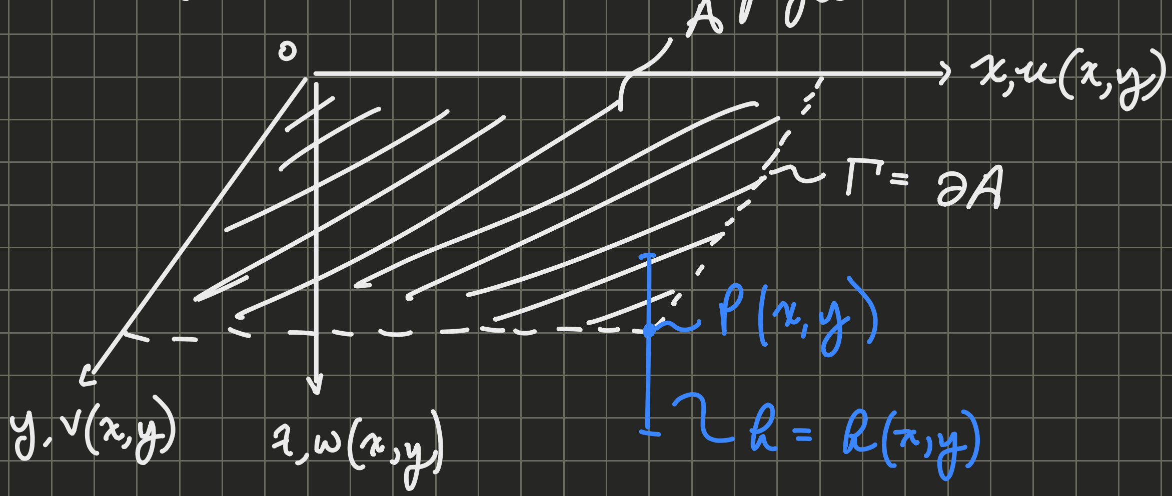
Lezione 16 - Piastre con spigoli



Cinematicamente è semplicemente una derivazione in 2D delle travi.

Gli sforzi erano un po' più difficile.

u, v, w Spostamenti generalizzati
$h \to$ spessore della piastra.

Spostamenti
$$\begin{cases} S_x = -z\phi_x \\ S_y = -z\phi_y \\ S_z = w \end{cases} \Longrightarrow$$

Deformazioni locali
$$\begin{cases} \varepsilon_x = z\chi_x \\ \varepsilon_y = z\chi_y \\ \varepsilon_z = 0 \\ \gamma_{xy} = z\chi_{xy} \end{cases}$$
$$\gamma_{xz} = \partial_x w - \phi_x = t_x$$
$$\gamma_{yz} = \partial_y w - \phi_y = t_y$$

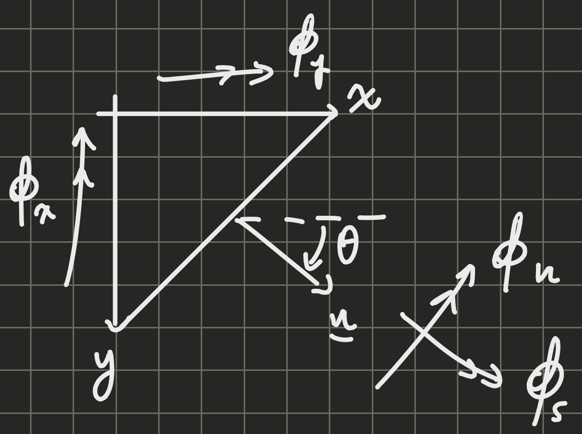
$\chi_i \to$ curvature flessionali
$\chi_{ij} \to$ curvatura torsionale

$t_x, t_y \to$ deformazione tagliante media.

$$\left.\begin{aligned} t_x = 0 &\iff \phi_x = \partial_x w \\ t_y = 0 &\iff \phi_y = \partial_y w \end{aligned}\right\} \text{Modello Kirchhoff}$$

$\Rightarrow$ possiamo scrivere la cinematica con una sola variabile.

$\omega(x,y)$



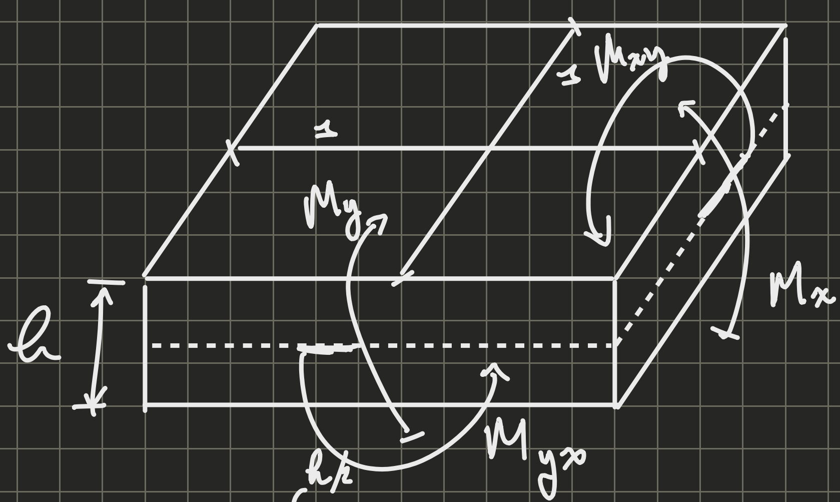
$$\begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_x & -\alpha_y \\ \alpha_y & \alpha_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_n \\ \phi_s \end{pmatrix}$$

$$q = (\chi_x, \chi_y, \chi_{xy})^T$$

Azioni Interne

$\sigma_z = 0 \rightsquigarrow$ per le nostre ipotesi

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz} \neq 0$



$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z\,\sigma_x \, dz$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z\,\sigma_y \, dz$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy}\, z \, dz$$

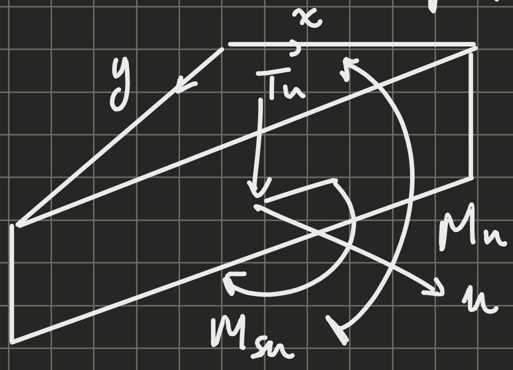
Per unità di lunghezza

$$T_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz}\, dz \qquad T_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz}$$

$$\underline{Q} = \left(M_x, M_y, M_{xy} \right)^T$$

↳ I tagli esistono, però sono ricavati per equilibrio

Azioni al bordo, perpendicolari a $\underline{n}$, vettore ortogonale al piano

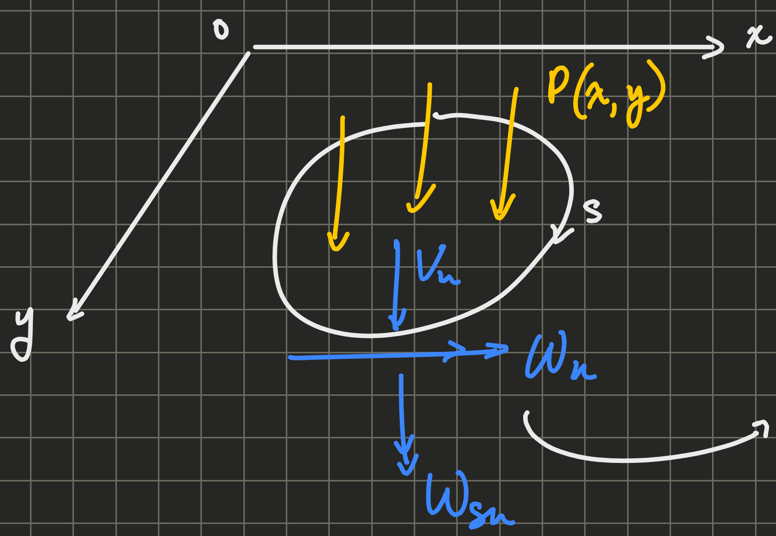


$$T_n = T_x \alpha_x + T_y \alpha_y$$

$$M_n = M_x \alpha_x^2 + 2 M_{xy} \alpha_x \alpha_y + M_y \alpha_y^2$$

$$M_{sn} = (M_n - M_x)\, \alpha_x \alpha_y + M_{xy} \left(\alpha_x^2 - \alpha_y^2 \right)$$

Condizioni di Equilibrio



— = carichi esterni sul bordo.

Azioni al bordo

V_n è T_n ma è azioni esterne non interne

Il calcolo (nella ultima lezione ci ha portato a trovare 3 termini che si dovevano annullare:

$$\int_A \left[\partial_x^2 M_x + \partial_{xy}^2 M_{xy} + \partial_y^2 M_y + p\right] \hat{w} \, dA +$$

$$+ \underbrace{\int_\Gamma (W_n + M_n)\, \partial_n \hat{w} \, ds}_{\text{Flessionale}} + \underbrace{\int_\Gamma \left[(V_n - T_n)\, \hat{w} + (W_{sn} + M_{sn})\, \partial_s \hat{w}\right] ds}_{\text{Rotazione torsionale}}$$

$= 0$

$$\Rightarrow \partial_x^2 M_x + \partial_{xy}^2 M_{xy} + \partial_y^2 M_y + p = 0 \quad \forall \hat{w}$$

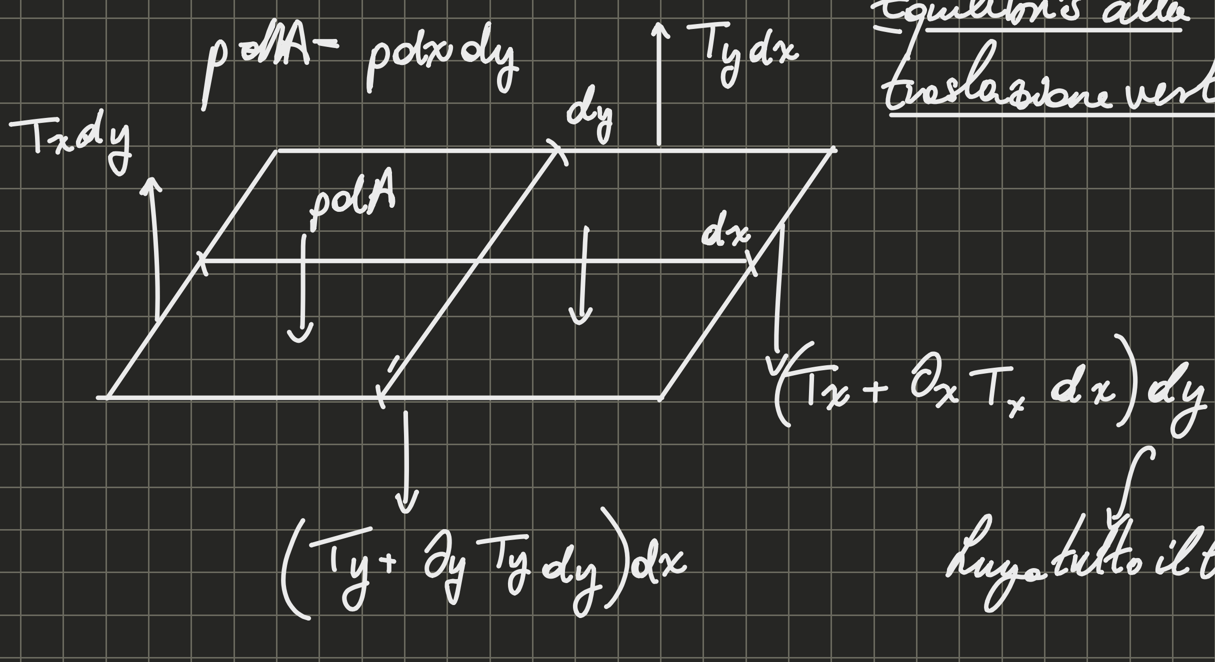
↳ otteniamo $p = -(\ldots)$ in ogni punto della piastra

↳ equazione di equilibrio indefinito

→ Ricavo più aderente alla fisica

Equilibrio alla traslazione verticale

$p\,dA = p\,dx\,dy$

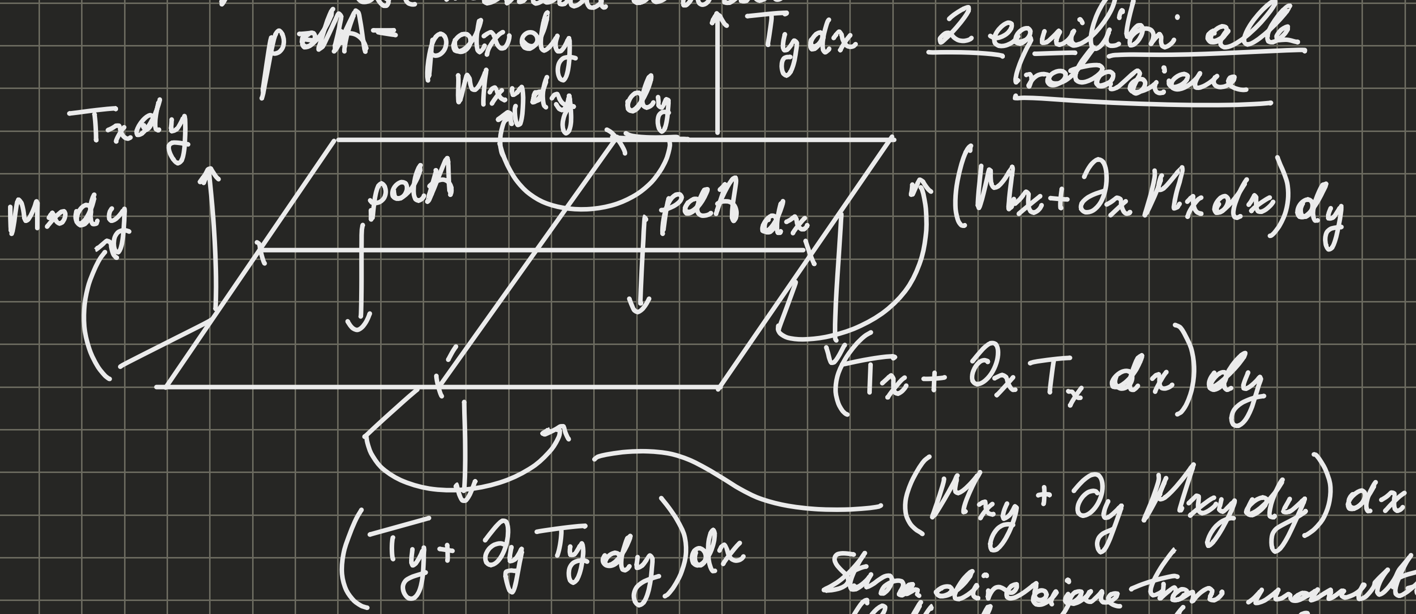


$\int$ lungo tutto il lato

$$\boxed{\partial_x T_x + \partial_y T_y + p = 0}$$ → Equazione di equilibrio

Poniamo i momenti a bordo:

2 equilibri alle rotazione



Stessa direzione tra momento flettente e torcente, perché uno innesca l'altro.

$$\partial_x M_x \cancel{dx dy} + \partial_y M_{xy} \cancel{dx dy} - T_x \cancel{dx dy} = 0$$

$$\partial_x M_x + \partial_y M_{xy} - T_x = 0$$

Stesso ragionamento lungo y, altro:

$$\partial_x M_{xy} + \partial_y M_y - T_y = 0$$

Dalle equazioni otteniamo anche che:

$$W_n + M_n = 0 \qquad \text{oppure} \qquad \partial_n \hat{w} = 0 \Rightarrow \partial_n w = \underset{\sim}{\phi}$$

↳ ⇒ è nota

Dalla 3a parte della equazione di equilibrio

$W_s - W_n \partial_s \hat{w}$ può esser integrata per parti:

$$= \underbrace{\left[(W_{sn} + M_{sn}) \hat{w} \right]_0^{L_\Gamma}}_{=0 \text{ se il bordo è regolare}} - \int_\Gamma \partial_s (W_{sn} + M_{sn}) \hat{w} \, ds$$

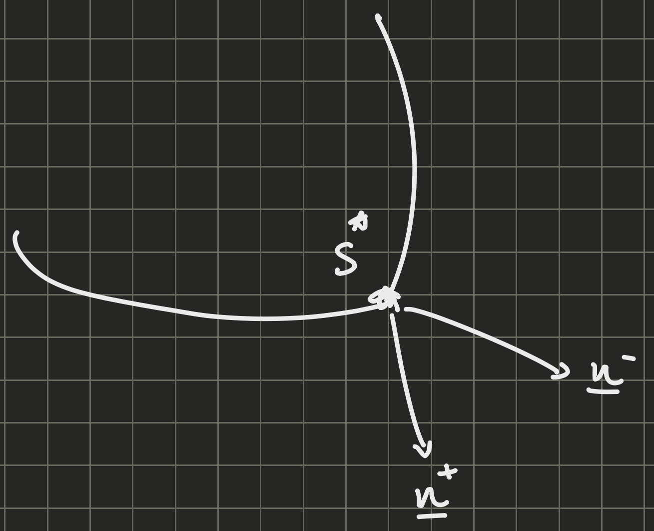
Per aver equilibrio allora bisogna imporre:

$T_n^{*} = V_n^{*}$ oppure $\hat{\omega} = 0 \Rightarrow \omega = \bar{\omega}$

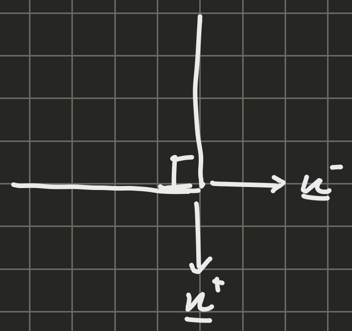
dove $T_n^{*} = T_n + \partial_s M_{sn}$

$V_n^{*} = V_n - \partial_s W_{sn}$

→ <u>Cosà succede se il bordo non è regolare</u>



caso estremo



$\underline{n}^+ \neq \underline{n}^-$

$$\Big[\underbrace{(W_{sn}+M_{sn})}_{G}\,\hat{\omega}\Big]_0^{s^{*-}} + \Big[\underbrace{(W_{sn}+M_{sn})}_{G}\,\hat{\omega}\Big]_{s^{*+}}^{0(=L_\gamma)} - \int_\Gamma \dots$$

$$= G^- - \cancel{G^0} + \cancel{G^0} - G^+$$

$$= \Big[(W_{sn}+M_{sn})^- - (W_{sn}+M_{sn})^+\Big]\,\omega(s^*)$$

ω è lo stesso, l'unica cosa che può cambiare è la sua derivata, perché se ω varia da s^- e s^+ significa che c'è una lacerazione

Per aver equilibrio o ω è bloccato allo spigolo, o si fa la discontinuità di momenti. → di momento torcente M_{sn} deve esser uguale al salto W_{sn}

Il salto deve esser uguale per equilibrio, questo salto allora è un momento per unità di lunghezza

Quindi o blocchiamo w allo spigolo, generando una reazione che è un carico concentrato o w è libero e si ha condizione di equilibrio su un oggetto con segno di carico concentrato.

Nel caso

Per ogni spigolo, controlliamo un oggetto con segno di carico concentrato.

$$\overset{*}{F} = 2 \overset{*}{M}_{xy}$$ → momento torcente agli spigoli. → carico concentrato generato

↳ nella direzione di w.

Una piastra non vincolata agli spigoli si solleva e si annulla il momento torcente.

Ovunque al bordo abbiamo compressioni, ma se non si mettono vincoli agli spigoli si ha trazione a loro, c'è un cambio di segno e molto concentrato quindi quando progettando bisogna tenerne conto.

$\boxed{11:47}$

Legame costitutivo

D - senso di rigidezza flessionale

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

Poisson

$$M_x = D(\chi_x + \nu \chi_y)$$
$$M_y = D(\nu \chi + \chi_y)$$
$$M_{xy} = D \frac{(1-\nu)}{2} \chi_{xy}$$

$\frac{h^3}{12}$ = inerzia flessionale di una sezione di lato unitario.

$\frac{1}{(1-\nu^2)}$ → le strisce delle travi si spostebbero ortogonalmente, ma visto che ci sono altre strisce lo spostamento è vincolato, quindi aumentando la rigidezza.

ricordandoci che: $\chi_x = -\partial_x^2 w$

$$\chi_y = -\partial_y^2 w \quad \chi_{xy} = -2\partial_{xy}^2 w$$

⇒ si ottiene un legame tra momenti e derivate di w.

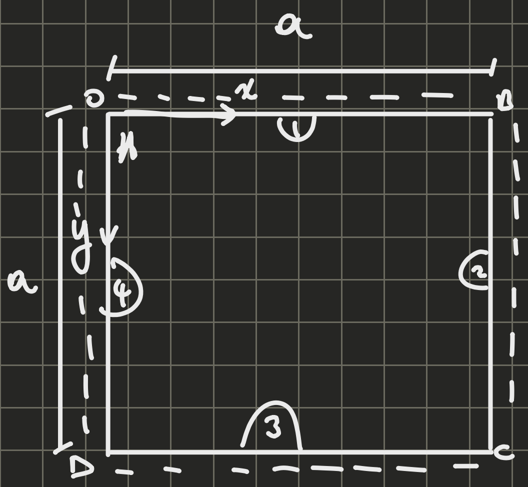
$$\partial^2 M_x + 2\partial_{xy}^2 M_{xy} + \partial_y^2 M_y + p = 0$$

Si può sostituire le M, e ricavare la equazione della superficie elastica:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}$$

Equazione superficie elastica (Germain-Lagrange)

Applicazione



Vincoli su lati 1 e 3:

Scriviamo $w=0$ ai lati 11:57

$\partial_y^2 w = 0 \rightarrow$ momento normale è nullo.

Vincoli su 2 e 4:

$w=0$, $\partial_x^2 w = 0 \rightarrow$ momento normale è nullo.

È un piatto in semplice appoggio quindi il momento flettente deve esser nullo.
(o la rotazione)

Spigoli

A e C = $F = -2M_{xy}^{A,C}$

B e D = $F = 2M_{xy}^{B,D}$

Rappresentazione di p: (Usando una serie doppia di Fourier)
perché 2D

$$p(x,y) = \sum_{n,m} P_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)$$

$m, n \in \mathbb{N}^+$

$$\sin\left(\frac{h\pi x}{a}\right)\cdot\sin\left(\frac{k\pi y}{a}\right)p(x,y)=\sum_{nm}{}' P_{nm}\sin\frac{n\pi x}{a}\cdot\sin\frac{h\pi x}{a}\cdot\sin\frac{m\pi y}{a}\sin\frac{k\pi y}{a}$$

$h,k\in\mathbb{N}$

Vale anche integrando:

$$\int_0^a\int_0^a\sin\left(\frac{h\pi x}{a}\right)\cdot\sin\left(\frac{k\pi y}{a}\right)p(x,y)\,dxdy=\int_0^a\int_0^a\sum_{nm}{}' P_{nm}\sin\frac{n\pi x}{a}\cdot\sin\frac{h\pi x}{a}\cdot\sin\frac{m\pi y}{a}\sin\frac{k\pi y}{a}\,dxdy$$

Sappiamo che:

$$\int_0^a \sin\frac{m\pi y}{a}\cdot\sin\frac{k\pi y}{a}=\begin{cases}0 & \text{se } k\neq 1\\ \frac{a}{2} & \text{se } k=m\end{cases}$$

In generale

$$=\begin{cases}0 & h,k\neq m,n\\ \frac{a^2}{4} & k=m,\ h=n\end{cases}$$

Allora grazie all'integrazione: $\frac{a^2}{4}P_{nm}=\int_0^a\int_0^a p(x,y)\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{a}\,dxdy$

Si può trovare P_{nm} al variare di n,m

se $p(x,y)=p_0$ allora $P_{nm}=\frac{16P_0}{\pi^2 nm}$ (con n,m dispari)

carico costante

Prendendo questo oggetto e mettendolo nella legge costitutiva:
(P_{nm} a qualsiasi configurazione, non necessariamente quella costante)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{2\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\sum_{n,m}{}'\frac{P_{nm}}{D}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)$$

Facciamo finta che la soluzione prenda forma:

$$w(x,y) = \sum_{n,m} W_{n,m} \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{a}$$

Questa soluzione deve soddisfare, sia la equazione di campo di Germain-Lagrange sia le condizioni al contorno.

→ sui bordi si annulla, perché si annulla uno dei due, anche le derivate seconde si annullano per i seni quindi la soluzione di se rispetta le condizioni al contorno, utile perché significa che non dobbiamo controllarle. Sviluppando il $w(x,y)$ preso, e calcolando le derivate quarte, troviamo una relazione lineare tra W_{nm} e P_{nm}

Se la piastra rettangolare è in semplice appoggio si può sviluppare in serie il carico e assumere che w abbia la stessa forma.