Lezione 16 -

Esercitazione $\Rightarrow$ Risoluzione analitica di ODE di ordine 1 e 2 a coeff. costanti e Trasformata di Lagrange.

- Convergenza per eulero esplicito
  ↳ Abbiamo trovato nel messo la consistenza.

$\forall n = 0, \ldots, N_h$ costante indipendente da h. ordine di convergenza

$$|u_n - y_n| \le C(h) = C^* h^p$$

EE

$$e_n = u_n - y_n = \underbrace{(u_n - u_n^*)}_{\text{Accumulo di errori}} + \underbrace{(u_n^* - y_n)}_{\text{Errore di un solo passo}}$$

$$u_n^* = y_{n-1} + h f(t_{n-1}, y_{n-1})$$

$$(u_n^* - y_n) = -\frac{h^2}{2} y''(x_n) \to 0 \text{ per } h \to 0$$

Errore di troncamento locale $\to$

$$\tau_n(h) = \frac{u_n^* - y_n}{h} = -\frac{h}{2} \underbrace{y''(x_n)}_{f'(x_n, y(x_n))}$$

$$\tau(h) = \max_{n=0,\ldots,N_h} |\tau_n(h)|$$

Errore di troncamento globale

$$= \frac{h}{2} M \qquad M = \max_{t \in I} |f'(t, y(t))|$$

$\lim_{h \to 0} \tau(h) = 0$ EE è consistente di ordine 1.

$$u_n^* - u_n = \underbrace{y_{n-1} + hf(t_{n-1}, y_{n-1})}_{= e_{n-1}} - \underbrace{u_{n-1} - hf(t_{n-1}, u_{n-1})}_{\text{Esplicitazione di EE per } u_n}$$

$$= e_{n-1} + h\left[f(t_{n-1}, y_{n-1}) - f(t_{n-1}, u_{n-1})\right]$$

Utilizziamo la Lipschitzianità

$$\left| f(t_{n-1}, y_{n-1}) - f(t_{n-1}, u_{n-1}) \right| \le L \,|\underbrace{y_{n-1} - u_{n-1}}_{e_{n-1}}|$$

$$|u_n^* - u_n| \le |e_{n-1}| + h\left|f(t_{n-1}, y_{n-1}) - f(t_{n-1}, u_{n-1})\right|$$

$$\le |e_{n-1}| + hL\,|e_{n-1}| = \underbrace{(1+hL)}_{\text{per } h \to 0 \text{, non va a } 0}|e_{n-1}|$$

Il bracco uno non va a 0 da solo, vediamo se con il bracco uno riusciamo a portarlo a 0.

$$e_n = (u_n - u_n^*) + (u_n^* - y_n)$$

$$|e_n| \le |u_n - u_n^*| + |u_n^* - y_n| \le (1+hL)|e_{n-1}| + h|\tau_n(h)|$$

$$|e_n| \le (1+hL)|e_{n-1}| + h \underbrace{\tau(h)}_{\text{sempre}}$$

positivo

$$|e_{n-1}| \leq (1+hL)|e_{n-2}| + h\,\tau(h)$$
$$|e_{n-2}| \leq (1+hL)|e_{n-3}| + h\,\tau(h)$$

$$|e_n| \leq (1+hL)\left[(1+hL)|e_{n-2}| + h\,\tau(h)\right] + h\,\tau(h) =$$
$$= (1+hL)^2|e_{n-2}| + (1+hL)\,h\,\tau(h) + h\,\tau(h) \leq$$
$$\leq (1+hL)^2\left[(1+hL)|e_{n-3}| + h\,\tau(h)\right] + (1+hL)\,h\,\tau(h) + h\,\tau(h) =$$
$$= (1+hL)^3|e_{n-3}| + (1+hL)^2 h\,\tau(h) + (1+hL)\,h\,\tau(h) + h\,\tau(h)$$

Vogliamo portare a $|e_0|$ che è 0.

$$\leq \cancel{(1+hL)^n} \underbrace{|e_0|}_{= 0} + (1+hL)^{n-1} h\,\tau(h) + (1+hL)^{n-2} h\,\tau(h) + \ldots +$$
$$+ (1+hL)^2 h\,\tau(h) + (1+hL)\,h\,\tau(h) + h\,\tau(h) =$$
$$= h\,\tau(h)\left[(1+hL)^{n-1} + (1+hL)^{n-2} + \ldots + (1+hL)^2 + (1+hL) + 1\right]$$

Ricordiamo che se prendiamo:

$$\sum_{x=0}^{n-1} x^n = \frac{1-x^n}{1-x} \qquad \text{in questo caso } x = (1+hL)$$

Allora:

$$= \cancel{h}\,\tau(h)\cdot\frac{(1+hL)^n-1}{\cancel{h}L} = \frac{(1+hL)^n-1}{L}\,\tau(h)$$

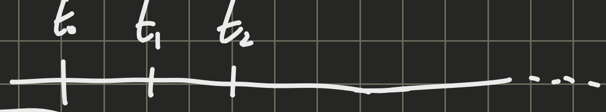
Sappiamo che:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \geq 1+x$$

$$1+x \leq e^x$$

$$\leq \frac{e^{hLn}-1}{L}\,\tau(h)$$

Abbiamo che $h\cdot n = t_n - t_0$



$$\leq \frac{e^{(t_n-t_0)L}}{L}\,\tau(h) = \underbrace{\left|\frac{e^{(t_n-t_0)L}}{L}\cdot\frac{M}{2}\right|}_{C^*}\cdot h$$

C^*

↳ costante di convergenza all'inizio della lezione.

EE converge con ordine 1

Anche EI è consistente e convergente di ordine 1.

↳ ⇒ La difficoltà della risoluzione di EI non è compensata da un benefit di convergenza e consistenza.

<u>Osservazioni:</u>

→ C^* è comodo se t_n e t_0 sono più vicine, più grande più è insignificativo il limite.

→ Lo schema converge principalmente per $\tau(h)$ che tende a 0, se non si avesse la consistenza non si avrebbe convergenza.

↳ La consistenza è condizione per la convergenza.

↳ Per EE l'ordine di consistenza, e l'ordine di convergenza. → Vero per ogni one-step

Rimpiazziamo l'esponenziale con una dipendenza lineare.

$$(I) \quad u^* - u_n = e_{n-1} + h\left[\underbrace{f(t_{n-1}, y_{n-1}) - f(t_{n-1}, u_{n-1})}\right]$$

Invece di usare la lipschitz continuità la maggioriamo con: $= \dfrac{\partial f}{\partial y}(t_{n-1}, \sigma_{n-1})\underbrace{(y_{n-1}, u_{n-1})}_{e_{n-1}}$

(Un espansione di Taylor con il tempo congelato)

$$\underbrace{u^* - u_n} = e_{n-1}\left[1 + h\frac{\partial f}{\partial y}(t_{n-1}, \sigma_{n-1})\right]$$

(R1) Richiesta I, che sia derivabile rispetto ad y.

(R2) Richiesta II, $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) \leq 0$ → sistema è dissipativo

(R3) Richiesta 3 $\left|1 + \underbrace{h\frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))}_{Q}\right| < 1$

Ci permettono invece di avere la linearità di C^* rispetto a $t_n - t_0$

$$|1 + hQ| < 1$$

$$-1 < \underbrace{1 + hQ}_{\text{per } R2\,\partial \text{ sempre vera}} < 1$$

$$-2 < hQ$$

$$h < \frac{-2}{Q} = \frac{2}{|Q|}$$

↳ La richiesta 3 ci chiede un vincolo sulla distanza tra istanti.

$$|e_n| \le |u_n - u_n^*| + h\tau(h)$$

Sotto ipotesi $R1, R_3$ $\le |e_{n-1}| + h\tau(h) \le |e_{n-2}| + 2h\tau(h)$

$$\le |e_{n-3}| + 3h\tau(h)$$

$$|e_{n-1}| \le |e_{n-2}| + h\tau(h)$$

$$|e_{n-2}| \le |e_{n-3}| + h\tau(h)$$

$$\vdots$$

$$\le \cancel{|e_0|}^{\,0} + n\tau(h) = nh\tau(h) = (t_n - t_0)\,\tau(h)$$

$$= \underbrace{(t_n - t_0)\frac{M}{2}}_{C^*} h$$

C^* ora è lineare, ma abbiamo 3 richieste che non sono gratuite, o computazionalmente costo poco.

EE → consistente di ordine 1 → dimostrato
convergente

EI → consistente di ordine 1 → detto
convergente

Consistenza di Crank-Nicolson

$$h\tau(h) = \overset{\to \text{ schema}}{u_n^*} - y_n =$$ ↳ la soluzione esatta applicata

$$u_n = u_{n-1} + \frac{h}{2}\left[f(t_n,u_n) + f(t_{n-1},u_{n-1})\right]$$

$$= y_{n-1} - y_n + \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(t_n,y_n) + f(t_{n-1},y_{n-1})\right]}_{u_n^*}$$

$$= -\int_{t_{n-1}}^{t_n} y'(s)\,ds + \frac{h}{2}\left[f(t_n,y_n) + f(t_{n-1},y_{n-1})\right]$$

$$y'(s) = f(s,y(s))$$

$$= -\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(s,y(s))\,ds + \frac{h}{2}\left[f(t_n,y_n) + f(t_{n-1},y_{n-1})\right]$$

Integrale

Formula di quadratura trapezoidale

$$I(f) - J_T(f) = E_T(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\alpha)$$

$$= \frac{h^3}{12} f''(\alpha_n, y(\alpha_n))$$

CN $\quad \tau_n(h) = \frac{h^3}{12} f''(\alpha_n, y(\alpha_n))$ con $\alpha_n \in [t_{n-1}, t_n]$

↳ Errore di troncamento globale

$\tau(h) = \frac{h^2}{12} N \qquad N = \max_{t \in I} |f''(t, y(t))|$

↳ Errore globale

È consistente per $h \to 0$ di ordine 2.

Quindi converge di ordine 2.

→ CN $\quad$ consistenza, convergenza $\}$ ordine 2

Note:

$u_n^* - y_n$ è la differenza ad ogni istante tra lo schema con i punti noti e di punti noti.
Se l'errore tra queste stime e i valori veri tende a 0 allora si ha uno schema convergente.

<u>Stabilità</u> ⇝ sensibilità alle perturbazioni sui dati.

↳ Zero-stabilità

↳ Assoluta stabilità

EE $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h f(t_n, u_n) & n \geq 0 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$

EE perturbato
$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n + h\left[f(t_n, z_n) + \rho_{n+1}\right] \\ z_0 = y_0 + \rho_0 \end{cases}$$

$\rho_{n+1} \in \mathbb{R}$

$\rho_0 \in \mathbb{R}$

Perturbazione sui e perturbazione su dato iniziale.

EE è zero-stabile se $\exists C > 0$ tale che $\forall h \leq h_0$ e $\forall \varepsilon > 0$

con $|\rho_n \leq \varepsilon|$ per $0 \leq n \leq N_h$

si ha $|u_n - z_n| \leq C \cdot \varepsilon$ per $0 \leq n \leq N_h$

<u>Osservazioni</u>

Tutti i metodi one-step (EE, EI, CN) sono zero-stabili f è continuità rispetto ad entrambi gli argomenti e Lipschitz continuità rispetto al secondo argomento uniformemente al primo.

<u>Teorema di Lax-Richmayer</u>

Ogni metodo <u>consistenze</u> è <u>convergente</u> se e solo se è <u>zero-stabile</u>.

<u>Assoluta stabilità</u>

$$\underbrace{I = [t_0, T]}_{\text{Prima}} \longrightarrow \underbrace{I = [t_0, \infty)}_{\text{Ora}}$$

Ci sono metodi che riescono ad esser assolutamente stabili, e altri che no.

Tra i sistemi che possono ci sono metodi che sono assolutamente stabili sono sotto certe condizioni e altri che lo sono incondizionatamente.

Problema modello

$$\begin{cases} y'(t) = \underbrace{\lambda y(t)}_{f(t, y(t))} \\ \underbrace{y(0) = 1}_{y_0} \end{cases} \qquad t \in (0, \infty), \quad \lambda \in \mathbb{R}^-$$

Ragione per cui prendiamo negativo.

$$y(t) = e^{\lambda t}$$

EE

$$u_{n+1} = u_n + h f(t_n, u_n)$$

$$u_{n+1} = u_n + h\lambda = (1+h\lambda)\, u_n = (1+h\lambda)^2 u_{n-1} \dots$$

$$u_n = (1 + h\lambda)\, u_{n-1}$$

$$= (1+h\lambda)^{n+1} \underset{1}{\underset{\parallel}{u_0}}$$

$$= (1+h\lambda)^{n+1}$$

Riguarda

$$|1 + h\lambda| < 1$$

$$-1 < \underbrace{1 + h\lambda < 1}$$

sempre vero, perché λ lo abbiamo preso negativo

$$-2 < h\lambda \rightarrow h < \frac{-2}{\lambda} = \frac{2}{|\lambda|}$$

EE riproduce l'andamento assintotico del problema a patto che h è più piccolo di questo, e diventa più difficile per $|\lambda|$ grandi.

EE condizionatamente assolutamente stabile, data la condizione $h < \frac{2}{|\lambda|}$

Esempio:

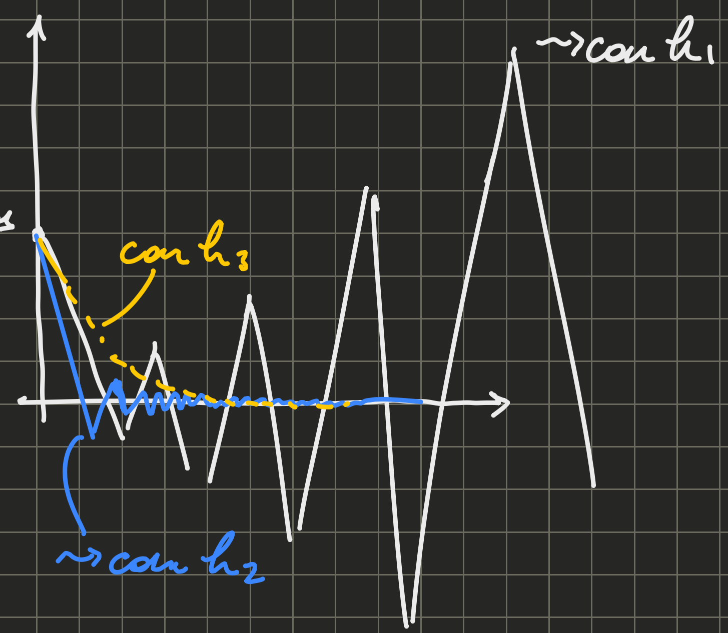
$\lambda = -1$

$y(t) = e^{-t}$

$h_1 = \frac{30}{14}$ $\quad$ $h_2 = \frac{30}{16}$

> 2 $\quad$ < 2 ma non molto

$h_3 = \frac{1}{2}$



EI
$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h f(t_{n+1}, u_{n+1}) & n \geq 0 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

$$u_{n+1} = u_n + h\lambda u_{n+1}$$

$$(1 - h\lambda) u_{n+1} = u_n$$

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{1-h\lambda}\right) u_n = \left(\frac{1}{1-h\lambda}\right)^2 u_{n-1} =$$

$$u_n = \left(\frac{1}{1-h\lambda}\right) u_{n-1} \qquad = \left(\frac{1}{1-h\lambda}\right)^{n+1} \underset{1}{\underset{\shortparallel}{u_0}} = \left(\frac{1}{1-h\lambda}\right)^{n+1}$$

per $n \to \infty$, $\to 0$
perché $\lambda < 0$

EI è incondizionatamente assolutamente stabile

CN
$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})\right] & n \geq 0 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[\lambda u_n + \lambda u_{n+1}\right]$$

$$\left(1 - \frac{h}{2}\lambda\right) u_{n+1} = \left(1 + \frac{h}{2}\lambda\right) u_n$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = \frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}} u_n = \ldots = \left[\frac{1 + \frac{h}{2}\lambda}{1 - \frac{h}{2}\lambda}\right]^{n+1} y_0$$

$$= \left[\frac{1 + \frac{h}{2}\lambda}{1 - \frac{h}{2}\lambda}\right]^{n+1}$$

per $n \to \infty$ tende a 0.

Anche CN è incondizionatamente assolutamente stabile.

Abbiamo scelta di h.

EE	EI	CN
ordine 1	ordine 1	ordine 2
computazionalmente migliore di EI	non ha problemi di stabilità.	Migliore in termini di convergenza.