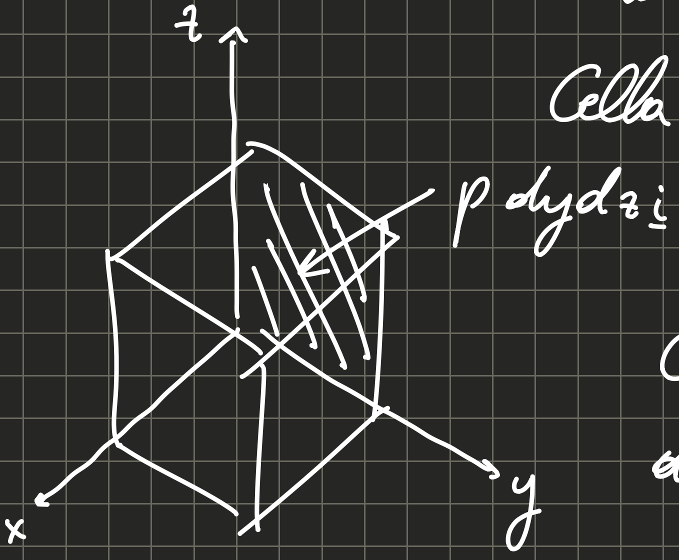
MF - Lezione 02

Continuo da ultima lezione



Cella di fluido parallelepipedo

Ci si arriva anche con la definizione

$$\underline{\Phi} = \underline{\underline{\Phi}}\,\underline{n} \xrightarrow{\text{espando}} \begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} =$$

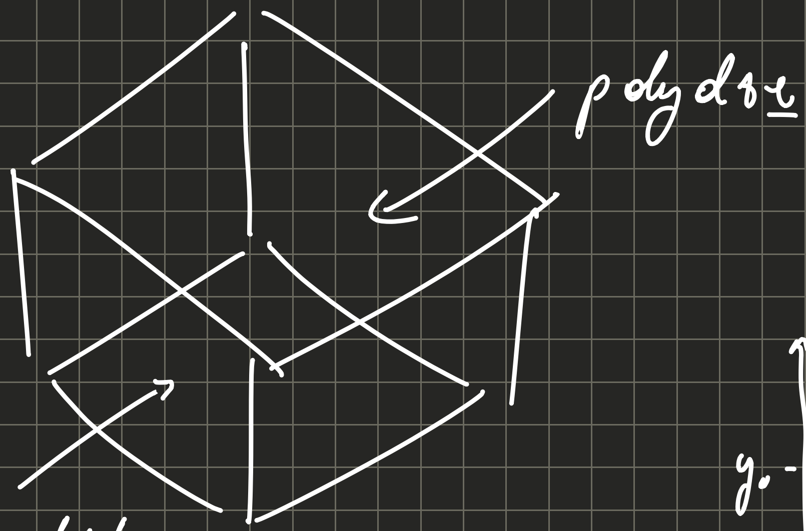
Tensori sforzi in statica

Verso normale al piano scelto

$$= \begin{vmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = p\,\underline{i} \qquad F = \underline{\Phi} \cdot A = p\, dy\, dz\, \underline{i}$$

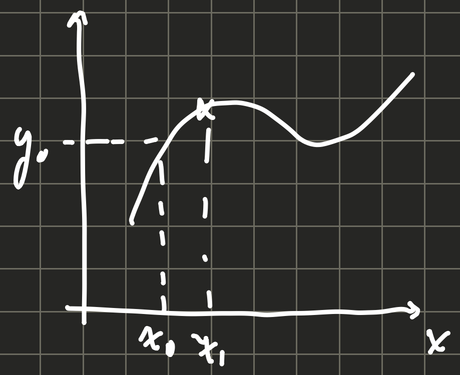
Le forze sulle face y sono dirette come $\underline{j}$ e sulle z come $\underline{k}$

Vogliamo determinare, la forza sulla faccia opposta a quella che abbiamo appena visto



$-\ \sim\ dy\,dz\,\underline{i}$

↳ La pressione non può esser p



$$y_1 = y_0 + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}(x_1 - x_0) + \dots$$

Ammettendo che p è derivabile nello spazio, possiamo fare taylor tale che:

$$p + \frac{\partial p}{\partial x}dx$$

Risultante delle pressioni lungo x:

$$p\,\cancel{dy}\,dz\,\underline{i} - \left(\cancel{p} + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dy\,dz\,\underline{i}$$

$$\underbrace{-\frac{\partial p}{\partial x}\,dW\,\underline{i}}$$

Risultante delle azioni di superficie in direzione x

Avremo allora:

$$\underbrace{-\frac{\partial p}{\partial x}\,dW\,\underline{i} - \frac{\partial p}{\partial y}\,dW\,\underline{j} - \frac{\partial p}{\partial z}\,dW\,\underline{k}}_{\text{Risultante delle azioni di superficie.}} + \rho\, dW\,\underline{f} = 0$$

Accelerazione caratteristica del campo di forze
→ sarà per noi g

Elimino il volume

$$\rho\,\underline{f} = \frac{\partial p}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\underline{k} = \nabla p$$

gradiente

$$\boxed{\rho\,\underline{f} = \text{grad}\,p}$$

$$\nabla = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}$$

→ Derivata da una equazione di equilibrio di forze

→ La pressione varia per effetto del campo di forze in cui è posto.

→ Si ammette che p sia derivabile e continua nello spazio.

→ Caratterizziamo il campo e i fluidi.

↳ Ipotesi 1: Fluido pesante ⇒ $\underline{f} = g$

↳ Ipotesi 2: Fluido è incomprimibile

↳ Alcuni fluidi sono esclusi.

$$\rho \underline{f} = \text{grad}\, p$$

$$HP1 \rightarrow \underline{f} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{vmatrix} = -g\underline{k} = -g \underbrace{\text{grad}\, z}_{\underline{k}}$$

→ Utile per i nostri scopi

$$HP2 \rightarrow \quad \rho = \text{cost}$$

Messi insieme:

$$\underbrace{-\rho g}_{\gamma \to \text{peso specifico}}\, \text{grad}\, z = \text{grad}\, p$$

$$\gamma\, \text{grad}\, z + \text{grad}\, p = 0$$

$$\text{grad}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = 0$$

Possiamo perché γ è costante

$$\boxed{z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost}} \rightarrow \text{Legge di Stevino}$$

Anche se banale

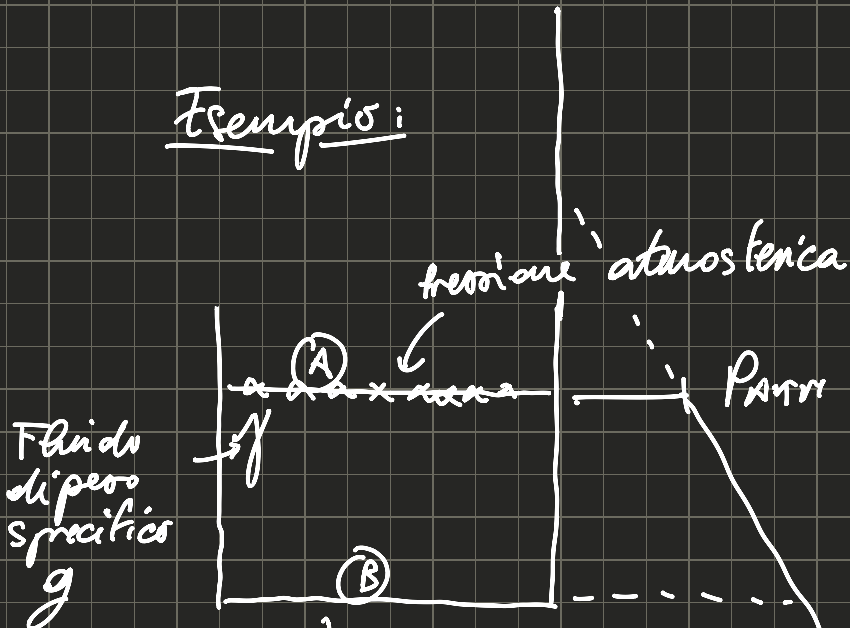
10:59
↳ Assicurarsi di non aver mancato niente

↳ La pressione varia solo con z, visto che il campo di forze non ha componenti in x e y.

↳ I piani sono isobari (nel caso delle due ipotesi)

↳ La variazione di pressione è lineare e comandata da campo specifico

Esempio:



↳ Pressione cambia linearmente

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} = z_B + \frac{p_B}{\gamma}$$

→ Sul fondo la pressione è isobara su ogni punto del piano.

$$p_B = p_A + \gamma (z_A - z_B)$$

z → quota geodetica

$\frac{p}{\gamma}$ → altezza piezometrica

$z + \frac{p}{\gamma}$ quota piezometrica

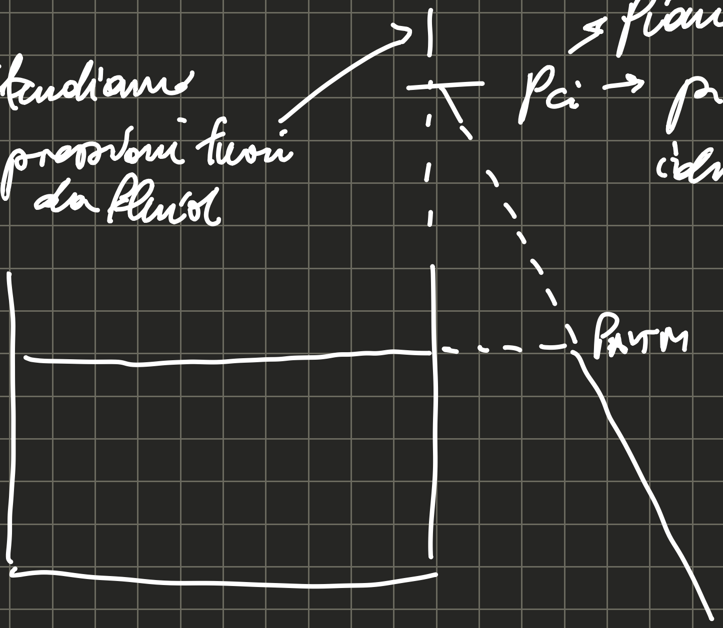
Ideale perché non c'è fluido

Estendiamo le pressioni fuori da fluido

↳ piano dove $p = 0$

p_{ci} → piano dei carichi idrostatici

↳ punto di riferimento per fluidi, con γ si può trovare la pressione ad ogni punto.

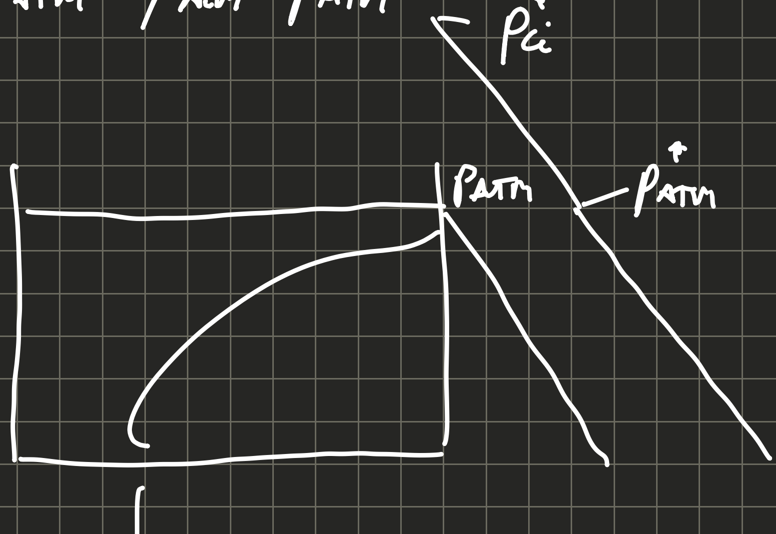


Pressione assoluta e pressione relativa

→ p^* → la pressione vera, che c'è al punto
↳ quindi p_{ATM} sarebbe p^*_{ATM}

Pressione relativa: $p^* - p^*_{ATM} = p$
↳ Si fa per eliminare il p_{ci} e sapiamo che l'atmosfere esiste

$$p_{ATM} = p^*_{ATM} - p^*_{ATM} = 0$$



↳ ci permette di avere p_{ci} a contatto e alla stessa pressione dell'atmosfera

Relativo ↗

$$z_{pci^*} - z_{pci} = \frac{p^*_{ATM}}{\gamma} = \frac{10^5\ Pa}{10^4\ N/m^3} = 10\ m$$

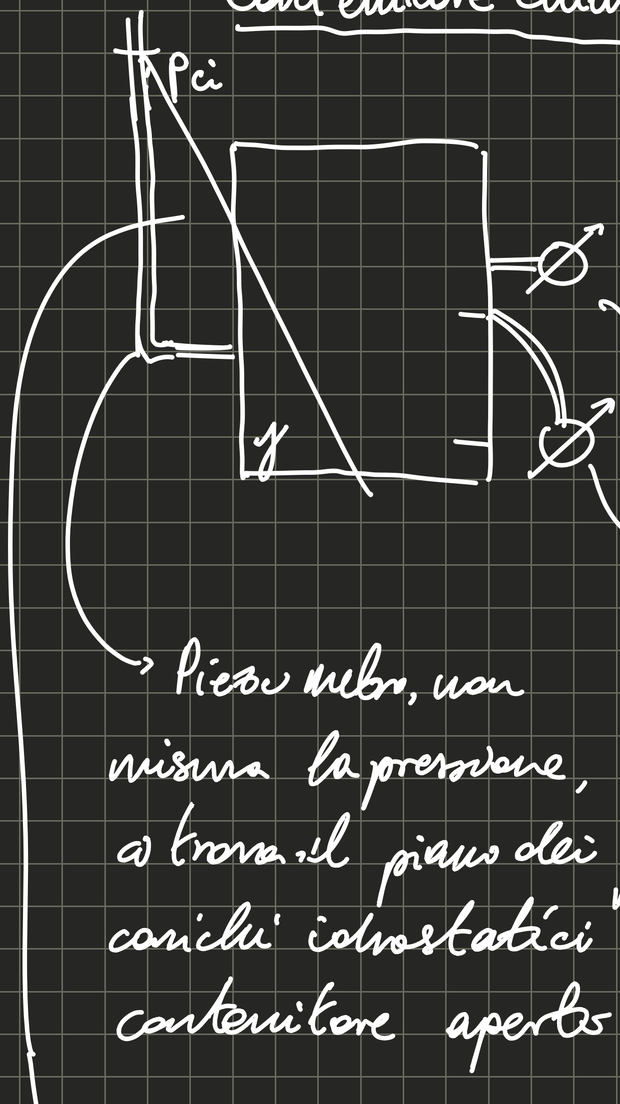
↳ = 1 atm

ci spiega anche perché 76 cm Hg = 1 atm

Casi particolari per la legge di Stevino

↳ Contenitore chiuso, γ molto piccolo, più fluidi

Contenitore chiuso



Serve sapere la condizione al contorno, cioè la pressione ad un punto

→ Possiamo mettere un manometro

→ In questo caso si misura non la quota della presa ma dello strumento stesso.

→ Piezometro, non misura la pressione, ci trova il piano dei carichi idrostatici → perciò agisce come un contenitore aperto

relativo → perché a contatto con atm

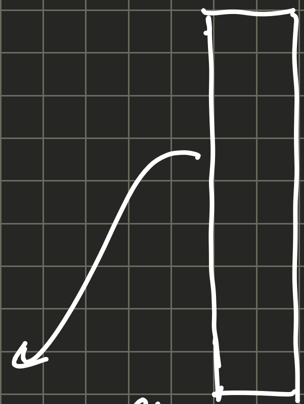
↳ Possiamo allora derivare l'andamento delle pressioni

Peso specifico molto basso:

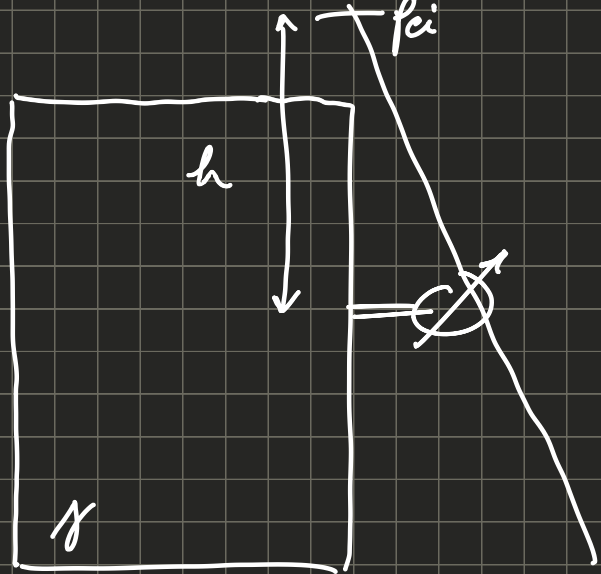
$\Delta p = \gamma \Delta z$ ⇝ pressione è costante

aria ⇒ γ è trascurabile

gas ⇒ γ non trascurabile



Non parte da p_{ci} perché non c'è



$$z_{pci} + \frac{p_{ci}}{\gamma} = z_{MAN} + \frac{p_{MAN}}{\gamma}$$

$$h = z_{pci} - z_{MAN} = \frac{p_{MAN}}{\gamma}$$

per γ molto piccolo

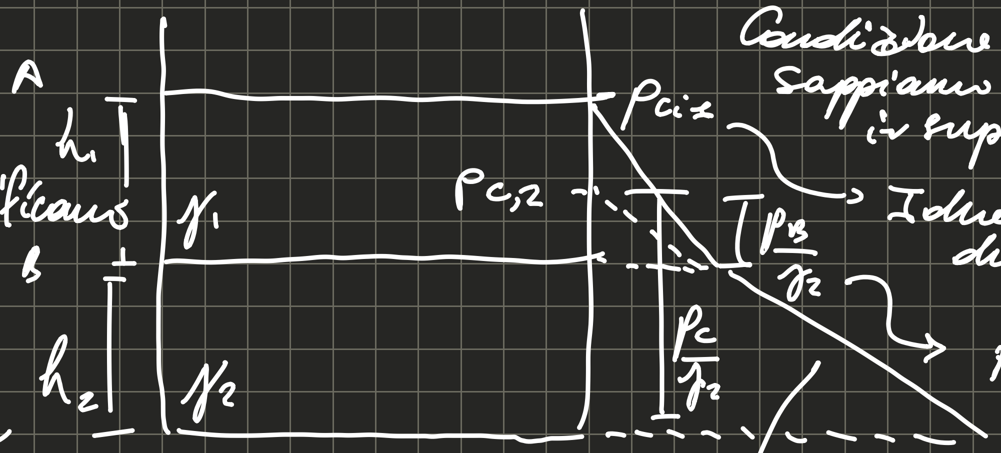
$$\frac{p_{MAN}}{\gamma} \quad \frac{p_{MAN}}{\approx 0} = \infty$$

Quindi effettivamente è costante.

Più fluidi → Immiscibile

Se sono miscibili non c'è problema.

Si stratificano



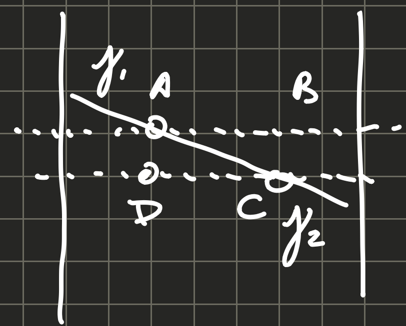
Condizione al contorno: sappiamo la atmosfera in superficie

→ I due fluidi hanno due p_{ci} diversi

→ Possiamo usare i triangoli per trovare le posizioni di ogni punto

Dimostrazione faccia orizzontale

Per assurdo



$$p_D - p_A = \gamma_2 (z_A - z_B)$$

$$p_C - p_B = \gamma_1 (z_B - z_C)$$

Sappiamo che $p_A = p_B$ per stanno su un piano orizzontale e la legge di Stevino e per le stesse ragioni

$$p_D = p_C$$

Per l'equazioni, l'unica soluzione è che stiano tutti alla stessa quota.

All'interfaccia, la pressione è sempre continua.

A parità di Δz la Δp è diversa. Seguendo la pendenza nel secondo gradiente, troviamo che il secondo fluido avrà $p_{ci2} \neq p_{ci1}$

La posizione del piano dei carichi idrostatici; sono nella stessa posizione rispetto ad altri p_{ci} di altri fluidi che la posizione dei fluidi stessi.

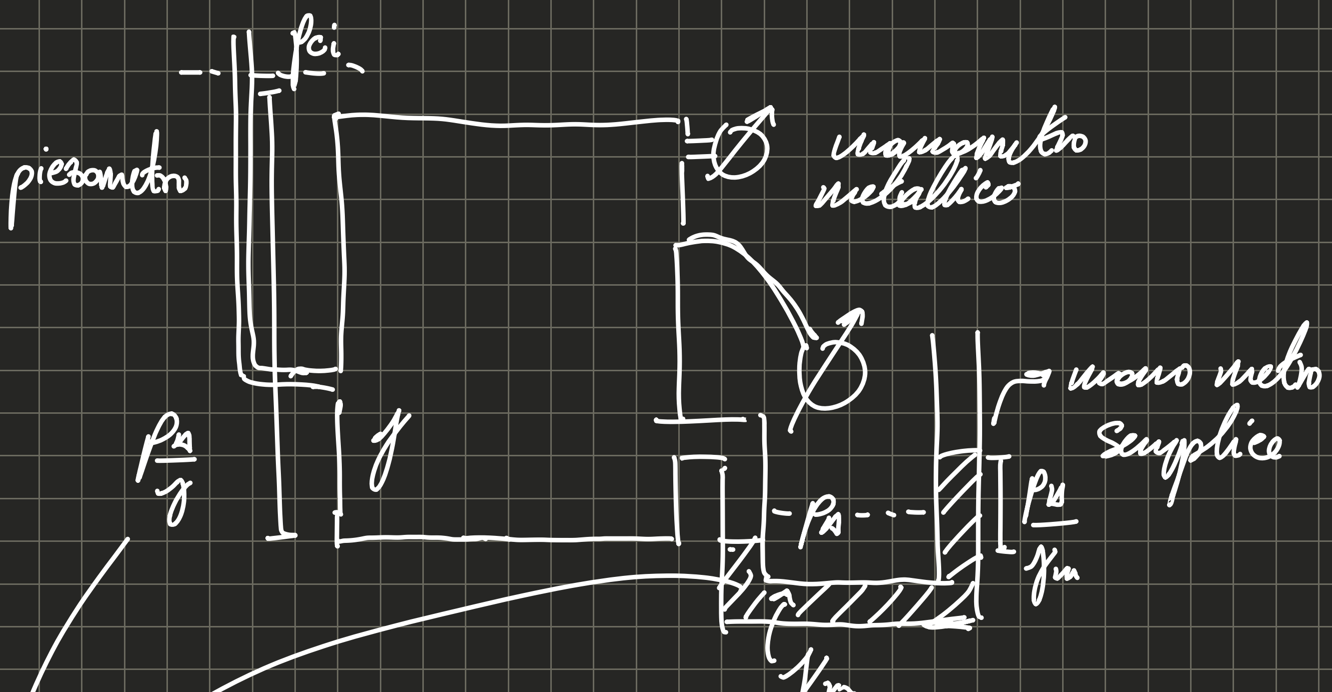
$p_A = 0$

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma_1} = z_B + \frac{p_B}{\gamma_1} \Rightarrow p_B = p_A + \gamma_1 (z_A - z_B)$$

$$z_B + \frac{p_B}{\gamma_2} = z_C + \frac{p_C}{\gamma_2} \rightarrow p_C = p_B + \gamma_2 (z_B - z_C)$$

Possiamo scrivere velocemente che $p_C = \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2$

Possiamo fare la legge di stevino dentro al liquido stesso, per fare un calcolo tra punti, dobbiamo fare la somma di due altezze.



Ci mettiamo del fluido più pesante del fluido interno

Dato che è molto pesante il suo p_{Ci} è molto più in basso e significa che è più compatto, è come i due fluidi mischiati

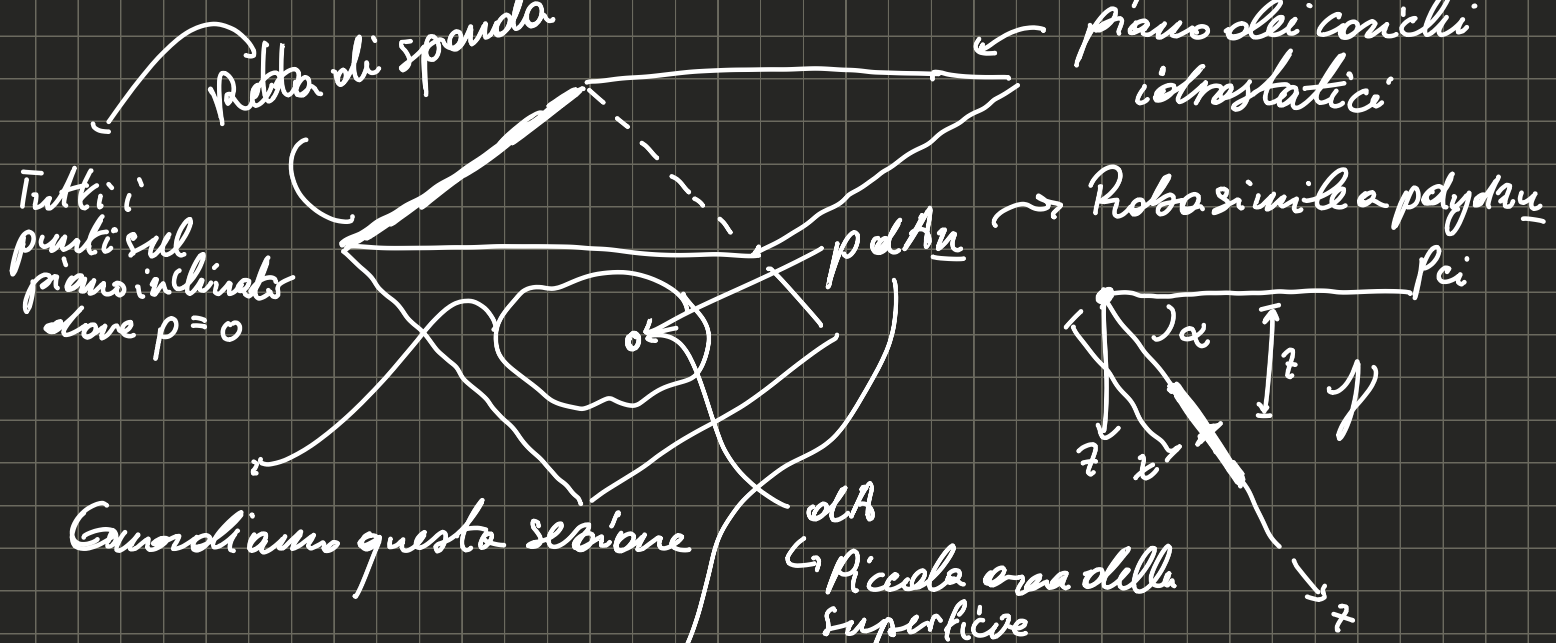
→ Dato che $\gamma < \gamma_m$, h sarà minore con γ_m.

Spinte Statiche → Spinta che il fluido genera su superfici

Guardiamo $\underbrace{\text{la superficie piana}}_{\text{Oggi}}$ e quella curva

Superficie piana

Guardiamo una superficie piana inclinata



Guardiamo questa sezione

→ la forza che agisce perpendicolarmente alla superficie.

Risultante $\underline{S}$:

$$\underline{S} = \int_A p\, \underline{n}\, dA =$$

Stevino

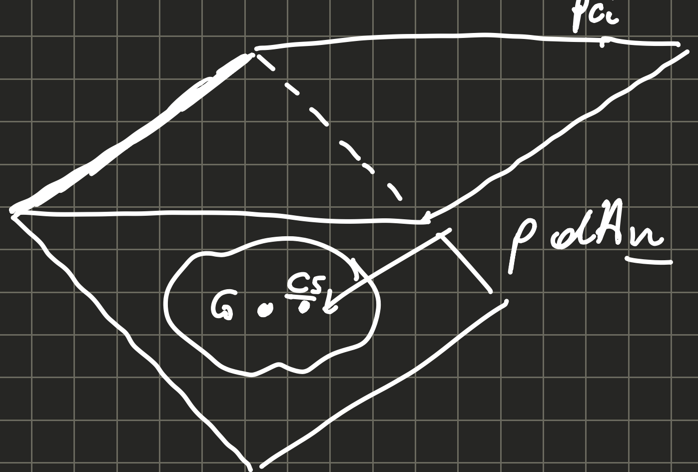
$$= \int_A \gamma z\, \underline{n}\, dA = \int_A \gamma x \sin\alpha\, \underline{n}\, dA =$$

Tiro fuori le costanti

$$= \gamma \sin\alpha\, \underline{n} \underbrace{\int_A x\, dA}_{=\text{a equazione per trovare baricentro}} = \gamma \sin\alpha\, \underline{n}\, x_G A =$$

$$= \gamma z_G\, \underline{n}\, A = p_G A \underline{n}$$

Per trovare la spinta su un'area della superficie piana dobbiamo sapere l'area dell'area, la pressione al baricentro e il vettore normale.



La retta dell'azione di solito non passa per il baricentro.

Di solito passa per il punto detto centro di spinta.

↳ Vogliamo determinare dove passa la retta d'azione della forza.

La pressione causa una rotazione in torno al punto di sponda.

Partiamo da:

$$\underbrace{\gamma x \sin\alpha \, dA}_{\text{Forza elementare}} \overset{\text{Braccio rispetto alla retta di sponda}}{\overbrace{x}}$$

$$\underbrace{\int_A \cancel{\gamma} x^2 \cancel{\sin\alpha} \, dA}_{\text{Momento generato}} = \cancel{\gamma} \cancel{\sin\alpha} \, x_G A \overset{\text{Braccio che vogliamo determinare}}{\overbrace{x_{cs}}}$$

Note:
$y_G \neq y_{cs}$ se la superficie non è simmetrica.
(Ci sarviamo dopo

$$x_{cs} \underbrace{x_G A}_{M} = \overbrace{\underbrace{\int_A x^2 \, dA}_{\text{momento d'inerzia della superficie respetto a retta di sponda}}}^{I}$$

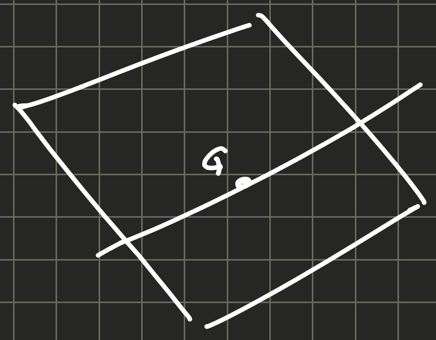
$$x_{cs} = \frac{I}{M}$$

↳ Momento statico della superficie rispetto alla retta di sponga.

Regola del Trasporto (MAAM)

$$= x_G + \frac{I_0}{M}$$ → Momento d'inerzia rispetto asse parallela

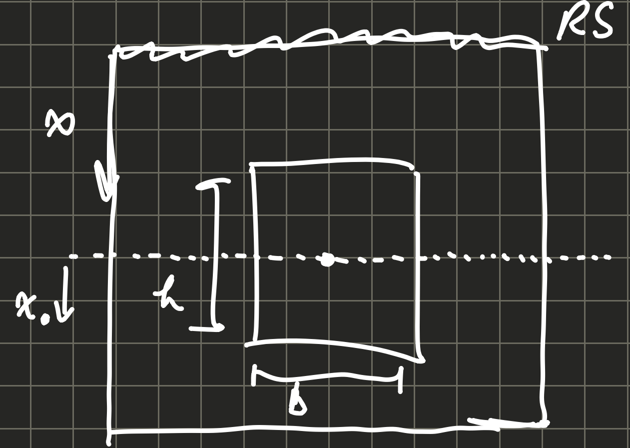
alla retta di sponda passante per G.



La distanza tra x_G e x_{CS} è detta eccentricità.

Esiste anche la eccentricità in y, che sfrutta il momento centrifugo per trovarla.

Stiamo guardando in faccia al piano



$$I = \int_A x^2 \, dA =$$

$$I_0 = \int_A x_0^2 \, dA$$

Più piccolo di I ma è considerato da x_G

$$I = I_0 + x_G^2 A$$

$\frac{bh^3}{12}$ per rettangolo → unica cosa da ricordare