Esercitazione 1 - Vettori e Forze

Lucio Pinello

Vettori

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$$

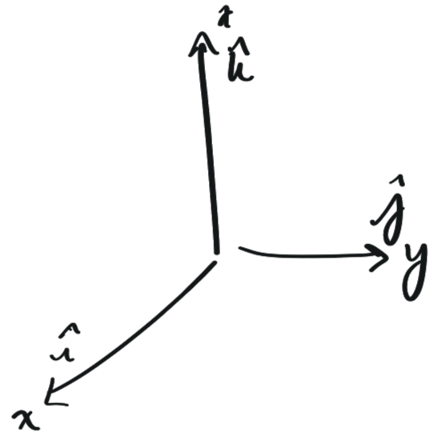
Prodotto scalare - prodotto membro a membro

↳ si trova la proiezione tra vettori

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Prodotto Vettoriale

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} = \det \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \hat{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \hat{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \hat{k}(a_x b_y - a_y b_x$$



$\vec{M} = \vec{b} \times \vec{F}$ → nel piano si possono avere 3 momenti intorno ad ogni asse, in 2 solo intorno alle 2 assi del piano

con $F = ma$

se $F = 0$, se già in moto, continua, se ferma resta lì

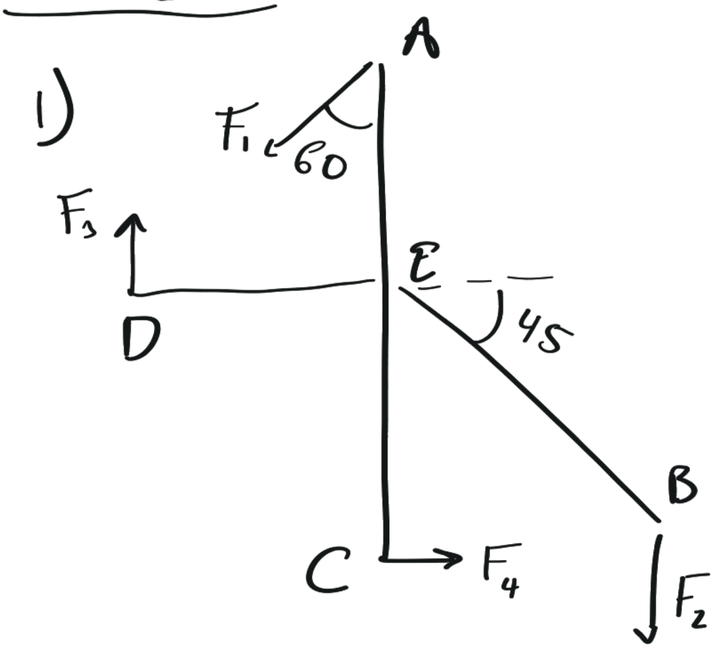
$\sum \vec{F}$ la somma delle forze è la risultante

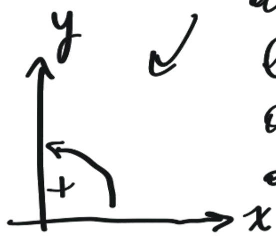
$\sum \vec{M}$ la somma dei momenti si chiama risultante

Per ora $\sum F = 0$ e $\sum M = 0$

Esercizio 1

1)





Bisogna descrivere le convenzioni dei calcoli, dei versi e della direzione, in questo caso rotazione antioraria è positiva.

AE = 500 mm

BE = 750 mm

$CE = 250\ mm = DE$

$F_1 = 250N$

$F_2 = 500N$

$F_3 = 100N$

$F_4 = 300N$

Risultanti - Forze

$$\sum F_x = F_4 - F_1 \sin 60 = 83{,}5N$$

$$\sum F_y = F_3 - F_2 - F_1 \cos 60 = 525N$$

Non cambia tra E e C per le forze

Risultanti - Momento $(\vec{M} = \vec{b} \times \vec{F})$

per E)

$$M^E_{F_2} = \begin{array}{c} \\ \vec{EB} \\ \times \\ \vec{F_2} \end{array} \begin{vmatrix} i & j \\ 750\frac{\sqrt{2}}{2} & 750\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -500 \end{vmatrix} = \hat{k}\left(750\frac{\sqrt{2}}{2}(-500) - 0\right)$$

$$= -265{,}17\ \hat{k}\ [Nm]$$

↳ convertito da mm a m

$$M^E_{F_1} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ 0 & 500 \\ -F_1 \sin 60 & -F_1 \cos 60 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \vec{EA} \\ \times \\ \vec{F_1} \end{array} = \hat{k}\ 500 F_1 \sin 60$$

$$= 108{,}25\ [Nm]$$

$$M^E_{F_4} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ 0 & -250 \\ 300 & 0 \end{vmatrix} = \hat{k}\ (250 \cdot 300)$$

$$= 75\ \hat{k}\ [Nm]$$

$$M^E_{F_3} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ -250 & 0 \\ 0 & 100 \end{vmatrix} = \hat{k} \cdot 100 \cdot 250 = -25\ \hat{k}\ [Nm]$$

Negativo perchè va contro i

$$\sum M^E = M^E_{F_1} + M^E_{F_2} + M^E_{F_3} + M^E_{F_4} = -131{,}92 \, [Nm] \, \hat{k}$$

Per C) Usando metodo più veloce

Pollice → Forza

Indice → Braccio → direzione per arrivare al punto

Medio → direzione

$$M^C_{F_2} = -F_2 \, \vec{EB} \cos 45° = -265{,}17 \, \hat{k} \, [Nm]$$

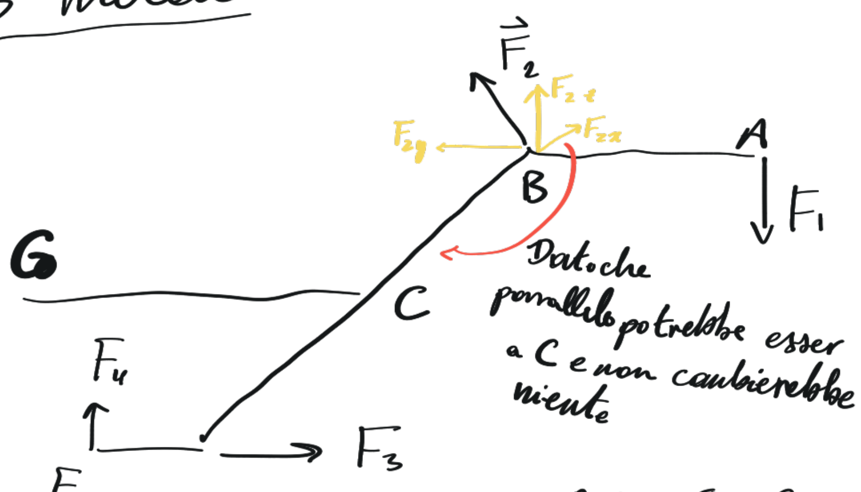
F_4 non genera momento perchè $\vec{r} = \phi$

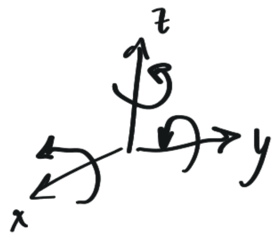
$$M^C_{F_3} = -F_3 \, \vec{DE}$$

→ è così perchè $\vec{EC}$ e parallelo alla forza ma DE è perpendicolare, il momento viene creato dalla perpendicolarità

$$M^C_{F_1} = -F_1 \sin 60 \cdot \vec{AC}$$

3° metodo





Pollice e mano per determinare momento positivo

AB = 500 mm (y) = DE

BC = 800 (x) = CD

$CG = 1000\,mm\ (y)$

$F_1 = [0\ 0\ -250]\,N$

$F_2 = [-100\ -100\ 100]\,N$

$F_3 = [0\ 250\ 0]\,N$

$F_4 = [0\ 0\ 250]\,N$

$$\sum F_x^G = F_{2x} = 100N$$

$$\sum F_y^G = F_3 + F_{2y} = 150N$$

$$\sum F_z^G = F_4 + F_1 + F_{2z} = 100$$

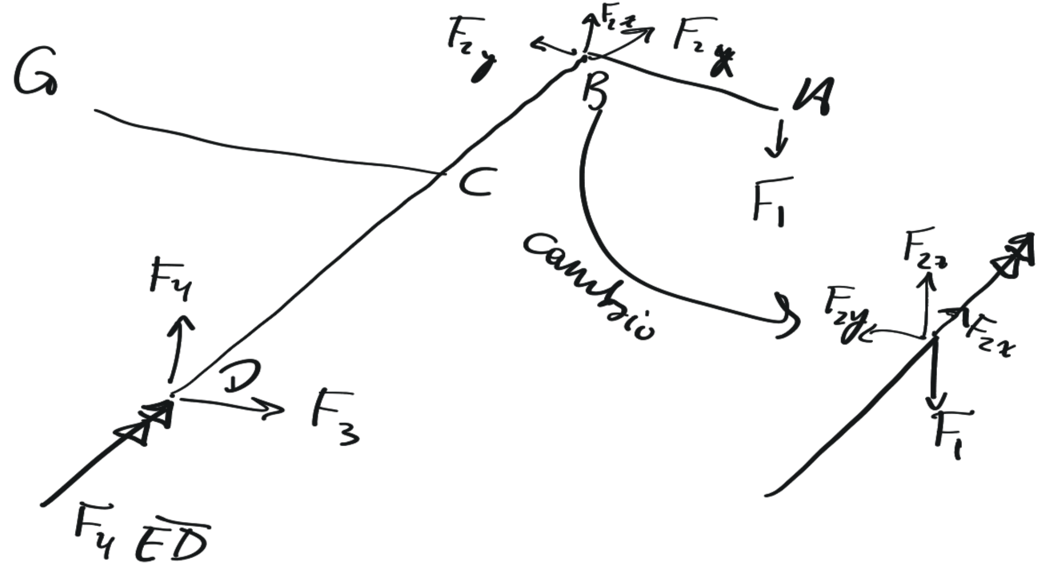
$\overline{CG} - \overline{DE}$ perchè è la l'lunghezza effettiva

$$M_{F_4}^G = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 500 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 250 \end{vmatrix} = \hat{i}(500)(250) - \hat{j}(500)250 + \hat{k}(0)(0)$$

Metodo più veloce, momento di trasporto

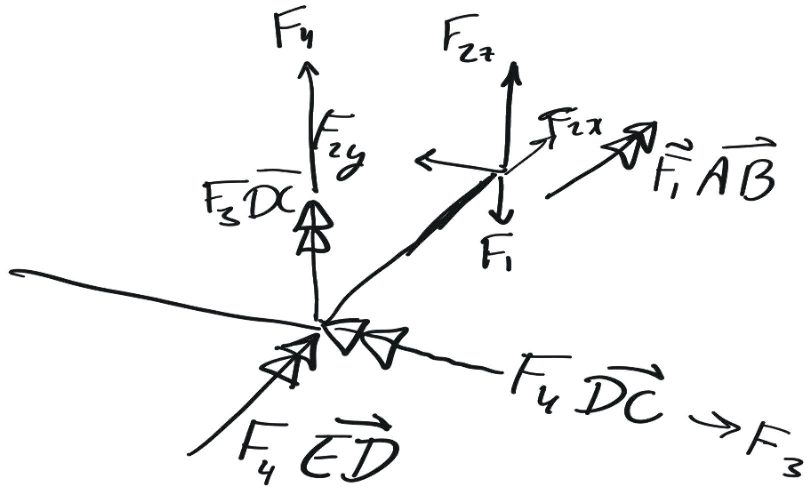
↳ si possono spostare le forze solo se si spostano anche i momenti generati

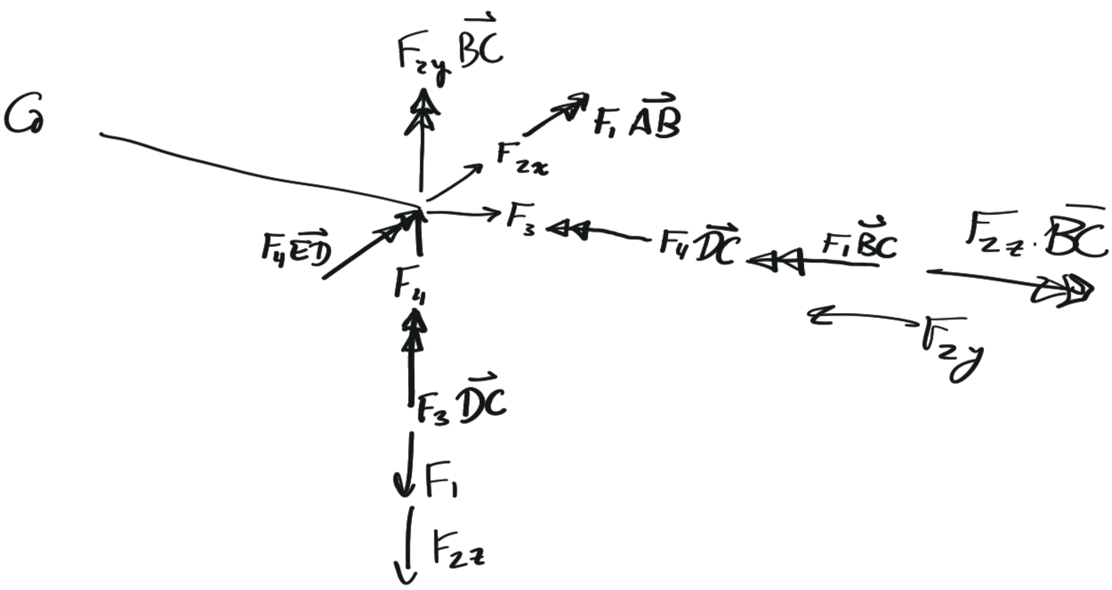
cioè con F_4



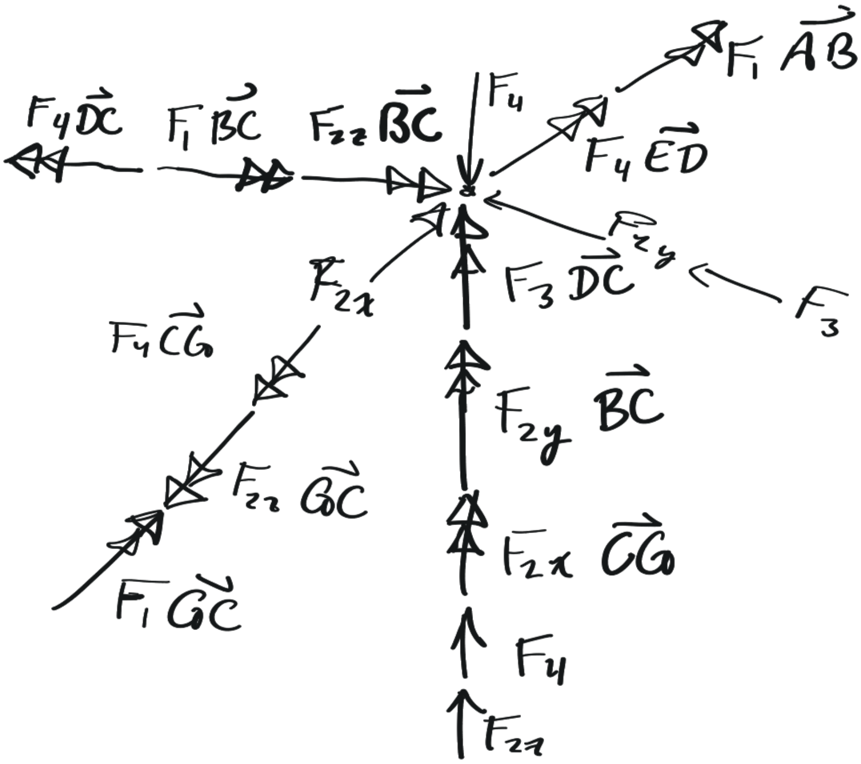
il momento che F_4 avrebbe generato attraverso $\overrightarrow{ED}$

Muovendo forze momenti di nuovo





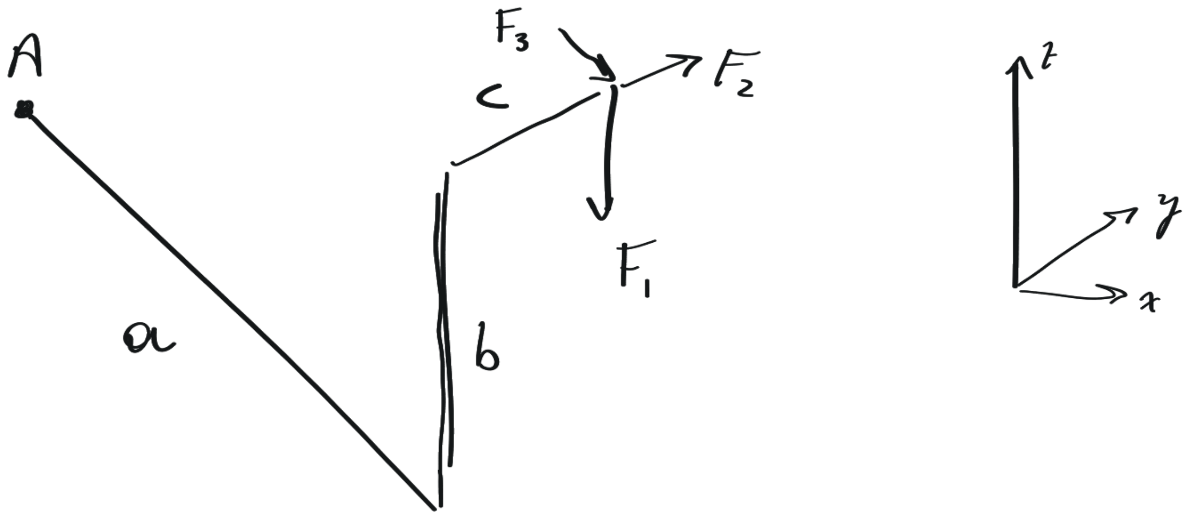
Si trova il momento che sarebbe generato per semplificare i calcoli

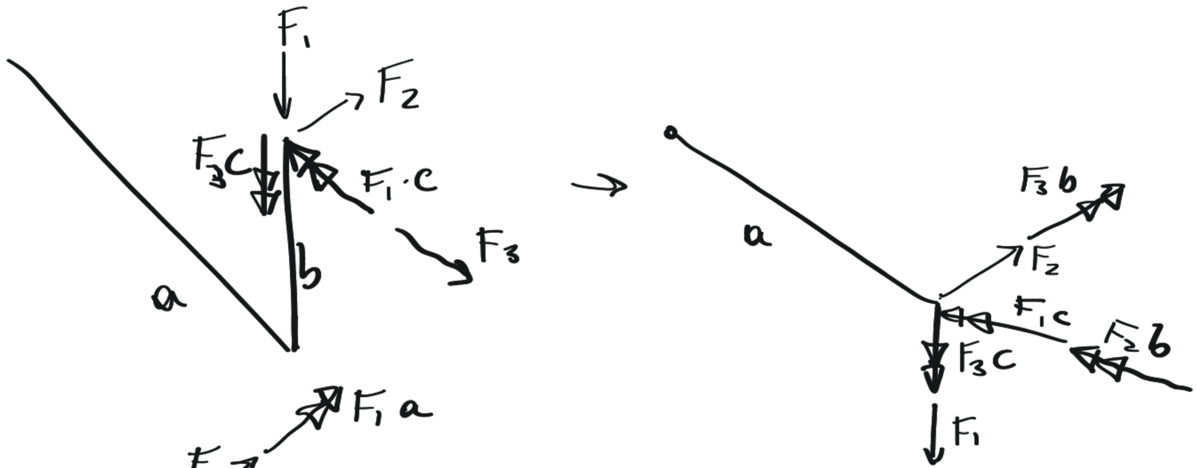


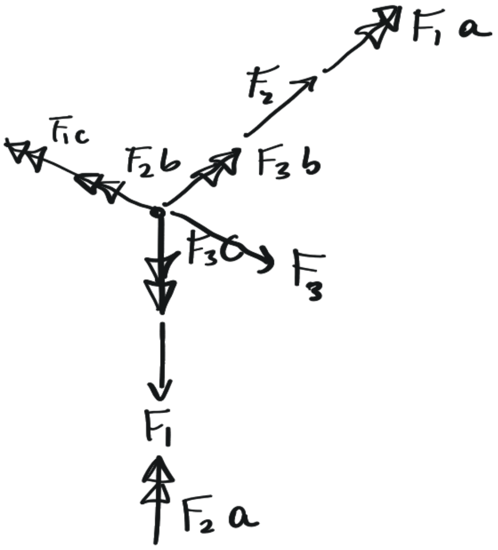
$$\vec{M}^{G}_{F_4} = \begin{bmatrix} F_4 \vec{GC} - F_4 \vec{ED} \\ -F_4 \vec{DC} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si trovano i momenti generati ad ogni passo per trovare il risultante del momento al punto designato, perchè i momenti sono persi a punti durante il tragitto delle forze

Esercizio2)

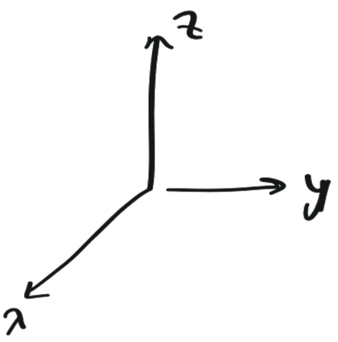


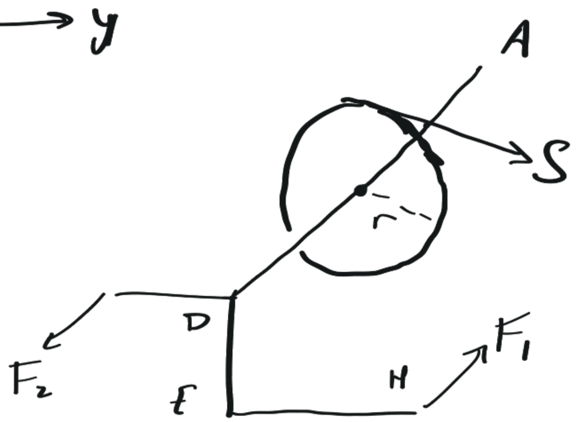


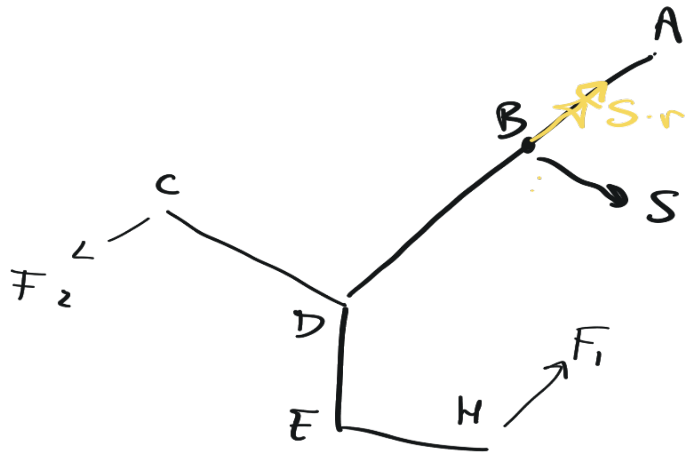


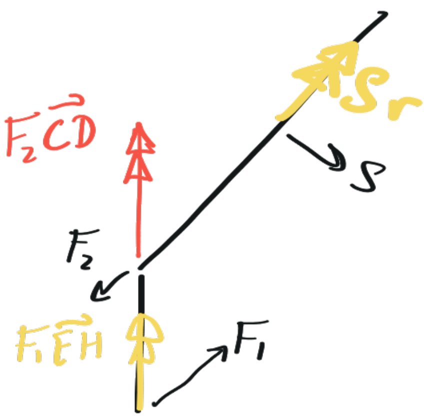
$$M^G = \begin{bmatrix} -F_1 c - F_2 b \\ F_2 b + F_1 a \\ F_2 a - F_3 c \end{bmatrix}$$

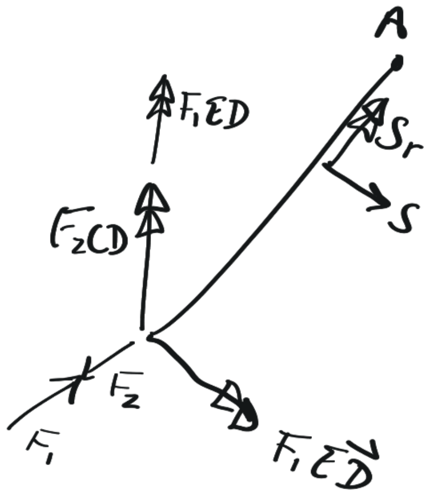
Esercizio 3)

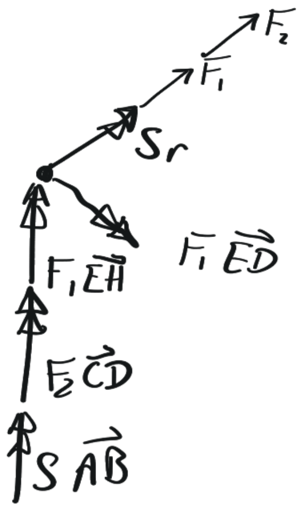





A
B
$S \cdot r$
S
C
F_2
D
F_1
H
E


$F_2\vec{CD}$
Sr
S
F_2
$F_1\vec{EH}$
F_1


A
F_1ED
Sr
S
F_2CD
F_2
F_1
$F_1\vec{ED}$


F_2
F_1
Sr
$F_1\vec{ED}$
$F_1\vec{EH}$
$F_2\vec{CD}$
$S\vec{AB}$