Lezione 14 -

Stiamo cercando $y \in I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che risolve il problema:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \to t \in I = [0, T] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Cosa serve per definire la buona posizione di un problema:

- $\exists!$ di soluzione
- dipendenza continua dai dati

Abbiamo visto alla fine della ultima lezione cosa serve per avere la esistenza e unicità della soluzione.

La continuità del problema rispetto a tutte e due le variabili e la Lipschitz continuità rispetto alla seconda variabile uniformemente rispetto alla prima variabile.

La Lipschitz continuità implica che $\exists L$ tale che:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \to \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \text{ e } \forall t \in I$$

Dove L è:

$$L = \max_{\substack{y \in \mathbb{R} \\ t \in I}} \left| \frac{\partial}{\partial y} f(t, y(t)) \right|$$

Dipendenza continua dai dati

La dipendenza dai dati è effettivamente il criterio di stabilità a perturbazioni.

Vogliamo trovare $z : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, soluzione al problema perturbato:

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) + \delta(t) \to t \in I \\ z(0) = y_0 + \delta_0 \end{cases}$$

Definiamo $\delta : I \to \mathbb{R}$ e $\delta_0 \in \mathbb{R}$

Il problema di Cauchy è stabile (secondo Lyapunov) su intervalli, se $\forall$ perturbazioni $(\delta_0, \delta(t))$ con $|\delta_0| < \mathcal{E}$ e $|\delta(t)| < \mathcal{E}$ $\forall t \in I$, con $\mathcal{E} > 0$, tale che $\exists! z(t)$ soluzione del problema perturbazione, allora $\exists C > 0$ tal che $|y(t) - z(t)| = C\mathcal{E}$, $\forall t \in I$.

In parole povere, le piccole perturbazioni sui dati significa perturbazione ai dati.

Osservazioni

È asintoticamente stabile se per $\lim_{t \to \infty} |\delta(t)| = 0$ allora $\lim_{t \to \infty} |y(t) - z(t)| = 0$

Metodo Analitici

Equazioni Differenziali Autonome

La equazioni differenziali autonome sono equazione che non dipendono esplicitamente dalla variabile indipendente t.

Cioè la equazione che prende forma:

$$y'(t) = f(y(t))$$

È banale ma rende la soluzione più snella.
L'unico requisito è che $f \in C^1(I)$.

Proprietà della equazioni differenziali autonome

Proprietà 1 - Confronto

Nella equazioni lineari c'è legame diretto e velocità, nelle equazioni non autonome non solo dipende dallo stato ma anche dall'istante in cui c'è quello stato.

Avendo $y(t)$ troviamo direttamente $y'(t)$ indipendentemente da t. Invece nella non autonome se abbiamo $y(t)$, non possiamo ricavare direttamente $y'(t)$ perché varia in base a t.

Proprietà 2 - Invarianza rispetto ad una traslazione di tempo

Se $\varphi = \varphi(t)$ è soluzione di $y'(t) = f(y(t))$, allora lo è anche la funzione $\psi(t) = \varphi(t - \tau)$ con $\tau \in \mathbb{R}$.

Se siamo capaci risolvere in un intervallo opportuno possiamo shiftare con τ per usare nell'intervallo di interesse, come:

$$\psi'(t) = \varphi'(t-\tau) = f(\varphi(t-\tau)) = f(\psi(t))$$
$$\psi'(t) = f(\psi(t))$$

Non è vero per ogni ODE perché:

$$y'(t) = f(t, y(t))$$
$$\psi'(t) = \varphi'(t-\tau) = f(\underbrace{t-\tau}_{\substack{\text{Non} \\ \text{ignorabile}}}, \varphi(t-\tau)) = f(t-\tau, \psi(t))$$

Questo cambio della funzione non è ignorabile, quindi non si può fare.

Proprietà 3 - Punto di Equilibrio o Stato Stazionario

I punti di equilibrio sono i valori di y^* tale che $f(y^*) = 0 \implies y' = 0$, il sistema in y^* non evolve.

$$y'(t) = f(y(t)) \to y(0) = y_0$$

Se se lo stato iniziale è di equilibrio, $f(y_0) = 0$ allora $y(t) = y_0$ è la soluzione al problema.

Se $f(y_0) \neq 0 \implies y'(t) = \frac{dy}{dt} = f(y(t))$

$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\tau}{f(\tau(t))} = \int_{y_0}^{y} = \int_{y_0}^{y} dt$$

Proprietà 4 - Analisi di Stabilità

Abbiamo che $f(y)$ i cui punti di equilibrio sono y_1, y_2

Prendiamo per esempio l'equazione:

$$f(y(t)) = ry(t)\left(1 - \frac{y(t)}{M}\right) = ry(t) - \frac{r[y(t)]^2}{M}$$

I punti di equilibrio di equazione sono:

$$y(t) = M$$
$$y(t) = 0$$

Il diagramma per questa equazione è:

La derivata della equazione:

$$f'(y(t)) = \frac{r - 2ry(t)}{M}$$

Determiniamo un punto di equilibrio stabile se:

$$f'(y_i) < 0$$

Lo determiniamo instabile se:

$$f'(y_i) > 0$$

Se lo spostamento (funzione+perturbazione) ha una derivata negativa allora ci riporta indietro al punto di equilibrio da cui ci siamo scostati.

In questo caso y_1 è un punto di equilibrio instabile e lo chiamiamo repulsore, invece il y_2 è punto di equilibrio stabile e lo chiamiamo attrattore.

Definizione di Stabilità

Se y^* è punto di equilibrio:

1. È stabile se $\forall \mathcal{E} > 0 \ \exists \delta = \delta_{\mathcal{E}} > 0$ tale che $|y_{_0} - y^*| < \delta_{\mathcal{E}}$; la soluzione associata a $y_{_0}$, $(y(t, y_{_0}))$ $\exists \forall t \geq 0$ e $|y(t, y_{_0}) - y^*| < \mathcal{E} \ \ \forall t$. Cioè data una perturbazione piccola, la soluzione è lo stesso vicino.
2. Instabilità
3. Asintotica stabilità: Se è stabile e aggiunta $\exists \delta_1 > 0$ tale che $|y_{_0} - y^*| < \delta_1$, ne segue $y(t, y_{_0}) \to y^*$ per $t \to \infty$, cioè converge alla soluzione alla soluzione.

Importano solo i casi 1 o 2, il modo migliore è guardare ai grafici o alle derivate.

Trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace è il metodo analitico principe per risolvere gli ODE a coefficienti costanti.

Trasforma un'ODE in un problema algebrico, per cui la soluzione sarà più facilmente ricavabile e poi l'antitrasformata di ci permette di riportare la soluzione nella stessa forma del problema originale.

Definizione

Data $f = f(t)$ con $t \geq 0$, la trasformata di Laplace di f è:

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \to s \in \mathbb{R}$$

E vice versa, data $F = F(s)$, trovare $f = f(t)$ tale che $\mathscr{L}^{-1}[f(t)](s) = F(s)$ richiede il calcolo dell'antitrasformata:

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)](t) = f(t) \iff \mathscr{L}[f(t)](s) = F(s)$$

Ci sono tabelle per con tutte queste trasformate e antitrasformate già calcolate.

Esempi

Possiamo fare un'esempio dell'uso della Trasformata di Laplace sulla funzione di Heaviside, che ha forma:

Visto che guardiamo per $t \geq 0$, la funzione è 1 $\forall t$.

La trasformata sarà:

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty 1e^{-st}\,dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty$$

Per gestire l'∞ usiamo un limite:

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-sb} + \frac{1}{s}e^{1}\right] = \frac{1}{s}$$

Questo funzione per $s > 0$, se s fosse < 0, allora il termine alla sinistra diventerebbe ∞.

Facciamo un'altro esempio con l'equazione: $f(t) = e^{at}$

$$F(s) = \mathscr{L}[e^{at}](s) = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}\,dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\,dt =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{(a-s)t}\,dt = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{(a-s)t}}{(a-s)}\right]_0^b = \frac{1}{s-a}$$

Questo è vero se $a - s < 0$.

Un'ultimo esempio è per l'equazione: $f(t) = e^{t^2}$

$$F(s) = \mathscr{L}[e^{t^2}](s) = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{t^2}e^{-st}\,dt =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{t^2-st}\,dt \geq \int_{|s|}^b e^{t^2-st}\,dt \geq \int_{|s|}^b e^0\,dt = 1(b-|s|) \to \infty$$

$$\implies \nexists \mathscr{L}[e^{t^2}](s)$$

Sappiamo che $b > |s|$ allora $t \geq |s|$ allora $t^2 \geq |s|t$ allora $t^2 - |s|t > 0$

Proprietà della Trasformata di Laplace

Note

Facciamo la prima oggi e poi il resto la prossima lezione. In più per ogni proprietà la spieghiamo e poi facciamo un esempio per la trasformata ed un esempio per la antitrasformata.

Proprietà 1 $\longrightarrow$ Linearità

Siano $f(t)$ e $g(t)$ due funzioni che ammettono $\mathscr{L}$, ovvero esistono $F(s)$ e $G(s)$. Allora:

$$\mathscr{L}[f(t)+g(t)](s)=F(s)+G(s)$$

E:

$$\mathscr{L}[c(f)](s)=cF(s) \quad ; \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$\forall s$ tale che $F(s)$ e $G(s)$ siano definiamo.

Inoltre si ha:

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)+G(s)](t)=f(t)+g(t)$$

$$\mathscr{L}^{-1}[cF(s)]=cf(t) \;\; ; \;\; \forall c \in \mathbb{R}$$

Esempi

Esempio trasformata:

$f(t)=\sin(3t)+2$

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathscr{L}[\sin(3t)+2](s)=\mathscr{L}[\sin(3t)](s)+\mathscr{L}[2](s) \\ &= \frac{3}{s^2+9}+2\mathscr{L}[1](s)=\frac{3}{s^2+9}+\frac{2}{s} \end{aligned}$$

Tutto questo lo abbiamo preso dalle tabelle.

Esempio antitrasformata:

$$F(s)=\frac{3}{s^2+16}-\frac{7}{(s-5)(s-12)}=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{s^2+16}-\frac{7}{(s-12)(s-5)}$$

$$f(t)=\frac{3}{4}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{4}{s^2+16}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{7}{(s-12)(s-5)}\right](t)=\frac{3}{4}\sin(4t)-e^{12t}+e^{5t}$$