Francesco Cadini -> rimpiazza la Vergani
francesco.cadini@polimi.it

Analisi Cinematica (Parte II)

↳ spiega se un corpo rigido può o non può **muoversi**

CdM -> studia la statica

Analisi Cinematica
↳ capire se è ben vincolato, ovvero se è vincolato in maniera efficace.

E facile capire i vincoli e gdl, più difficile capire se questi vincoli sono efficaci

- Approcio matematico
- Approcio grafico

Definizione moti traslatori rotatori e roto-traslatori
Concetto di centro di rotazione
↓
a istantanea

Traslazione

↳ movimento tale che tutte le direzioni restano parallele ad esse. Il sistema non gira

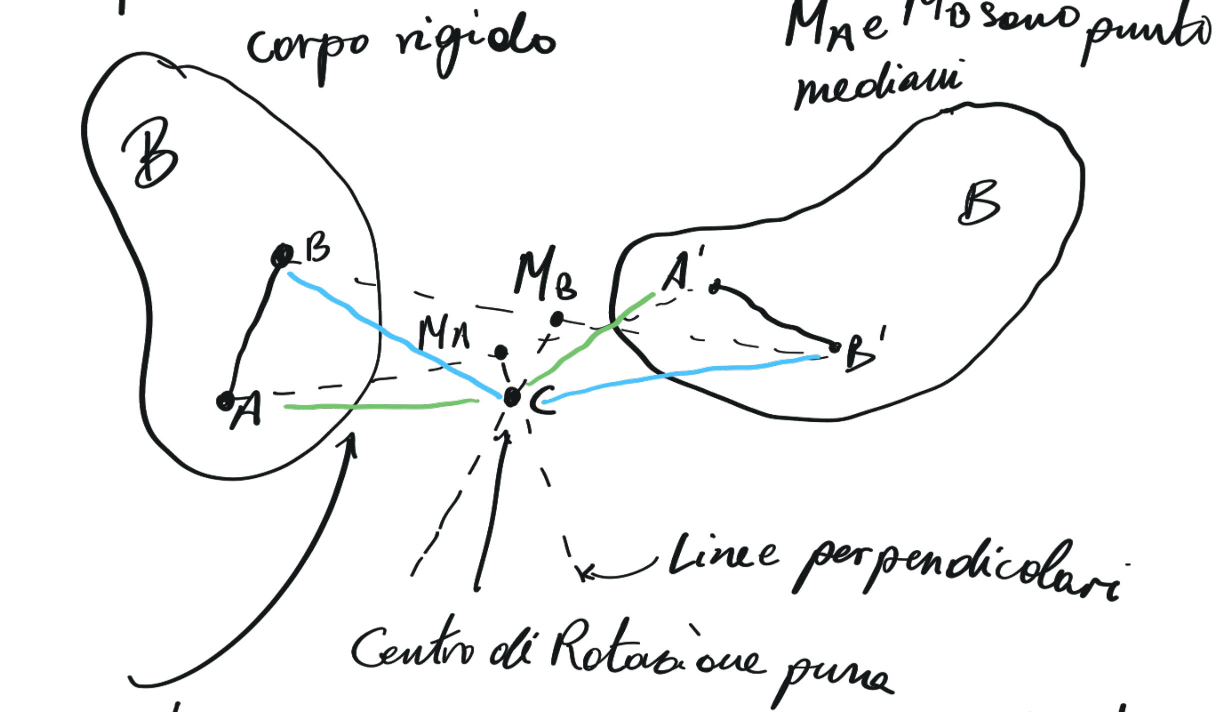
Rotazione

↳ il corpo rigido si muove tale che un punto, il centro di rotazione resta fermo, cioè spostamento è nullo

Roto-Traslazioni

↳ combinazioni di rotazioni e traslazioni che può quasi sempre esser semplificato ad una rotazione

Esempio



Si creano triangoli isosceli con BCB' e ACA' e i triangoli ACB e $A'CB'$ sono uguali e la unica differenza è una rotazione pura

Questo si può fare con ogni coppia di punti, anche con differenze infinitesime

Passi

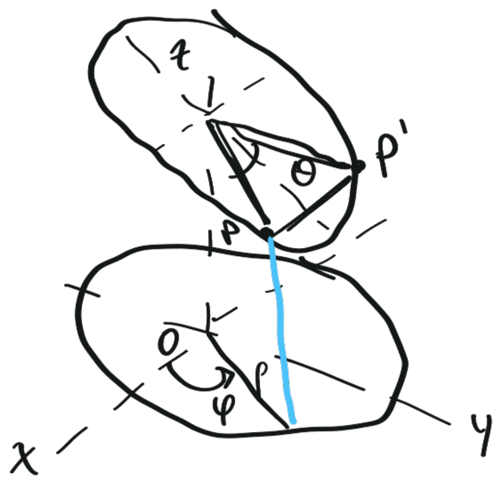
1) Linee AA' e BB'
2) Mediante
3) Linee perpendicolari
4) Punto di convergenza C è il punto di rotazione

Concetto di «traiettoria in grande»
vs «traiettoria in piccolo»

Le traiettorie in piccolo, sono le linee tra i punti AA' e BB' per cambi infinitesimi

Le traiettorie in piccolo si possono linearizzare perché l'errore è minuscolo

Linearizzazione del moto rigido



Immaginiamo θ finito

$$P = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z = z)$$

$$P' = (\rho\cos(\varphi+\theta), \rho\sin(\varphi+\theta), z' = z$$

Lo spostamento è

$\hat{u} = \vec{x}' - \vec{x}$ cioè

spostamento in x

$u = \rho[\cos(\varphi+\theta) - \cos(\varphi)]$

spostamento in y $\rightarrow$ $v = \rho[\sin(\varphi+\theta) - \sin(\varphi)]$

spostamento in z $\rightarrow$ $w = 0$

Non c'è linearità tra u, v, w e l'angolo θ, perché il cambio dipende da $\cos(\theta)$ e $\sin(\theta)$ che non sono lineari. Bisogna linearizzare

se si usa l'infinitesimo $d\theta$

$$d\vec{u} = \left.\frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} d\theta$$

du, dv, dw componenti di spostamento $d\vec{u}$ in piccolo (differenziate rispetto a θ)

$$\left.\begin{aligned} du &= -\rho\sin(\varphi)\,d\theta = -y\,d\theta \\ dv &= \rho\cos(\varphi)\,d\theta = x\,d\theta \end{aligned}\right\}$$ c'è linearità tra du, dv, dw e l'angolo $d\theta$

$dw = 0$

Utilizziamo la notazione vettoriale:

$$du = d\theta\,\hat{k} \times \vec{x}$$

vettore iniziale

versore di 1

Perpendicolare a $\hat{k}$ e $\vec{x}$

rotazione intorno ad un asse generica invece di $\hat{k}$ come versore si ha $\hat{e}_a$

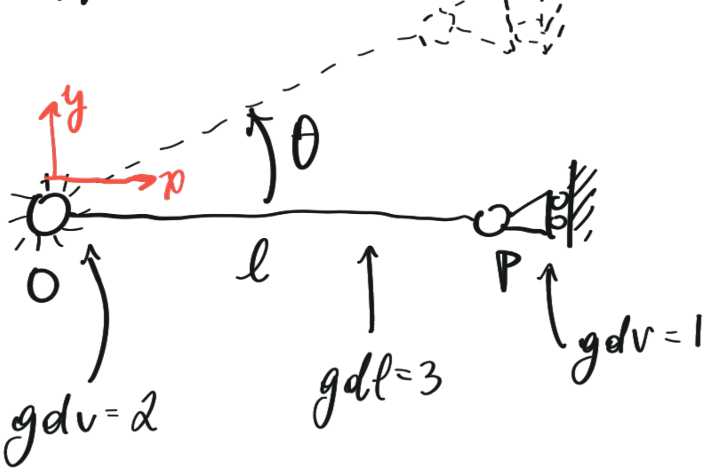
In generale per una rotazione attorno a un asse generico $\vec{e}_a$

$$d\vec{u} = d\theta\,\vec{e}_a \times \vec{x} = d\vec{\theta} \times \vec{x}$$

Applicazione

In grande non lineare

$$\vec{x}_P = \begin{cases} l \\ 0 \end{cases} \qquad \vec{x}\,'_P = \begin{cases} l\cos\theta \\ l\sin\theta \end{cases}$$



$$\vec{u}_P = \begin{cases} l(\cos\theta - 1) \\ l\sin\theta \end{cases}$$

gdl rimasti = 0, candidato ad esser isostatico, può muoversi ma non deve.

Lo spostamento in grande orizzontale a seguito della rotazione in grande θ <u>non</u> risulta esser compatibile con il vincolo del carrello

In piccolo (linearizziamo)

$$d\vec{u}_P = \left.\frac{\partial \vec{u}_P}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} d\theta = \begin{cases} 0\, d\theta \leftarrow \text{compatibile con il carrello} \\ l\, d\theta \leftarrow dy, \text{ compatibile con il carrello} \end{cases}$$

compatibile perchè è 0, anche se non in grande, questi movimenti in piccolo sono permessi che è un problema, questo problema si chiama labilità che vogliamo evitare e rompe gli equilibri

lungo y

Da ora in poi moti in piccolo
Cosa succede quando si considerà movimenti in vincolo

- rotazione intorno a O

$$d\vec{u}_p = d\vec{\theta} \times (P-O)$$

e.g $\vec{x}' \circ \vec{x}$

- espressione della roto-traslazione rigida infinitesima

$$d\vec{u}_p = d\vec{u}_o + d\vec{\theta} \times (P-O)$$

- i 6 gdl
  - 3 componenti di $d\vec{u}_o$
  - 3 componenti di $d\theta$

Centro di Istantanea Rotazione (CIR)

roto-traslazione rigida infinitesima

$$d\vec{u}_p = d\vec{u}_o + d\vec{\theta} \times (P-O)$$

In forma finita (ma piccola)

$$\vec{u}_p = \vec{u}_o + \vec{\theta} \times (P-O)$$

La rappresentazione nel piano xy

Da prodotto vettoriale

$$u_p = u_o - \theta(y_p - y_o)$$

$$v_p = V_o + \theta(x_p - x_o)$$

3 gdl

se $\theta \neq 0$, in un moto piccolo esiste sempre un asse di pura rotazione che interseca il piano di moto nel CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE (CIR)

Lo stesso piano lungo cui i moti stanno occorrendo

Domanda CIR ⇒ max 5 min

Ricerca del CIR

Se un punto P (solidale) fosse il CIR allora
le componenti di spostamento sarebbe nulle

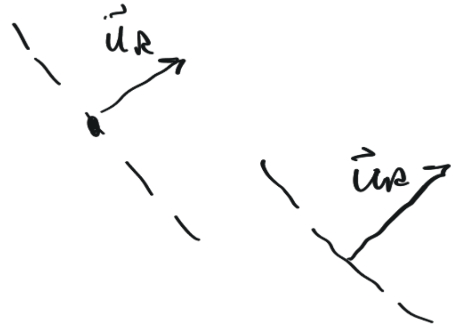
$$u_{CIR} = u_0 - \theta(y_{CIR} - y_0) = 0$$
$$v_{CIR} = v_0 + \theta(x_{CIR} - x_0) = 0$$

y_0 e x_0 sono coordinate di un punto di riferimento
O solidal al corpo rigido, θ è la rotazione attorno
a O

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{CIR} = \dfrac{-v_0}{\theta} + x_0 \\ y_{CIR} = \dfrac{u_0}{\theta} + y_0 \end{cases} \longrightarrow$$

sarebbe tutto infinitesimo
ma non scriviamo
la d per semplicità,
sarà tutto scritto così

Per $\theta = 0$, allora il movimento è traslazione pura,
perchè CIR $\to (\infty, \infty)$



<u>Al contrario:</u>

Se non riesco a trovare un CIR per il corpo rigido, vuol dire che è fermo e non si può muovere

<u>Conclusioni</u>

- Se esiste un CIR, il corpo rigido si può spostare (anche solo in quantità infinitesima
- Se non esiste un CIR, il corpo rigido non si può muovere

La direzione del CIR è molto importante

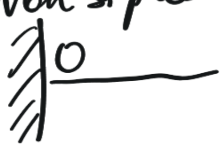
<u>Effetto dei vincoli ai CIR</u>

<u>Incastro</u>

Non si può definire CIR per l'incastro

Equazione di vincolo

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 0 \\ \theta = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_{CIR} = \dfrac{-v_0}{\theta} + x_0 \\ y_{CIR} = \dfrac{u_0}{\theta} + y_0 \end{cases}$$

Indefiniti

Cerniera

$u_0 = 0$ $\quad v_0 = 0$

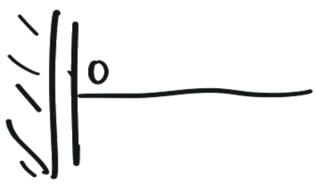
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 0 \\ \theta \neq 0 \end{cases}$$

La cerniera è essa stessa CIR del corpo rigido cui è collegata.

$$\begin{cases} x_{CIR} = \cancel{-\dfrac{v_0}{\theta}} + x_0 \\ y_{CIR} = \cancel{\dfrac{u_0}{\theta}} + y_0 \end{cases}$$

Pattino

Permette una rotazione del corpo rigido rispetto ad un punto improprio all'infinito



$\rightarrow CIR = \infty$

$u_0 = 0, \ \theta = 0$

$x_{CIR} = \underbrace{-\dfrac{v_0}{\theta}}_{\pm\infty} + x_0$

$y_{CIR} = \dfrac{u_0}{\theta} + y_0$

↳ Indefinito

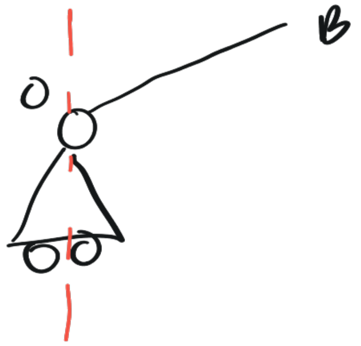
Direzione perpendicolare alla traslazione

Carrello

- traslazione lungo la retta di scorrimento (rotazione attorno al punto all'infinito)
- rotazione attorno al perno

2 rotazioni allo stesso motore

Bisogna considerare la combinazione di più moti simultanei, è la combinazione lineare



Consente una rotazione attorno ad un punto arbitrario della normale alla retta di scorrimento passante per il carrello stesso

Teorema:

Due rotazioni infinitesime, GUARDA LE SLIDE

Bipattino
→ Punto tutto all'infinito, retta impropria non cerchio