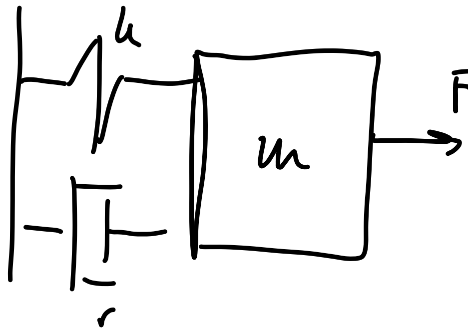
Lezione 19 - Moto forzato (sinusoidalmente)

Sistema di calcolo:



$F(t) = F_0 \cos \Omega t$

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t$$

Soluzione complessiva:

$$x(t) = x_o(t) + x_p(t)$$

$x_o(t)$: Integrale Omogenea Associata — Transitorio

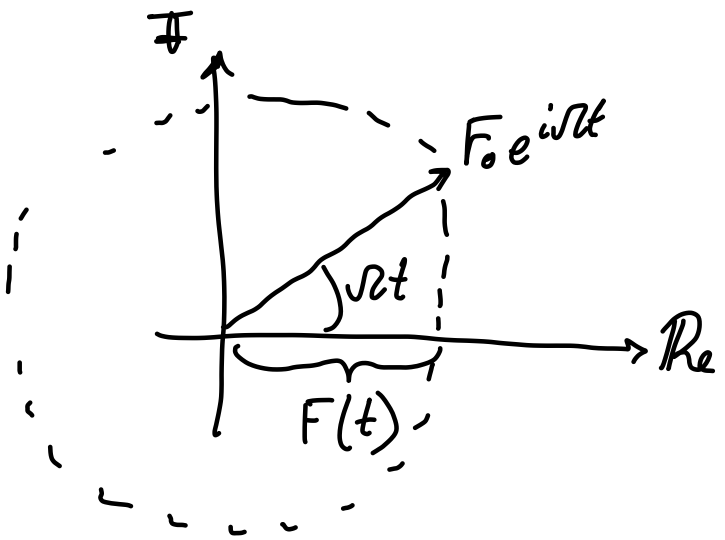
$x_p(t)$: Integrale Particolare — Regime

↳ ∃ solo perché forzante è singola

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = x_p(t) = \text{Condizione di regime}$$

Per il caso sinusoidale è utile andare dal dominio del tempo a quello delle frequenze

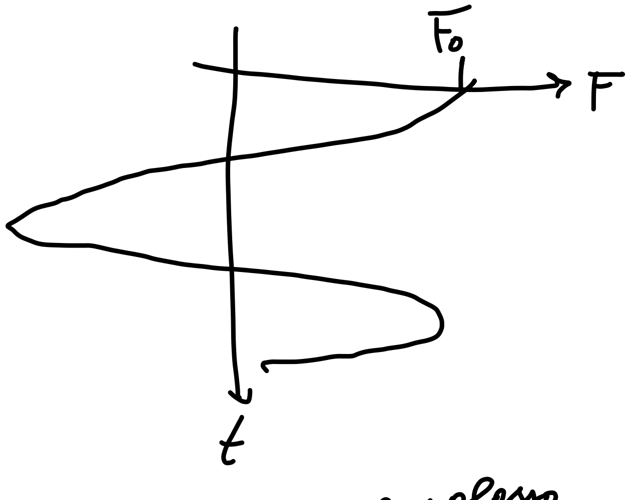
$$F_0 \cos \Omega t = \mathrm{Re}\left(F_0 e^{i\Omega t}\right)$$



Diciamo $F(t)$ la componente reale nel tempo di $F_0 e^{i\Omega t}$

infatti prendiamo

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t$$



$\Omega \rightarrow$ pulsazione

complesso

$$x(t) = \mathrm{Re}\left(\bar{x}_0 e^{i\Omega t}\right)$$

$$\dot{x}(t) = \mathrm{Re}\left(j\Omega \, \bar{x}_0 e^{i\Omega t}\right)$$

$$\ddot{x}(t) = \mathrm{Re}\left(-\Omega^2 \bar{x}_0 e^{i\Omega t}\right)$$

In tutto questo $j = i$

Per sostituzione:

$$m\,\mathrm{Re}\left(-\Omega^2 \bar{x}_0 e^{i\Omega t}\right) + r\,\mathrm{Re}\left(j\Omega \bar{x}_0 e^{i\Omega t}\right) + k\,\mathrm{Re}\left(\bar{x}_0 e^{i\Omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(\bar{F}_0 e^{i\Omega t}\right)$$

L'uguaglianza delle parti reali $\Rightarrow$ uguaglianza delle parti complesse

$\Rightarrow$ possiamo considerare la rotazione completa

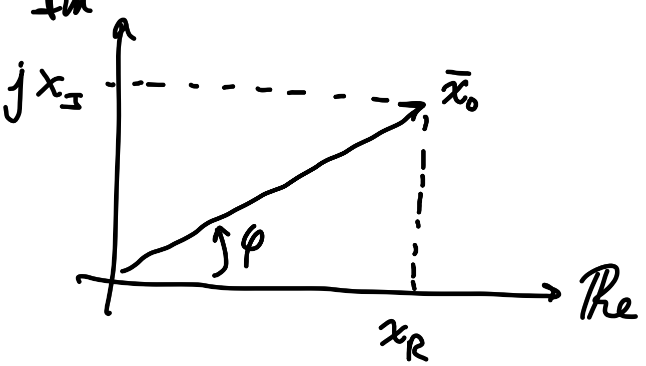
$$-m\Omega^2 \bar{x}_0 e^{i\Omega t} + j r \Omega \bar{x}_0 e^{i\Omega t} + k \bar{x}_0 e^{i\Omega t} = \bar{F}_0 e^{i\Omega t}$$

Abbiamo trovato un legame algebrico attraverso queste combinazioni:

$$\left(-m\Omega^2 + j\Omega r + k\right)\bar{x}_0 e^{i\Omega t} = \bar{F}_0 e^{i\Omega t}$$

$$\tilde{x}_0 = \frac{F_0}{\underbrace{k - m\Omega^2}_{\text{Reali}} + \underbrace{j\Omega r}_{\text{Immaginari}}} \cdot \frac{k - m\Omega^2 - j\Omega r}{\underbrace{k - m\Omega^2 - j\Omega r}_{\text{complesso coniugato}}} = \frac{F_0\left(k - m\Omega^2\right)}{\left(k - m\Omega^2\right)^2 + \left(\Omega r\right)^2} - j\frac{F_0 \Omega r}{\underbrace{\left(k - m\Omega^2\right)^2 + \left(\Omega r\right)^2}_{D}} =$$

$$= x_{Re} + j\,x_i$$



$$|\bar{x}_0| = x_0 = \sqrt{x_R^2 + x_I^2} = \sqrt{\frac{F_0^2 (k - m\Omega^2)^2}{D^2} + \frac{F_0^2 (\Omega r)^2}{D^2}} =$$

$$= F_0 \sqrt{\frac{(k - m\Omega^2)^2 + (\Omega r)^2}{D^2}} = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (r\Omega)^2}} = x_0$$

Passo che non riuscivo a leggere e stato saltato

Ampiezza delle vibrazione

Tangente dell'angolo di fase

$$\tan\varphi = \frac{x_I}{x_R} = -\underbrace{\frac{\cancel{F_0}\Omega r}{\cancel{D}}}_{x_I} \cdot \frac{\cancel{D}}{\underbrace{(k - m\Omega^2)}_{x_R}\cancel{F_0}} = \boxed{-\frac{\Omega r}{k - m\Omega^2} = \tan\varphi}$$

Siamo riusciti a descrivere la soluzione a regime in termini di ampiezza e fase.

Proviamo a ottenere usando le grandezze adimensionali che abbiamo visto.

Rendere (parzialmente) adimensionale $\rightarrow x_0$ e φ

Parametri

$$h = \frac{r}{r_c} = \frac{r}{2m\omega_0} \qquad a = \text{pulsazione adimensionale} = \frac{\Omega}{\omega_0}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(\frac{k}{k} - \frac{m}{k}\Omega^2\right)^2 + \left(\frac{r\Omega}{k}\right)^2}} = \frac{x_{st}}{\sqrt{(1-a^2)^2+(2ha)^2}} \Rightarrow \frac{x_0}{x_{st}} = H(a)$$

Controlla immagine

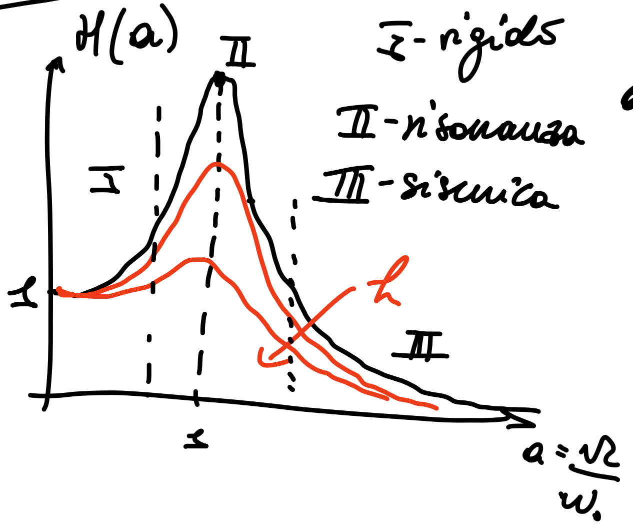
Ampiezza di vibrazione

$$\frac{m}{k}\Omega^2 = \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} = a^2 \quad ; \quad \frac{r\Omega}{k} = \underbrace{\frac{2}{2}\frac{r\Omega}{m\omega_0\omega_0}}_{r_c} = \underbrace{\frac{2r}{r_c}}_{2h}\cdot\underbrace{\frac{\Omega}{\omega_0}}_{a} = 2h\cdot a$$

$$\tan\varphi = -\frac{\Omega r/k}{1-\frac{m}{k}\Omega^2} = \frac{-2ha}{1-a^2} = \tan\varphi$$

$$\frac{x_0}{x_{st}} = H(a) = \frac{1}{\sqrt{(1-a^2)^2+(2ha)^2}}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{-2ha}{1-a^2}$$



I - rigido

II - risonanza

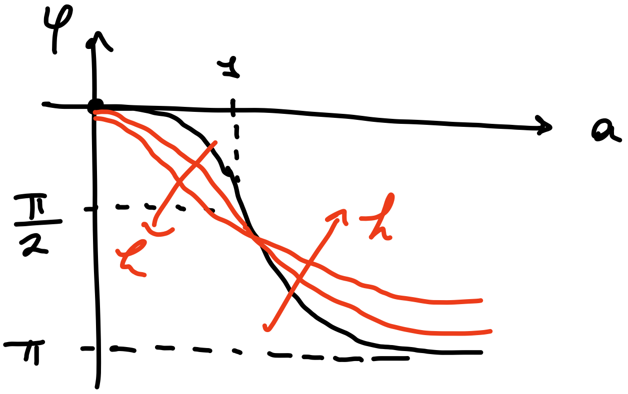
III - sismica

$a=0$ e $\Omega=0$ $H(0)=1$

$a=1$ (risonanza

$\Rightarrow \Omega=\omega_0$ $H(1)=\frac{1}{2h}$

$a\to\infty$, $a>>1$ $H(a)\to 0$



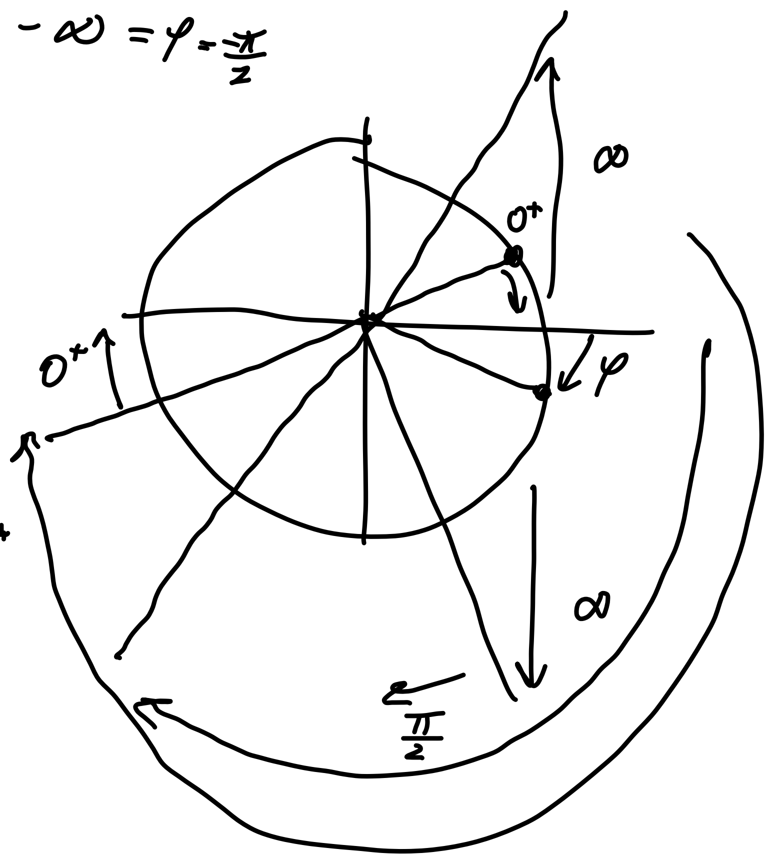
φ avrà sempre i valori negativi perché la vibrazione avrà sempre un ritardo, il massimo della vibrazione sarà sempre in ritardo

$$\lim_{a\to 0} \frac{-2ha}{1-a^2} = 0^-$$

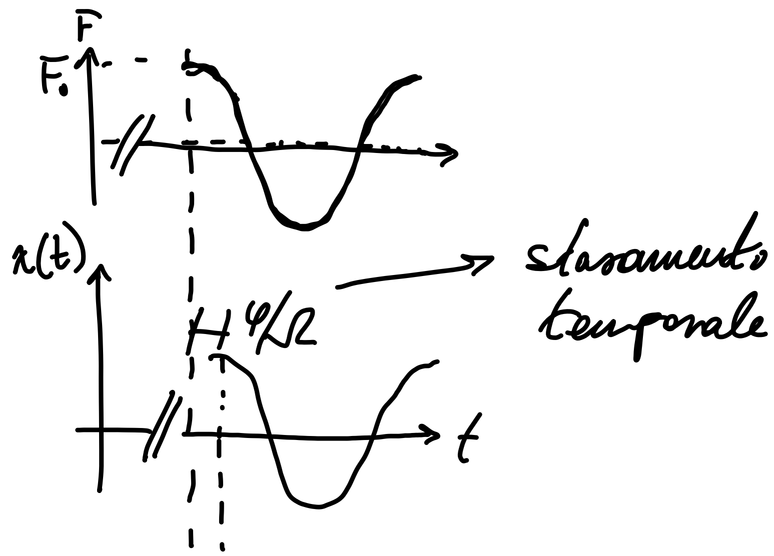
$$\lim_{a\to 1^-} \frac{-2ha}{1-a^2} = \frac{-2h}{0^+} = -\infty = \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{a\to 1^+} \frac{-2ha}{1-a^2} = \frac{-2h}{0^-} = \infty$$

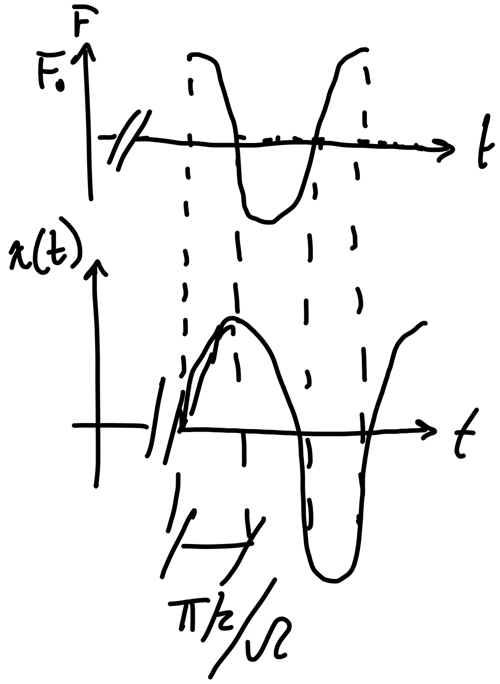
$$\lim_{a\to \infty} \frac{-2ha}{1-a^2} = \frac{-2h\cancel{a}}{-a^{\cancel{2}}} = 0^+$$



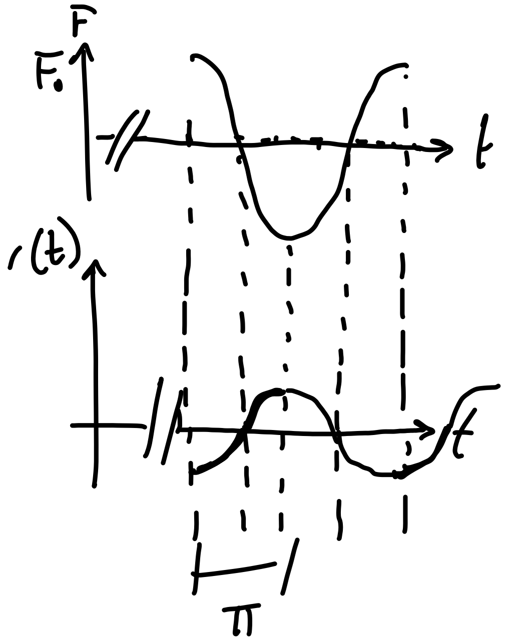
$a \ll 1$



$a = 1$



$a >> 1$



Rappresentazione della vibrazione con vettori rotanti

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t$$

$$F_0 \cos \Omega t - m\ddot{x} - r\dot{x} - kx = 0$$

$$F_0 e^{i\Omega t} - \underbrace{m\left(-\Omega^2 \bar{x}_0 e^{i\Omega t}\right)}_{\bar{F}_i} - \underbrace{r j \Omega \bar{x}_0 e^{i\Omega t}}_{\bar{F}_v} - k \bar{x}_0 e^{i\Omega t} = 0$$

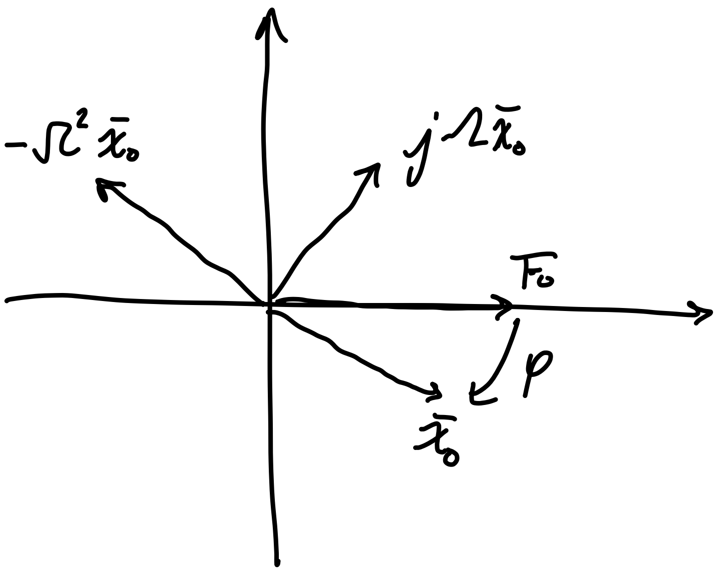
$$\left(\bar{F}_0 + \bar{F}_i + \bar{F}_v + F_e\right) e^{i\Omega t} = 0$$

$\bar{F}_i$ → Forza Inerzia

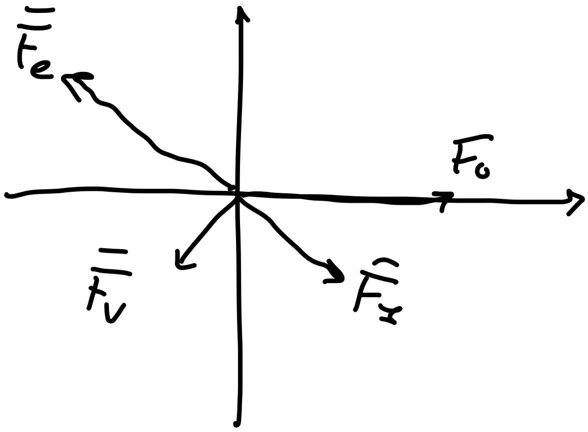
$\bar{F}_v$ → Forza Viscosa

F_e → Forze Elastiche

$a \ll 1$

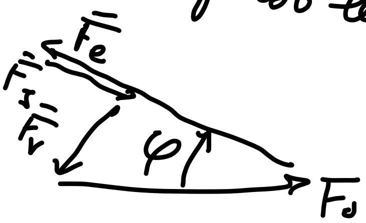


Prima viene il massimo della forza poi il massimo della vibrazione



Ogni forza è opposta al suo vettore cinematico

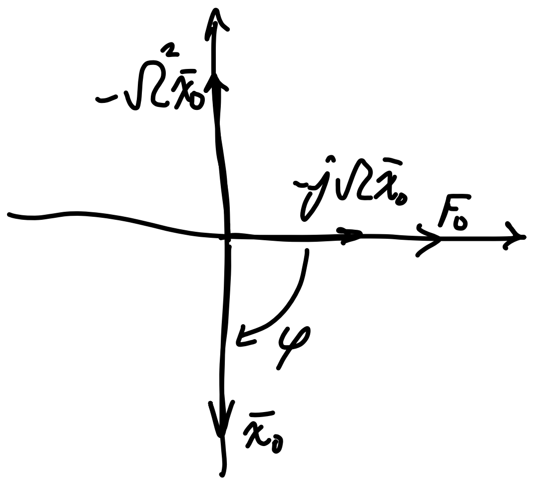
↳ Per come abbiamo preso le forze qui:

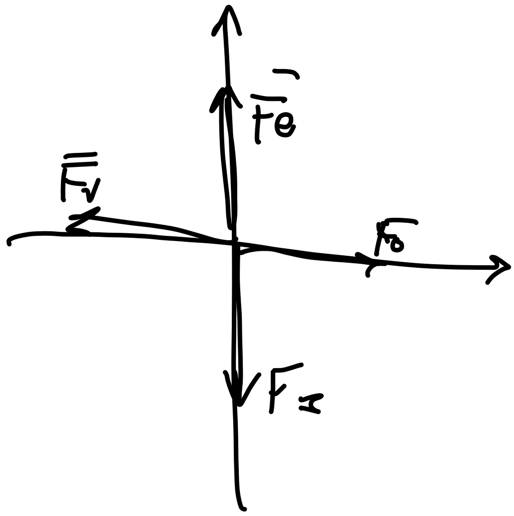


$F_0 \simeq F_e$

<u>$a = 1$</u>

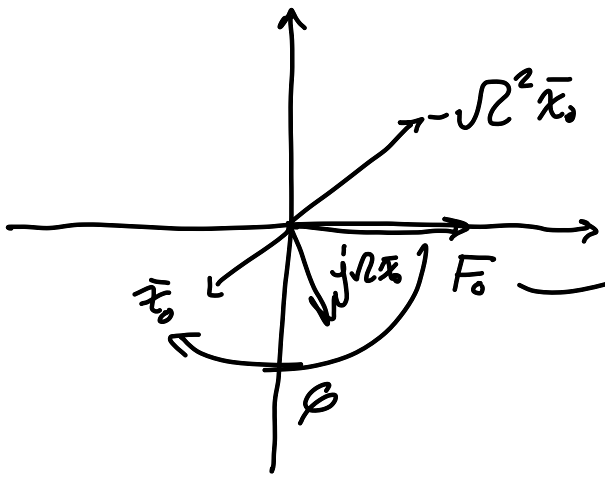
Angoli φ sono quelli che abbiamo visto prima



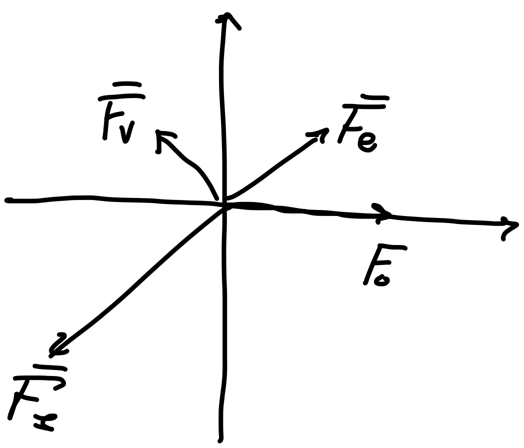


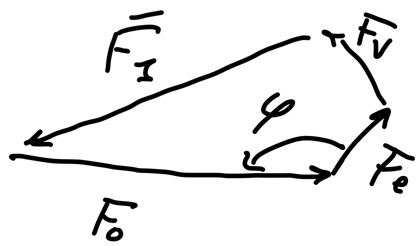
$F_0 \approx \bar{F}_v$ $\qquad F_v = r\Omega\bar{x}_0$

<u>$a \gg 1$</u>



Fc è sempre lo stesso quello che sta ruotando è Ω, la sua pulsazione





Riguardo fine perché non ho seguito ~~bene~~ la fine

$F_0 \approx F_T$

↳ Questo è utile per le sospensioni perchè la l'inversione è uguale e opposta alla forza sollecitante la massa rimane nello stesso posto nello spazio

↳ Troviamo quindi che molte sospensioni lavorano a Ω elevate rispetto a ω_0, cioè a Θ molto grande

↳ Negli altri casi il corpo segue la sollecitazione che non vogliamo.