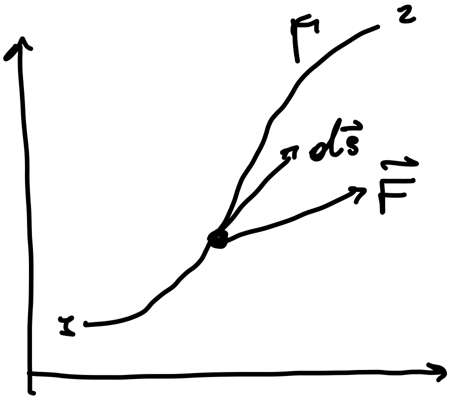
Lezione 9 - Forze Conservative

Forze Conservative

↳ $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$



$$L_{1,2} = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_\Gamma \underbrace{F_x \cdot dx + F_y\, dy}_{dL} = \int_\Gamma dL$$

funzione potenziale

$$dL = dU(x,y)$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$$

$$dL = F_x\, dx + F_y\, dy$$

integrale di linea — Integrale di una funzione

$$\int_\Gamma dL = \int_\Gamma dU = U(P_2) - U(P_1)$$

se conservativo

potenziale a punto 2

" a punto 1

Se F è conservativo si può uguagliare:

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = F_x \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = F_y$$

PLV in presenza di forze conservative

$$\delta L = 0 \qquad \underbrace{\delta L_{NC}}_{\text{non conservative}} + \underbrace{\delta L_{C}}_{\text{conservative}} = 0$$

$$Q_{NC}\,\delta q + \sum_j \vec{F}_{cj} \cdot \delta \vec{P}_j = 0$$

Q_{NC} → componente delle sollecitazioni attive

(q = variabile indipendente di sistema a 1 gdl)

$$Q_{NC}\,\delta q + \sum_j F_{cxj}\,\delta x_j + F_{cjy}\,\delta y_j$$

Abbiamo $F_x = \frac{\partial U}{\partial x}$ e $F_y = \frac{\partial U}{\partial y}$

ipotesi di forze conservative

Immaginiamo di associare ad una forza la sua funzione potenziale

$$\stackrel{\downarrow}{=} Q_{NC}\,\delta q + \Bigg(\sum_j \underbrace{\frac{\partial U_j}{\partial x}\cdot\frac{dx_j}{dq} + \frac{\partial U_j}{\partial y}\cdot\frac{dy_j}{dq}}_{*}\Bigg)\delta q = 0$$

$$= Q_{NC}\,\delta q + \sum_j \frac{dU_j}{dq}\,\delta q = 0$$

$$dU\big(x(q), y(q)\big) = \overbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dq} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dq}\right)}^{*}\cdot\delta q$$

Definità $U(x,y)$ = funzione potenziale del sistema

$$= \sum U_j \Rightarrow \frac{dU}{dq} = \sum_j \frac{dU_j}{dq} \qquad \left(Q_{NC} + \frac{dU}{dq}\right)\delta q = 0$$

stessa equazione da prima

$$\Rightarrow Q_{NC} = \frac{-dU}{dq}$$

$V \to$ energia potenziale = $-U$ = $-$(funzione potenziale)

energia che abbiamo trasferito accumulata

$$\boxed{Q_{NC} = \frac{dV}{dq}}$$

Il lavoro che abbiamo trasferito

descrive il lavoro delle forze

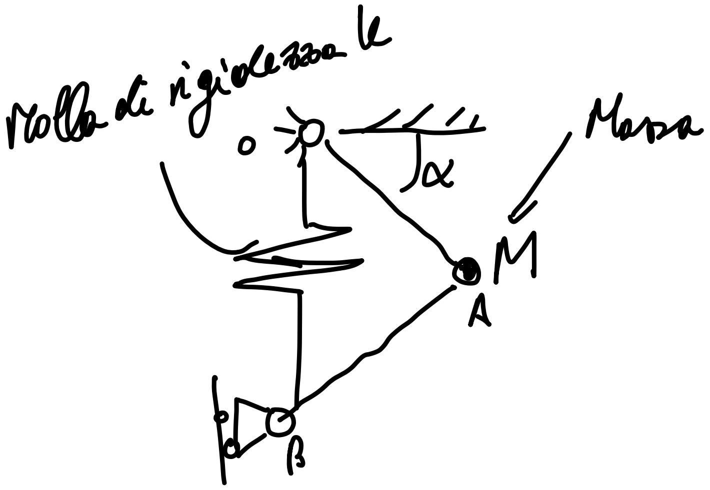
energia accumulata nel campo di forze / nel sistema

$U \to$ lavoro trasferito alla forza del campo (energia aggiunta ad una massa che è alzata) $\to$ energia accumulata

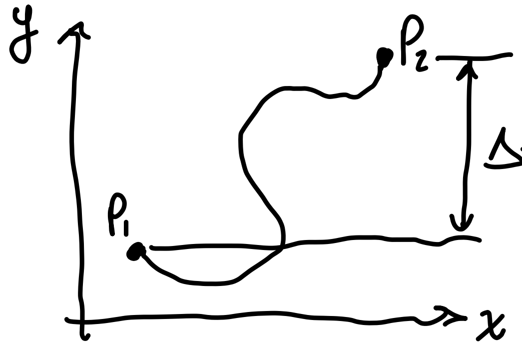
$V \to$ energia spesa per portare la energia quel punto

$$Q_{NC} = \frac{dV}{dq} \quad \text{se } Q_{NC} = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dq} = 0$$

Esempio



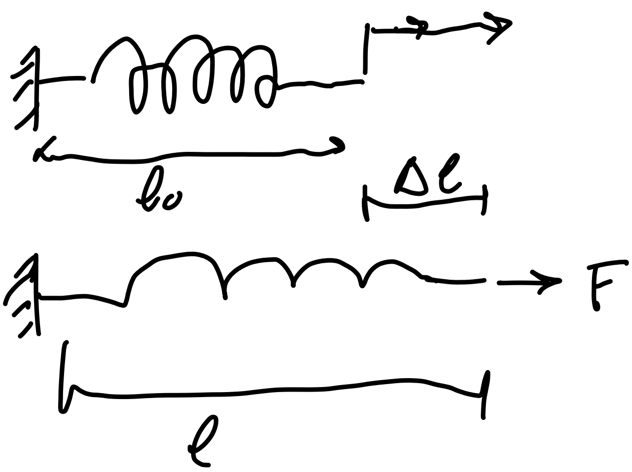
Energia potenziale gravitazionale



$\rightarrow$ non comporta Δx

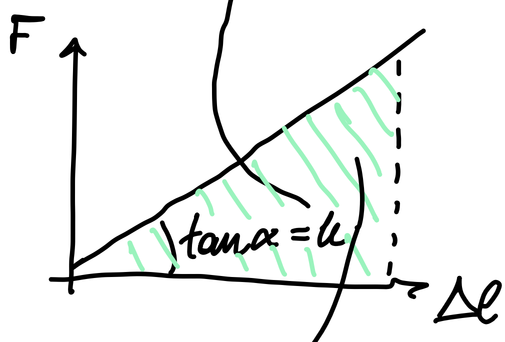
$$V = mg\Delta h$$

Energia Potenziale Elastica



$$F = k\Delta l$$

rigidezza $\left[\frac{N}{m}\right]$



Area è il lavoro $L_{12} = \frac{1}{2} k \Delta l^2$

$$V = \frac{1}{2} k \Delta l^2$$

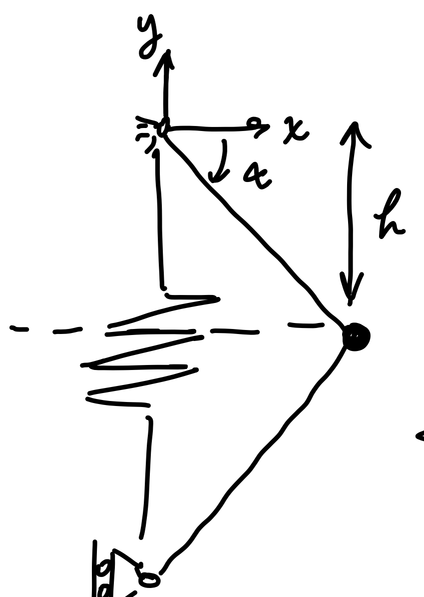
Problema: come connettiamo alla variabile indipendente

Note:

Lo spostamento virtuale non è la velocità ma ha caratteristiche simili come la somma vettoria, è uno spostamento infinitesimale.

$$\frac{dV}{dq} = 0 \;;\; q = \alpha \;;\; \frac{dV}{d\alpha} = 0$$

$$V = Mg\Delta h + \frac{1}{2} k \Delta l^2$$

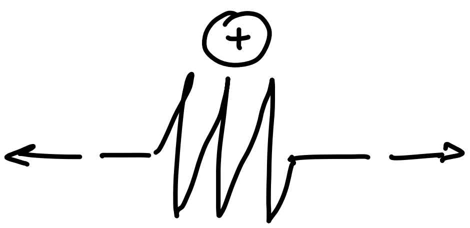


$l = OA = AB$

Perché sotto O

$\Delta h = -l \sin\alpha - 0$

$\Delta l = OB = 2 l \sin\alpha$



Significa che assumiamo positivi gli allungamenti

Parte più difficile è connettere le variabili reali a quella indipendente

Sostituendolo:

$$V = -Mg\,l\sin\alpha + \frac{1}{2}k\,(2l\sin\alpha)^2 = -Mg\,l\sin\alpha + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot k l^2 \sin^2\alpha$$

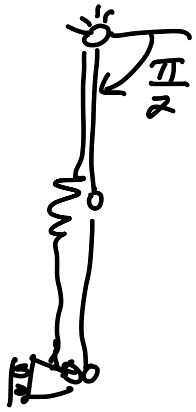
$$= V(\alpha)$$

$$\frac{dV}{d\alpha} = -Mg\,l\cos\alpha + 4kl^2\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

$$= (-Mgl + 4kl^2\sin\alpha)\cos\alpha = 0$$

Posizioni di equilibrio, dove $\frac{dV}{dq} = 0$

$\cos\alpha = 0$ per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$

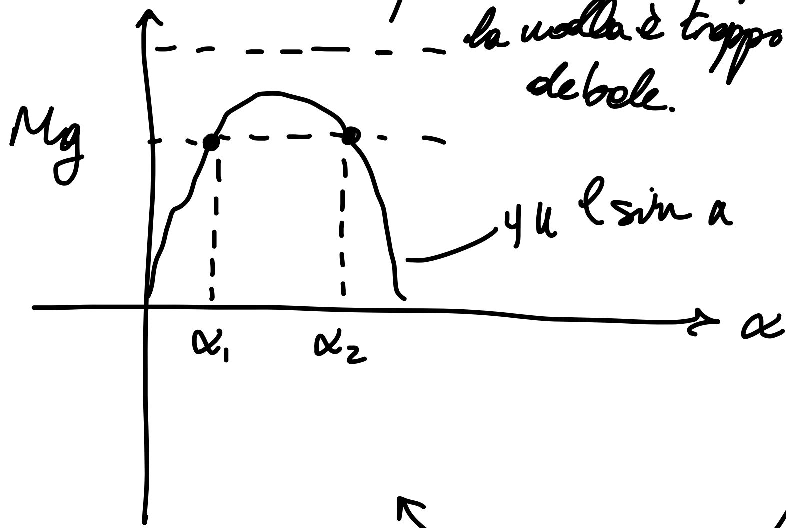


Non stiamo determinando se sono stabili o no

↳ Più tardi

se Mg è qui non esiste α, perché la molla è troppo debole.

$4kl^2\sin\alpha = Mg\cancel{l}$



$0 < \sin\alpha = \frac{Mg}{4kl} < 1$

(se non ci piace il risultato si può scrivere e dire così almeno sa che te ne sei accorto e è più

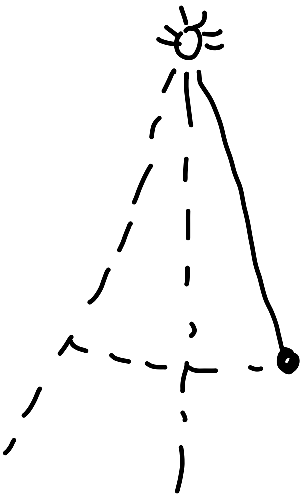
$\hookrightarrow \; Mg \overset{?}{=} 4kl\sin\alpha$) leaniant)

↳ Quanti valori di α valgono dipende dal valore di Mg e poi troviamo gli α corrispondenti

se $Mg > 4kl\sin_{MAX}$ significa che la molla è troppo debole quindi non riesce a reggere una posizione di equilibrio

Stabilità (di una condizione di equilibrio)

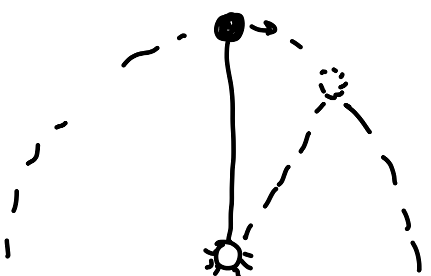
↳ non sistema perché abbiamo trovato 3 posizioni di equilibrio, quindi il nostro sistema non è lineare



STABILE

↳ Applicando una perturbazione, il sistema rimane nei pressi della posizione di equilibrio

↳ resistente a perturbazioni



INSTABILE

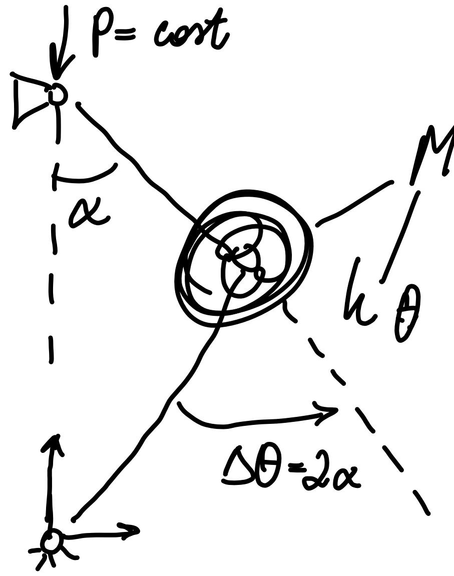
↳ con una perturbazione il sistema

Tende ad una nuova posizione

↳ Anche con perturbazioni infinitesimali

Esempio

Forza costante = Forza Conservativa



Δh = Dove siamo - dove quando $\alpha = 0$ (punto di applicazione)

$$V = P \cdot \Delta h + \frac{1}{2} k_\theta \Delta\theta^2 = P(\underbrace{2l\cos\alpha}_{\text{Dove siamo}} - 2l) + \frac{1}{2} k_\theta (2\alpha)^2$$

$$= 2Pl(\cos\alpha - 1) + \frac{1}{2} 4 k_\theta \alpha^2 \Rightarrow \text{equilibrio a } \frac{dV}{d\alpha} = 0$$

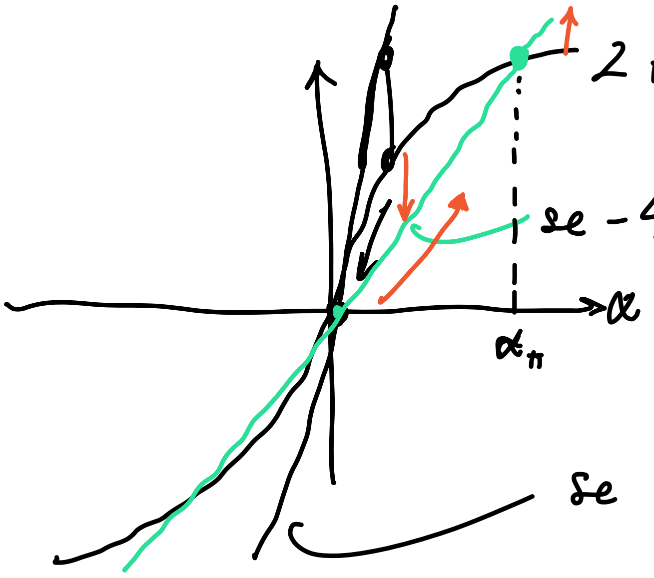
$$\frac{dV}{d\alpha} = -2Pl\sin\alpha + 4k_\theta\alpha = 0$$

$$4k_\theta\alpha = 2Pl\sin\alpha$$

$4k_\theta\alpha$ ↳ Retta

$2Pl\sin\alpha$ ↳ Sinusoidale

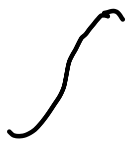
Δh = Variabile generica - Variabile a α

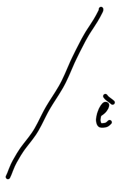
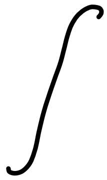


se $-4k_\theta < 2P\ell \Rightarrow$ I: $\alpha_I = 0$ Instabile

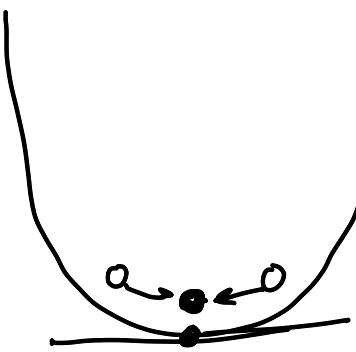
II: $\alpha_{II} \neq 0$ Stabile

se $-4k_\theta > 2P\ell \Rightarrow$ I: $\alpha = 0$ stabile

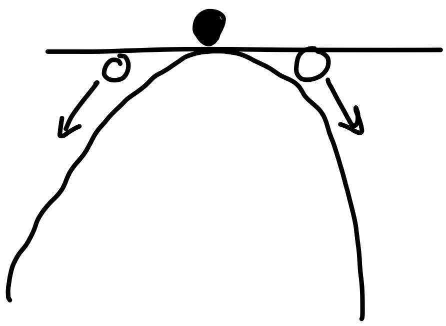
se  è sotto a  allora è instabile

se  è sopra a  allora è stabile

Uso della $\frac{d^2V}{dq^2}$ per lo studio della stabilità



$$\frac{d^2V}{dq^2} > 0$$



$$\frac{d^2V}{dq^2} < 0$$

per ultimo caso:

$$\frac{d^2V}{d\alpha} = -2P\cos\alpha + 4K_\theta$$

I) $\left.\frac{d^2V}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0} = -2Pl + 4K_\theta \overset{?}{>} 0$

$\rightarrow$ ~~solo~~ se

$4K_\theta > 2Pl$

$\Rightarrow$ stabile perché > 0