Esercitazione 2 - Incertezza di misura

Breve introduzione

Misura
- Numero
- Incertezza
- Unità di misura

Incertezza tipo → deviazione standard

Tipo A - Analisi Statistica

Tipo B - Tutto il resto

Tipo A

- quando misure $\underbrace{\text{ripetute}}^{n \text{ volte}}$ dello stesso misurando
- ricaviamo μ_x e σ_x

μ_x: Media

σ_x: Deviazione standard

La miglior stima della grandezza è la media campionaria

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Deviazione Standard:

$$S_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2 \longrightarrow S_x = \sqrt{S_x^2}$$

Questa deviazione standard, non è l'incertezza

La incertezza è la incertezza associata alla media, quanto è buona la nostra stima della media

Questa è della popolazione non della media

Deviazione standard della media campionaria è:

$$u(\bar{X}) = \bar{S} = \frac{S_x}{\sqrt{n}}$$

Valore numerico è:

$$x = \bar{X} \pm u(\bar{X}) = \bar{X} \pm \frac{S_x}{\sqrt{n}}$$

Val

Aumenta le misure, riduce l'incertezza

Incertezza tipo B

- Tipi diversi dati
- $\mu = \int f_x(x) \cdot x \, dx$
  - $u(x) = \sigma = \sqrt{\int (x-\mu)^2 \cdot f_x(x) \, dx}$ (Incertezza di tipo B)
    - Tipo B si assume che stiamo facendo una misurazione
      - $n = 1$

Misura del valore è:

$$x = \mu \pm u(x)$$

Tipico Tipo B

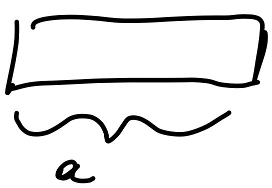
- Si sa la risoluzione dello strumento
- Si ipotizza distribuzione uniforme

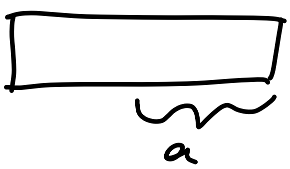
Numero misura: $\mu_x = X_i$ ← Valore letto

Incertezza: $u(x_i) = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ o $u(x_i) = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

a è la risoluzione





Incertezza combinata

↳ Per misure indiretta dove

$$Y = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N)$$

Ognuna X_n è effettuata una incertezza che poi combiniamo

La incertezza combinata

$$u_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \Big(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}}_{\text{Pesi}} \underbrace{u_i}_{\text{Incertezza misura diretta}} \Big)^2}$$

Combinazione di varianze

Incertezza misura diretta.
↳ Ci vanno incertezze tipo, non quelle estese!

L'incertezza tipo è una incertezza standard, utile solo per confronti, non la affidabilità della misura

La incertezza estesa viene associata ad un intervallo di confidenza, che poi possiamo cercare

La condidenza non è che ci sia il valore vero, ma che un sistema costruito ugualmente creerà un intervallo 95% che ci sia il valore vero dentro

Incertezza estesa:

$$u_e = k \cdot u(x)$$

fattore di copertura

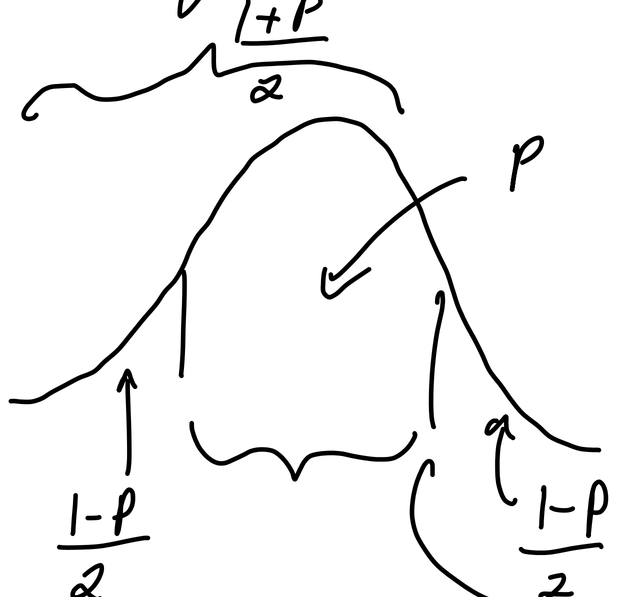
$$I_c = [\mu - u_e \, ; \, \mu + u_e]$$

Serve l'inversa di CDF : $ICDF(p)$

↳ con probabilità, parte valori indietro

↳ da $-\infty$ a X_p

ma noi vogliamo la simmetria



$$\mu + \sigma \cdot F_z^{-1}\left(\frac{1+p}{2}\right)$$

Possiamo usare questo

$$X_p = \mu + \sigma \cdot F_Z^{-1}(p) = \mu + \sigma \cdot \min\{ z \in \mathbb{R} : F_Z(z) \geq p$$

L'intervallo di confidenza sarà:

$$I_c = 2\sigma \cdot F_Z^{-1}\left(\frac{1+p}{2}\right)$$

$$I_c = [\quad u_i, \mu + u_e]$$

$$u = F_Z^{-1}\left(\frac{50 + \frac{n}{2}}{100}\right)$$

Se $n > 30$ allora

$$X \sim N(\mu, \sigma) \rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$ come una normale standard

$$X \sim N(\mu, ?) \rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim N(t-1)$$ si usa una distribuzione t-student dove σ è rimpiazzato da dalla incertezza campionaria.

$n-1$
gradi di libertà

Se la distribuzione non è normale,
teorema limite centrale:

per $n \to \infty$ si tende a distribuire come una normale

$$X \sim f(\mu, \sigma) \xrightarrow{n \to \infty} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Se σ è noto $\Rightarrow$ normale

Se σ non noto $\Rightarrow$ t-Student

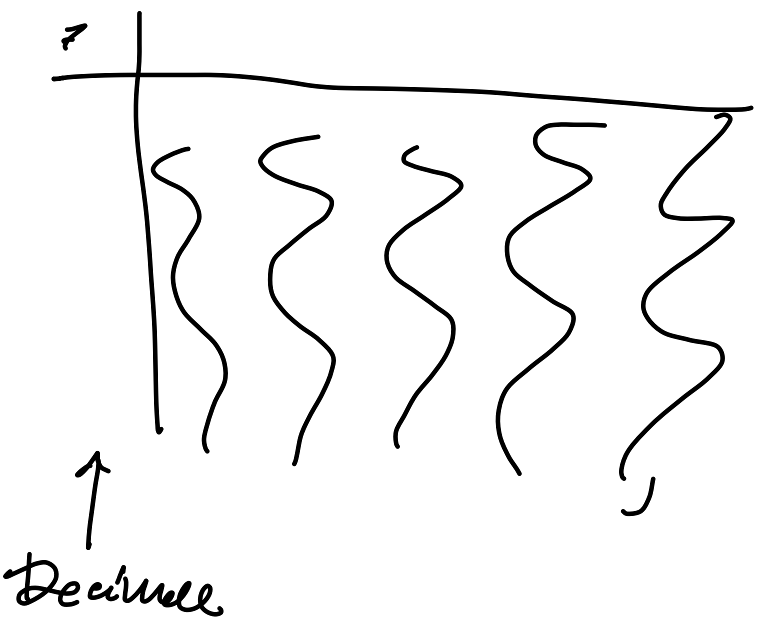
L'incertezza combinata tende ad una distribuzione normale

↳ Assumiamo per corso

↳ Approssimazione che immaginiamo noi

Uso delle tabelle

Probabilità che $Z \leq z$



← Centesimali

E.g. per $Z = .56$

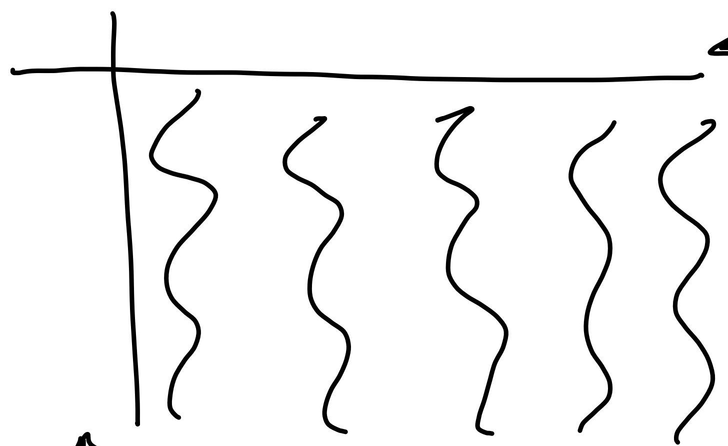
$\Leftrightarrow F_z(0{,}56) = 0{,}7123$

Per noi importerà trovare Z da P

$F_z^{-1}(0,8) = 0,84$ ← Valore di Z per tale probabilità

↳ Più vicino alla probabilità

Tabella t-student



← Probabilità

↑ Gradi di libertà

Si trova valore direttamente, non serve fare l'inversa con t-student per trovare il valore

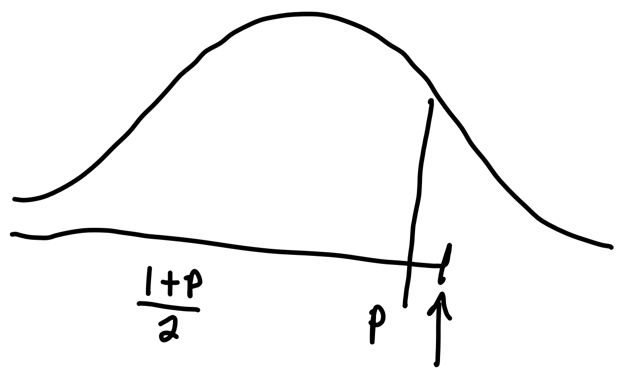
$t(n-1, p)$

Intervallo di confidenza

$\mu = 30$ $\sigma = 2$ I_c?

Dobbiamo cercare $ICDF\left(\frac{1+p}{2}\right)$ non $ICDF(p)$

perché



ci troverà questo, che noi possiamo usare, poi possiamo ritogliere l'altro lato

Tutti esercizi caricati, tabelle sono lì

Esercizio I

Misuratore di resistenza

12 misure

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i}{n} = \frac{1200,47}{12} = 100,039167\ \Omega$$

Consiglio arrotondare in primo passo per aiutare dopo

$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ← no lo sappiamo $\Rightarrow u = \frac{S}{\sqrt{n}}$ ← deviazione standard campionaria

$$S_R = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum (R_i - \bar{R})^2} = \sqrt{\frac{1}{11}(15,29 \cdot 10^{-3})\Omega^2} = 11,73 \cdot 10^{-2}\ \Omega$$

$$u_R = \frac{S_R}{\sqrt{n}} = \frac{11,73 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{12}} = 3,39 \cdot 10^{-2}\ \Omega$$

$R = 100,0391667 \pm 3,39 \cdot 10^{-2}\ \Omega$

1 va bene, 2 va bene, 3 è sbagliato per le cifre significative della incertezza

$= 100,0391667 \pm 3,4 \cdot 10^{-2}\ \Omega$

non ha senso, perché si anno incerti di valori più alti.

$= 100,0391\cancel{667} \pm 0,034\ \Omega$

$= 100,039 \pm 0,034\ \Omega$

Esercizio 2

Unica risorsa di incertezza

Ventesimale, risoluzione

Calibro Ventesimale $r = \frac{1}{20}\,mm = 0,05\,mm$

Misura volume blocchetto

$l_1 = 10,35$

$l_2 = 2,20\,mm$

$l_3 = 3,85$

$$V = l_1 \cdot l_2 \cdot l_3 = 87,66\,mm^3$$

$$u_V = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial V}{\partial l_1}\right)u_{l_1}\right)^2 + \left(\left(\frac{\partial V}{\partial l_2}\right)u_{l_2}\right)^2 + \left(\left(\frac{\partial V}{\partial l_3}\right)u_{l_3}\right)^2}$$

$$u_{l_1} = u_{l_2} = u_{l_3} = \frac{r}{2\sqrt{3}} = \frac{0,05\,mm}{2\sqrt{3}} = 0,0144\,mm$$

$$\frac{\frac{1}{20}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{10} \cdot \sqrt{3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial l_1} = l_2 l_3 \qquad \frac{\partial V}{\partial l_2} = l_1 l_3 \qquad \frac{\partial V}{\partial l_3} = l_1 l_2$$

$= \quad mm^2 \quad - \quad mm^2 \quad = \quad mm^2$

$u_V = 0{,}67\,mm^3 \rightarrow$ si immagine $n=1$

Non ci è stato chiesto di fare estensione

$V = 87{,}66 \pm 0{,}67\,mm^3$

$\bar{m} = 9{,}953\,kg$

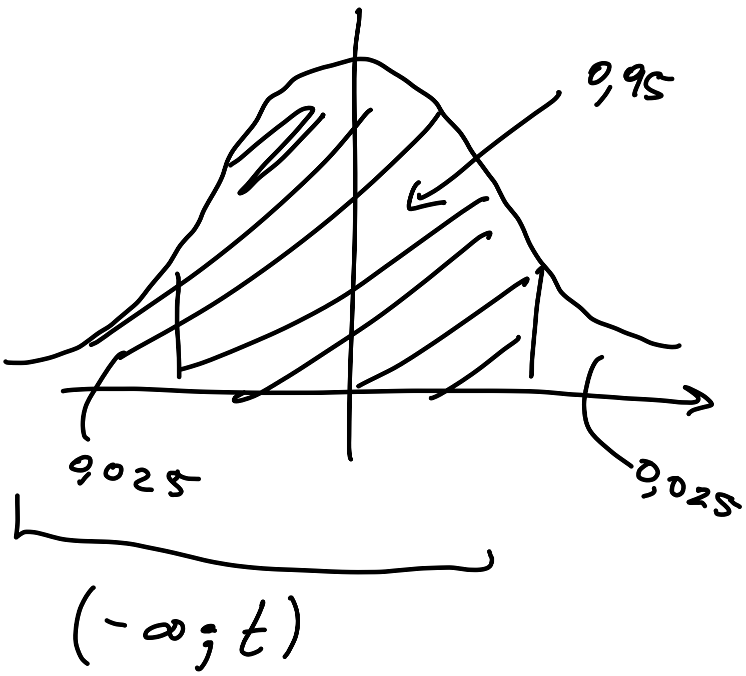
$S_m = 0{,}368\,kg$

$n = 30$

$u_m = \dfrac{S_m}{\sqrt{n}} = 0{,}067\,kg$

$m = 9{,}953 \pm 0{,}067\,kg$ ✓

S non $\sigma \Rightarrow$ t-student



non 95 ma 97,5 nella tabella per portarci a t e poi tagliamo la coda

FC 95% $= t_n = 2{,}045$

$u_{m,95\%} = u_m \cdot FC_{95\%} = 0{,}14 \text{ kg}$

$m = 9{,}95\cancel{1} \pm 0{,}14 \text{ kg} \; (LC\ 95\%)$

$= 9{,}95 \pm 0{,}14 \text{ kg} \; (LC\ 95\%)$

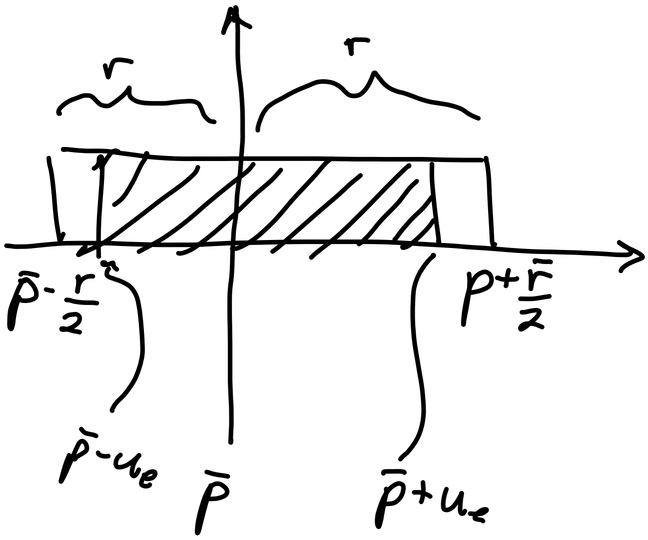
Esercizio 4

$FS = 1 \cdot 10^6 \text{ Pa}$

$r = \frac{FS}{1000} = 1 \cdot 10^3 \text{ Pa} = 1 \text{ kPa}$

$u_p = \frac{r}{2\sqrt{3}} = 0{,}29 \text{ kg}$

$u_{p95\%} = 0{,}95 \cdot \frac{r}{2} = 0{,}48 \text{ kPa}$



Esercizio 5

$\bar{m} = 20 \text{ kg}$

$s_m = 0{,}3 \text{ kg}$

$n = 5$

$\sigma = 0{,}5 \text{ kg}$

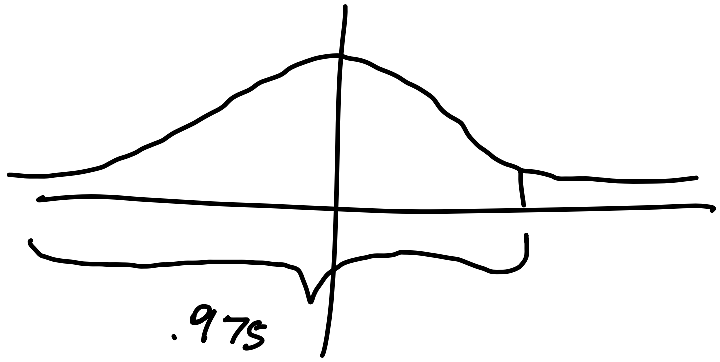
$u = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0{,}22 \text{ kg}$

Possibile sia:

$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ o $\frac{S}{\sqrt{n}}$

Meglio σ perchè $n=5$ per S, invece per σ, n è elevato σ unitaria normale standard

$N(0,1)$



$LC = 95\%$

$\Downarrow$

$97,5\%$

per 0,975

$z = 1,96 = FC_{95\%}$

$u_{m95\%} = u_m \cdot FC_{95\%} = 0,44kg$

$\bar{m} = 20,00 \pm 0,44\ kg$

6) $p_1 = 128 \pm 3$ hpa

$p_2 = 134 \pm 1$ hpa

$p_3 = 132 \pm 2$ hPa

$p_4 = 142 \pm 1$ hpa

Verificare compatibilità con $k = 3$ → Fattore di copertura

	$\bar{p}$	u	u_c	min	max	
1	128	3	9	119	137	✓
2	134	1	3	131	137	✓
3	132	2	6	126	138	✓
4	142	1	3	139	145	✗

Esercizio 7

Esercizio 8 da fare a casa

$d = 36,6cm = 0,366m$ $\quad r_d = 1mm = 0,001m$

$\bar{t} = 5,869345$ $\quad$ 7

$$S_t = 0{,}002579\,s \quad \Big\} \; n = 100$$

$$v = \frac{d}{t} = \frac{0{,}366\,m}{5{,}86\,s} = 0{,}062358\ \frac{m}{s}$$

$$u_v = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial d}\, u_d\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\, u_t\right)^2} =$$

Tipo

$$u_d = \frac{r_d}{2\sqrt{3}} = \frac{0{,}001\,m}{2\sqrt{3}} = 0{,}00029\,m$$

$$u_t = \frac{S_t}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}002578}{\sqrt{100}} = 0{,}00026\ s$$

$$\frac{\partial v}{\partial d} = \frac{1}{t} = \qquad [s^{-1}]$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{-d}{t^2} \qquad \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$u_v = 0{,}000049\ \frac{m}{s}$$

$n = 100 \Rightarrow$ gaussiana

$$FC_{95\%} = 1{,}96$$

$$u_{v95\%} = u_v \cdot FC_{95\%} = 0{,}000096\ \frac{m}{s}$$

$$V = (6{,}2358 \pm 0{,}0096) \cdot 10^{-2}\ \frac{m}{s}$$