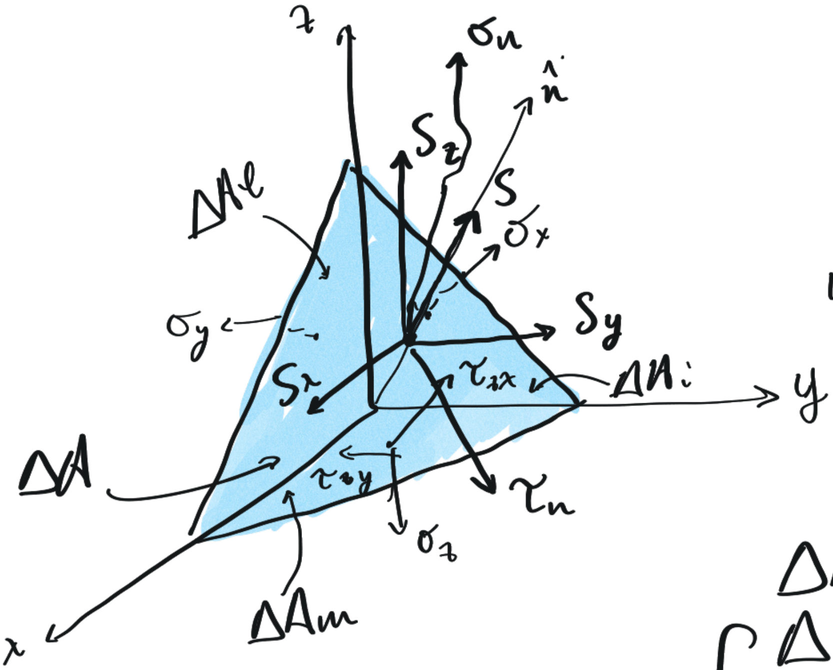
# Lezione 9 - Introduzione al concetto di sforzo

## Stato di sforzo → tensore




$n \cos\alpha = i$ $\theta$ tra x e $\hat{n}$

$n \cos\beta = l$ $\theta$ tra y e $\hat{n}$

$n \cos\gamma = m$ $\theta$ tra z e $\hat{n}$

$\Delta A$

Altre facce / Facce viste da ogni asse

$$\begin{cases} \Delta A_x = \Delta A \cos\alpha = \Delta A i \\ \Delta A_y = \Delta A \cos\beta = \Delta A l \\ \Delta A_z = \Delta A m \end{cases}$$

## Equilibrio

$$\begin{cases} S_x \cdot \cancel{\Delta A} = \sigma_x \cancel{\Delta A} i + \tau_{yx} \cdot \cancel{\Delta A} l + \tau_{zx} \cdot \cancel{\Delta A} m \\ S_y \cdot \cancel{\Delta A} = \tau_{xy} \cdot \cancel{\Delta A} i + \sigma_y \cancel{\Delta A} l + \tau_{zy} \cdot \cancel{\Delta A} m \\ S_z \cancel{\Delta A} = \tau_{xz} \cancel{\Delta A} i + \tau_{yz} \cancel{\Delta A} l + \sigma_z \cdot \cancel{\Delta A} m \end{cases}$$

$$= \begin{cases} S_x = \sigma_x i + \tau_{yx} l + \tau_{zx} \cdot m \\ S_y = \tau_{xy} \cdot i + \sigma_y l + \tau_{zy} m \\ S_z = \tau_{xz} \cdot i + \tau_{yz} l + \sigma_z m \end{cases}$$

$$\sigma_n = S_x \cdot i + S_y \cdot l + S_z \cdot m$$

$$\tau_n = \sqrt{|S|^2 - \sigma_n^2}$$

S uno sforzo comunque

$\sigma_n$ la componente normale

Piani che hanno sforzo normali sono detti sforzi principali e gli sforzi sono detti sforzi principali

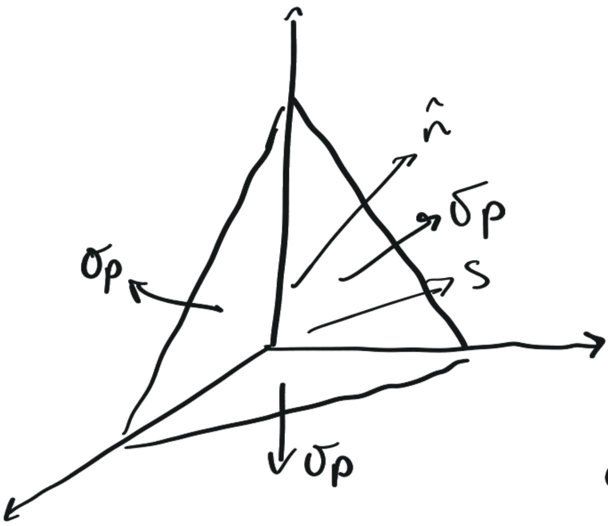
Sforzi principali: $\boxed{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}$

$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

Di solito massimo

Di solito minimo

tra i tre




$$S_x = \sigma_p \cdot i$$
$$S_y = \sigma_p \cdot l$$
$$S_z = \sigma_p \cdot m$$

$$\sigma_p \cdot i = \sigma_x \cdot i + \tau_{yx} \cdot l + \tau_{zx} \cdot m$$

$$\sigma_p \cdot l = \tau_{xy} \cdot i + \sigma_y \cdot l + \tau_{zy} \cdot m$$

$$\sigma_p \cdot m = \tau_{xy} \cdot i + \tau_{yz} \cdot l + \sigma_z \cdot m$$

$\sigma_p$ sono gli sforzi tangenziale incognite

$$\left.\begin{aligned} &(\sigma_x - \sigma_p)\, i + \tau_{yx} \cdot l + \tau_{zx} \cdot m = 0 \\ &\tau_{xy} \cdot i + (\sigma_y - \sigma_p) \cdot l + \tau_{zy} \cdot m = 0 \\ &\tau_{xz} \cdot i + \tau_{yz} \cdot l + (\sigma_z - \sigma_p) \cdot m = 0 \end{aligned}\right\}\ \text{Sistema omogeneo}$$

Incognite: $\underbrace{\sigma_p}_{\text{Sforzo principale}}, \underbrace{i, l, m}_{\text{Angoli di rotazione}}$

$$(\sigma - \sigma_p I) \cdot \hat{n} = 0$$ annulliamo $\sigma - \sigma_p I$

L'unica soluzione è se $\hat{n} = 0$, a meno che

$$\det \begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_p) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_p) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_p) \end{vmatrix} = 0$$

$$\sigma_p^3 - I_1 \sigma_p^2 + I_2 \sigma_p + I_3 = 0$$

$I_1, I_2, I_3$ invarianti

$$\boxed{I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}$$

La somma è invariante per ogni riferimento

Trovando gli autovalori

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_z \sigma_y - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{yz}^2$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ autovalori del sistema

Guardando $\sigma_1$

$$\sigma_p = \sigma_1 \quad \begin{cases} \alpha_1 \\ \beta_1 \rightarrow \text{coseni direttori di 1 troviamo } i_1, l_1, m_1 \\ \gamma_1 \end{cases}$$

Poi per gli altri due troviamo $i_2, i_3, l_2, l_3, m_2, m_3$

<u>Esempio</u>

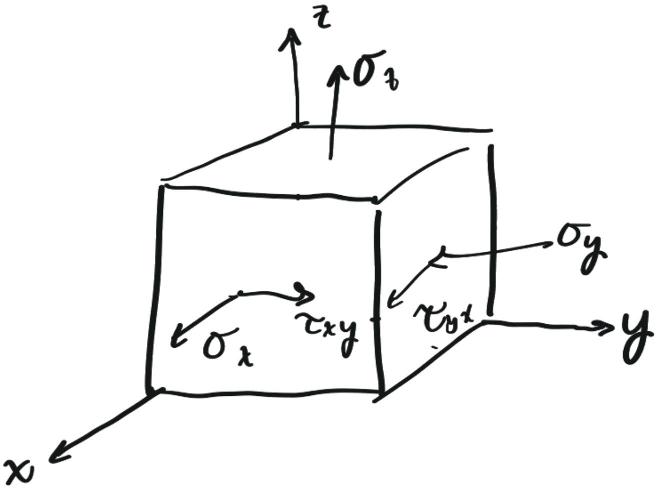
$\sigma_x = 80\,MPa$

$\sigma_y = -40\,MPa$

$\sigma_z = 20\,MPa$

$\tau_{xy} = 80\,MPa$

$\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$




$\sigma_z$ già sforzo principale

$$\det \begin{vmatrix} 80-\sigma_p & 80 & 0 \\ 80 & (-40-\sigma_p) & 0 \\ 0 & 0 & (20-\sigma_p) \end{vmatrix} = 0$$

$\sigma_p$ è come $\lambda$, sono gli autovalori

$$(20-\sigma_p)\left[(80-\sigma_p)(-40-\sigma_p) - 6400\right] = 0$$

$$\sigma_p = \sigma_z = 20\,MPa = \sigma_2$$

$\sigma_p^2 - 40\sigma_p - 9600 = 0$

$\sigma_1 = 120\,MPa$

$\sigma_3 = -80\,MPa$

Per convenzione:

$\boxed{\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3}$

Consideriamo $\sigma_1$

$$\begin{vmatrix} 80-120 & 80 & 0 \\ 80 & -40-120 & 0 \\ 0 & 0 & 120-120 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ l_1 \\ m_1 \end{bmatrix} = 0$$

$i_1(80-120) + l_1(80) = 0$

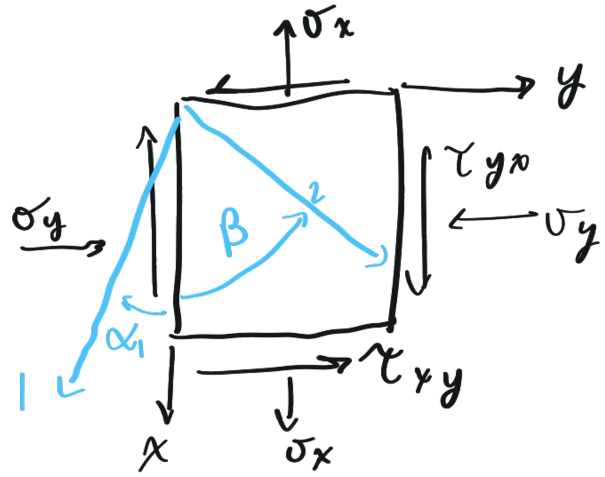
$i_1 80 + l_1(-40-120) = 0$

$(20 \cdot 120)m_1 = 0$

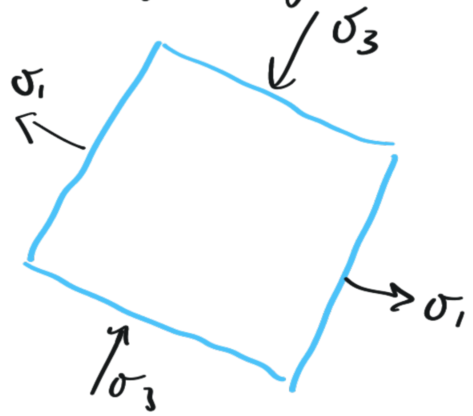
$i_1 = \pm 0{,}894 \rightarrow i_1 = \cos\alpha_1 \rightarrow \alpha_1 = 26°34'$

$l_1 = \pm 0{,}44 \rightarrow l_1 = \cos\beta_1 \rightarrow \beta_1 = 63°26'$

$m_1 = 0 \rightarrow \cos\gamma_1 = 0 \rightarrow \gamma_1 = 90°$




Riferimento principale tale che ogni $\tau = 0$



Il riferimento principale è dove rispetto a $\sigma_n$ tutte le $\tau$ si annullano.

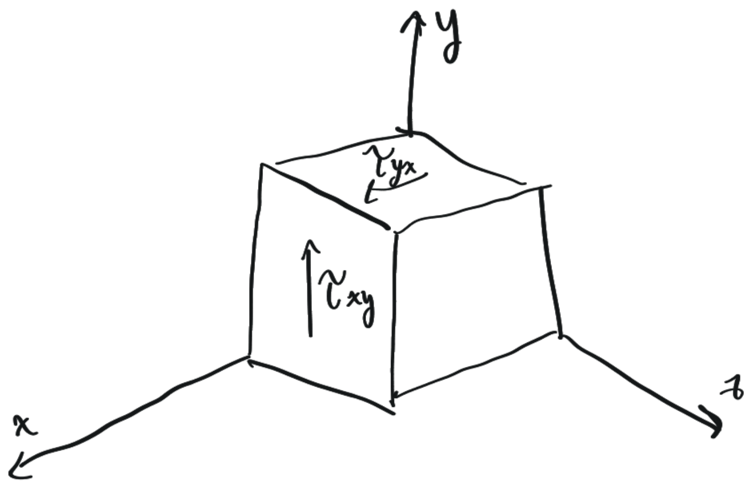
Consideriamo $\sigma_p = \sigma_3$ :

$i_3(80+80) + l_3 \cdot 80 = 0$ $\quad i_3 = \pm 0{,}447 \quad \alpha_3 = 63{,}26'$

$i_3(80) + l_3(-40+80) = 0$ $\quad l_3 = \pm 0{,}894 \quad \beta_3 = 26{,}34'$

$(20-120)m_3 = 0 \Rightarrow m_3 = 0 \Rightarrow \gamma_3 = 90°$

1/60 di un grado




$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 64\,MPa$

$\alpha = 45°$ $\quad x-n \quad i = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\beta = 45°$ $\quad y-n \quad l = \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\gamma = 90°$ $\quad z-n$

$\sigma_n \quad \tau_n$ ?

$$\begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$S_x = \sigma_x i + \tau_{yx} l + \tau_{zx} m$

$S_y = \tau_{xy} i + \sigma_y l + \tau_{zy} \cdot m$

$S_z = \tau_{xz} \cdot i + \tau_{yz} \cdot l + \sigma_z \cdot m = 0$

$S_x = \frac{64}{\sqrt{2}}$

$S_y = \frac{64}{\sqrt{2}}$

Appunti Dopo:

Vogliamo trovare la direzione $\hat{n}$ tale che $\tau_n = 0$

Trovando gli sforzi primari e gli angoli di questi sforzi primari.

Troviamo gli sforzi primari con il tensore, reimpostiamo gli sforzi per trovare i, l, m per ogni sforzo primario e perciò ogni angolo associato.

Trovando questi angoli per gli sforzi che annullano gli sforzi tangenziali.