

Premessa

Questo materiale è preparato in risposta a stimoli ricevuti dai commenti degli studenti al termine della precedente edizione dell'insegnamento. È inteso quale supporto alla frequenza delle lezioni, in modo che lo studente non debba trascrivere tutti i passaggi svolti alla lavagna. **Non è, evidentemente, sufficiente per avere una visione completa delle equazioni coinvolte né della relativa interpretazione fisica.**

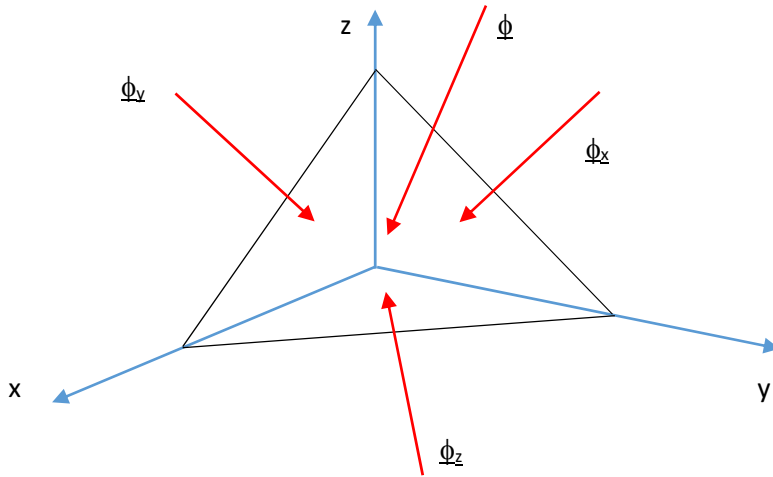
La notazione non è uniforme con riferimento a vettori e tensori, avendo usato diversi strumenti per scrivere le equazioni.

Sommario

| | |
|--|----|
| Equilibrio del tetraedro di Cauchy..... | 3 |
| Equazione indefinita dell'equilibrio statico e legge di Stevino..... | 4 |
| Spinta statica su superficie piana | 5 |
| Equazione globale dell'equilibrio statico..... | 6 |
| Equazione indefinita di continuità..... | 7 |
| Equazione globale di continuità | 8 |
| Equazione di continuità per correnti..... | 9 |
| Equazione indefinita dell'equilibrio dinamico | 10 |
| Teorema di Bernoulli | 11 |
| Velocità di deformazione..... | 12 |
| Equazioni di Navier-Stokes | 13 |
| Soluzione analitica del flusso di Couette | 14 |
| Soluzione analitica del flusso di Poiseuille tra lastre piane e parallele | 15 |
| Soluzione analitica del flusso di Poiseuille in un condotto cilindrico | 16 |
| Equazione globale dell'equilibrio dinamico..... | 17 |
| Equazioni di Eulero e di Navier-Stokes in forma globale..... | 18 |
| Applicazione dell'equazione globale: azione di trascinamento | 19 |
| Applicazione dell'equazione globale e della legge di Newton: profilo di velocità e sforzo in condotta circolare (flusso di Poiseuille) | 20 |
| Coefficiente di ragguaglio della potenza cinetica..... | 21 |
| Coefficiente di ragguaglio della spinta dinamica..... | 22 |
| Integrazione del profilo di velocità, formula di Poiseuille & C. | 23 |
| Equazioni di Reynolds..... | 24 |
| Equazione globale per il moto turbolento..... | 26 |
| Azione di trascinamento e profilo di velocità in moto turbolento..... | 27 |
| Teorema pigreco per un sistema a tre gradi di libertà | 28 |
| Applicazione del teorema pigreco alle perdite distribuite nei tubi scabri | 29 |
| Teorema pigreco e similitudine..... | 30 |
| Equazione globale per lo strato limite su lastra piana | 31 |

Equilibrio del tetraedro di Cauchy

Serve per la definizione del tensore degli sforzi e per riconoscere che il vettore di sforzo in un punto dipende dalla giacitura



I vettori agiscono sulle quattro facce del tetraedro. Ogni vettore ha tre componenti secondo gli assi coordinati.

Impongo l'equilibrio: $\underline{\phi}_x A_x + \underline{\phi}_y A_y + \underline{\phi}_z A_z + \underline{\phi} A = 0$

Trovo quindi: $\underline{\phi} = -\underline{\phi}_x A_x/A - \underline{\phi}_y A_y/A - \underline{\phi}_z A_z/A = \underline{\phi}_x n_x + \underline{\phi}_y n_y + \underline{\phi}_z n_z$

(in cui le componenti n sono i coseni direttori della normale entrante nella superficie A)

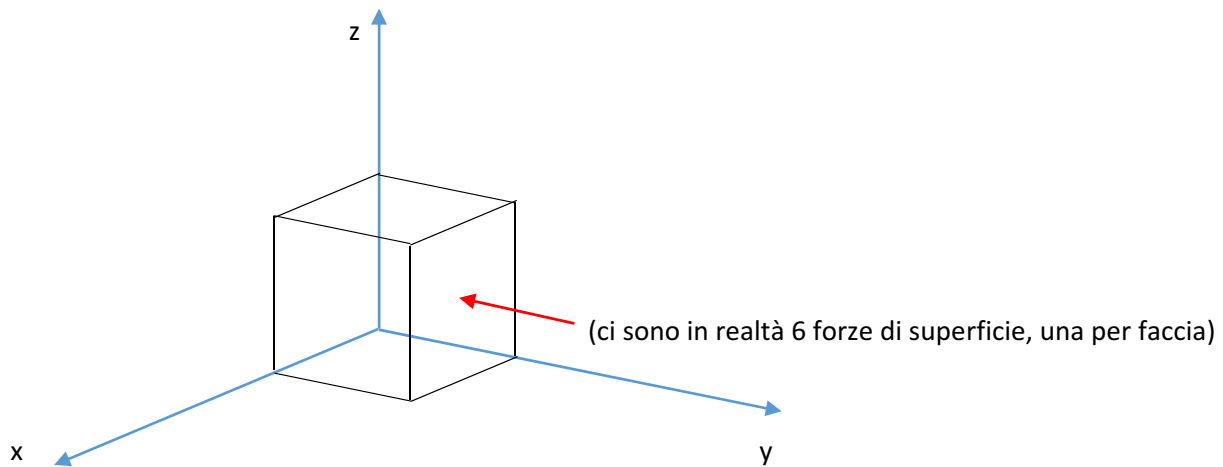
In definitiva ottengo che: $\underline{\phi} = \underline{\phi} \underline{n}$

Trovo dunque che il vettore di sforzo locale si esprime come prodotto tra un tensore degli sforzi che dipende dal punto ma non dalla giacitura, e il vettore che rappresenta la giacitura considerata.

Le componenti del tensore degli sforzi che si trovano sulla diagonale principale sono sforzi normali, i termini extra-diagonali sono invece sforzi tangenziali.

Il tensore degli sforzi è simmetrico (si dimostra con l'equilibrio alla rotazione).

Equazione indefinita dell'equilibrio statico e legge di Stevino



Devo imporre l'equilibrio della particella di fluido.

Il risultante delle azioni di superficie in direzione x è: $p \, dy \, dz \, \vec{i} - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy \, dz \, \vec{i}$

Se lo faccio nelle tre direzioni trovo che il risultante sarà:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dx \, dy \, dz \, \vec{i} - \frac{\partial p}{\partial y} dx \, dy \, dz \, \vec{j} - \frac{\partial p}{\partial z} dx \, dy \, dz \, \vec{k} = -\text{grad} p \, dx \, dy \, dz$$

Il risultante delle azioni di massa è $\rho \, \vec{f} \, dx \, dy \, dz$

Imponendo l'equilibrio trovo: $\rho \, \vec{f} \, dx \, dy \, dz - \text{grad} p \, dx \, dy \, dz = 0$, quindi $\rho \, \vec{f} = \text{grad} p$ che è dunque l'equazione indefinita dell'equilibrio statico.

L'equazione vale in assenza di ipotesi a parte quella di mezzo continuo.

Se introduco le ipotesi di fluido pesante ($\vec{f} = -g \, \text{grad} z$) e incompressibile ($\rho = \text{cost}$), ottengo:

$$-\rho \, g \, \text{grad} z = \text{grad} p$$

$$\text{grad} \left(z + \frac{p}{\rho \, g} \right) = 0$$

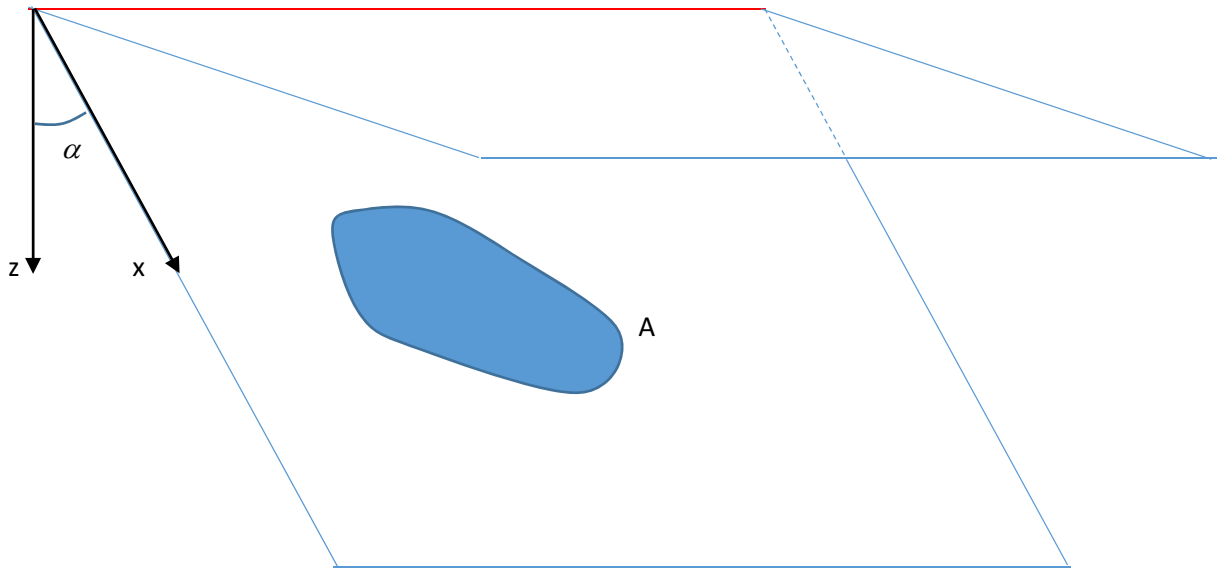
e, tenendo conto che $\rho g = \gamma$,

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{costante}$$

L'ultima espressione è la legge di Stevino, che vale per fluido pesante e incompressibile.

Spinta statica su superficie piana

Disegno un piano inclinato (di un angolo α) che contiene una superficie A , il pci e definisco la retta di sponda come intersezione tra i due piani. Definisco un asse x inclinato come la superficie e un asse z verticale, con origine nella retta di sponda.



Determino la spinta

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \int_A p \vec{n} dA = \int_A \gamma z \vec{n} dA = \int_A \gamma x \cos\alpha \vec{n} dA = \gamma \cos\alpha \vec{n} \int_A x dA = \gamma \cos\alpha \vec{n} x_G A = \\ &= \gamma \vec{n} z_G A = \vec{n} p_G A\end{aligned}$$

Determino la coordinata x (che è il braccio b rispetto alla retta di sponda) del punto di applicazione (centro di spinta)

$$\begin{aligned}S b &= \int_A p x \vec{n} dA \\ \gamma \cos\alpha \vec{n} b \int_A x dA &= \gamma \cos\alpha \vec{n} \int_A x^2 dA \\ b &= \frac{\int_A x^2 dA}{\int_A x dA} = \frac{I}{M}\end{aligned}$$

Se sfrutto la regola del trasporto del momento d'inerzia scopro che posso trovare un'eccentricità e , che è la distanza tra baricentro e centro di spinta (I_0 è il momento d'inerzia baricentrico):

$$b = \frac{I_0 + x_G^2 A}{x_G A} = \frac{I_0}{M} + x_G = x_G + e$$

Equazione globale dell'equilibrio statico

Integro l'equazione indefinita su un volume

$$\int_W \rho \vec{f} dW = \int_W \text{grad } p dW$$

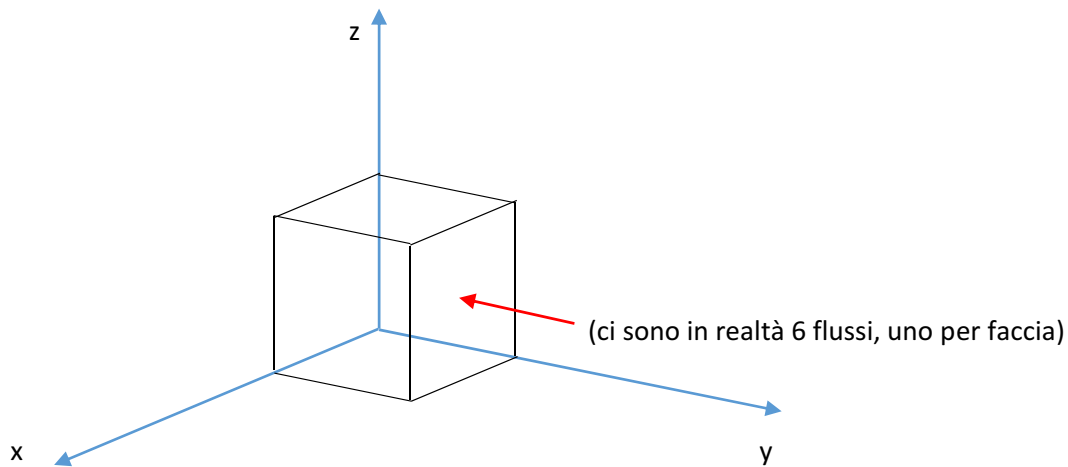
Il primo termine è, per definizione, l'azione di massa, che chiamiamo \underline{G} .

Il secondo termine si sviluppa con il teorema di Green (che non dimostriamo; consente di passare da un integrale di volume a un integrale di superficie):

$$\int_W \text{grad } p dW = \int_A p \vec{n} dA = \underline{II}$$

L'equazione diventa dunque: $\underline{G} + \underline{II} = 0$ (che dice che il risultante delle azioni di massa e superficie è nullo).

Equazione indefinita di continuità



Devo imporre la conservazione della massa.

Massa entrante in un tempo dt =

$$\rho u \, dy \, dz \, dt + \rho v \, dx \, dz \, dt + \rho w \, dx \, dy \, dt$$

(essendo u, v e w le componenti del vettore velocità).

Massa uscente nel medesimo tempo =

$$\left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right) dy \, dz \, dt + \left(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy \right) dx \, dz \, dt + \left(\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz \right) dx \, dy \, dt$$

Massa accumulata nel medesimo tempo =

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx \, dy \, dz \, dt$$

Scrivo che la differenza tra massa entrante e massa uscente è la massa accumulata e semplifico:

$$-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \, dy \, dz \, dt - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx \, dy \, dz \, dt - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx \, dy \, dz \, dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx \, dy \, dz \, dt$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

L'equazione vale in assenza di ipotesi a parte quella di mezzo continuo.

Equazione globale di continuità

Integro l'equazione indefinita su un volume

$$\int_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dW = - \int_W \operatorname{div} (\rho \vec{v}) dW$$

Il primo termine è la variazione temporale della massa contenuta nel volume:

$$\frac{\partial M}{\partial t}$$

Il secondo si trasforma in un flusso di massa grazie al teorema della divergenza:

$$- \int_W \operatorname{div} (\rho \vec{v}) dW = \int_A \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA$$

Quindi l'equazione finale è:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \int_A \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA$$

Il termine a secondo membro è la portata massica entrante, che chiamiamo ρQ , essendo invece Q la portata volumetrica.

Equazione di continuità per correnti

Si scrive con riferimento a un tubo di flusso di sezione trasversale A .

Massa entrante in dt =

$$\rho Q dt$$

Massa uscente nel medesimo tempo=

$$\left(\rho Q + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} ds \right) dt$$

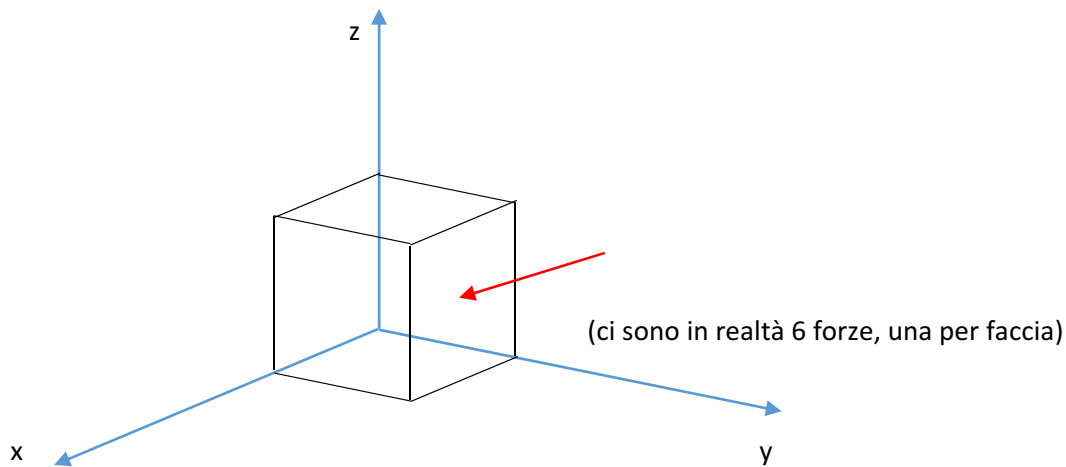
Massa accumulata =

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} ds dt$$

Imponendo il bilancio e semplificando ottengo l'equazione:

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} = 0$$

Equazione indefinita dell'equilibrio dinamico



Devo imporre l'equilibrio delle forze di massa e superficie.

Il risultante delle azioni di massa è $\rho \vec{f} dx dy dz - \rho \vec{a} dx dy dz$

Il risultante delle azioni di superficie agenti sulle facce perpendicolari all'asse x è:

$$\vec{\phi}_x dy dz - \left(\vec{\phi}_x + \frac{\partial \vec{\phi}_x}{\partial x} dx \right) dy dz = - \frac{\partial \vec{\phi}_x}{\partial x} dx dy dz$$

Se impongo l'equilibrio considerando tutte le azioni di superficie ottengo:

$$\rho \vec{f} dx dy dz - \rho \vec{a} dx dy dz - \frac{\partial \vec{\phi}_x}{\partial x} dx dy dz - \frac{\partial \vec{\phi}_y}{\partial y} dx dy dz - \frac{\partial \vec{\phi}_z}{\partial z} dx dy dz = 0$$

Semplificando:

$$\rho (\vec{f} - \vec{a}) = \frac{\partial \vec{\phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\phi}_z}{\partial z}$$

o, scrivendola con riferimento al tensore degli sforzi:

$$\rho (\vec{f} - \vec{a}) = \text{div } \bar{\bar{\phi}}$$

Teorema di Bernoulli

Ipotesi:

1. Fluido perfetto
2. Fluido pesante
3. Fluido incompressibile
4. Moto permanente
5. Considerazione di una traiettoria

Si parte dalle equazioni di Eulero:

$$\rho (\vec{f} - \vec{a}) = \text{grad } p$$

Si scrivono le equazioni con riferimento alla terna intrinseca (s, n, b) :

$$\begin{cases} -\rho g \frac{\partial z}{\partial s} - \rho \frac{dV}{dt} = \frac{\partial p}{\partial s} \\ -\rho g \frac{\partial z}{\partial n} - \rho \frac{V^2}{R} = \frac{\partial p}{\partial n} \\ -\rho g \frac{\partial z}{\partial b} = \frac{\partial p}{\partial b} \end{cases}$$

Mi interessa la prima, che sviluppo come segue:

$$-\rho g \frac{\partial z}{\partial s} - \cancel{\rho \frac{\partial V}{\partial t}} - \rho V \frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\partial p}{\partial s}$$

$$-\rho g \frac{\partial z}{\partial s} - \rho \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{V^2}{2} \right) = \frac{\partial p}{\partial s}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} \right) = 0$$

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = \text{costante}$$

Uso la seconda e la terza equazione per definire una corrente lineare, o gradualmente variata: se $R \rightarrow \infty$, allora la quota piezometrica è costante sulle sezioni trasversali.

Velocità di deformazione

Definisco il tensore dei gradienti di velocità e lo divido nelle parti simmetrica e antisimmetrica:

$$\text{grad } \underline{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\Omega}};$$

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

Dimostro che $\underline{\underline{D}}$ è un tensore che rappresenta velocità di deformazione.

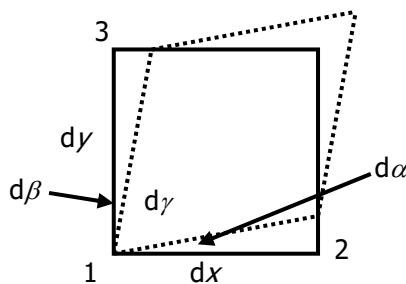
Caso 1D:



$$\varepsilon = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{1}{dx} (u_2 - u_1) dt$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Deformazione angolare:



$$d\alpha = \frac{1}{dx} (v_2 - v_1) dt$$

$$d\beta = \frac{1}{dy} (u_3 - u_1) dt$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\beta}{dt} = -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Alla stessa maniera si dimostra che $\underline{\underline{\Omega}}$ è un tensore di velocità di rotazione rigida.

Equazioni di Navier-Stokes

Ipotesi di fluido reale stokesiano: $\underline{\Phi} = p\underline{I} + \underline{\Phi_D}$

Si tratta dunque di trovare un legame tra $\underline{\Phi_D}$ e \underline{D} , che suppongo lineare (fluido newtoniano).

Faccio la trattazione nel sistema di riferimento principale, in cui le matrici sono diagonali.

$$\begin{aligned}\sigma_x - p &= \mu_{xx} D_{xx} + \mu_{xy} D_{yy} + \mu_{xz} D_{zz} \\ \sigma_y - p &= \mu_{yx} D_{xx} + \mu_{yy} D_{yy} + \mu_{yz} D_{zz} \\ \sigma_z - p &= \mu_{zx} D_{xx} + \mu_{zy} D_{yy} + \mu_{zz} D_{zz}\end{aligned}$$

Pongo i coefficienti $\mu_{ii} = -2\mu - \mu'$, e i coefficienti $\mu_{ij} = -\mu'$. Ottengo:

$$\begin{aligned}\sigma_x - p &= -2\mu D_{xx} - \mu' D_{xx} - \mu' D_{yy} - \mu' D_{zz} \\ \sigma_y - p &= -\mu' D_{xx} - 2\mu D_{yy} - \mu' D_{yy} - \mu' D_{zz} \\ \sigma_z - p &= -\mu' D_{xx} - \mu' D_{yy} - 2\mu D_{zz} - \mu' D_{zz}\end{aligned}$$

In definitiva ottengo il legame costitutivo per un fluido reale, stokesiano, newtoniano:

$$\underline{\Phi_D} = \underline{\Phi} - p\underline{I} = -\mu' \text{div} \underline{v} \underline{I} - 2\mu \underline{D}$$

L'equazione indefinita dell'equilibrio dinamico diventa:

$$\begin{aligned}\begin{cases} \rho(\underline{f} - \underline{a}) = \text{div} \underline{\Phi} \\ \underline{\Phi} - p\underline{I} = -\mu' \text{div} \underline{v} \underline{I} - 2\mu \underline{D} \end{cases} \\ \Rightarrow \rho(\underline{f} - \underline{a}) = \text{div}(p\underline{I} - \mu' \text{div} \underline{v} \underline{I} - 2\mu \underline{D}) \\ \Rightarrow \rho(\underline{f} - \underline{a}) = \text{grad} p - \text{grad}(\mu' \text{div} \underline{v}) - \text{div}(2\mu \underline{D})\end{aligned}$$

Ma noto che:

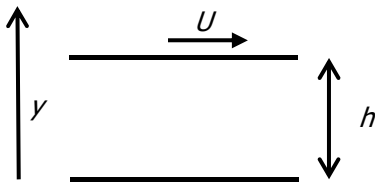
$$\begin{aligned}\text{div} \underline{D} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \nabla^2 u + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \text{div} \underline{v} \\ \frac{1}{2} \nabla^2 v + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \text{div} \underline{v} \\ \frac{1}{2} \nabla^2 w + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \text{div} \underline{v} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (\nabla^2 \underline{v} + \text{grad} \text{div} \underline{v})\end{aligned}$$

Otengo quindi le equazioni nella forma: $\rho(\underline{f} - \underline{a}) = \text{grad} p - (\mu' + \mu) \text{grad} \text{div} \underline{v} - \mu \nabla^2 \underline{v}$

E, per fluido incomprimibile: $\rho(\underline{f} - \underline{a}) = \text{grad} p - \mu \nabla^2 \underline{v}$

Soluzione analitica del flusso di Couette

Flusso tra due lastre piane e parallele, una ferma e una in movimento.



Equazione generale:

$$\rho(\underline{f} - \underline{a}) = \text{grad} p - \mu \nabla^2 \underline{v}$$

Equazione nella sola componente x :

$$\rho \left(f_x - \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Semplifico quello che posso e integro:

$$0 = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = A \Rightarrow u(y) = Ay + B$$

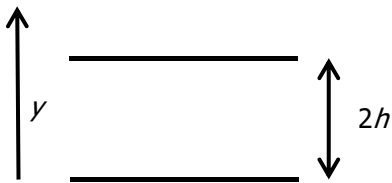
Condizioni al contorno:

$$u(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$u(h) = U \Rightarrow Ah = U \Rightarrow u(y) = U \frac{y}{h}$$

Soluzione analitica del flusso di Poiseuille tra lastre piane e parallele

Flusso tra due lastre piane e parallele, entrambe ferme.



Equazione generale:

$$\rho(\underline{f} - \underline{a}) = \text{grad} p - \mu \nabla^2 \underline{v}$$

Equazione nella sola componente x :

$$\rho \left(f_x - \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Equazione applicata al caso in esame:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Integrazione:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y + C$$

$$u(y) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} + Cy + D$$

Condizioni al contorno:

$$u(0) = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$u(2h) = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h$$

$$\Rightarrow u(y) = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left(hy - \frac{y^2}{2} \right)$$

+++++

Svolgiamo il medesimo esercizio con un sistema di riferimento diverso, con $y = 0$ sull'asse.

Fino alla $u(y)$ lo svolgimento è identico; cambiano le condizioni al contorno.

$$\text{Simmetria: } \frac{\partial u}{\partial y}(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\text{Condizione di aderenza: } u(\pm h) = 0 \quad D = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h^2$$

$$\text{Quindi la soluzione è } u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - h^2)$$

Soluzione analitica del flusso di Poiseuille in un condotto cilindrico

Dobbiamo sfruttare le equazioni in coordinate cilindriche.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = \rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} +$$

$$+ \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right]$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = \rho g_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} +$$

$$+ \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right]$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} +$$

$$+ \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right]$$

Per il caso in esame serve la terza equazione della quantità di moto (direzione assiale):

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)$$

Poi si fanno le solite semplificazioni dovute a moto uniforme e permanente, direzione orizzontale, assialsimmetria e si ottiene:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \right]$$

Integrazione:

$$\frac{r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right)$$

$$r \frac{\partial v_x}{\partial r} = \frac{r^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + C$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial r} = \frac{r}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{C}{r}$$

$$v_x(r) = \frac{r^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + C \ln r + K$$

Condizioni al contorno:

$$r \frac{\partial v_x}{\partial r} (r=0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$v_x \left(\frac{D}{2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{D^2}{16\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + K = 0 \Rightarrow K = -\frac{D^2}{16\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\Rightarrow v_x(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left(r^2 - \frac{D^2}{4} \right)$$

Equazione globale dell'equilibrio dinamico

Come già fatto per l'equazione della statica e per quella di continuità, integriamo su un volume finito W :

$$\int_W \rho \underline{f} dW - \int_W \rho \underline{a} dW = \int_W \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi_z}{\partial z} \right) dW$$

Il primo integrale che abbiamo è una cosa che abbiamo già trovato, il risultante delle azioni di massa che abbiamo chiamato \underline{G} . nel caso specifico del fluido pesante, poi, diventa il peso.

Il secondo integrale è quello che richiede gli sviluppi matematici più onerosi. Vediamo come posso scrivere l'integrando:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\underline{v}}{dt} &= \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \underline{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \underline{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \underline{v}}{\partial z} \right) = \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} - \underline{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u \frac{\partial \underline{v}}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \underline{v}}{\partial y} + \rho w \frac{\partial \underline{v}}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} - \underline{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \underline{v} \operatorname{div}(\rho \underline{v}) + \underline{v} \operatorname{div}(\rho \underline{v}) + \rho u \frac{\partial \underline{v}}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \underline{v}}{\partial y} + \rho w \frac{\partial \underline{v}}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} + \underline{v} \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) + \rho u \frac{\partial \underline{v}}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \underline{v}}{\partial y} + \rho w \frac{\partial \underline{v}}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u \underline{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \underline{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w \underline{v})}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} + \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\rho u \underline{v}) \\ \operatorname{div}(\rho v \underline{v}) \\ \operatorname{div}(\rho w \underline{v}) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Consideriamo adesso il primo termine divergenza (applico il teorema della divergenza):

$$\int_W \operatorname{div}(\rho u \underline{v}) dW = - \int_A \rho u \underline{v} \bullet \underline{n} dA$$

In definitiva ottengo:

$$- \int_W \rho \underline{a} dW = - \int_W \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} dW + \int_A \rho \underline{v} \underline{v} \bullet \underline{n} dA$$

Primo integrale si chiama termine delle inerzie locali, il secondo è il flusso di quantità di moto o spinta dinamica.

Per l'ultimo integrale, applicando ancora il teorema di Green si trova:

$$\int_W \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi_z}{\partial z} \right) dW = - \int_A \phi dA$$

Questo termine rappresenta il risultante degli sforzi agenti sul contorno.

In definitiva l'equazione globale si scrive come:

$$\int_W \rho \underline{f} dW - \int_W \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} dW + \int_A \rho \underline{v} \underline{v} \bullet \underline{n} dA + \int_A \phi dA = 0$$

$$\underline{G} + \underline{I} + \underline{M} + \underline{\Pi} = 0$$

Notare che è l'equazione della statica con in più i due termini che derivano dall'accelerazione locale e convettiva ($\underline{I} + \underline{M}$) e con un termine $\underline{\Pi}$ che, anche se nella scrittura sintetica non si vede, contiene non solo la pressione ma anche dei termini legati agli sforzi viscosi. Si potrebbe per esempio indicare con $\underline{\Pi}_{p+\mu}$.

Equazioni di Eulero e di Navier-Stokes in forma globale

L'equazione di Eulero, portata al globale, è uguale ma con un termine Π che contiene solo pressione.

Per le equazioni di Navier-Stokes, ancora partiamo dall'equazione indefinita e integriamo:

$$\rho(\underline{f} - \underline{a}) = \text{grad} p - \mu \nabla^2 \underline{v}$$

$$\int_W \rho \underline{f} dW - \int_W \rho \underline{a} dW = \int_W (\text{grad} p - \mu \nabla^2 \underline{v}) dW$$

Molte cose già le abbiamo viste:

- Il termine dell'azione di massa diventa il solito \underline{G}
- Il termine dell'accelerazione diventa $\underline{I} + \underline{M}$, come visto sopra
- Il termine legato agli sforzi di pressione diventa un termine Π che è il risultante della pressione sulla superficie laterale

Quindi l'unica cosa nuova è vedere cosa diventa il termine legato al laplaciano della velocità. Teniamo presente che il laplaciano è la divergenza del gradiente, e possiamo applicare ancora il teorema della divergenza. Si ottiene:

$$\int_W (\mu \nabla^2 \underline{v}) dW = -\mu \int_A \frac{\partial v}{\partial n} dA$$

E quindi l'equazione globale diventa:

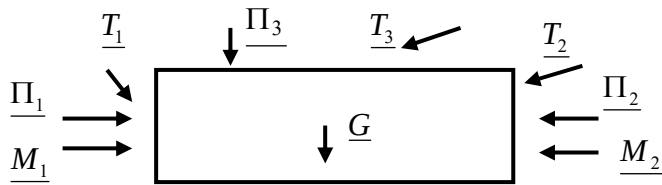
$$\int_W \rho \underline{f} dW - \int_W \rho \underline{a} dW = \int_W (\text{grad} p - \mu \nabla^2 \underline{v}) dW$$

$$\int_W \rho \underline{f} dW - \int_W \rho \underline{a} dW + \int_A p \underline{n} dA - \mu \int_A \frac{\partial v}{\partial n} dA = 0$$

$$\underline{G} + \underline{I} + \underline{M} + \underline{\Pi} + \underline{T} = 0$$

Notare che il confronto tra le due equazioni globali scritte ci dice che $\underline{\Pi}_{p+\mu} = \underline{\Pi} + \underline{T}$. Che è poi la solita ipotesi di fluido stokesiano, divisione tra contributo di pressione e deviatore degli sforzi. Ovviamente l'equazione globale scritta nella prima forma vale anche per i fluidi newtoniani, salvo il fatto che i termini di dettaglio non sono divisi/esplicitati.

Applicazione dell'equazione globale: azione di trascinamento



Fatte le opportune semplificazioni, l'equazione nella componente x (direzione del moto) è (notare che con $\underline{\Pi}$ sto indicando dei contributi di sola pressione):

$$\Pi_{1x} + \Pi_{2x} + T_{3x} = 0$$

$$p_1 \frac{\pi D^2}{4} - p_2 \frac{\pi D^2}{4} - \tau \pi D L = 0$$

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{L} \frac{A}{p} = - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{A}{p}$$

Applicazione dell'equazione globale e della legge di Newton: profilo di velocità e sforzo in condotta circolare (flusso di Poiseuille)

Consideriamo l'applicazione dell'equazione globale a un cilindretto coassiale (il volume lo scelgo come voglio io) e consideriamo insieme l'equazione di Newton per lo sforzo tangenziale, e otteniamo:

$$-\mu \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{A}{p}$$

$$-\mu \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\pi r^2}{2\pi r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} r$$

$$u(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial x} r^2 + A$$

CC :

$$u\left(\frac{D}{2}\right) = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{D^2}{4} + A = 0$$

$$\Rightarrow u(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left(r^2 - \frac{D^2}{4} \right)$$

Si ottiene sempre la legge parabolica già ottenuta attraverso l'integrazione delle equazioni di Navier-Stokes.

Coefficiente di ragguglio della potenza cinetica

Potenza infinitesimale $dP = \gamma H dQ$

Integro sulla sezione trasversale (ipotizzo di avere una corrente lineare, quindi $z+p/\gamma = \text{cost}$):

$$P = \int_A \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) u dA = \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) \int_A u dA + \gamma \int_A \frac{u^3}{2g} dA$$

Proseguo:

$$P = \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) Q + \frac{U^3}{2g} A \frac{\int_A u^3 dA}{U^3 A} = \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) Q + \alpha \frac{U^2}{2g} Q$$

(in cui U è la velocità media).

Quindi definisco il coefficiente di ragguglio della potenza cinetica $\alpha = \frac{\int_A u^3 dA}{U^3 A}$

E il carico totale della corrente diventa $= z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g}$

Coefficiente di ragguglio della spinta dinamica

Con riferimento al caso monodimensionale:

$$|\vec{M}| = \int_A \rho u^2 dA = \rho U^2 A \frac{\int_A u^2 dA}{U^2 A}$$

Quindi definisco il coefficiente di ragguglio della spinta dinamica $\beta = \frac{\int_A u^2 dA}{U^2 A}$

E il modulo della spinta dinamica diventa $= \beta \rho U^2 A = \beta \rho Q U = \beta \rho \frac{Q^2}{A}$

Integrazione del profilo di velocità, formula di Poiseuille & C.

Riprendo il profilo di velocità, scritto adesso sfruttando la definizione di cadente:

$$u(r) = \frac{\gamma J}{4\mu} \left(\frac{D^2}{4} - r^2 \right)$$

Integrando, posso calcolare il valore di diversi parametri.

Portata (formula di Poiseuille):

$$Q = \int_A u \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{D}{2}} \frac{\gamma J}{4\mu} \left(\frac{D^2}{4} - r^2 \right) r \, dr \, d\vartheta = \dots = \frac{\pi \gamma J D^4}{128 \mu}$$

Velocità media:

$$U = \frac{Q}{A} = \frac{\gamma J D^2}{32 \mu}$$

Coefficiente di ragguglio della potenza cinetica:

$$\alpha = \frac{\int_A u^3 \, dA}{U^3 A} = \dots = 2$$

Coefficiente di ragguglio della spinta dinamica:

$$\beta = \frac{\int_A u^2 \, dA}{U^2 A} = \dots = \frac{4}{3}$$

Equazioni di Reynolds

Ci mettiamo per semplicità nel caso dei fluidi incompressibili. Le equazioni sono:
 $\text{div} \underline{v} = 0$

$$\rho(\underline{f} - \underline{a}) = \text{grad} p - \mu \nabla^2 \underline{v}$$

Per trovare le equazioni relative al moto medio bisogna integrarle nel tempo con riferimento a un periodo finito T (approsscio del tutto simile a quello già usato per trovare le equazioni globali).

Equazione di continuità

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dt &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{T} \int u dt \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{T} \int v dt \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{T} \int w dt \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{T} \int (u_m + u') dt \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{T} \int (v_m + v') dt \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{T} \int (w_m + w') dt \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{T} \int u_m dt \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{T} \int u' dt \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{T} \int v_m dt \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{T} \int v' dt \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{T} \int w_m dt \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{T} \int w' dt \right) = \\ &= \frac{\partial u_m}{\partial x} + \frac{\partial v_m}{\partial y} + \frac{\partial w_m}{\partial z} \end{aligned}$$

Quindi l'equazione di continuità mantiene la medesima struttura nel momento in cui si passa al moto medio.

Equazione della quantità di moto

$$\rho(\underline{f} - \underline{a}) = \text{grad} p - \mu \nabla^2 \underline{v}$$

Prendiamo pure solo la prima equazione:

$$\rho \left(f_x - \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

Tenendo conto che ciascun termine (a parte la densità, per ipotesi di fluido incompressibile) è somma di media e fluttuazione:

$$\begin{aligned} \rho \left((f_{xm} + f'_x) - \frac{\partial (u_m + u')}{\partial t} - (u_m + u') \frac{\partial (u_m + u')}{\partial x} - (v_m + v') \frac{\partial (u_m + u')}{\partial y} - (w_m + w') \frac{\partial (u_m + u')}{\partial z} \right) = \\ = \frac{\partial (p_m + p')}{\partial x} - \mu \left(\frac{\partial^2 (u_m + u')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (u_m + u')}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (u_m + u')}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

Se si integra nel tempo per fare il moto medio, tutti i termini di fluttuazione vengono annullati dalla media, a parte quelli legati all'accelerazione convettiva (termini non lineari), per cui si ha:

$$\begin{aligned}
 & (u_m + u') \frac{\partial(u_m + u')}{\partial x} + (v_m + v') \frac{\partial(u_m + u')}{\partial y} + (w_m + w') \frac{\partial(u_m + u')}{\partial z} = \\
 & = \frac{\partial(u_m + u')(u_m + u')}{\partial x} + \frac{\partial(u_m + u')(v_m + v')}{\partial y} + \frac{\partial(u_m + u')(w_m + w')}{\partial z} - \cancel{(u_m + u') \frac{\partial(u_m + u')}{\partial x}} - \cancel{(u_m + u') \frac{\partial(v_m + v')}{\partial y}} - \cancel{(u_m + u') \frac{\partial(w_m + w')}{\partial z}} = \\
 & = \frac{\partial}{\partial x} (u_m u_m + u' u' + 2u' u_m) + \frac{\partial}{\partial y} (u_m v_m + u' v' + u_m v' + v_m u') + \frac{\partial}{\partial z} (u_m w_m + u' w' + u_m w' + w_m u')
 \end{aligned}$$

Quando vado a fare la media, i termini con il doppio pedice m non danno problemi; i termini con una sola fluttuazione si annullano e i termini con la doppia fluttuazione restano, e quindi ottengo:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial(u_m u_m)}{\partial x} + \frac{\partial(u' u')}{\partial x} + \frac{\partial(u_m v_m)}{\partial y} + \frac{\partial(u' v')}{\partial y} + \frac{\partial(u_m w_m)}{\partial z} + \frac{\partial(u' w')}{\partial z} = \\
 & = u_m \frac{\partial u_m}{\partial x} + \cancel{u_m \frac{\partial v_m}{\partial x}} + v_m \frac{\partial u_m}{\partial x} + \cancel{u_m \frac{\partial w_m}{\partial x}} + w_m \frac{\partial u_m}{\partial x} + \frac{\partial(u' u')}{\partial x} + \frac{\partial(u' v')}{\partial y} + \frac{\partial(u' w')}{\partial z} = \\
 & = u_m \frac{\partial u_m}{\partial x} + v_m \frac{\partial u_m}{\partial x} + w_m \frac{\partial u_m}{\partial x} + \frac{\partial(u' u')}{\partial x} + \frac{\partial(u' v')}{\partial y} + \frac{\partial(u' w')}{\partial z}
 \end{aligned}$$

Quindi si vede che resta un termine simile a quello che c'era all'inizio ma resta un termine con i valori medi delle fluttuazioni composte. Significato fisico di questo termine come sforzo (detto di Reynolds) dovuto a tutti gli urti tra le particelle fluide che viaggiano con velocità diverse. In definitiva le equazioni di Navier-Stokes mediate nel tempo (dette equazioni di Reynolds) sono:

$$\rho \left(\underline{\underline{f}} - \frac{\partial v_m}{\partial t} - u_m \frac{\partial v_m}{\partial x} - v_m \frac{\partial v_m}{\partial y} - w_m \frac{\partial v_m}{\partial z} \right) = \text{grad } p_m - \mu \nabla^2 \underline{\underline{v}}_m + \text{div } \underline{\underline{\Phi}}_R$$

essendo il tensore degli sforzi di Reynolds: $\underline{\underline{\Phi}}_R = \rho \begin{bmatrix} (u' u')_m & (u' v')_m & (u' w')_m \\ (v' u')_m & (v' v')_m & (v' w')_m \\ (w' u')_m & (w' v')_m & (w' w')_m \end{bmatrix}$

Equazione globale per il moto turbolento

Anche per l'equazione globale, la maggior parte dei termini non presenta problemi. Quello che manifesta un comportamento simile a quanto visto sopra è la spinta dinamica, essendo un termine non lineare nelle velocità.

$$\underline{M} = \int_A \rho \underline{v} \underline{v} \cdot \underline{n} dA = \int_A \rho \underline{v} v_n dA = \int_A \rho (\underline{v}_m + \underline{v}') (v_{nm} + v_n') dA$$

Quando passo a fare la media ottengo:

$$\underline{M}_m = \int_A \rho \underline{v}_m v_{nm} dA + \int_A \rho (\underline{v}' v_n')_m dA$$

Cioè anche qui compare un termine legato al valore medio di un prodotto di fluttuazioni.

Azione di trascinamento e profilo di velocità in moto turbolento

Torniamo al caso del moto nella condotta circolare. L'equazione dello sforzo totale vale ancora:

$$\tau = \gamma \frac{r}{2} J$$

perché nell'applicazione dell'equilibrio globale al filetto fluido coassiale i termini \underline{M}' sono uguali e opposti a monte e a valle e quello sul contorno contribuisce a τ .

Quindi questo sforzo è uguale a

$$\tau_m = -\mu \frac{\partial u_{xm}}{\partial n} + \rho(u_x' u_r')_m$$

Questo fa sì che il profilo non si possa integrare come era per il caso del flusso di Poiseuille, perché non conosciamo gli sforzi turbolenti.

Teorema pigreco per un sistema a tre gradi di libertà

Si dimostra che per un sistema meccanico (cioè un sistema in cui le dimensioni di tutte le grandezze in gioco sono combinazioni di massa, lunghezza e tempo) le dimensioni di qualunque grandezza si possono esprimere come combinazione delle dimensioni di tre grandezze base (variabili ripetute).

Dimensioni delle tre grandezze base:

$$[g_1] = [M]^{M1} [L]^{L1} [T]^{T1}$$

$$[g_2] = [M]^{M2} [L]^{L2} [T]^{T2}$$

$$[g_3] = [M]^{M3} [L]^{L3} [T]^{T3}$$

Dimensioni di una generica grandezza g_i :

$$[g_i] = [M]^{Mi} [L]^{Li} [T]^{Ti}$$

Esprimo dunque le dimensioni di g_i combinando quelle di g_1, g_2, g_3 (attenzione che tutte le i sono pedici, non c'entra l'unità immaginaria):

$$[g_i] = [g_1]^{\alpha_i} [g_2]^{\beta_i} [g_3]^{\gamma_i}$$

Quindi:

$$[M]^{Mi} [L]^{Li} [T]^{Ti} = ([M]^{M1} [L]^{L1} [T]^{T1})^{\alpha_i} ([M]^{M2} [L]^{L2} [T]^{T2})^{\beta_i} ([M]^{M3} [L]^{L3} [T]^{T3})^{\gamma_i}$$

L'equazione precedente si trasforma in un sistema lineare con incognite $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$:

$$\begin{cases} Mi = M1 \alpha_i + M2 \beta_i + M3 \gamma_i \\ Li = L1 \alpha_i + L2 \beta_i + L3 \gamma_i \\ Ti = T1 \alpha_i + T2 \beta_i + T3 \gamma_i \end{cases}$$

Una volta che ho trovato gli esponenti $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, definisco il gruppo Π corrispondente alla variabile g_i . Questo gruppo è per definizione adimensionale:

$$\Pi_i = \frac{g_i}{g_1^{\alpha_i} g_2^{\beta_i} g_3^{\gamma_i}}$$

Applicazione del teorema pigreco alle perdite distribuite nei tubi scabri

$$\frac{\Delta p}{\Delta s} = f(\rho, \mu, D, \varepsilon, V)$$

$$\left[\frac{\Delta p}{\Delta s} \right] = [M][L][T^{-2}][L^{-2}][L^{-1}]$$

$$[\rho] = [M][L^{-3}]$$

$$[\mu] = [M][L][T^{-2}][L^{-2}][T]$$

$$[D] = [L]$$

$$[\varepsilon] = [L]$$

$$[V] = [L][T^{-1}]$$

terna base (ρ, V, D)

$$\frac{\Delta p}{\Delta s}$$

$$[M][L][T^{-2}][L^{-2}][L^{-1}] = ([M][L^{-3}])^\alpha ([L][T^{-1}])^\beta [L]^\gamma$$

$$1 = \alpha$$

$$-2 = -3\alpha + \beta + \gamma$$

$$-2 = -\beta$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta s} \approx \frac{\rho V^2}{D}$$

μ

$$[M][L][T^{-2}][L^{-2}][T] = ([M][L^{-3}])^\alpha ([L][T^{-1}])^\beta [L]^\gamma$$

$$1 = \alpha$$

$$-1 = -3\alpha + \beta + \gamma$$

$$-1 = -\beta$$

$$\mu \approx \rho V D$$

ε

$$[L] = ([M][L^{-3}])^\alpha ([L][T^{-1}])^\beta [L]^\gamma$$

$$0 = \alpha$$

$$1 = -3\alpha + \beta + \gamma$$

$$0 = -\beta$$

$$\varepsilon \approx D$$

$$\frac{\Delta p / \Delta s}{\rho V^2 / D} = F\left(\frac{\mu}{\rho V D}, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

Teorema pigreco e similitudine

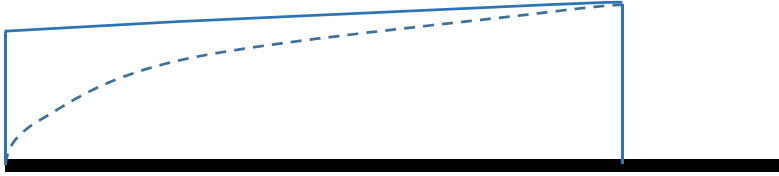
Corollario del teorema pigreco: condizione sufficiente perché due realizzazioni dello stesso fenomeno (tipicamente prototipo e modello) siano in similitudine è che abbiano i gruppi Π uguali.

Infatti, prendiamo un gruppo Π e ammettiamo di aver scelto dei rapporti di scala per le grandezze della terna base. L'uguaglianza del valore del Π nel prototipo e nel modello conduce all'esistenza di un rapporto di scala per g_4 .

$$\begin{aligned}\Pi_{4m} &= \Pi_{4p} \\ \frac{g_{4m}}{g_{1m}^{\alpha_4} g_{2m}^{\beta_4} g_{3m}^{\gamma_4}} &= \frac{g_{4p}}{g_{1p}^{\alpha_4} g_{2p}^{\beta_4} g_{3p}^{\gamma_4}} \\ \lambda_4 = \frac{g_{4m}}{g_{4p}} &= \frac{g_{1m}^{\alpha_4} g_{2m}^{\beta_4} g_{3m}^{\gamma_4}}{g_{1p}^{\alpha_4} g_{2p}^{\beta_4} g_{3p}^{\gamma_4}} = \lambda_1^{\alpha_4} \lambda_2^{\beta_4} \lambda_3^{\gamma_4}\end{aligned}$$

Equazione globale per lo strato limite su lastra piana

Prendo un volume di controllo delimitato dalla lastra, da una linea di corrente, dalla sezione di attacco della lastra e da una generica sezione di valle. È importante notare che, nella sezione di valle, la linea di corrente interseca il contorno dello strato limite (linea tratteggiata).



Nell'applicazione dell'equilibrio, considero che le spinte di pressione si equilibrano nella direzione del flusso, quindi mi rimangono i flussi di quantità di moto e la resistenza (Drag). Ottengo quindi:

$$\rho U^2 h B = \int_0^\delta \rho u^2 B dz + D$$

in cui h è l'altezza della sezione di ingresso; si determina con l'equazione di continuità (uguaglianza delle portate in ingresso e uscita):

$$h U B = \int_0^\delta u B dz$$

Quindi:

$$\begin{aligned} D &= \rho U^2 B \int_0^\delta \frac{u}{U} dz - \int_0^\delta \rho u^2 B dz = \\ &= \rho U^2 B \int_0^\delta \frac{u}{U} dz - \rho U^2 B \int_0^\delta \frac{u^2}{U^2} dz = \\ &= \rho U^2 B \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dz = \rho U^2 B \vartheta \end{aligned}$$

Trovo dunque lo sforzo in parete (che è dipendente dalla posizione):

$$\tau(x) = \frac{dD}{B dx} = \rho U^2 \frac{d\vartheta}{dx}$$

Se il moto è laminare, e usando un'equazione per il profilo di velocità nello strato limite, si arriva a una soluzione analitica per $\delta/x = k/(Re_x)^{0.5}$, determinando dunque il valore di k e potendo poi ottenere tutte le grandezze.

Ipotizziamo la cosa più semplice, quindi profilo lineare: $u(z) = U \frac{z}{\delta}$; in questo caso si ottiene che $\vartheta = \frac{\delta}{6}$.

Quindi, unendo l'equazione trovata per τ con la legge di Newton:

$$\frac{\rho U^2}{6} \frac{d\delta}{dx} = \mu \frac{U}{\delta}$$

che si integra separando le variabili, ottenendo:

$$\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{12}{Re_x}}$$