MANI - 01

Esercitazioni/Laboratorio

BL27.1.3 → L - Piacentini

L13 → Noi

8.30 - 10

1430 - 17

2 Parti -

Basi di ↳ Analisi Numerica → Scientific Computing with Matlab & Octave

↳ Quarteroni, Saleri, Gervasio, SPRINGER

Più difficile → → Modellistica Numerica per problemi differenziali

↳ Quarteroni Springer

Parte molto piccola del libro

Prova d'Itinere → 13 Nov

↳ Su prima parte, indipendente dalla seconda parte

↳ Mix multipla e Aperte
↳ Teoria e Matlab

24/01 — Prova e Appello

12/02

Orale opzionale

simona.perotto@polimi.it

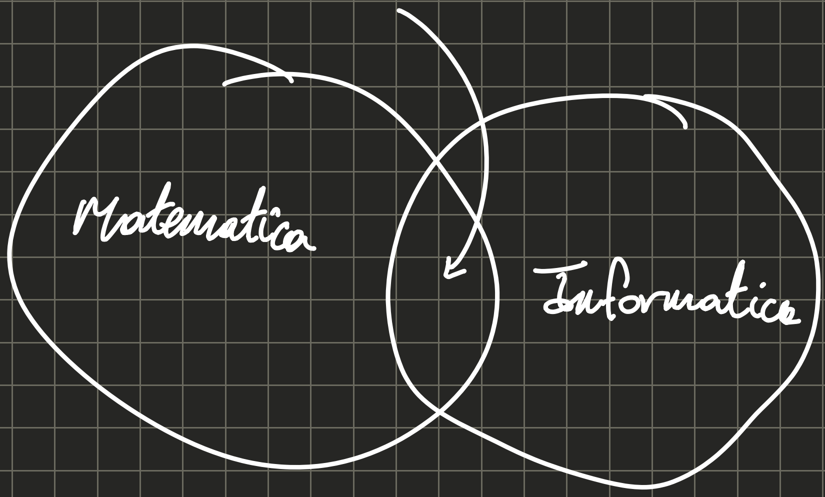
Ufficio 4512

10 Dic → Possibile incontro con aziende nel campo

Punto del corso (1° parte)

↳ Approssimazione di problemi matematici

Analisi Numerica / Calcolo Numerico

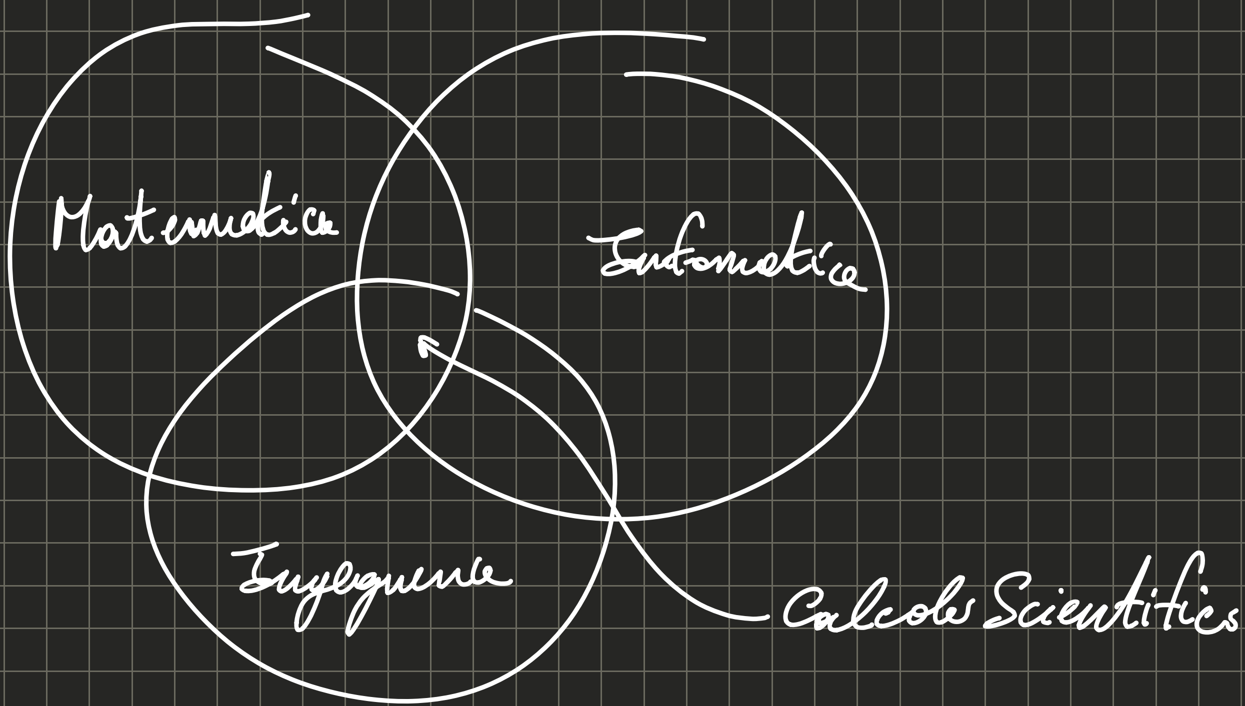


Risolviamo in senso approssimato con i computer in modo pragmatico

Calcolo Scientifico → (2ª parte)

↳ Metodi di approssimazione per simulare problemi veri più complessi

↳ Creare realtà virtuale per capire meglio cosa succede per ottimizzare i risultati



MOX → Conversazione online

↳ Dipartimento del Polimi

↳ Di modellistica per calcolo scientifico

Calcolo Scientifico ⊂ Analisi Numerica
(2ª parte) (1ª parte)

$\boxed{\text{Problema Fisica}}$ (Quello che voglio replicare)

↳ Trasformare in modello matematico

errore di modello (e_m)

↳ Soluzione : x_F

$\boxed{\text{Modello Matematico}}$

Problema Fisico : Corrente → $\oint_C \vec{B} ds = I$

Soluzione del modello : x

↳ $e_M = x_F - x$

↳ Primo problema

↳ Dipende dalla complicatezza di B

↳ Ci sono degli integrali non risolvibili

$\boxed{\text{PC}}$

$\tilde{x}$ → approssimazione calcolata

Gap $e_c = x - \tilde{x}$

↓

Errore computazionale

(

↳ Questo dipende da diverse ragioni:

Floating point error (e_r)

Formula di quadratura

Integrale è somma di aree

Problema Numerico

$$I \doteq \sum_j B(x_j)\, \partial_j$$

errore di troncamento

$e_T = x - x_N$

Rounding

$e_r = x_N - \tilde{x}$

Ci sommiamo errore perché il computer può rappresentare quantità finita di numeri non tutti i numeri reali

$$\underbrace{\text{Problema Fisico}}_{\text{Calcolo Scientifico}} \longrightarrow \underbrace{\text{Modello}}_{\text{Analisi Numerica}}$$

Errore computazionale: $e_c = e_t + e_r$

Errore → Molto importante perché approssimiamo

Tipi di errore:

↳ Errore assoluto: $|x-\tilde{x}|$

↳ Errore relativo $\dfrac{|x-\tilde{x}|}{|x|}$ per $x \neq 0$

↳ Meglio perché rispetto al valore di riferimento

Esempi di importanza dell'errore relativo:

$x = 100$ $\quad$ $x = 0{,}2$

$\tilde{x} = 100{,}1$ $\quad$ $\tilde{x} = 0{,}1$

$|x-\tilde{x}| = 0{,}1 \xleftrightarrow{\text{Uguale}} |x-\tilde{x}| = 0{,}1$

$\dfrac{|x-\tilde{x}|}{|x|} = 10^{-3} = 0{,}1\%$ $\xleftrightarrow[\text{diverso}]{\text{Molto}}$ $\dfrac{|x-\tilde{x}|}{|x|} = 0{,}5 = 50\%$

Approssimazione di sistemi di equazioni lineari

Sistemi di equazioni lineari

Forma
$\begin{cases} Ax = b \\ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \end{cases}$

Matrice coefficienti

$a_{ij} \rightarrow$ elemento in A

Compatta $\begin{cases} b \in \mathbb{R}^n \leftarrow \text{Vettore termini noti} \quad b_i \\ x \in \mathbb{R}^n \quad x_j \rightarrow \text{quello che vogliamo determinare} \end{cases}$

Forma espansa

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

L'esistenza e unicità di x esiste se A

$\exists!\, x$ se e solo se A non singolare

$\Longleftrightarrow$ $\hookrightarrow \det A \neq 0$

Una soluzione di elementi finiti porta a risolvere un sistema di equazioni lineari.

Regola di Cramer

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det A}$$ $\rightarrow$ A con la i-esima colonna rimpiazzata da b

i per $1, \dots, n$

Espansione di Laplace $\rightarrow$ Per trovare determinante

$$\det A = \begin{cases} a_{11} & n=1 \\ \sum_{j}^{n} a_{ij}\, \Delta_{ij} & n>1 \end{cases}$$

$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$

A_{ij}: A con riga i e colonna j tolta

Ricorsivo

↳ Costo $O(n!)$

Per certe matrice e possibile avere un costo $O(n)$

I sistemi reali hanno $n > 10^6$ ← Incognite

Esempio $O(n!)$

$n = 15$	$n = 20$	$n = 25$
$O(\text{sec})$	$O(\text{giorni})$	$O(\text{anni})$

Dati i costi, accettiamo dell'errore e andiamo al calcolo numerico.

Famiglie di Metodi:

Analisi Numerico → Metodi Diretti

Analisi Numerico → Iterativi

↓ ci da 2 metodi

Migliore è un bilancio tra accuratezza e velocità

↳ La scelta tra diretto e iterativo dipende dal problemi

↳ Per alcuni problemi malcondizionati possiamo usare solo gl'iterativi.

Metodi Diretti

$Ax=b$ ordine n con A non singolare

Fattorizzazione LU di A

$A = LU$ Scriviamo A con fattore di L e U, loro stesse $\in \mathbb{R}^{n \times n}$

Ha strutture specifiche:

L è triangolare inferiore $\begin{bmatrix} x & & & 0 \\ \vdots & x & & \\ \vdots & & \ddots & \\ x & \cdots & \cdots & x \end{bmatrix}$

U è triangolare superiore $\begin{bmatrix} x & \cdots & \cdots & x \\ & x & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & x \end{bmatrix}$

Matrici sparse: quando hanno molte entrate nulle

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ha n^2 entrate

È sparsa se ha $O(n)$ entrate diverse da 0

La sparsità di una matrice è migliore perchè riduce i calcoli.

Commandi utili matlab: sparse e spy

Matrice sparse: matrici diagonali

Perchè LU è utile:

$Ax = b$

$L\underbrace{Ux}_{y} = b$ Possiamo ricondurre a due problemi $\Rightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$

Termine noto

Diventato da questo

Prima $Ly = b$
Poi $Ux = y$

La differenza è che L e U sono sparse, che ci sono algoritmi più efficienti da utilizzare

Come risolvo $Ly = b$

Approccio Perotto:
Risoluzione su 3x3
↳ Estrazione di Algoritmo

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$l_{11} y_1 = b_1 \rightarrow y_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$$

$$l_{21} y_1 + l_{22} y_2 = b_2$$

$$y_2 = \frac{1}{l_{22}} \left[b_2 - l_{21} y_1 \right]$$

$$l_{31} y_1 + l_{32} y_2 + l_{33} y_3 = b_3$$

$$y_3 = \frac{1}{l_{33}} \left[b_3 - l_{31} y_1 - l_{32} y_2 \right]$$

$\det(A) \neq 0$

$A = LU$

$\Rightarrow \det(A) = \det(LU) =$

$= \det(L) \det(U)$

$= [l_{11} \dots l_{nn}][u_{11} \dots u_{nn}]$

$\neq 0$

det matrice triangolare è il prodotto della diagonale

Procedi d'alto per trovare ogni y_i $\Rightarrow l_{ii} \neq 0$ e $u_{ii} \neq 0$

Tutto è preso che ci siano date LU

→ Algoritmo Generale: Algoritmo delle sostituzioni in avanti

↳ Per matrice $n \times n$

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= \frac{b_1}{l_{11}} \rightarrow \text{Indipendente} \\ y_i &= \frac{1}{l_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} \, y_j \right] \end{aligned}}$$ per $i = 2, \ldots, n$

↳ Algoritmo delle Sostituzioni in Avanti

↳ Per risoluzione di sistemi con matrici triangolari inferiori

Società cooperative

- → Scopo mutualistico per beneficio comune
- → Almeno 9 soci
- → Non necessariamente per profitto.

↳ Società cooperative a responsabilità limitata

↳ Società cooperative a responsabilità illimitata → Può coinvolgere patrimonio personale