{-9}$

Stimatore / Proxy: Stima l'errore, è calcolabile dipendendo dalle iterazioni, ora possiamo calcolare in base a S che ci indica che la disuguaglianza è valida.

2) Numero massimo di iterazioni

Se abbiamo messo un limite di accuratezza

troppo forte, ci ferma l'iterazione.
↳ Il numero di iterazioni è un tradeoff.

Metodi Iterativi per risolvere sistemi equazioni lineari.

$Ax = b$

Modo arbitrario per il funzionamento del BB

BB

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g \qquad k \geq 0$$

dato $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

$B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrice di iterazione
$g \in \mathbb{R}^n$

Riguarda verso la fine della lezione

Dobbiamo prendere B e g taliche $x = Bx + g$ → Relazione di Consistenza.

Consistenza è una proprietà dello schema verso il problema

Concetti principali del calcolo scientifico

- Convergenza
- Consistenza
- Stabilità

Quando scambio la soluzione esatta dove c'è l'approssimata il sistema regge e sta in piedi

→ È coerente con il problema

B sarà legato ad A
g sarà legato sia ad A che b

Possiamo riamp... sostituendo

$$Ix = Bx + g$$

$$g = (I - B)x = (I - B)A^{-1}b$$

Dopo aver richiesto la consistenza dobbiamo mettere condizioni per garantire la convergenza

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$$

Sottraiamo la condizione di consistenza

$$\underbrace{x - x^{(k+1)}}_{e^{k+1}} = Bx - g - Bx^{(k)} - g$$

$$= B\underbrace{(x - x^{(k)})}_{e^{(k)}}$$

$$e^{(k+1)} = Be^{(k)}$$

↳ C'è una correlazione tra errori successivi

↳ Seguiamo qui per trovare le condizioni per la convergenza.