Lezione 16 - Convergenza, Consistenza e Stabilità dei Metodi Numerici

Congruenza di EE

Abbiamo già trovato nel mezzo la consistenza.

Abbiamo trovate che uno schema converge di ordine p se esiste C tale che:

$$|u_n - y_n| \leq C(h) = C^* h^p \to \forall n = 0, \dots, N_h$$

Abbiamo visto che l'errore per Eulero esplicito può esser scritto come l'accumulo degli errori più l'errore di un solo passo:

$$e_n = u_n - y_n = (u_n - u_n^*) + (u_n^* - y_n)$$

Definendo u_n^* come lo schema avendo posto il valore esatto per il passo prima nello schema:

$$u_n^* = y_{n-1} + hf(t_{n-1}, y_{n-1})$$

Abbiamo visto che l'errore al singolo passo è:

$$(u_n^* - y_n) = -\frac{h^2}{2} y''(\alpha_n) \to 0 \text{ per } h \to 0$$

Da qui abbiamo definito l'errore di troncamento locale come:

$$\tau_n(h) = \frac{u_n^* - y_n}{h} = -\frac{h}{2} \underbrace{y''(\alpha_n)}_{f'(\alpha_n, y(\alpha_n))}$$

E l'errore di troncamento globale come:

$$\tau(h) = \underset{n=0,\dots,N_h}{max} |\tau_n(h)| = \frac{h}{2} M$$

Dove:

$$M = \underset{t \in I}{max} \left| f'(t, y(t)) \right|$$

Possiamo fire allora che:

$$\lim_{h \to 0} \tau(h) = 0$$

Con questo possiamo dire che Eulero esplicito è consistente di ordine 1.

Guardiamo allora l'altre parte del termine dell'errore:

$$u_n^* - u_n = \underbrace{y_{n-1} + hf(t_{n-1}, y_{n-1})}_{e_{n-1}} - \underbrace{u_{n-1} - hf(t_{n-1}, u_{n-1})}_{\text{EE per } u_n}$$
$$= e_{n-1} + h[f(t_{n-1}, y_{n-1}) - f(t_{n-1}, u_{n-1})]$$

Possiamo riscrivere questo usando la Lipschitzianità, scrivendo:

$$|f(t_{n-1}, y_{n-1}) - f(t_{n-1}, u_{n-1})| \leq L\underbrace{|y_{n-1} - u_{n-1}U|}_{e_{n-1}}$$

Scriviamo allora:

$$\begin{aligned} |u_n^* - u_n| &\leq |e_{n-1}| + h\,|f(t_{n-1}, y_{n-1}) - f(t_{n-1}, u_{n-1})| \leq \\ &\leq |e_{n-1}| + hL\,|e_{n-1}| = (1 + hL)\,|e_{n-1}| \end{aligned}$$

Vediamo che per $h \to 0$, questo termine non si azzera.

Proviamo allora mettere insieme i le due parti dell'errore e se insieme si annullano per $h \to 0$:

$$e_n = (u_n - u_n^*) + (u_n^* - y_n)$$

$$|e_n| \leq |u_n - u_n^*| + |u_n^* - y_n| \leq (1 + hL)\,|e_{n-1}| + h\,|\tau_n(h)|$$

Scriviamo delle iterazioni di questo:

$$|e_n| \leq (1 + hL)\,|e_{n-1}| + h \underbrace{\tau(h)}_{\text{sempre }(+)}$$

$$|e_{n-1}| \leq (1 + hL)\,|e_{n-2}| + h\tau(h)$$

$$|e_{n-2}| \leq (1 + hL)\,|e_{n-3}| + h\tau(h)$$

Mettendo la prima e seconda iterazione insieme abbiamo:

$$\begin{aligned} |e_n| &\leq (1 + hL)[(1 + hL)\,|e_{n-2}| + h\tau(h)] + h\tau(h) = \\ &= (1 + hL)^2\,|e_{n-2}| + (1 + hL)h \cdot \tau(h) + h \cdot \tau(h) \leq \\ &\leq (1 + hL)^2[(1 + hL)\,|e_{n-3}| + h \cdot \tau(h)] + (1 + hL) \cdot h \cdot \tau(h) + h \cdot \tau(h) = \\ &= (1 + hL)^3\,|e_{n-3}| + (1 + hL)^2 h\tau(h) + (1 + hL)h\tau(h) + h\tau(h) \end{aligned}$$

Portando alla iterazione con $|e_0|$ arriviamo a:

$$\begin{aligned} &\leq \cancelto{0}{(1 + hL)^n \underbrace{|e_0|}_{=0}} + (1 + hL)^{n-1}h\tau(h) + (1 + hL)^{n-2}h\tau(h) + \\ &+ \cdots + (1 + hL)^2 h\tau(h) + (1 + hL)h\tau(h) + h\tau(h) = \\ &= h\tau(h)[(1 + hL)^{n-1} + (1 + hL)^{n-2} + \cdots + (1 + hL)^2 + (1 + hL) + 1] \end{aligned}$$

Ricordiamo che possiamo riscrivere:

$$\sum_{i=0}^{n-1} x^i = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

Quindi possiamo riscrivere questa ultima iterata come:

$$= \cancel{h}\,\tau(h) \cdot \frac{(1 + hL)^N - 1}{\cancel{h}L} = \frac{(1 + hL)^n - 1}{L}\tau(h)$$

Sappiamo che:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq 1 + x$$

Quindi possiamo scrivere come:

$$\leq \frac{e^{hLn}-1}{L}\tau(h)$$

Abbiamo che $h \cdot n = t_n - t_0$, quindi possiamo finalmente scrivere:

$$|e_n| \leq \frac{e^{(t_n-t_0)L}}{L}\tau(h) = \underbrace{\frac{e^{(t_n-t_0)L}}{L} \cdot \frac{M}{2}}_{C^* \to \text{const. di conv.}} \cdot h$$

C^* è la constante ci convergenza che stavamo cercando dall'inizio della lezione.

Questa equazione significa che EE converge con ordine 1.

Facendo calcoli comparabili troviamo che EI è anche lui consistente e convergente di ordine 1.

La difficoltà della risoluzione di EI non è ancora compensata da un benefit di convergenza e consistenza.

Osservazioni

C^* è comoda solo se t_n e t_0 sono più vicine, più e grande più e insignificativo il limite.

Lo schema converge principalmente per $\tau(h)$ che tende a 0, se non si avesse la consistenze non si avrebbe convergenza, troviamo allora che la consistenza e condizione per la convergenza.

Per ogni one-step l'ordine di convergenza e l'ordine di consistenza sono gli stessi.

Proviamo a rimpiazzare l'esponenziale con una equazione lineare tale che non sia cosi problematica l'ampiezza della finestra temporale.

Avendo l'equazione:

$$u_n^* - u_n = e_{n-1} + h[f(t_{n-1}, y_{n-1}) - f(t_{n-1}, u_{n-1})]$$

Invece di usare Lipschitz continuità usiamo la maggioriamo con un'espansione di Taylor con il tempo congelato, allora:

$$f(t_{n-1}, y_{n-1}) - f(t_{n-1}, u_{n-1}) = \frac{\partial f}{\partial y}(t_{n-1}, \sigma_{n-1})\underbrace{(y_{n-1}, u_{n-1})}_{e_{n-1}}$$

Possiamo allora scrivere l'equazione iniziale come:

$$u_n^* - u_n = e_{n-1}\left[1 + h\frac{\partial f}{\partial y}(t_{n-1}, \sigma_{n-1})\right]$$

A questo punto per poter eliminare l'esponenziale e avere una funzione lineare facciamo 3 richieste:

$$\begin{cases} R_1 \to \text{che sia derivabile rispetto a y} \\ R_2 \to \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) \leq 0 \to \text{sistema è dissipativo} \\ R_3 \to \underbrace{|1 + h\frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))|}_{Q} < 11 \end{cases}$$

Insieme queste richieste ci permettono di avere la linearità di C^* rispetto a $t_n - t_0$

Lavorando sulla terza richiesta cerchiamo che:

$$|1+hQ|<1$$
$$-1< \underbrace{1+hQ<1}_{\text{sempre vero per R2}}$$

Visto che la parte destra è sempre vera dobbiamo investigare la parte alla sinistra:

$$-2<hQ$$
$$h<-\frac{2}{Q}=\frac{2}{|Q|}$$

La richiesta 3 ci chiede un vincolo sulla distanza tra gli istanti di t che prendiamo.
Questo può esser un problema se $|Q|$ è molto grande perché con più passi accumuliamo più errore e quindi si può avere un esser molto più alto di quello voluto.

Se è vera la richiesta 3 avremmo che $|u_n - u_n^*|$ sarà maggiorabile con e_{n-1}.

Prendendo l'equazione dell'errore:

$$|e_n| \leq |u_n - u_n^*| + h\tau(h)$$

Sotto le ipotesi 1 e 3 allora le diverse iterazioni saranno:

$$|e_{n-1}| \leq |e_{n-2}| + h\tau(h)$$
$$|e_{n-2}| \leq |e_{n-3}| + h\tau(h)$$

Et cetera.

Mettendo le iterazioni insieme avremmo:

$$|e_n| \leq |e_{n-1}| + h\tau(h) \leq |e_{n-2}| + 2h\tau(h) \leq |e_{n-3}| + 3h\tau(h)$$

Arrivando a e_0 avremmo:

$$\leq \cancelto{0}{|e_0|} + h\tau(h) = nh\tau(h) = (t_n - t_0)\tau(h) = \underbrace{\frac{(t_n-t_0)M}{2}}_{C^*} \cdot h$$

C^* ora è lineare, ma abbiamo dovuto imporre 3 richieste che non sono gratuite in termini computazionali di errore.

Consistenza di Crank-Nicolson

L'errore di troncamento globale per CN ha equazione:

$$
\begin{aligned}
h\tau(h) &= u_n^* - y_n \\
&= y_{n-1} - y_n + \frac{h}{2}[f(t_n, y_n) + f(t_{n-1}, y_{n-1})] \\
&= -\int_{t_{n-1}}^{t_n} \underbrace{y'(s)}_{f(s,y(s))}\ ds + \frac{h}{2}[f(t_n, y_n) + f(t_{n-1}, y_{n-1})] \\
&= \frac{h^3}{12} f''(\alpha_n, y(\alpha_n)) \\
\tau_n(h) &= \frac{h^3}{12} f''(\alpha_n, y(\alpha_n)) \text{ con } \alpha_n \in [t_{n-1}, t_n] \\
\tau(h) &= \frac{h^2}{12} N \to N = \max_{t \in I} |f''(t, y(t))|
\end{aligned}
$$

È consistente per $h \to 0$ di ordine 2, quindi sarà l'ordine di convergenza sarà 2.

Stabilità

La stabilità come sempre è la sensibilità alle perturbazione sui dati.

Esistono 2 tipi di sensibilità per gli ODE:

- Zero-stabilità
- Assoluta stabilità

Zero-stabilità

Guardiamo la zero-stabilità per EE

Lo schema di EE normale è:

$$
\begin{cases}
u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n) \\
u_0 = y_0
\end{cases}
$$

EE perturbato ha schema di forma:

$$
\begin{cases}
z_{n+1} = z_n + h[f(t_n, z_n) + \rho_{n+1}] \\
z_0 = y_0 = \rho_0
\end{cases}
$$

Dove $\rho_{n+1}, \rho_0 \in \mathbb{R}$

EE è zero-stabilie se $\exists C > 0$ tale che $\forall h \leq h_0$ e $\forall \varepsilon > 0$ con $|\rho_n \leq \varepsilon|$ per $0 \leq n \leq N_h$ si ha $|u_n - z_n| \leq C \cdot \varepsilon$ per $0 \leq n \leq N_h$.

Osservazioni

Tutti i metodi one-step (EE,EI,CN) sono zero-stabile se f è continua rispetto ad entrambi gli argomenti e Lipschitz continua rispetto al secondo argomento uniformemente al primo.

Teorema di Lax-Richtmyer

Ogni metodo consistente è convergente se e solo se è zero-stabile.

Assoluta Stabilità

Per l'assoluta stabilità invece di guardare una finestra temporale finita guardiamo una che si estende all'infinito.

A differenza dalla zero-stabilità è che ci sono metodi che riescono ad esser assolutamente stabili, e altri che no.

Inoltre tra i metodi che riescono ad esser assolutamente stabili, alcuni possono esser incondizionatamente assolutamente stabili invece altri sono solo condizionatamente assolutamente stabili.

Prendiamo un problema modello del tipo:

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda \underbrace{y(t)}_{f(t,y(t))} \rightarrow t \in (0, \infty), \lambda \in \mathbb{R}^- \\ y(0) = y_0 = 1 \end{cases}$$

La soluzione prende la forma:

$$y(t) = e^{\lambda t}$$

Guardiamo la assoluta stabilità per EE:

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n)$$
$$u_{n+1} = u_n + h\lambda = (1 + h\lambda)u_n = (1 + h\lambda)^2 u_{n-1} = \cdots = (1 + h\lambda)^{n+1} \cancel{u_0}^{1} = (1 + h\lambda)^{n+1}$$

Tale che questo schema converga alla soluzione per $t \rightarrow \infty$, serve che:

$$|1 + h\lambda| < 1$$
$$-1 < 1 + h\lambda < 1$$

La condizione alla destra è sempre vera perché prendiamo λ negativo è impossibile che h sia negativo.

La seconda condizione ci porta ad imporre che:

$$-2 < h\lambda \implies h < -\frac{2}{\lambda} = \frac{2}{|\lambda|}$$

EE riproduce l'andamento assintotico del problema solo se prendiamo h più piccolo della condizione imposta. Questa richiesta diventa più difficile più grande è λ. EE allora è condizionalmente assolutamente stabile, data la condizione $h < \frac{2}{|\lambda|}$.

Facciamo degli esempio al variare di h, e vediamo che se h è più grande del minimo richiesto non converge alla soluzione esatta per $t \rightarrow \infty$, e vediamo anche che più si abbassa h più e simile alla soluzione vera.

Guardando lo schema EI invece troviamo che:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1}) \rightarrow n \geq 0 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

Per lo stesso problema troviamo che:

$$u_{n+1} = u_n + h\lambda u_{n+1}$$
$$\rightarrow (1 - h\lambda)u_{n+1} = u_n$$
$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{1 - h\lambda}\right)u_n = \left(\frac{1}{1 - h\lambda}\right)^2 u_{n-1} = \cdots = \left(\frac{1}{1 - h\lambda}\right)^{n+1} \cancel{u_0}^{1} = \left(\frac{1}{1 - h\lambda}\right)^{n+1}$$

per $n \to \infty$ tende a 0 perché $\lambda < 0$.

EI è incondizionatamente assolutamente stabile.
Questo è il vantaggio che abbiamo con EI, dato che tutto il resto è uguale se vogliamo uno schema incondizionatamente stabile dobbiamo accettare il carico computazionale maggiore.

Facendo per CN troviamo:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}[\lambda u_n + \lambda u_{n+1}]$$
$$\left(1 - \frac{h}{2}\lambda\right)u_{n+1} = \left(1 + \frac{h}{2}\lambda\right)u_n$$
$$\implies u_{n+1} = \frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}}u_n = \cdots = \left[\frac{1 + \frac{h}{2}\lambda}{1 - \frac{h}{2}\lambda}\right]^{n+1} \cancelto{1}{u_0} = \left[\frac{1 + \frac{h}{2}\lambda}{1 - \frac{h}{2}\lambda}\right]^{n+1}$$

per $n \to \infty$ tende a 0.

Anche CN è incondizionatamente assolutamente stabile. Abbiamo allora scelta libera di h.