Lezione 21 -

Siamo andati da un formulazione forte ad una debole, considerando uno spazio opportuno

Formulazione Forte

$$-u'' = f \quad \text{in } \Omega = (0,1)$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

? $u, v \in V$ tale che $\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx$

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (CS)

$$|(f,g)| \le \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^2(\Omega)}$$

Prodotto scalare

$$\Rightarrow u', v', f, v \in L^2(\Omega)$$

$$H^1(\Omega) = \{ v, \Omega \to \mathbb{R} : v \in L^2(\Omega), v' \in L^2(\Omega) \}$$

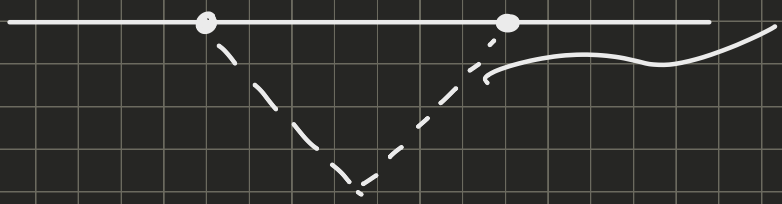
$$H^1_0(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega) \text{ tale che } v(0) = v(1) = 0 \}$$

vale anche per u, perchè v e u hanno la stessa struttura.

$$\Rightarrow H^1_0 = V$$

↳ Da un senso fisico al PLV, volere regolare e la condizioni di bordo. La formula debole rappresenta il PLV.

V è spazio di Hilbert e Banach.



È una funzione in $H_0^1(0,1)$ perché secondo Lebesgue, la funzione salto è integrabile.

$H_0^1(0,1) \not\subset C^1([0,1])$

↳ Perché questa funzione è in $H_0^1(0,1)$ che non è C^1

Cambio della formulazione debole per un problema diverso

↳ ergo un'altro esempio

$$\begin{cases} -u'' + \sigma \quad u(x) = f(x) & x \in (0,1) \\ u'(0) = h_0 \,;\; u'(1) = h_1 \end{cases}$$ → Neumann non-omogenea.

$h_0, h_1 \in \mathbb{R}$ $\quad \sigma \quad$ positiva.

Scriviamo la formulazione debole, identificando lo spazio V

$$-\int_0^1 u''(x) v(x) dx + \int_0^1 \sigma \quad u(x) v(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx$$

Integrazione per parti

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx \underbrace{- u'(x)v(x)\Big|_0^1}_{-\underbrace{u'(1)}_{h_1}v(1)+\underbrace{u'(0)}_{h_0}v(0)} + \int_0^1 \sigma \quad u(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

CB → essenziali → solo Dirichlet, le portiamo dietro nello spazio
CB → naturale → Neumann, Robin, Misto, le teniamo nella formulazione debole.

Dirichlet va nello spazio, il resto rimane nella formulazione

Visto che v è noto, mentre u no, visto che il termine è tutto noto lo portiamo a destra.

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 \sigma \quad v(x)dx = \int_0^1 \underbrace{f(x)v(x)dx + h_1v(1) - h_0v(0)}_{\text{tutto noto}}$$

? $u \in V$ tale che sia vero $\forall v \in V$

Questa formula chiede che u, u', v, e v' e f sia L^2

$\Rightarrow V = H^1(\Omega)$

Dovremmo fare stare in anche i termini di bordo, serve che v sia continua, in H^1 una funzione è continua → vediamo un teorema dopo.

Cambiamo l'equazione cambia la formula, cambiando le CB cambia V → Dirichlet si vedono in V, Neumann no.

Osservazione su CB miste:

$$\begin{cases} -u'' + \sigma \quad u(x) = f(x) \\ u(0) = 0 \ ; \ u'(1) = h_1 \end{cases}$$

Deve rispettare le condizioni essenziali

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx \underbrace{-u'(x)v(x)\Big|_0^1}_{-\underbrace{u'(1)}_{h_1}v(1)+\underbrace{u'(0)v(0)}_{=0}} + \int_0^1 \sigma \quad u(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

$$\Longrightarrow V = H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$$

$$H^1_{\Gamma_D}(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega) : v\big|_{\Gamma_D} = 0 \}$$

$$\Updownarrow$$

$v(0) = 0 \rightarrow$ nel nostro caso.

Le miste cambiano sia la formulazione che lo spazio.

<u>Formulazione Debole in più dimensioni</u>

Notazione che usa:

Scriveremo le formulazioni deboli come: $\underbrace{}_{}$ Blocco di DX di prima

$? u \in V$ tale che $a\underbrace{(u,v)} = \widehat{F(v)} \quad \forall v \in V$

$\boxed{\text{Fatto per esempi di prima}}$ Blocco a SX di prima

a dipendendo da u

F da v e i dati

Lemma di Lax - Milgram → No dimostrazione

Sia V uno spazio di Hilbert, sia $a(\cdot,\cdot): V\times V \to \mathbb{R}$ ← due oggetti qualsiasi.
forma bilineare, continua, coerciva.

→ se bilineare ← lineare in tutte e due le variabili

β, γ con $a(\beta v + \gamma w, z) = \beta a(v,z) + \gamma a(w,z) \quad \forall v,w,z \in V$

e $a(v, \beta w + \gamma z) = \beta a(v,w) + \gamma a(v,z)$

→ Continua: $\exists M > 0$ tale che $|a(u,v)| \leq M \|u\|_V \cdot \|v\|_V \quad \forall u,v \in V$

sapendo
$$\|v\|_{H^1} = \left[\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v'\|_{L^2(\Omega)}\right]^{1/2}$$
→ Visto che H^1 coinvolge sia v che v'
$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = \left[\int_\Omega |v(x)|^2 dx\right]^{1/2}$$

devono esser lo stesso

→ $\exists \alpha > 0$ tale $a(u,u) \geq \alpha \cdot \|u\|^2_V \quad \forall u \in V$

Continuità → upper bound, coercività → lower bound

Sia $F(\cdot): V \to \mathbb{R}$ un funzionale, lineare e limitato.

con $F(\beta v + \gamma z) = \beta F(v) + \gamma F(z) \quad \forall \beta,\gamma \in \mathbb{R}, \forall v,z \in V$

↳ lineare

→ $\exists C > 0$ tale che $|F(v)| \leq C \|v\|_V \quad \forall v \in V$ limitato

Allora $\exists!$ la soluzione di:

$?u \in V$ tale che $a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in V$

Cioè il problema in formulazione debole.

3 sono da dimostrare.
V è dato che è spazio di Hilbert.

La bilinearità è data dalla linearità dell'operatore di integrazione.

I vettori devono esser trovati.

<u>Esempio applicativo di Lax-Milgram:</u>

$$\begin{cases} -\mu_0 u''(x) + \sigma_0 u(x) = f & x \in (0,L) \\ \mu_0 u'(0) = q_1 \\ \mu_0 u'(L) = q_2 \end{cases}$$

$$\mu_0, \sigma_0 \in \mathbb{R}^+ \qquad q_1, q_2 \in \mathbb{R}$$

$$-\int_0^L \mu_0 u''(x) v(x) dx + \int_0^L \sigma_0 u(x) v(x) dx = \int_0^L f(x) v(x) dx$$

$$\int_0^L \mu_0 u'(x) v'(x) dx \underbrace{- \mu_0 u'(x) v(x) \Big|_0^L}_{-\underbrace{\mu_0 u'(L)}_{q_1} v(L) + \underbrace{\mu_0 u'(0)}_{q_1} v(0)} + \int_0^L \sigma_0 u(x) v(x) dx = \int_0^L f(x) v(x) dx$$

? $u \in V$ tale che $a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in V$

con
$$\begin{cases} a(u,v) = \int_0^L \mu_0 u'(x) v'(x) dx + \int_0^L \sigma_0 u(x) v(x) dx \\ F(v) = \int_0^L f(x) v(x) dx + q_2 v(x) - q_1 v(x) \\ V = H^1(\Omega) \rightarrow \text{perché tutte e due Dirichlet.} \end{cases}$$

[9:29]

$\rightarrow$ richiede regolarità L^2 delle k derivate

Richiamo 1 $\rightarrow H^k(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$ $\hookrightarrow H^0 = L^2$

Dipendente da k

Vale che $k > \frac{d}{2}$ $\rightarrow$ dimensione del problema

$\rightarrow d=1 \rightarrow k > \frac{1}{2}$ $H^1(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$

$\Rightarrow \exists\, v(L)$ e $\exists\, v(0)$

$\rightarrow d=2 \rightarrow k > 1$ $\quad$ v di H^1 non sono continue

$\rightarrow d=3 \quad k > \frac{3}{2}$ $\quad \Rightarrow$ serve H^2 per aver continuità.

abbiamo $d=1$ e $k=1$, quindi possiamo procedere con Lax-Milgram

Procediamo con Lax-Milgram.

1) V è di Hilbert

2) $a(\cdot,\cdot)$ bilineare

3) $a(\cdot,\cdot)$ continua

$$|a(u,v)| = \left| \int_0^L \mu_0\, u'(x) v'(x)\, dx + \int_0^L \sigma_0\, u(x)\, v(x) dx \right|$$

Disuguaglianza Triangolare. (se portato il valore assoluto)

$$\leq \mu_0 \left| \int_0^L u'(x) v'(x)\, dx \right| + \sigma_0 \left| \int_0^L u(x)\, v(x) dx \right|$$

$$\overset{CS}{\leq} \mu_0 \|u'\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v'\|_{L^2(\Omega)} + \sigma_0 \|u\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

$$?\ M>0 \quad |a(u,v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V$$

Non abbiamo ancora

Richiamo 2

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} = \|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v'\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \|v\|_{L^2(\Omega)} \le \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad e \quad \|v'\|_{L^2(\Omega)} \le \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\le \mu_0 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \sigma_0 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

$$= \underbrace{(\mu_0 + \sigma_0)}_{M} \|u\|_V \|v\|_V$$

4) Coercività → Passo più difficile

$$? \alpha > 0 \qquad a(u,u) \ge \alpha \|u\|_V^2$$

$$a(u,u) = \mu_0 \int_0^L [u'^2(x)]\,dx + \sigma_0 \int_0^L [u(x)]^2\,dx$$

$$\ge \min(\mu_0,\sigma_0) \int_0^L [u'(x)]\,dx + \min(\mu_0,\sigma_0) \int_0^L [u(x)]^2\,dx$$

$$\ge \underbrace{\min(\mu_0,\sigma_0)}_{\alpha} \underbrace{\int_0^L [u'(x)]^2\,dx + \int_0^L [u(x)]^2\,dx}_{\|u\|_V^2}$$

↳ Da richiamo

Richiamo R3 → Disuguaglianza di Poincarè

Se $v \in H^1_0(\Omega)$ $\left(o\ v \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)\right)$ → se è 0 ad uno dei due estremi.

Allora $\|v\|_{L^2(\Omega)} \le C_P \|v'\|_{L^2(\Omega)}$ costante di Poincarè.

→ Aiuta a risolvere problemi più difficili

Esempio

$$-u''(x) = f(x)$$

$$a(u,u) = \int_0^L [u'(x)]^2 dx$$

Per conseguenza Risultato R4

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} = \|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v'\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq C_p^2 \|v'\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v'\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$= (C_p^2 + 1) \|v'\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\Longrightarrow \|v'\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \frac{1}{C_p^2 + 1} \|v\|^2_{H^1}$$

$$a(u,u) = \|u'\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \frac{\|u\|^2_V}{C_p^2+1} \Rightarrow \text{coercività}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{C_p^2+1}$$

5) $F(\cdot,\cdot)$ lineare → "ver per linearità dell'integrale" → quello che dobbiamo scrivere all'esame, anche per bilinearità di a

6) $F(\cdot)$ limitato

$$? \, C > 0 \quad |F(v)| \leq C \|v\|_V$$

$$F(v) = \int_0^L f(x) v(x) dx - q_1 v(0) + q_2 v(L)|$$

$$\leq \left| \int_0^L f(x) v(x) dx \right| - |q_1| |v(0)| + |q_2| |v(L)|$$

$$\overset{CS}{\leq} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + |q_1| |v(0)| + |q_2| |v(L)|$$

$$\overset{R2}{\leq} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \dots$$

$\boxed{10:04}$

Richiamo/Risultato 5 Stima di Traccia

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aperto, limitato, con bordo regolare,
$\exists$ funzione lineare e continua $\gamma : H^k(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$
$v \longmapsto \gamma(v) = v|_{\partial\Omega}$

$$\|\gamma(v)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_T \|v\|_{H^k(\Omega)}$$

$$\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + |q_1| C_T \|v\|_{H^1(\Omega)} + |q_2| C_T \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

$$= \underbrace{(\|f\|_{L^2(\Omega)} + |q_1| C_T + |q_2| C_T)}_{C} \|v\|_V$$