Lezione 5

Applichiamo una volta i carichi esterni, 1 volta le incognite iperstatiche come se fossero carichi esterni

famiglia

Definizioni di leri

$$\hat{C}: \{ \underline{\hat{U}}, \underline{\tilde{\hat{U}}} = \underline{\underline{I}}\,\underline{\hat{U}}, \hat{q} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\hat{U}} \}$$ → che descrivono $\hat{C}$

famiglie che descrivono C^*

$$C^*: \{ \underline{\tilde{F}}^*, \underline{X}^*, \underbrace{\underline{R}^* = \underline{\underline{M}}^{(0)} \underline{\tilde{F}}^* + \underline{\underline{M}}^{(x)} \underline{X}^*}, \underline{Q}^* = \underline{\underline{N}}^{(0)} \underline{\tilde{F}}^* + \underline{\underline{N}}^{(x)} \underline{X}^* \}$$

→ Possiamo sfruttare la struttura isostatica principale, separando i carichi esterni in "0" e poi ogni carichi ogni altro

→ NB: se struttura isostatica

$$C^* = \{ \underline{\tilde{F}}^*, \underline{R}^* = \underline{\underline{M}}^{(0)} \underline{\tilde{F}}^*, \underline{Q}^* = \underline{\underline{N}}^{(0)} \underline{\tilde{F}}^* \}$$

PLV come "identità" → postulati come veri

$$L_{ext} = \underline{\tilde{F}}^{*T} \underline{\hat{U}} = \underline{Q}^{*T} \hat{q} = L_{INT} \iff \forall C^*, \hat{C}$$

Test

Reale

Negli ausiliari prendiamo $\underline{\tilde{F}}^* = 1$ e da lì possiamo trovare $\underline{\hat{U}}$ vero

Corollario 1

$$L_{ext} = \underline{\tilde{F}}^T \underline{\hat{U}} = \underline{Q}^T \hat{q} = L_{INT} \quad \forall \hat{C} \implies \{ \underline{\tilde{F}}, \underline{Q} \} \in C^*$$

Dati $\underline{\tilde{F}}^T$ e $\underline{Q}^T$, se è verificata per ogni $\forall \hat{C}$ allora $\underline{\tilde{F}}, \underline{Q}$ individuano una statica ammissibile cioè sono in equilibrio

Corollario 2

$$L_{ext} = \underline{\tilde{F}}^{*T} \underline{\tilde{U}} = \underline{Q}^{*T} q = L_{INT} \quad \forall C^* \implies \{ \underline{U}, q \} \in \hat{C}$$

Dati $\underline{U}$, q se l'equazione è verificata $\forall C^*$ sono congruenti/individuano una cinematica ammissibile.

penso espanderà

Applicazione 8:42 cosa stava dicendo ← dopo

Corollario 2 → Calcolo spostamenti in una struttura isostatica

$$\underline{\tilde{F}}^{*T}\,\underline{\tilde{U}} = \underbrace{\underline{\tilde{F}}^{*T}\,\underline{\underline{N}}^{(0)T}}_{\underline{Q}^{*T}}\,\underline{q} = \underline{\tilde{F}}^{*T}\,\underline{\underline{N}}^{(0)}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{N}}^{(0)}\,\underline{\tilde{F}}$$

→ Tutto questo per ricavare $\underline{\tilde{U}}$

→ Significa che far variare C^* significa prendere $\underline{\tilde{F}}$ qualsiasi, non dobbiamo trovare Q

Generico legame costitutivo

Perché $Q_i = k_i q_i$

Stato di deformazione delle molle

$$q = \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{k_i} \end{pmatrix} \cdot \underline{Q}$$

← quando $k_i > 0 \Rightarrow q_i = \frac{Q_i}{k_i}$

→ Non è $\underline{Q}^*$, allora dipende da $\underline{\tilde{F}}$ non $\underline{\tilde{F}}^*$

$$= \underbrace{\underline{\underline{C}}\,Q}_{\text{Equilibrio elastico}} = \underbrace{\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{N}}^{(0)}\,\underline{\tilde{F}}}_{\text{Cambiato relazione}}$$ → abbiamo definito q in base a $\underline{\underline{C}}$ e $\underline{\tilde{F}}$

Matrice delle cedevolezze

Lavoro interno è 0 per ogni statica ammissibile

$$\underline{\tilde{F}}^{*T}\left(\underline{\tilde{U}} - \underline{\underline{N}}^{(0)}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{N}}^{(0)}\,\underline{\tilde{F}}\right)^{\text{SE}} = 0 \quad \forall\, \underline{\tilde{F}}^*$$ (definita tutta da $\underline{\tilde{F}}^*$)

$$\Downarrow$$

Allora è statica ammissibile ⇒ deve annullarsi l'interno di ( )

$$\boxed{\underline{\tilde{U}} = \underline{\underline{N}}^{(0)T}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{N}}^{(0)}\,\underline{\tilde{F}}}$$

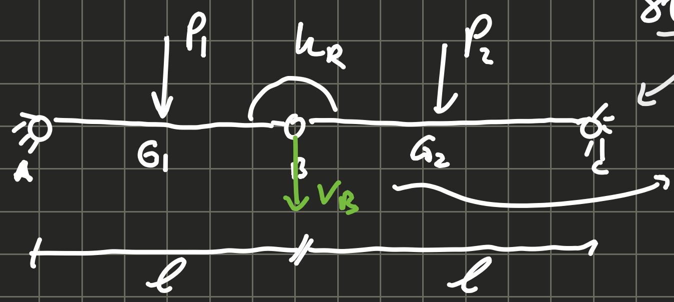
Matrice di coefficienti usata per calcolare azioni interne

$\underline{\tilde{F}}^*$ = carico qualsiasi test → ⇒ stiamo provando tutte le C^*

↳ da sostanza al test di variare tutte le statiche ammissibili

$\underline{\tilde{F}}$ = vettore dei carichi effettivamente applicati alla struttura. Vettori di carichi nel problema reale

Esempio → uso pratico



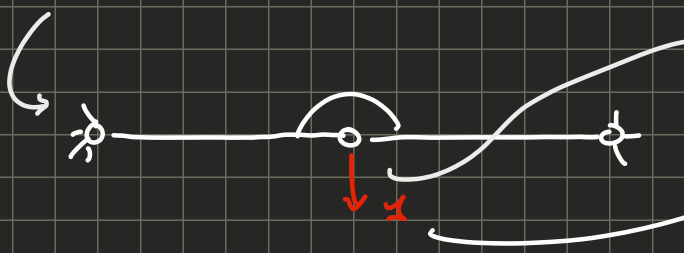
Struttura reale

Obbiettivo di calcolo

Operativamente come si fa?

↳ Prendiamo una famiglia $\underline{\tilde{F}}^*$ particolare

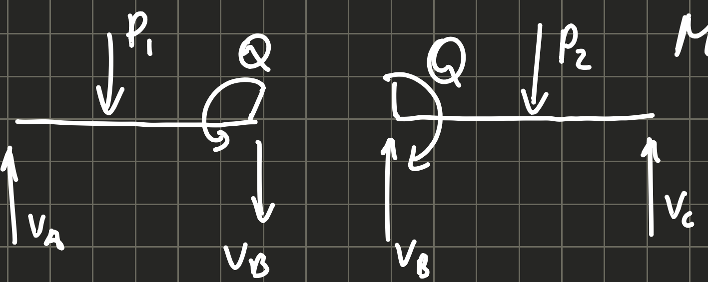
Struttura ausiliaria (o fittizia)



→ Un particolare $\underline{F}^*$

Carico unitario, non lo stesso dei carichi veri

Soluzione struttura reale



$$M_A)\quad V_c \cdot 2l - P_1 \cdot l/2 - P_2 \frac{3}{2} l = 0$$

$$V_A + V_c = P_1 + P_2$$

$$-Q - P_2 \frac{l}{2} + V_c\, l = 0$$

Equazioni globali + una equazione all'asta → necessarie per trovare Q

$$\rightarrow \quad V_c = \frac{3P_2 + P_1}{4} \qquad V_A = \frac{3P_1 + P_2}{4}$$

Q → azioni interne

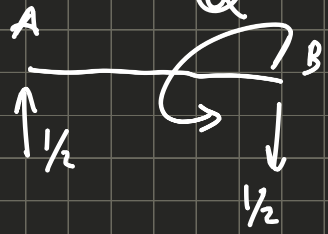
$$Q = \frac{P_1 + P_2}{4}\, l$$ → Q per trovare q

$$q = \frac{(P_1+P_2)l}{4k_R} = v_B$$

$\tilde{F}^*$ può esser qualsiasi perché il sistema è isostatico quindi sappiamo calcolare $\underline{Q}^*$ associato

<u>Soluzione struttura ausiliaria</u>

$Q^{(1)}$ → Azione interna nella molla ausiliaria.



→ L'altro lato sarà uguale, non è utile per questo.

$$Q^{(1)} - \frac{1}{2}l = 0 \rightarrow Q^{(1)} = \frac{1}{2}l$$

→ Questo è il $\underline{Q}^*$ in equilibrio con $\tilde{F}^*$ unitario che abbiamo preso

PLV

C^* Statica Ammissibile $\xrightarrow{Da}$ Struttura ausiliaria, perché $\tilde{F}$ è $\underline{Q}^*$

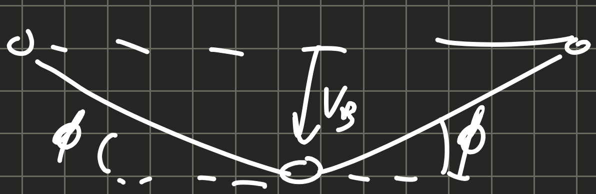
$\hat{C}$ Cinematica Ammissibile $\xrightarrow{Da}$ Struttura Reale, perché q

$$L_{ext} = 1 \cdot v_B = \frac{1}{2} l \cdot \frac{(P_1+P_2)l}{4k_R} = L_{INT}$$

$$\Rightarrow v_B = \frac{(P_1+P_2)l^2}{8k_R}$$

Attiviamo la forza in B per direttamente calcolare v_B e evidenziarla determinarlo.

↳ Verifichiamo dalla cinematica del sistema



$q = 2\phi$

$$\Rightarrow \phi = \frac{q}{2} = \frac{(P_1+P_2)l}{8k_R}$$

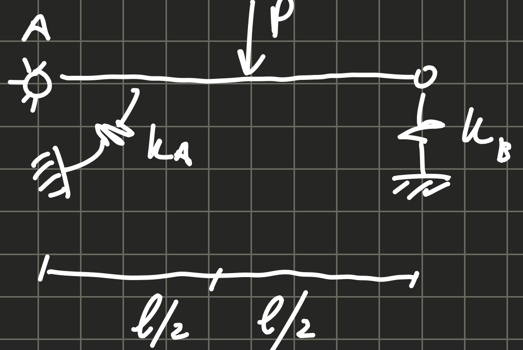
Risultato di cinematica e PLV sono lo stesso

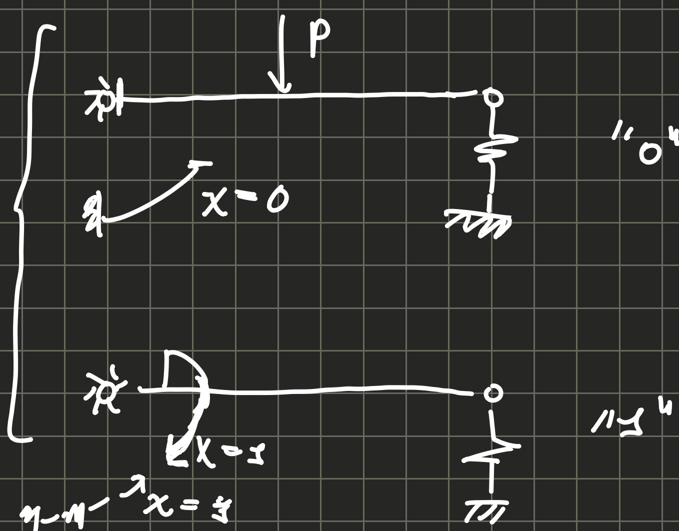
$$v_B = \ell\phi = \frac{(P_1+P_2)\ell^2}{8k_R} \quad \text{q.e.d}$$

↳ quello che abbiamo fatto è giusto

La struttura reale non cambia mai, cambiamo solo dove è $\hat{F}$ per cambiare Q che poi ci permette di trovare v_B.

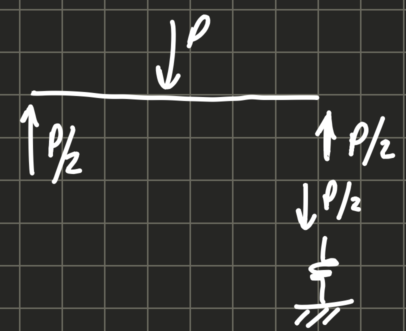
Applichiamo corollario 2 per scrivere automaticamente le equazioni risolventi per il metodo delle forze.
= equazioni di congruenza

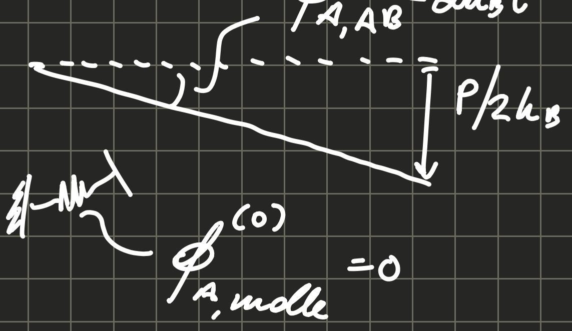




Prendiamo $\underline{X} = k_A$

"0" ↳

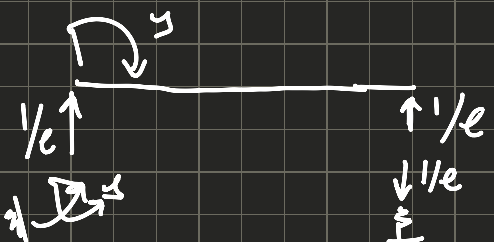




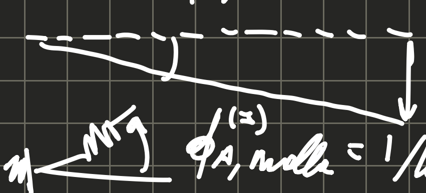
$$\phi^{(0)}_{A,AB} = \frac{P}{2k_B\ell}$$

$$\phi^{(0)}_{A,molle} = 0$$

"1"



$$\phi^{(1)}_{A,AB} = \frac{1}{\ell^2 k_B}$$



$$\frac{1}{\ell k_B}$$

$$\phi^{(1)}_{A,molle} = 1/k_A$$

Spostamento Generalizzat

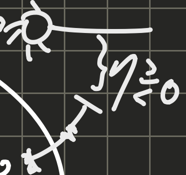
X tende a chiudere la molla

$$\left\{ \eta = \underbrace{\left(\phi^{(1)}_{A,\text{molle}} + \phi^{(1)}_{A,AB} \right)}_{\text{Ausiliaria 1 : X}} X + \underbrace{\phi^{(0)}_{A,AB}}_{\text{Struttura Ausiliaria "0"}} = 0 \right.$$

Sta andando in su perchè le abbiamo separate

Se noi stacchiamo le molle e dia X valore qualsiasi

η è la rotazione relativa tra molla e trave



→ sono in direzioni diverse per come abbiamo funzionano le molle.

→ Rotazione relativa in base a X, nella configurazione principale dove abbiamo staccato le molle.

→ deve esser uguale a 0, per il fatto che la molla e trave sono connesse, allora abbiamo trovare X che sta congruente con la realtà

→ Equazione di Congruenza del Metodo delle Forze

Avendo staccato abbiamo perso la congruenza

→ Staccando è l'unico modo in cui funziona.

→ Ausiliarie hanno staccato

Moltiplichiamo perchè è lineare quindi moltiplichiamo l'effetto di X = 1 per l'X vero per aver l'effetto vero.

Il valore di X che permette la congruenza è:

$$\eta = \eta_{11} X + \eta_{01} = 0 \longrightarrow X = \frac{-\eta_{01}}{\eta_{11}}$$

→ Spostamenti veri • le azioni interne ai punti che stiamo guardando

Generalizzazione delle equazioni di congruenza

Prendiamo una struttura x volte iperstatica

↳ Diamo per scontato che conosciamo le strutture ausiliare

$$\eta_{0i} = \underline{n}_i^{(x)T} \cdot \underbrace{\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{N}}^{(0)}\,\underline{\tilde{F}}}_{q}$$

Quale struttura

direzione dello spostamento

Scamesso tutte le iperstatiche, e lasciando solo $x_i = 1$

→ Come $\phi^{(0)}_{A,AB}$

q → Deformazione generalizzata nella struttura isostatica principale caricata dai carichi esterni

stiamo caricando con lesioni generate da x_i nella direzione di X_i

Lavoro compiuto dalle azioni interne nella i-esima struttura ausiliaria

$$\underline{Q} = \underline{\underline{N}}^{(0)}\underline{\tilde{F}} + \underline{\underline{N}}^{(x)}\underline{X} = \underline{\underline{N}}_0\underline{\tilde{F}} + \sum_{j=1}^{s} \underline{n}_j^{(x)} X_j$$

azioni interne nella struttura principale generate da X_j presa pari a 1.

j-esima colonna

→ equivalente a $Q^{(1)}$ di prima

→ Le azioni interne alla struttura isostatica ausiliaria generata da x_j presa pari a 1

j-esima iperstatica

$$\eta_{ij} = \eta_j^{(x)T} \cdot \underbrace{\underline{\underline{C}}\, n_i^{(x)}}$$

↳ Deformazione generalizzata nella i-esima struttura ausiliaria.

Spostamento indotto nell i-esima struttura ausiliare, dal j-esimo carico pari ad 1

→ azione interna del j-esimo carico

Equazione di congruenza:

$$\hookrightarrow \sum_{j=1}^{s} \eta_{ij} X_j + \eta_{0i} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, s$$

→ Matrice dei coefficienti del sistema

$$\underline{\underline{\eta}} = (\eta_{ij}) \qquad \underline{\eta} = (\eta_{0i})$$

↳ Vettore termini noti

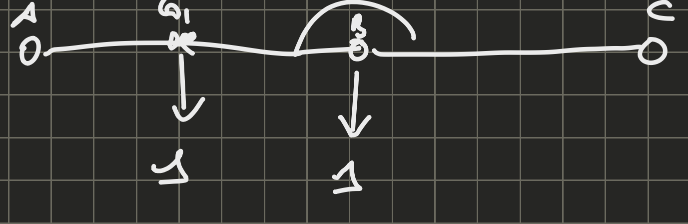
Forma Matriciale

$$\boxed{\Longrightarrow \underline{\eta}\,\underline{X} + \underline{\eta}_0 = \underline{0}}$$ → S equazioni di congruenza

L'applicazione del corollario 1 ci permette di usare il metodo degli spostamenti, definendo $\hat{\underline{U}}$, troviamo $\hat{\underline{q}}$, e per il caso reale troviamo $\tilde{\underline{E}}$, che possiamo usare per trovare la azione interna $\underline{Q}$ al punto che stiamo guardando.

↳ Esempio FEM un'asta che va su e giù che ha forze interne che cambiano, stiamo trovando $\underline{Q}$, dagli $\hat{\tilde{\underline{U}}}$ e $\hat{\underline{q}}$ che variano.

Se avessi applicato $\tilde{F}^a$ in modo diverso, come:



Il PLV avrebbe avuto equazione:

$$L_{ext} = 1 \cdot v_B + 1 \cdot v_{G_1} = \underline{Q}^a \underline{q} = L_{int}$$

↳ Avrei avuto due incognite da risolvere con 1 equazione, che è impossibile, allora per risolvere il sistema mettiamo sempre solo una forza dove vogliamo misurare che ci permette di risolvere il sistema.

Se vogliamo trovare 2 spostamenti, possiamo creare un'altro ausiliario e definire la forza a quel punto

La discretizzazione è una definizione di finiti punti in $\underline{\hat{U}}$ di cui vogliamo trovare le forze interne.

PENSO

Per trovare ϕ, la struttura ausiliaria sarebbe

Compie lavoro solo per ϕ

ogni volta q cambia.

Per v_{G_1}

La reale non cambia mai, per trovare uno spostamento cambio di verso la struttura ausiliaria.