Lezione 10 -

Minimi quadrati per trovare un andamento medio

↳ Troviamo un polinomio che minimizza gli scarti quadratici

↳ Nel caso lineare ($m=1$) abbiamo:

$\tilde{f} = a_0 + a_1 x$

$p_m(x) = b_0 + b_1 x$

$$\frac{\partial \phi}{\partial b_0}(a_0, a_1) = 0 \xrightarrow{\text{Cioè}} \sum_{i=0}^{n} \left[a_0 - y_i + a_1 x_i \right] = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial b_0}(a_0, a_1) = 0 \longrightarrow \sum_{i=0}^{n} \left[a_1 x_i^2 - y_i x_i + a_0 x_i \right] = 0$$

$? a_0, a_1 \in \mathbb{R}$

2 incognite per 2 equazione

Vogliamo scriverlo opportunamente come: $B\vec{a} = \vec{g}$

Dove $\vec{a} = [a_0, a_1]^T$

Dobbiamo trovare $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$

Tiriamo fuori da qui le variabili che vogliamo

$$\overbrace{a_0 \sum_{i=0}^{n} 1}^{(n+1)=b_{11}} + a_1 \overbrace{\sum_{i=0}^{n} x_i}^{b_{12}} = \overbrace{\sum_{i=0}^{n} y_i}^{g_1}$$

$$\underbrace{a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i}_{b_{21}} + a_1 \underbrace{\sum_{i=0}^{n} x_i^2}_{b_{22}} = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} x_i y_i}_{g_2}$$

B è sdp

Vogliamo generalizzare queste formule per grado m

$$\tilde{f}(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$$

$$p_m(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_i}(a_0, \dots, a_m) = 0$$

$i = 0, \dots, m$

In B andando a destra si guadagna una potenza e lo stesso in giù.

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} 1 + a_1 \sum x_i + \dots + a_m \sum x_i^m = \sum y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum x_i^2 + \dots + a_m \sum x_i^{m+1} = \sum x_i y_i$$

$$\vdots$$

$$a_0 \sum x_i^m + a_1 \sum x_i^{m+1} \dots + a_m \sum x_i^{2m} = \sum x_i^m y_i$$

Per y si guadagna una x_i andando giù

Sistema delle equazioni normali

Noi abbiamo preso $\tilde{f} \in \mathbb{P}_m$ ma si potrebbe prendere di natura diversa.

Approssimazione di Integrali

Ci occupiamo di integrali, cioè:

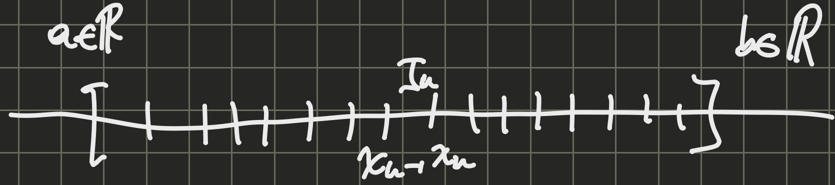
$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad f \in C^0([a,b])$$

Si possono fare anche per salti e assintotici ma per semplicità è più facile.

Dato $f(x)$ difficile lo sostituiamo con un polinomio, ricavando allora

$$\tilde{I}(f) = \int_a^b \tilde{f}(x)\,dx \rightarrow \tilde{I}(f) \simeq I(f)$$

$\tilde{f} \in \mathbb{P}_m$ Formula di quadratura



Facciamo M partizioni dell'intervallo, $x_0, x_1, \dots x_M$
equispaziati $\left(x_k = x_0 + kH\right)$ $\rightarrow H = \frac{b-a}{M}$
$k = 0, \dots, M$

$$I_k = [x_{k-1}, x_k] \quad k = 1, \dots, M$$

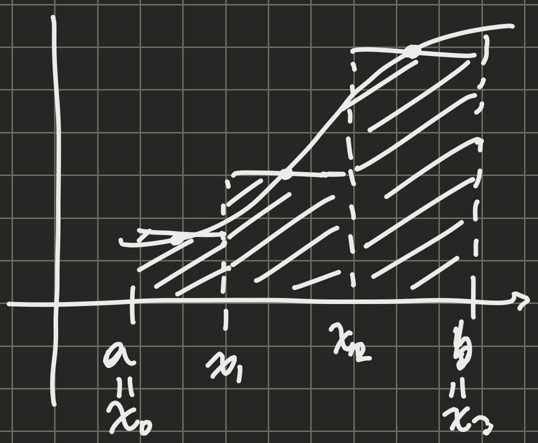
$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{N} \int_{I_k} f(x)\,dx$$

Ad ogni intervallino lo riapprossimiamo

$$\simeq \sum_{k=1}^{N} \int_{I_k} \tilde{f}(x)\,dx = \tilde{I}(f)$$

Esempi di quadrature con n diverso:

$n = 0$
Π_0^H



$n = 0 \Rightarrow$ Riapprossimiamo la funzione con dei valori costanti
↳ Prendiamo il punto medio per scelta nostra

Ricorda l'integrale di Riemann
→ Formula di Quadratura del Rettangolo / del punto medio

↑ perché è quello che abbiamo preso.

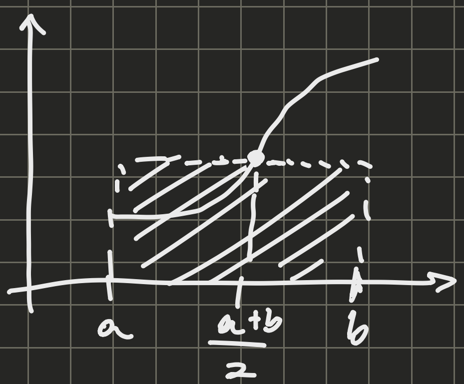
Per I_k, $\bar{x}_k = \dfrac{x_{k-1}+x_k}{2}$

$$\tilde{I}_{pm}(f) = \underbrace{H}_{\text{base}} \cdot \sum_{k=1}^{N} \underbrace{f(\bar{x}_k)}_{\text{altezza}}$$

↗ Punto medio

Stiamo interpolando a tratti con grado 0, è povera come interpolazione ma funziona lo stesso

↳ è la Π_0^H



$$\tilde{I}(f) = (b-a)\, f\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

↳ Quadratura a rettangoli con un solo rettangolo.

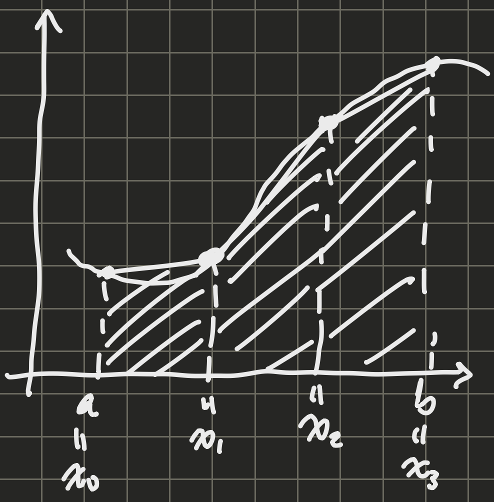
Nell'error grosso la quadratura a rettangoli è utile.

$\underline{m=1}$

$(\Pi_1^H f)$

↓

interpolazione che stiamo facendo



Invece di rettangoli abbiamo trapezi

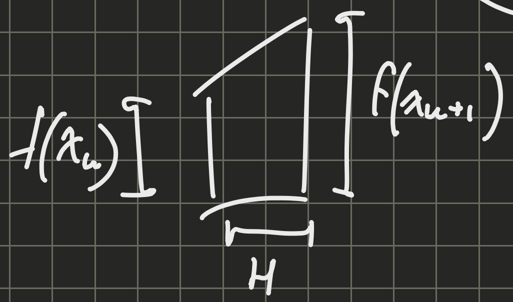
Formula di Quadratura del trapezio.

$$\tilde{I}^{c}_{T}(f) = \frac{H}{2}\sum_{k=1}^{N}\left[f(x_{k+1})+f(x_k)\right]$$

Composito

altezza

$\uparrow$ $\frac{1}{2}$ sarebbe qui ma è costante e lo abbiamo tirato fuori.



Tutti i punti vengono valutati due volte che non è computazionalmente intelligente

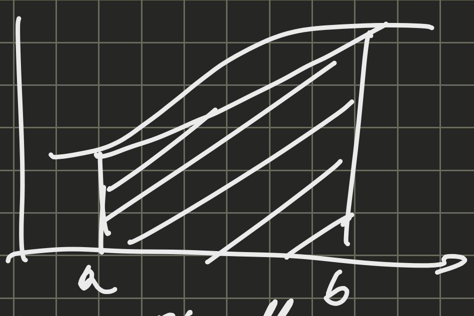
$$= \frac{H}{2}\underbrace{(f(a)+f(b))} + H\sum_{k=1}^{N-1} f(x_k)$$

Gli unici che non vengono contati due volte

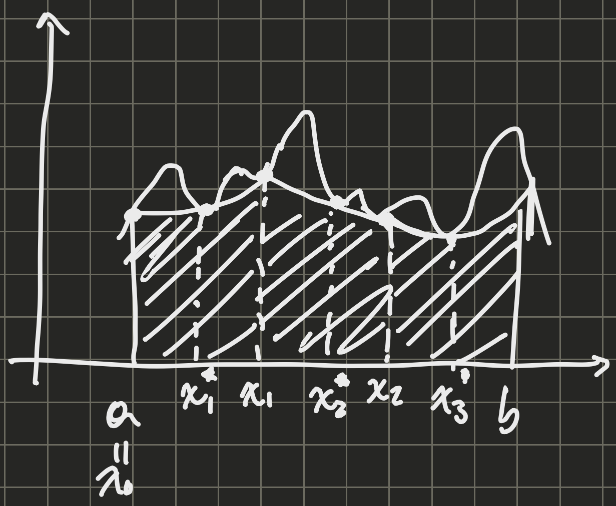
Togliamo il mezzo perché ogni valore è valutato due volte per la prima equazione

$$\tilde{I}_T(f) = \frac{(b-a)}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$

↳ Singolo trapezio, è peggio perché non c'è effetto di composizione rispetto al singolo rettangolo.



$n=2$

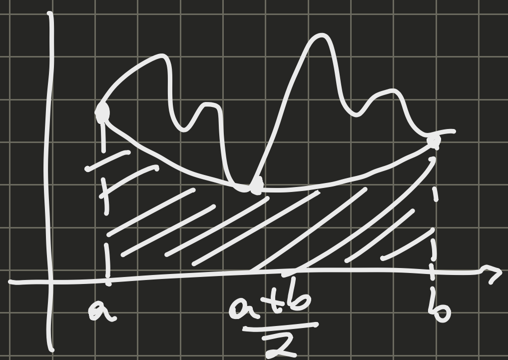


Guardiamo funzioni diverse per fare vedere meglio la interpolazione

$$\tilde{I}_s^c(f) = \frac{H}{6}\sum_{k=1}^{N}\left[f(x_{k+1}) + 4f(\bar{x}_k) + f(x_k)\right]$$

Simpson

$$= \frac{H}{6}\left[f(a)+f(b)\right] + \underbrace{\frac{H}{3}}_{\frac{H}{6}\cdot 2}\sum_{k=1}^{N-1} x_k + \underbrace{\frac{2}{3}H}_{\frac{H}{6}\cdot 4}\sum_{k=1}^{N} f(\bar{x}_k)$$



$$\tilde{I}_s = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

↳ Simpson semplice/1 intervallo

Errore punto medio (semplice)

$$\bar{x} = \frac{a+b}{2}$$

$$I(f) - \tilde{I}_{PM}(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \underbrace{(b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)}_{\text{Modo furbo per riscrivere}}$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f(\bar{x})\,dx$$

$$= \int_a^b \left[f(x) - f(\bar{x})\right]dx$$

Facciamo Taylor, prendiamo $f \in C^2([a,b])$

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) + \frac{f''(\alpha(x))}{2}(x-\bar{x})^2$$

$$= \int_a^b \underbrace{f'(\bar{x})}_{\text{costante}}(x-\bar{x})\,dx + \frac{1}{2}\int_a^b f''(\alpha(x))(x-\bar{x})^2\,dx$$

$$\int_a^b (x-\bar{x})\,dx = \frac{(x-\bar{x})^2}{2}\Big|_a^b = \frac{1}{2}\left[\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(b-a)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}\right]$$

$$= 0$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b f''(\alpha(x))(x-\bar{x})^2\,dx$$

Teorema del valor medio del integrale

$$\underset{\text{per } \beta \in [a,b]}{=} \frac{1}{2} f''(\beta)\int_a^b (x-\bar{x})^2\,dx$$

$$\int_a^b (x-\bar{x})^2\,dx = \frac{(x-\bar{x})^3}{3}\Big|_a^b = \frac{1}{3}\left[\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^3 - \left(a-\frac{a+b}{2}\right)^3\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^3\right] =$$

$$= \frac{1}{3\cdot 8}\left[(b-a)^3 - (a-b)^3\right]$$

$$= \frac{1}{12}(b-a)^3$$

$= \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\beta)$

Errore del rettangolo / punto medio (semplice)

$$I(f) - \tilde{I}_{pm}(f) = \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\beta)$$

Calcolo errore del punto medio (composito)

$$I(f) - \tilde{I}^c_{pm}(f) = \sum_{k=1}^{N} \Big[\underbrace{\int_{J} f(x)\,dx - \tilde{I}^c_{pm}(f)\Big|_{J_i}}_{\frac{1}{24} \underset{\smile}{H}^3 f''(\beta_k)} \Big]$$

b-a per il sotto intervallo

$$= \frac{H^3}{24} \underbrace{\sum_{k=1}^{M} f''(\beta_k)}$$

ci danno fastidio questi β_k non identificati

Usando il teorema del valor medio discreto
calcolato dell'integrale

$\alpha \in [a,b]$

$$= \frac{H^3}{24} M f''(\alpha) \qquad H = \frac{b-a}{M}$$

$$= \frac{(b-a)}{24} H^2 f''(\alpha)$$

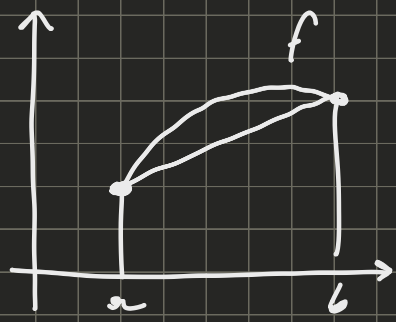
$$I(f) - \tilde{I}_{pm}(f) = \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\beta)$$

$$I(f) - \tilde{I}^{c}_{pm}(f) = \frac{(b-a)}{24} H^2 f''(\alpha)$$

Errore Trapezio

$$I(f) - \tilde{I}_T(f) = \int_a^b \overbrace{E_1 f(x)}^{\text{Errore di interpolazione}}\, dx$$

$$E_1 f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$



$$= \int_a^b \frac{f''(\xi(x))}{2}\cdot(x-a)(x-b)$$

Teorema Valor medio

$$= \frac{1}{2} f''(\sigma^{\in[a,b]}) \int_a^b (x-a)(x-b)\,dx$$

$\downarrow$

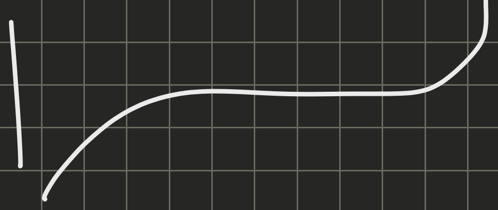
Integrazione per parti

$\downarrow$

$$= -\int_a^b \frac{(x-a)^2}{2}\,dx + \cancel{\frac{(x-a)^2}{2}(x-b)\Big|_a^b} \to 0$$

$$= -\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)^2\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{(x-a)^3}{3}\Big|_a^b = -\frac{1}{6}(b-a)^3$$



$$= \frac{-1}{12}(b-a)^3 f''(\sigma)$$

$f \in C^2([a,b])$
$\rho, \sigma, \alpha, \beta \in [a,b]$

$$I(f) - \tilde{I}_{pm}(f) = \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\beta)$$

$$I(f) - \tilde{I}^{c}_{pm}(f) = \frac{(b-a)}{24} H^2 f''(\alpha)$$

$$I(f) - \tilde{I}_{T}(f) = \frac{-1}{12}(b-a)^3 f''(\sigma)$$

$$I(f) - \tilde{I}^{c}_{T}(f) = \frac{-1}{12}(b-a) H^2 f''(\rho)$$

Vediamo come abbiamo detto prima che con i rettangoli, compensano gli errori positivi con i negativi, riducendo l'errore.