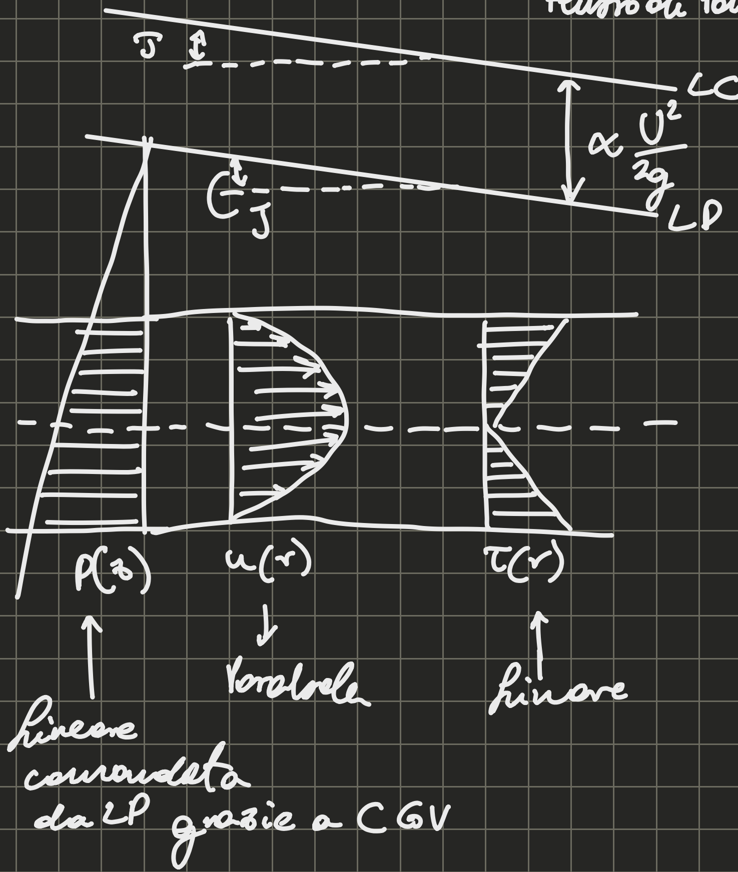
Lezione 8 -

Flusso di Poiseuille



Flusso lineare quindi non varia. è parallela a LP

$$u(r) = \frac{\gamma J}{4\mu}\left(R^2 - r^2\right)$$

velocità media

$$U = \frac{u(r=0)}{2}$$

$$\alpha = \frac{\int_A u^3 \, dA}{U^3 A} = 2$$

Coefficiente di ragguaglio.

In questo caso

J - pendenza di LP

↳ cadente piezometrica

anche cadente energetica

perché correnti lineari.

Come abbiamo fatto per α, possiamo ragguagliare altre robe:

M - spinta dinamica / flusso di quantità di moto

$$= \int_A \rho \, \underline{v} \, \underline{v} \cdot \underline{n} \, dA$$

Visto che flusso è semplice e $\underline{v} = u$

Possiamo scrivere

$$M_x = \int_A \rho u^2 \, dA = \rho \frac{\int_A u^2 \, dA}{U^2 A} \cdot U^2 A = \rho \underbrace{\frac{\int_A u^2 \, dA}{U^2 A}}_{=\beta} U Q$$

$= \beta$ coefficiente di ragguaglio della spinta dinamica / flusso di quantità di moto

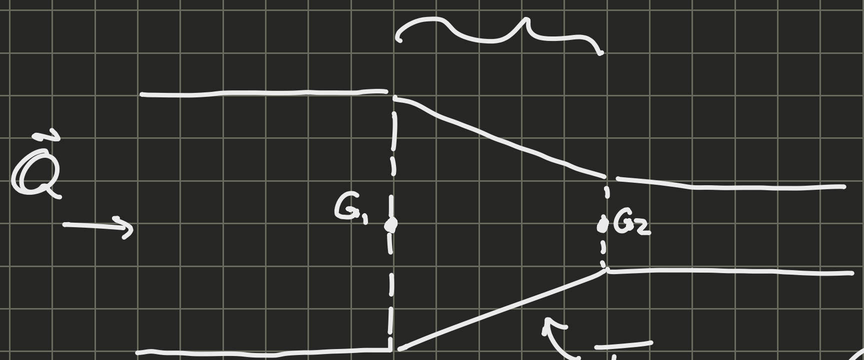
$$= \rho Q U \beta = \rho U^2 A \beta$$

$$=\frac{1}{2}\rho\frac{Q^2}{A}\beta$$

È modo più facile da scrivere e possiamo scriverlo in vari modi.

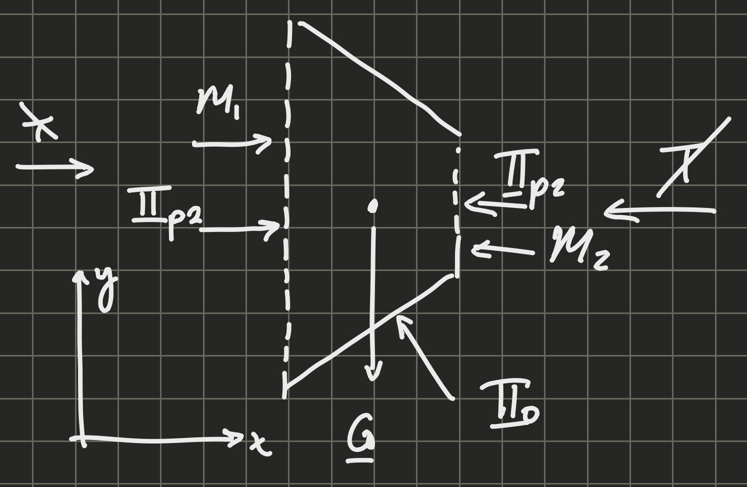
Per questo flusso $\beta = \dfrac{\int_A U^2 A}{U^2 A} = \dfrac{4}{3}$

Volume di controllo



Troviamo la spinta su questa parte, così possiamo misurare l'ancoraggio.

Volume di controllo con forze:



Tutte Azioni superficiali

$$\underline{G} + \underline{\Pi} + \underline{I} + \underline{M} = 0$$

$$\underline{G} + \underline{\Pi}_p + \underline{I} + \underline{I} + \underline{M} = 0$$

Azioni superficiali da pressione

" da viscosità

Π_0 sono tutte le possibili sollecitazioni sulla superficie, non specifichiamo se sia pressione o viscosità, mettiamo tutto insieme solo in questo termine

$\frac{\partial u}{\partial x}$ esiste, ma le T di solito sono piccole quindi non le mettiamo

M_3 per la stessa ragione di ieri non l'abbiamo vista

$G_y = -\gamma W$

$S = -\Pi_0 = G + \Pi_{p1} + \Pi_{p2} + M_1 + M_2$ (all underlined)

$M_{1x} = \beta \rho Q U_1$

$M_{2x} = -\beta \rho Q U_2$

$\Pi_{pG1x} = p_{G1} A_1$

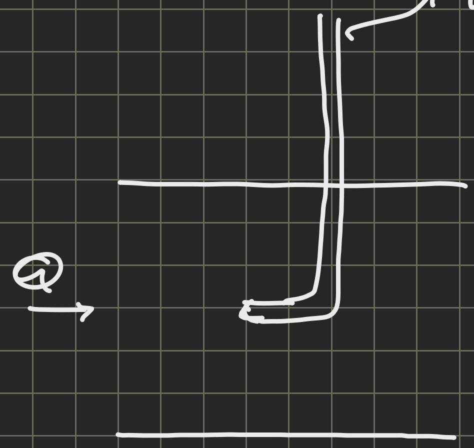
$\Pi_{pG2x} = -p_{G2} A_2$

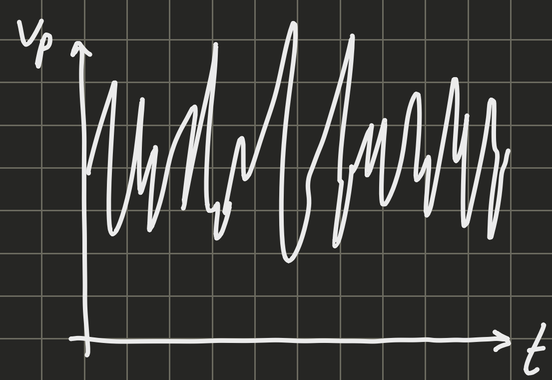
Da qui è tutto uguale alla statica.

Questo approccio può fare su ogni tipo volume di controllo.

<u>Turbolenza</u>

Tubo di Pitot → Piccolo quindi vale anche per fluidi non perfetti





Si vede una costante, ma non sempre, ci possono esser delle oscillazioni grandi

c'è un qualcos'altro che è la turbolenza.

La striscia è circa costante ma ci le derivazioni le vengono non costante

Che lo modellizziamo?

- Modellizziamo tutto a scala temporale piccola
- Vogliamo sapere mediamente l'andamento

} 2 approcci estremi

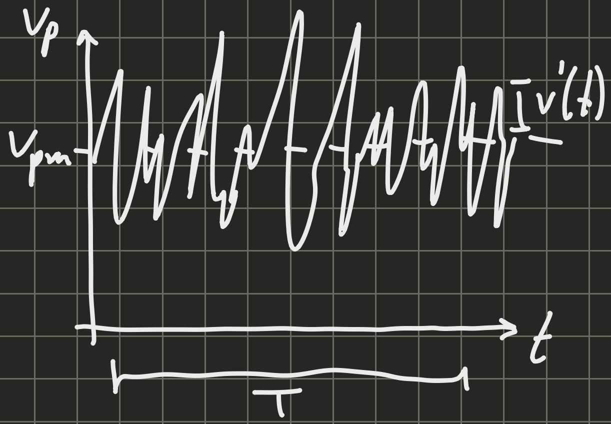
→ Moto turbolento medio.

→ Sono medie temporale come l'Vdo prima

→ Possiamo fare delle decomposizioni alla Reynolds

e.g. $v_p = v_{pm} + v'(t)$

v_{pm} ↑ Valor medio + ↑ $v'(t)$ Fluttuazione



$$v_{pm} = \frac{1}{T}\int_T v_p\,dt$$

T periodo temporale arbitrario grande per fare media, equivalente temporale del volume W.

$$v'_{pm} = 0 \text{ perché } v'_{pm} = \frac{1}{T}\int_T \underbrace{(v_p - v_{pm})}_{v'(t)} = \frac{1}{T}\int_T v_p\,dt - \frac{1}{T}\int_T v_{pm}\,dt =$$

$$= v_{pm} - v_{pm} = 0$$

Per studiare il moto turbolento medio ci importa solo v_{pm} non v'_p, ci importa modellisticamente di studiare solo la media temporale di Navier-Stokes

Per passare da equazioni all'istantaneo a equazioni nel tempo medio, dobbiamo integrare nel tempo invece nello spazio, è equivalente del ricavo globale ma nel tempo.

Integriamo Navier Stokes nel tempo:

$$\begin{cases} div(\underline{v})=0 \\ \rho\left(\underline{f}-\frac{dv}{dt}\right) = grad(p) - \mu \cdot \Delta \underline{v} \end{cases}$$

← Valgono nell'istantaneo, ma non è garantito che funzioni valgano nel tempo quindi integriamo per mediare le equazioni nel tempo.

Scriviamo in 2D per ridurre i conti

$\frac{1}{T}\int_T div(\underline{v})=0$ → media temporale

$$\frac{1}{T}\int_T\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dt=0$$

$$\frac{1}{T}\int_T\Big[\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(u_m+u')+\frac{\partial}{\partial y}(v_m+v')}_{\text{Decomposizione di Reynolds come abbiamo visto prima}}\Big] =$$

$$=\frac{1}{T}\int_T\frac{\partial u_m}{\partial x}dt+\frac{1}{T}\int_T\frac{\partial u'}{\partial x}dt+\frac{1}{T}\int_T\frac{\partial v_m}{\partial y}dt+\frac{1}{T}\int_T\frac{\partial v'}{\partial y}dt=$$

Regola di Liebnitz (permette scambio di derivata e integrale se valgono su variabili diverse (in questo caso spazio

$$=\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{T}\int u_m\,dt+\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\frac{1}{T}\int_T u'dt}_{=0}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{T}\int v_m\,dt+\frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\frac{1}{T}\int_T v'dt}_{=0}$$

perché valori medi di fluttuazioni

e tempo)

↳ per come funziona la decomposizione di Reynolds.

$$= \frac{\partial u_m}{\partial x} + \frac{\partial v_m}{\partial y}$$

Media nell'integrale della media è la media stessa.

velocità media

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{div}(\underline{v}_m) = 0 \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Integriamo la seconda equazione, come nella integrazione globale $\underline{a}$ è il termine che accoppia la roba:

$$\rho\left(\underbrace{\underline{f}_m + \underline{f}'}_{} - \frac{d}{dt}\left(\underline{v}_m + \underline{v}'\right)\right) = \mathrm{grad}\left(p_m + p'\right) - \mu\,\Delta\left(\underline{v}_m + \underline{v}'\right)$$

quando $\underline{f} = g$
$\underline{f}' = g$, ma questo è il caso generale

Se varia v varia anche p

$$\frac{1}{T}\int_T \left(\underline{f}_m + \underline{f}'\right) dt = \underbrace{\frac{1}{T}\int \underline{f}_m\, dt}_{\underline{f}_m} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{T}\int \underline{f}'\, dt}}_{} \xrightarrow{} 0 = \underline{f}_m$$

come sempre integrale di fluttuazioni è 0.

$$\frac{1}{T}\int_T \nabla\left(p_m + p'\right) dt = \nabla \frac{1}{T}\int \left(p_m + p'\right) dt = \mathrm{grad}\left(p_m\right)$$

$$\frac{1}{T}\int_T \underbrace{\mu}_{}\,\Delta\left(\underline{v}_m + \underline{v}'\right) dt = \Delta\,\frac{1}{T}\int \mu\,\left(\underline{v}_m + \underline{v}'\right) = \mu\,\Delta\,\underline{v}_m$$

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \right.$$

Facciamo in una direzione, l'approccio è lo stesso nelle altre dimensioni

$$= \frac{\partial}{\partial t}(u_m+u') + (u_m+u')\frac{\partial}{\partial x}(u_m+u') + (v_m+v')\frac{\partial}{\partial y}(u_m+u') =$$

Gioco che abbiamo fatto con $\frac{\partial(AB)}{\partial x} = \dots$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(u_m+u') + \frac{\partial}{\partial x}(u_m+u')^2 - \cancel{(u_m+u')\frac{\partial}{\partial x}(u_m+u')} + \frac{\partial}{\partial y}\left[(u_m+u')(v_m+v')\right] - \cancel{\left[(u_m+u')\frac{\partial}{\partial y}(v_m+v')\right]}$$

$$(u_m+u')\left[\underbrace{div(\underline{v_m})}_{=0}\right] = 0$$

Di nuovo non si tolgono perché se stessi sono nulli ma perché la loro somma è nulla

$$= \frac{\partial}{\partial t}(u_m+u') + \frac{\partial}{\partial x}(u_m^2 + 2u_m u' + u'^2) + \frac{\partial}{\partial y}(u_m v_m + u'v' + u_m v' + u' v_m)$$

Abbiamo solo sviluppato $\frac{\partial u}{\partial t}$, dobbiamo creare la media temporale

$$= \frac{1}{T}\int_T \left[\frac{\partial}{\partial t}(u_m+u') + \frac{\partial}{\partial x}(u_m^2 + 2u_m u' + u'^2) + \frac{\partial}{\partial y}(u_m v_m + u'v' + u_m v' + u' v_m)\right] dt$$

Leibniz applicato anche se integrale e derivata nel tempo

$$\hookrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\cdot\underbrace{\frac{1}{T}\int_T (u_m+u')\,dt}_{u_m} = \frac{\partial u_m}{\partial t}$$

$\rightarrow$ lo facciamo per mantenere la possibilità di fare la media su periodo T variati. Ci permette di fare un'analisi più precisa di quello che stiamo facendo.

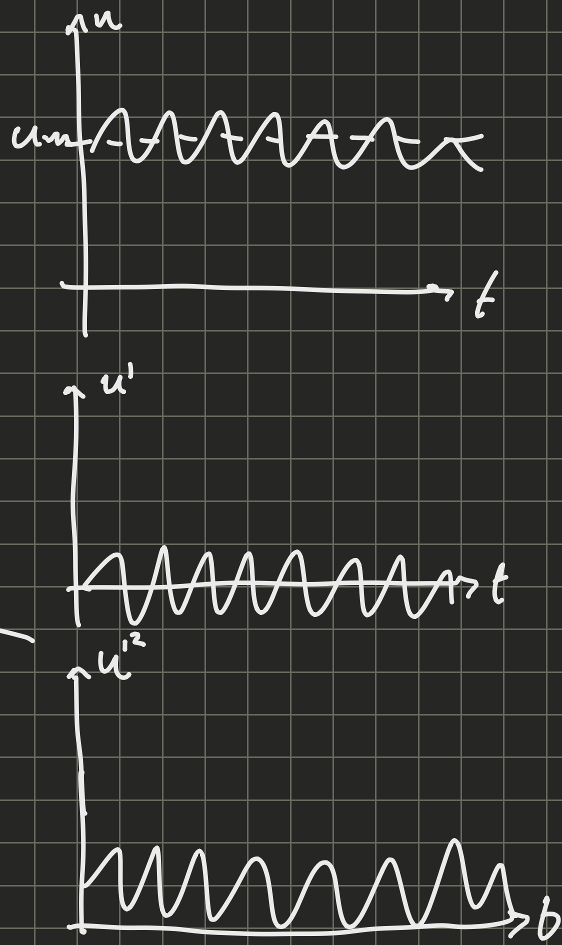
$$\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{1}{T}\int_T u_m^2\,dt = \frac{\partial}{\partial x}u_m^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{T}\int_T 2u_m u' \, dt = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{1}{T}\int_T u'^2 \, dt}_{} = \frac{\partial}{\partial x} u'^2_m$$

Non può esser 0 è perché la sua media non è nulla grazie a quadrato

Variante di u (statistica



$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{T}\int_T u_m v_m \, dt = \frac{\partial}{\partial y}(u_m v_m)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{T}\int_T u' v_m \, dt = \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{T}\int_T v' u_m \, dt = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{T}\int_T u'v' \, dt = \frac{\partial}{\partial y}(u'\cdot v')_m$$

$$= \frac{\partial u_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}u_m^2 + \frac{\partial}{\partial x}u'^2_m + \frac{\partial}{\partial y}(u_m v_m) + \frac{\partial}{\partial y}(u'v')_m$$

Media delle accelerazione nel tempo

$$= \frac{\partial u_m}{\partial t} + u_m\frac{\partial u_m}{\partial x} + u_m \cancel{\frac{\partial u_m}{\partial x}} + \frac{\partial}{\partial x}u'^2_m + u_m\frac{\partial v_m}{\partial y} + v_m\frac{\partial u_m}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}(u'v')_m$$

Equazione di Continuità

$$\rho\left(f_x - \frac{\partial u_m}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial p}{\partial x} - \mu\Delta u$$

$\Big|\ \frac{1}{T}\int_T$ media temporale

$$\rho\left(f_{x_m} - \frac{\partial u_m}{\partial t} - u_m \frac{\partial u_m}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} u'^2_m - v_m \frac{\partial u_m}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}(u'v')_m\right) = \frac{\partial p_m}{\partial x} - \mu \Delta v_m$$

I termini lineari hanno corrispondenza nel tempo e lo rimangono.

I termini non lineari generano termini aggiuntivi.

Cambiando il Te la caratteristica della turbolenza è possibile che varii un po' la media.

NS
$$\begin{cases} \operatorname{div}(\underline{v}) = 0 \\ \rho\left(\underline{f} - \frac{d\underline{v}}{dt}\right) = \operatorname{grad} p - \mu \Delta \underline{v} \end{cases}$$

Reynolds (R)

$\underline{F} = m\underline{a}$

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\underline{v}_m) = 0 \\ \rho\left(\underline{f}_m - \frac{d\underline{v}_m}{dt}\right) = \underbrace{\operatorname{grad} p_m - \mu \Delta \underline{v}_m + \operatorname{div} \underline{\Phi}_R}_{\operatorname{div} \underline{\Phi}} \end{cases}$$

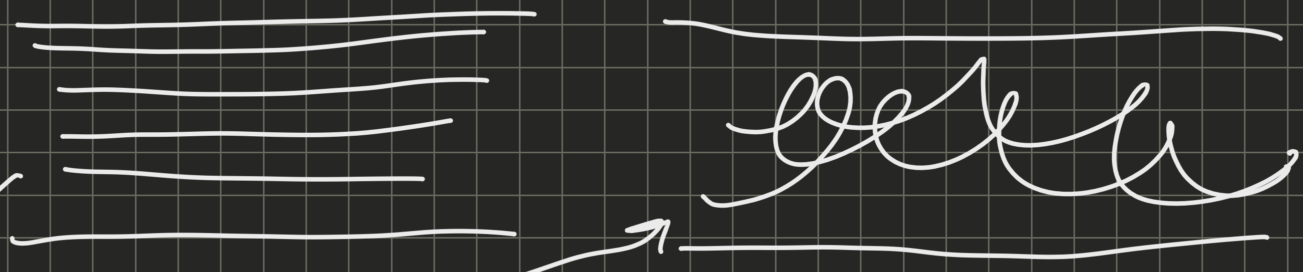
Nel caso Bidimensionale

$$\underline{\Phi}_R = \rho \begin{vmatrix} u'^2_m & (u'v')_m \\ (u'v')_m & v'^2_m \end{vmatrix}$$

→ Termini che si sono aggiunti per la media dei componenti non lineari.

↳ Tensore degli Sforzi di Reynolds

Perché devono esistere questi sforzi:



La turbolenza non è lineare, le particelle vanno dove vogliono, si urtano causando una dissipazione di energia.

→ Il moto turbolento medio è filtrato e lineare, ma per recuperare il comportamento turbolento dobbiamo considerare il termine dissipativo.

L'unico problema che abbiamo ora è che abbiamo introdotto delle nuove incognite, dobbiamo allora creare un legame costitutivo per legare gli sforzi di Reynolds

↳ Il legame è dato da un modello di turbolenza che non guardiamo.