MCS- 203

Sistemi Rigidi ad Elasticità Concentrata

CONFIGURAZIONE C_0

n_c, m_v, n_T

A riposo

Cinematica $C_0 \to \hat{C}$; $\hat{C}$ = Configurazione "Cinematicamente ammissibile o congruente"

Statica ...

Sistemi con le uniche parti che si deformano sono nelle tra corpi o tra corpo e punto fisso

↳ Oggi analizziamo la statica

↳ Lo studio della cinematica ci chiede se esiste $\hat{C}$ che rispetti tutti i vincoli diversa da $\hat{C}$, e come faccio a descriverla?

↳ Se restringo i vincoli a quelli olonomi, ..., lisci, ad ogni vincolo posso attribuire mi equazioni di vincoli

Posso scrivere

Se non si rompe il vincolo

$$\sum_{j=1}^{3n_c} z_{ij}\,\tilde{U}_j = 0 \qquad i = 1, \dots, m_v$$

Generico spostamento da j-esimo corpo rigido

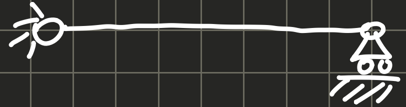
→ Forma matriciale

$$\underset{m_v \times 3n_c}{\underline{\underline{Z}}}\;\underline{\tilde{U}} = \underline{0}$$

Casi

1, 2 → Non ammette soluzione perchè $m_v \geq 3n_c$

e.g



3 → caso più interessante → $m_v < 3n_c$

$\exists\, \infty^N\, \hat{C}$, dove $N = 3n_c - m_v$

10:43

Introduciamo una partizione:

$$\left(\underset{m_v \times m_v}{\underline{\underline{Z}}_A} \quad \underset{m_v \times n}{\underline{\underline{Z}}_B} \right) \begin{pmatrix} \underline{U}_{A\, m_v \times 1} \\ \underline{U}_B \end{pmatrix} = \underline{0}$$

↳ Quadrata

Sappiamo risolvere solo sistemi a matrice quadrata, tiriamo fuori i pezzi che non sono quadrati

$$\underline{\underline{Z}}_A \tilde{\underline{U}}_A + \underline{\underline{Z}}_B \tilde{\underline{U}}_B = \underline{0}$$

$$\underline{\underline{Z}}\, \tilde{\underline{U}}_A = -\underline{\underline{Z}}_B \tilde{\underline{U}}_B \rightarrow \tilde{\underline{U}}_A = -\underline{\underline{Z}}_A \underline{\underline{Z}}_B \tilde{\underline{U}}_B$$

Se fissiamo $\tilde{\underline{U}}_B$, $\tilde{\underline{U}}_A$ consegue.

Numero di parametri liberi per determinare la cinematica

$$\underline{U} := \tilde{\underline{U}}_B$$

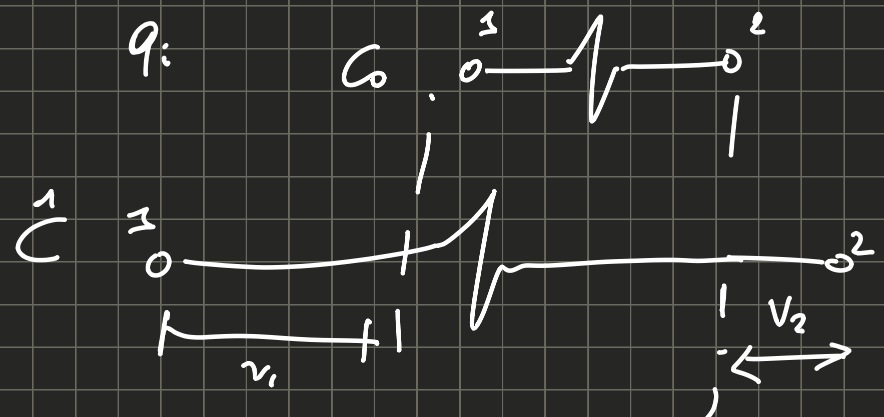
Possiamo scrivere

$$\underset{3n_c \times 1}{\tilde{\underline{U}}} = \underset{3n_c \times N}{\underline{\underline{I}}}\ \underset{N \times 1}{\underline{U}} = \begin{pmatrix} \overbrace{-\underline{\underline{Z}}_A^{-1} \underline{\underline{Z}}_B}^{\text{Non serve praticamente}} \\ \underline{\underline{I}} \end{pmatrix} \underline{U} = \begin{pmatrix} -\underline{\underline{Z}}_A^{-1} \underline{\underline{Z}}_B \underline{U} \\ \underline{U} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \tilde{\underline{U}}_A \\ \leftarrow \tilde{\underline{U}}_B \end{matrix}$$

Avevo sbagliato l'ultima volta

Per implica che fissato $\underline{U}$ determiniamo $\tilde{\underline{U}}$

9:



$$\Delta v = v_1 + v_2$$

Possiamo definire v_1 e v_2 come elementi di $\underline{V}_e$

Possiamo risolvere un sistema elastico mettendo ogni corpo elastico in q.

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_{n_c})^T$$

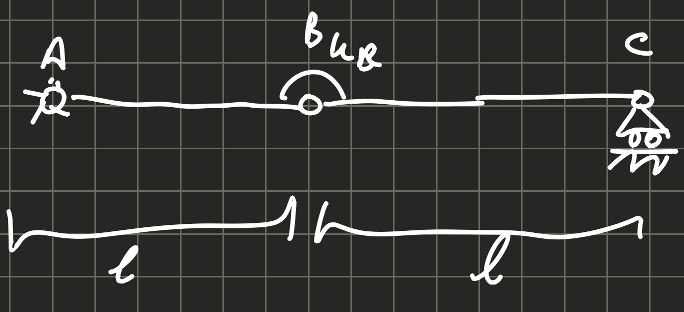
$$q = \underline{\underline{B}}\,\underline{U}$$ } Equazione di congruenza interna

Sono congruenti al sistema esterno di vincoli perfetti e i loro spostamenti.

Le deformazioni elastiche compatibili con il sistema di corpi rigidi e $\underline{U}$

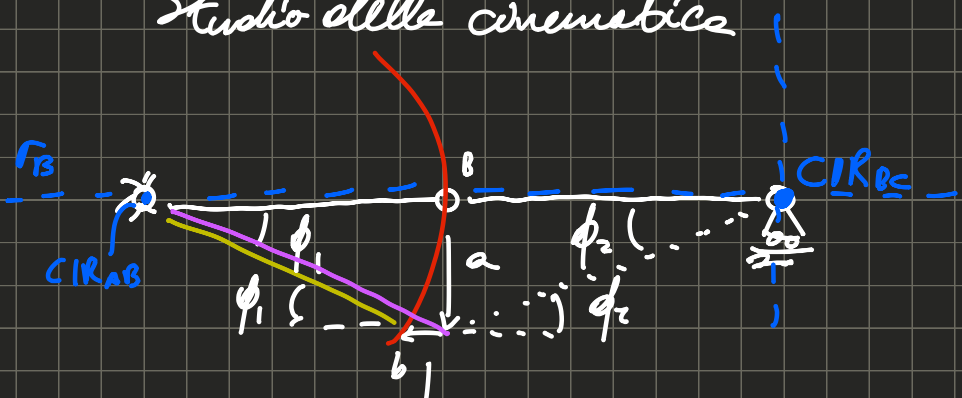
$\Rightarrow q$

Esempio



$N = 3n_c - m_v = 6 - 5 = 1 \rightarrow$ Possiamo usare una sola coordinata lagrangiana

Studio della cinematica



Togliamo la molla per studiare la cinematica perché non impongono vincoli:

B può andare in giù
e un pò a destra e
sinistra

Come detto nell'ultima
lezione supponiamo che
il moto sia piccolo
$\phi_1 << 1$
$\Downarrow$
ci permette
linearità

$a = l \sin \phi_1 = l\phi_1 + O(\phi_1^3)$
$b = l(1-\cos \phi_1) = 0 + O(\phi_1^3)$

: cambio reale
: cambio che consideriamo per spostamenti
piccoli:

Esiste CIR di BC, B ha CIR come r_B perché
per spostamenti piccoli può andare solo su e giù,

La cerniera significa che non si può rompere il
legame tra altre ⇒ esiste connessione fra ϕ_1 e ϕ_2

$v_B = l\phi_1 = l\phi_2 \Rightarrow \phi_1 = \phi_2 = \phi$

È la nostra coordinata
lagrangiana

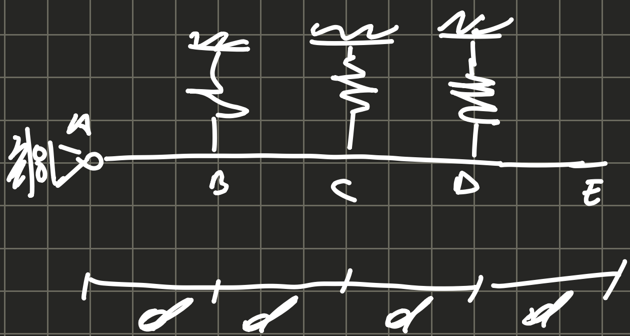
La coordinata lagrangiana non è unica, potremmo
prendere $v_B = l\phi$ come coordinata
e definire tutto in base a quello.
Quando è definita la lagrangiana dobbiamo

definire tutto come quella

Rimettendo la molla vediamo che si deforma e avremo

$$q = \Delta\phi = \phi_1 + \phi_2 = 2\phi$$ Equazione di congruenza interna

Esempio 2



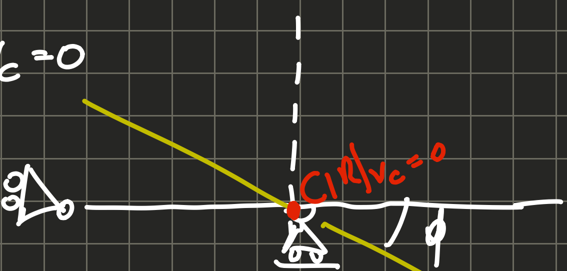
$\ell = 4d$

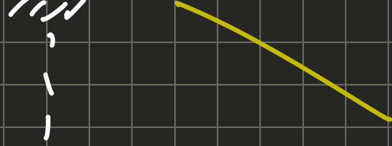
$N = 3n - m_v = 3 - 1 = 2$

$\underline{U} = (u_1, w_2)^T$
?

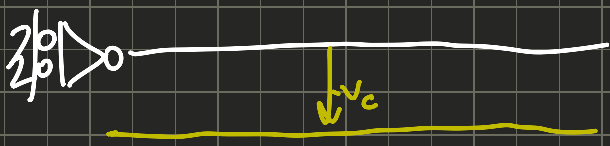
Blocchiamo con gdl alla volta e vediamo come va il moto, permettendoci di trovare le lagrangiane → come a MAAM

se $v_C = 0$





se $\phi = 0$



Possiamo dire che $\underline{U} = (v_c, \phi)^T = \begin{pmatrix} U_1 = v_c \\ U_2 = \phi \end{pmatrix}$

Troviamo

$$v_B = v_c - d\phi = U_1 - d\,U_2$$
$$v_C = v_c = U_1$$
$$v_D = v_c + d\phi = U_1 + d\,U_2$$

Sappiamo anche qui:

$$q_1 = v_B$$
$$q_2 = v_C$$
$$q_3 = v_D$$

Identificato le lagrangiane possiamo definire tutto quello che ci serve per definire $\hat{C}$

Avremmo potuto risolvere con $\underline{\underline{Z}}$, ma ci serve un idea di come va il sistema. L'uso di $\underline{\underline{Z}}$ ci da una equazione generale.

Statica 11:21

Forze Attive

$$\underline{f}_i = (F_{v_i}, F_{v_i}, M_i) \quad i = 1, 2, \dots, n_c$$

↳ Vettore risultante delle forze attive su tutti i corpi

$$\underline{\tilde{F}} = (\underline{f}_1^T, \underline{f}_2^T, \dots, f_{nc}^T)_{3n_c \times 1} \rightsquigarrow \text{Stesso senso di } \underline{\tilde{U}}$$

ma per le forze.

↳ Vettore delle forze attive applicate ai corpi rigidi

Vincoli → Bilanciano le forze attive

$$\underline{R} = (R_1, \dots, R_{mv})^T \quad m_v \times 1 \quad \text{Reazioni vincolari}$$

$$\underline{Q} = (Q_1, \dots, Q_{ne})^T \quad n_e \times 1 \rightarrow \text{Reazioni interne (elastiche) da elementi}$$

$C_0 \to C^*$ Troviamo C^* in cui nascono $\underline{R}$ e $\underline{Q}$ che globalmente contrastano $\underline{\tilde{F}}$

$$\underline{G} = (\underline{R}^T, \underline{Q}^T) \to \text{Insieme delle reazioni sul sistema}$$

azioni reattive del sistema

$n_r = m_v + n_e$

Per piccoli spostamenti

Problema elastico → date le forze vediamo una soluzione congruente e equilibrata.

Cinematica → congruente non equilibrata
Statica → equilibrata non congruente

Prendo dei coefficienti y_{ij}

$$\sum_{i=1}^{n_r} y_{ij}\, G_j + \sum_{j=1}^{3n_c} \tilde{W}_{ij}\, \tilde{F}_j = 0$$

Legame tra forze attive e reattive per piccoli spostamenti
$i = 1, 2, \dots, 3n_c$

Contributo delle forze reattive

Contributi delle forze attive

Coefficienti (delle equazioni reattive / attive

Forze sul sistema e i suoi vincoli

Forma Matriciale

$$\underset{3n_c \times n_r}{\underline{\underline{Y}}}\ \underset{n_r \times 1}{\underline{G}} + \underset{3n_c \times 3n_c}{\underline{\underline{\tilde{W}}}}\ \underset{3n_c \times 1}{\underline{\tilde{F}}} = \underline{0}$$

Sistema di equazioni di equilibrio del nostro problema

Esistono soluzioni al sistema?

→ Ipotizziamo reazioni vincolari poste bene.

→ (HP) ← Formulizzata

$$\text{rango}(\underline{\underline{Y}}) = 3n_c$$

Caso 1) $3n_c > n_r$ → gdl nel sistema senza vincoli

sovra determinato

→ Ipostatica

Non ci sono abbastanza vincoli per i

corpi

In generale $\quad \nexists \underline{G} \Rightarrow \nexists C^*$

↳ Significa che non che una equazione non implica una soluzione ad un'altra equazione.

$M_A = 0$

$P_{TOT} - Q = 0$

$Q\frac{l}{2} - P_{TOT}\frac{3}{4}l = 0$

Una soluzione non da soluzione all'altra.

Caso 2) $\quad 3n_c = n_r \quad$ Sistema è determinato

↳ Isostatico / Staticamente Determinato

perchè rango$(\underline{Y}) = 3n_c$

$\downarrow$

$\exists \underline{Y}^{-1} \Rightarrow \exists! \underline{G}, \ \exists C^*$

è quadrata, possiamo risolvere il sistema

↪ $\underline{Y}\,\underline{G} = -\tilde{\underline{W}}\check{F}$

Pongo → $y_0 = -\tilde{\underline{w}}\tilde{F}$ → Forze attive, lo stesso senso del vettore dei termini noti

$\underline{G} = \underline{Y}^{-1} y_0$

Caso 3) $3n_c < n_r$ Sotto determinato

↳ Iperstatico

Meno condizioni che servono per risolvere le equazioni ⇝ Più incognite di quanto ne posso calcolare.

$\exists \infty^S \; C^*$

$S = n_r - 3n_c \rightarrow$ Grado di iperstaticità del sistema

Se vogliamo risolvere $\underline{\underline{Y}}\,\underline{G} = \underline{Y}_0$ → Partiamo per trovare parte che possiamo invertire

$$\begin{pmatrix} \underset{3n_c \times 3n_c}{\underline{\underline{Y}}_A} & \underset{3n_c \times S}{\underline{\underline{Y}}_B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{G}_{A\,3n_c \times 1} \\ \underline{G}_{B\,S \times 1} \end{pmatrix} = \underline{Y}_{0\,3n_c \times 1}$$

$\text{rango}(\underline{\underline{Y}}_A) = 3n_c \Rightarrow \underline{\underline{Y}}_A$ invertibile $\exists\, \underline{\underline{Y}}_A^{-1}$

Possiamo scrivere come:

$$\underline{\underline{Y}}_A \underline{G}_A + \underline{\underline{Y}}_B \underline{G}_B = \underline{y}_0$$

$$\underline{\underline{Y}}_A \underline{G}_A = \underline{Y}_0 - \underline{\underline{Y}}_B \underline{G}_B$$

$$\boxed{\underline{G}_A = \underline{\underline{Y}}_A^{-1} \underline{Y}_0 - \underline{\underline{Y}}_A^{-1} \underline{\underline{Y}}_B \underline{G}_B}$$

$\underline{G}_B$ è un vettore di parametri, possono dare valore ad S delle sue componenti, e da lì posso calcolare uno stato equilibrato

Fissate le forze attive $(\underline{Y}_0)$ possiamo calcolare parte delle forze reattive, per $\underline{G}_B$ non posso dire niente

↳ di cui non abbiamo libertà

Allora $\underline{Q}_B = \underline{X}_{s\times 1}$ $\underline{X}$ diventa il vettore di parametri

che descrivono le possibili configurazioni equilibrate

→ Vettore delle incognite iperstatiche

⇒ ci sono s gradi di libertà nel sistema.

→ incognito, non posso determinarlo per equilibrio devo fissarlo

Riguarda perchè ho mancato una cosa

Problema Elastico → congruente ed equilibrata

rispetta tutti i vincoli

↳ Forze attive bilanciano forze reattive

Cinematica → solo congruente

Statica → solo equilibrato

C^* configurazione staticamente ammissibile

↳ esiste solo sotto certe condizioni

→ Non è detto che sia la soluzione al problema elastico, perchè non consideriamo il sistema in una forma deformata perchè abbiamo fatto l'ipotesi di piccoli spostamenti quindi sappiamo che l'equilibrio sarà in una forma leggermente deformata non una macroscopicamente diversa.