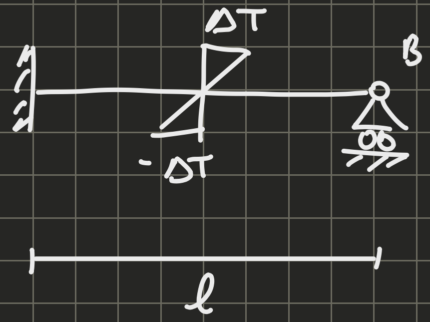
Esercitazione 5 - MDS

Esempio 1) Ripasso



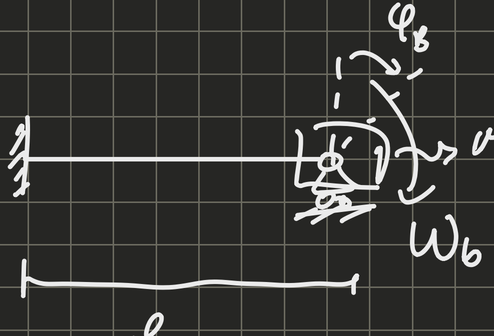
α_T, E, J

struttura Reale

MdS

$S = 1$

Schema di Calcolo / Struttura Cinematicamente Determinata



rosetta che blocca la rotazione

Convenzione presa

Per effetto del vincolo,
si è instaurata W_b, che nella struttura reale è nullo

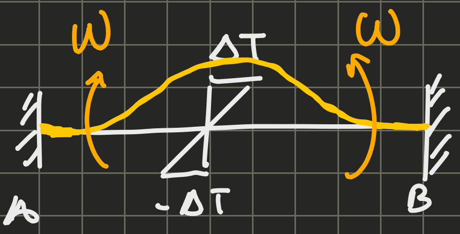
Nel MDF per avere dualità con il caso reale scrivevamo equazioni di compatibilità, per l'MDS scriviamo equazioni di congruenza, sulle quantità statiche associate.

W_b è fittizio quindi in reale è nullo, perché in B abbiamo un carrello.

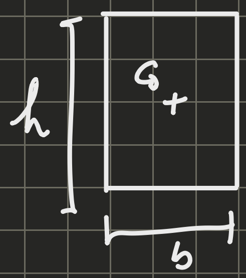
Si studiano le strutture ausiliarie, dove si studiano gli effetti dei carichi esterni, e gli effetti dell'attivazione della rotazione unitaria o dei carichi cinematici imposti;

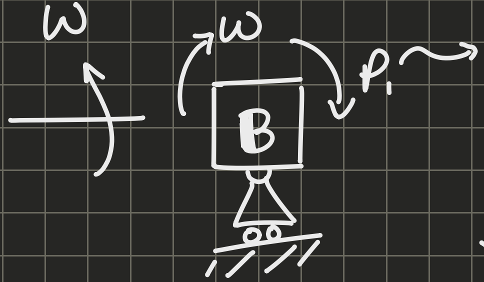
$$\underline{U} = (\varphi_B)$$

Struttura Ausiliaria "0" $(\Delta T \neq 0,\ \varphi_B = 0)$



$$W = \frac{2EI}{h}\alpha_T \Delta T$$

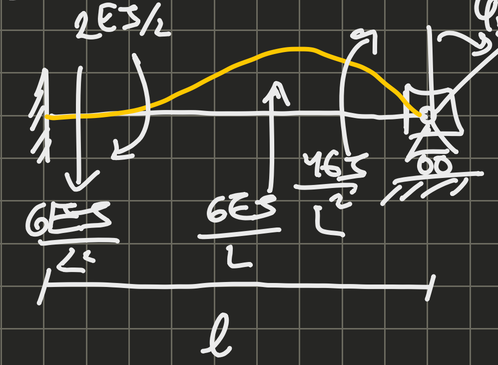




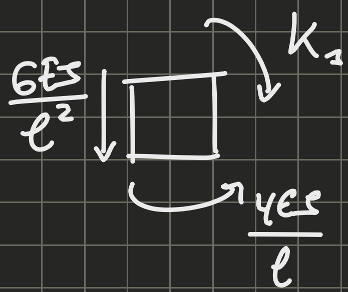
momento flettente associato alla coordinata libera (φ_B) e il termine noto.

$$P_1 = -W = -\frac{2EI}{h}\alpha_T \Delta T$$

Struttura Ausiliaria "1"



Equilibrio in B



$$k_1 = \frac{4EI}{l}$$

Equazione di congruenza

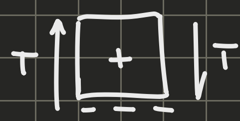
$$k_1 \varphi_B + P_1 = 0$$

$$\frac{4EI}{l}\varphi_B - \frac{2EI}{h}\cdot \alpha_T \Delta T = 0$$

$$\boxed{\varphi_B = \frac{\alpha_T \Delta T l}{2h}}$$

Azioni Interne ⇝ Principio della sovrapposizione

$$T_A = -\frac{6EI}{l^2}\varphi_B = T_B$$



$$= \frac{-6EI}{l^2}\,\frac{\alpha_T \Delta T l}{2h} = \frac{-3EI}{hl}\alpha_T \Delta T$$ Antiorario

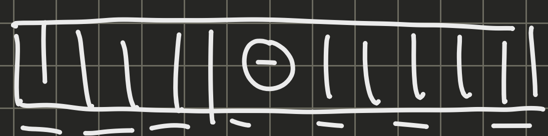
→ Il carico termico non genera azioni di taglio

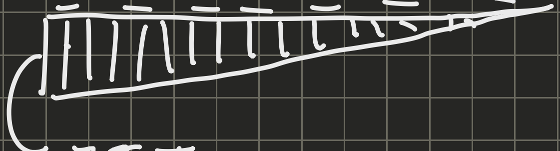
$$M_A = \frac{2EI}{h}\cdot \alpha_T \Delta T + \frac{2EI}{L}\varphi_B$$

$$= \frac{2EI}{h}\alpha_T \Delta T + \frac{EI}{h}\alpha_T \Delta T = \frac{3EI}{h}\alpha_T \Delta T \quad (+)$$

→ Sono tese le fibre inferiori.

Diagrammi:

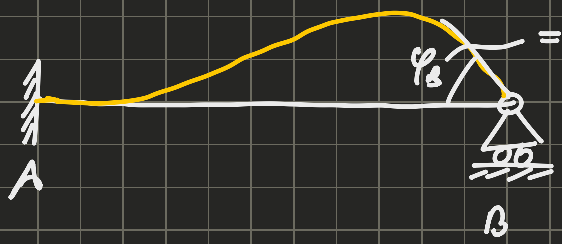
T)  $\sim \frac{3EI}{hl}\alpha_T \Delta T$ 



→ O come speravamo dalla struttura reale.

$\frac{3EI}{hl}\alpha_T \Delta T$ ⇝ sarebbe stato difficile da trovare, lo abbiamo trovato facilmente

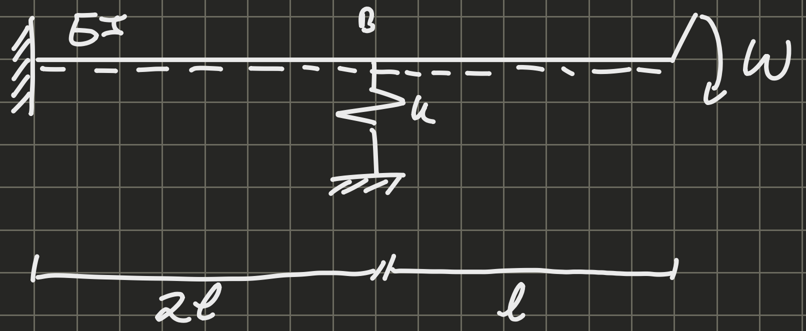
Deformata Qualitativa



$= \frac{\alpha_T \Delta T \ell}{2h}$ $\quad w_b = 0$

Applicando lo spostamento cinematico unitario si ottiene la rigidezza del sistema.

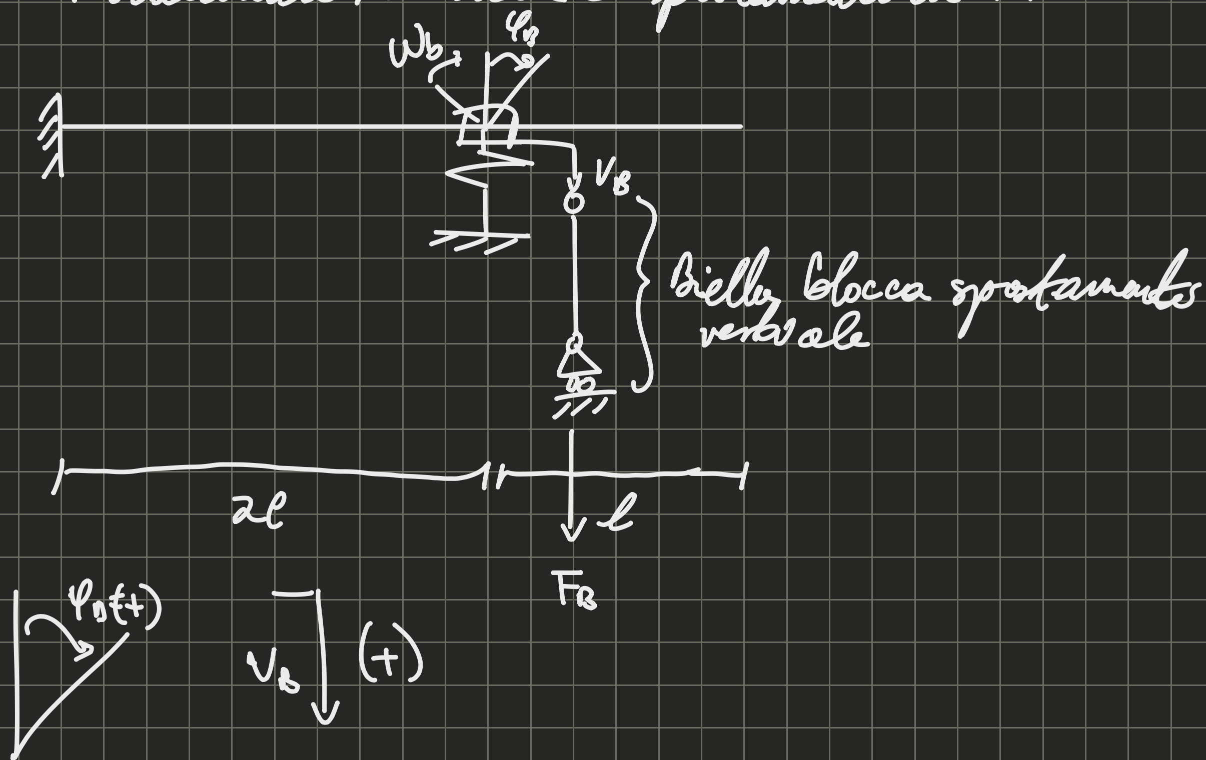
Esercizio 2



$S = 3$

Schema di Calcolo

↳ Vincoliamo rotazione e spostamento in B.



$$\underline{U} = \left[U_1, U_2\right]^T = \left[\varphi_B, v_B\right]^T$$

Equazioni di Equilibrio

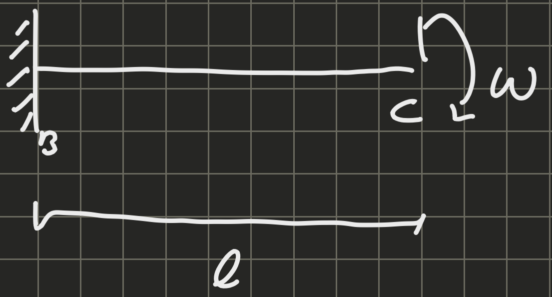
- ↳ $W_b = 0$
- ↳ $F_b = 0$

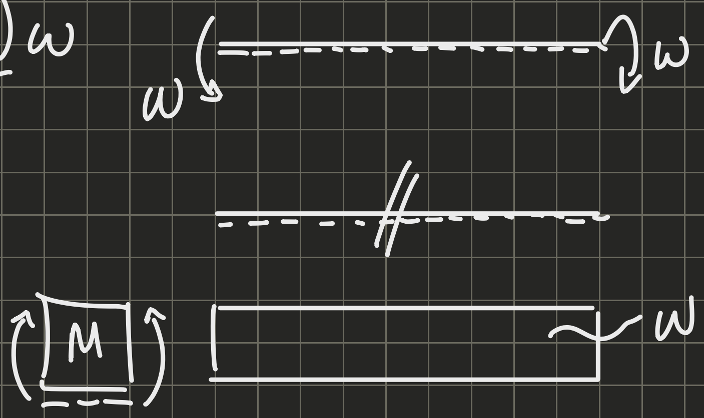
MDF → vantaggioso per travi continue, poche volte iperstatiche

MDS → vantaggioso per telai fortemente iperstatici.

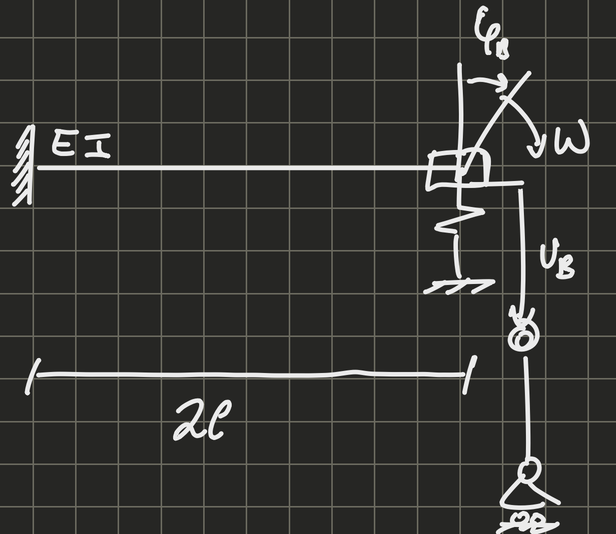
↳ Non causa arbitrarietà nella scelta delle incognite, un'altra ragione per il suo uso nel FEM.

Appendice Isostatica B-C





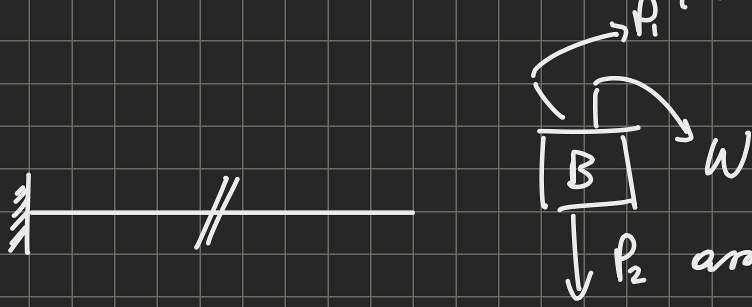
Schema di Calcolo



$N = 2$

Struttura Ausiliaria "0" ($W \neq 0$, $\varphi_B = v_B = 0$)

$P_1 \rightsquigarrow$ Associata a φ_B

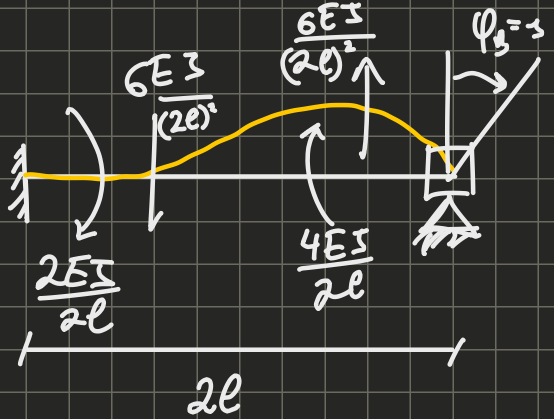


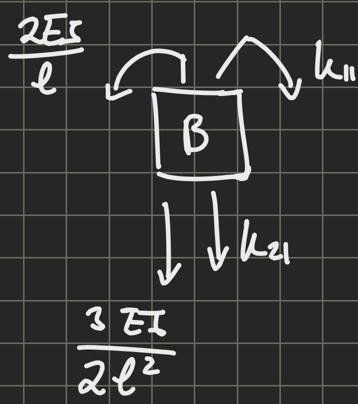
P_2 associato a v_B

W agisce sul morsetto e non c'è azione esterna sulla trave quindi:

$$\left.\begin{aligned} W &= -P_1 \\ P_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Equilibrio del morsetto in B}$$

Struttura Ausiliaria "1" $\varphi_B = 1, v_B = 0, W = 0$



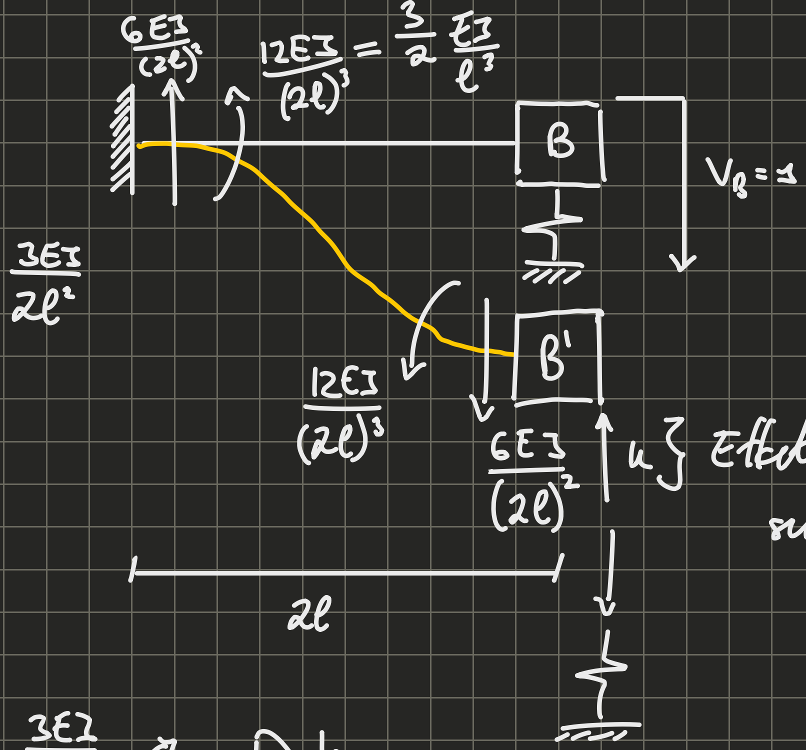


Equilibrio Morsetto

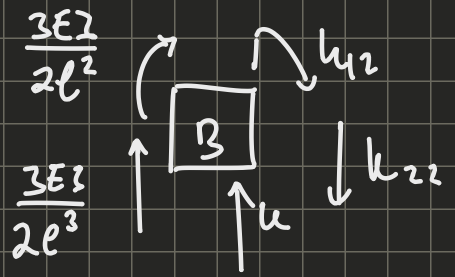
$$k_{11} = \frac{2EI}{\ell}$$

$$k_{21} = -\frac{3EI}{2\ell^2}$$

Struttura Ausiliare "2" $\quad V_B = 1,\ \varphi_B = 0,\ W = 0$



Effetto della molla sul morsetto.



Equilibrio al morsetto

$$\begin{cases} k_{12} = \dfrac{-3EI}{2\ell^2} = k_{21} \checkmark \\ k_{22} = \dfrac{3EJ}{2\ell^3} + k \end{cases}$$

Equazione di Congruenza

$$\underline{\underline{K}}\,\underline{U} + \underline{P} = \underline{0} \qquad U_1 = \varphi_B \quad U_2 = V_B$$

$$k_{11} U_1 + k_{12} U_2 = -P_1$$

$$k_{21} U_1 + k_{22} U_2 = -P_2$$

$$\bar{k} := \frac{k\ell^3}{EI}$$

1) $\frac{2EI}{\ell}\varphi_B + \frac{3EI}{2\ell^2} v_B = W$

2) $\frac{-3EI}{2\ell^2}\varphi_B + \left(\frac{3EI}{2\ell^3} + \bar{k}\frac{EI}{\ell^3}\right)\cdot v_B = 0$

Da 2 $\rightarrow$ $v_B = \frac{3EI}{2\ell^3}\left[\frac{2\ell^3}{3EI + 2kEI}\right]\varphi_B = \frac{3\ell}{3+2\bar{k}}\varphi_B$ (3)

3 in 1 $\rightarrow$ $\varphi_B = \frac{6+4\bar{k}}{3+8\bar{k}}\cdot\frac{W\ell}{EI}$

$\Rightarrow v_B = \frac{6}{3+\bar{k}}\frac{W\ell^2}{EI}$

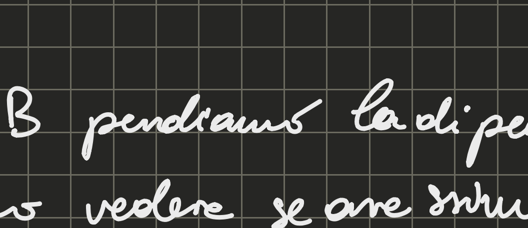
Diagrammi **Azioni Interne**

$\overset{+}{M}$ $\rightarrow$ non c'è contributo dalla struttura "0"

$M_A = \frac{EI}{\ell}\varphi_B - \frac{3EI}{2\ell}\cdot v_B = \frac{4\bar{k}-3}{3+8\bar{k}} W$

$M_B = \frac{-2EI}{\ell}\cdot\varphi_B + \frac{3EI}{2\ell^2} v_B = \frac{-(3+8\bar{k})}{3+8\bar{k}} W = -W \quad \forall\bar{k}$

In B perdiamo la dipendenza da $\bar{k}$, possiamo vedere se avessimo tracciato l'appendice isostatica che M in B doveva esser $-W$.



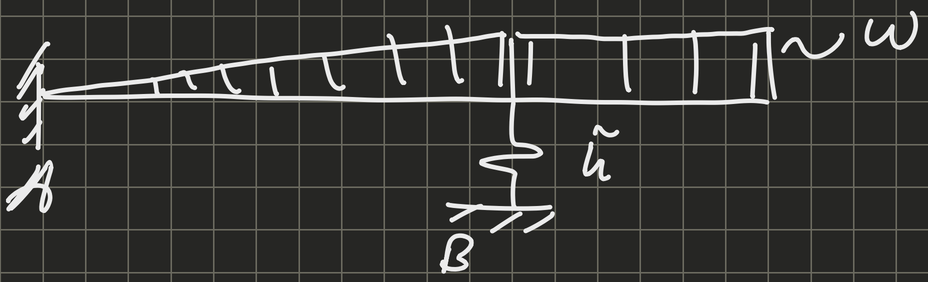
Possiamo studiare $\bar{k}$ e trovare il valore per cui

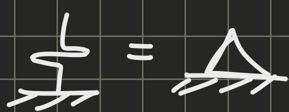
M_A si annulli.

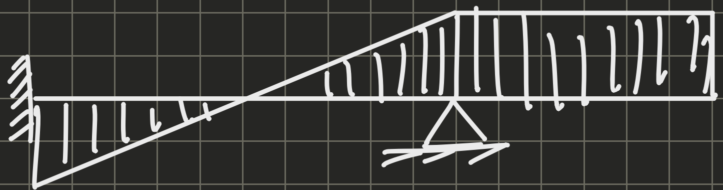
se $M_A = 0 \Rightarrow \bar{k} = \frac{3}{4} \Rightarrow \tilde{k} = \frac{3EI}{4\ell^3}$

condizione di annullamento del momento di incastro ad A.

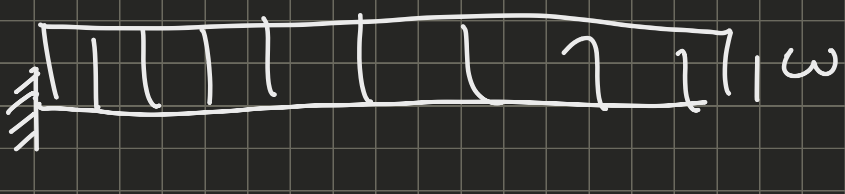
Diagramma M per $k = \hat{k}$



$k = \infty \Rightarrow$ 



se $k = 0 \Rightarrow$  =

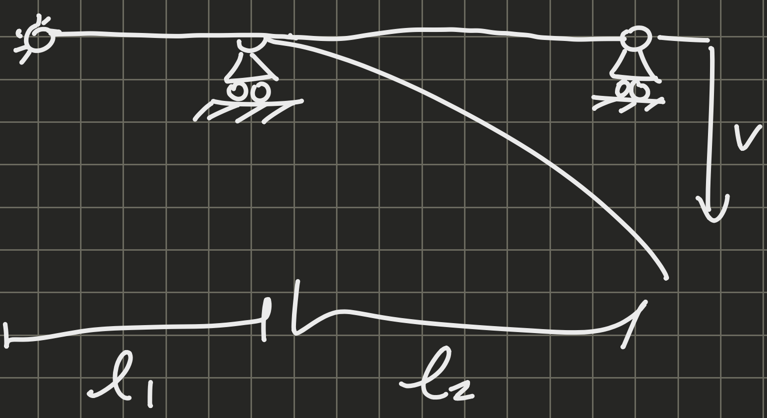


Tutti i casi sono compresi tra i casi limite.

Esercizio 3

Struttura Reale

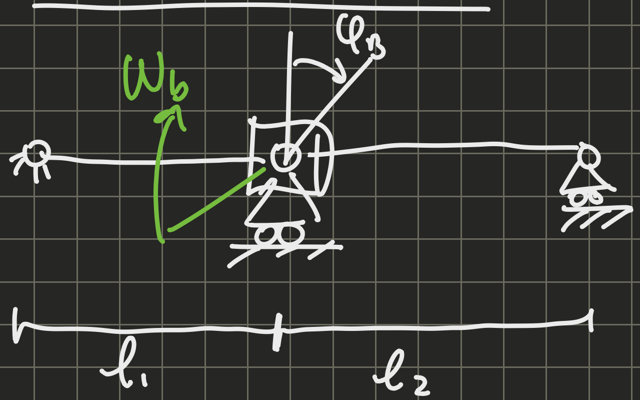
$s = 1$



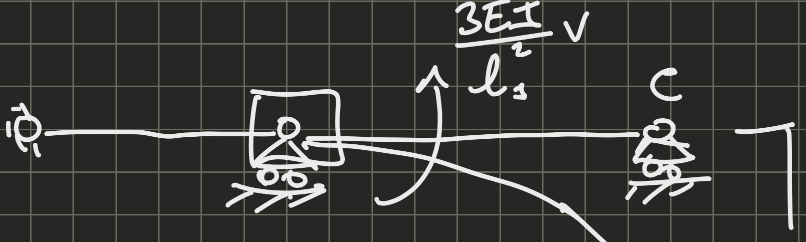
Blocchiamo solo B, perché (e si può dimostrare) che la rotazione in A e C sono linearmente dipendenti dalla rotazione in B.

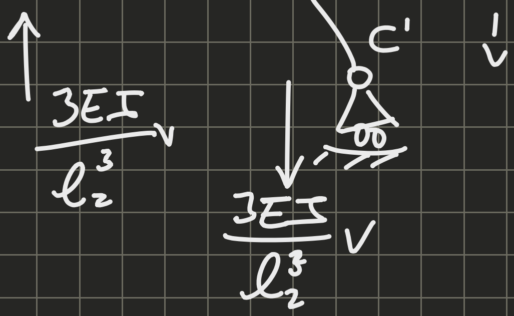
$W_B = 0$ $\qquad$ $\underline{U}(\varphi_B)$

Schema di Calcolo

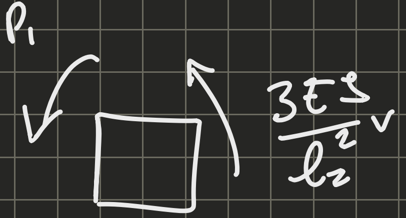


Struttura Ausiliaria "0", $v \neq 0$, $\varphi_B = 0$



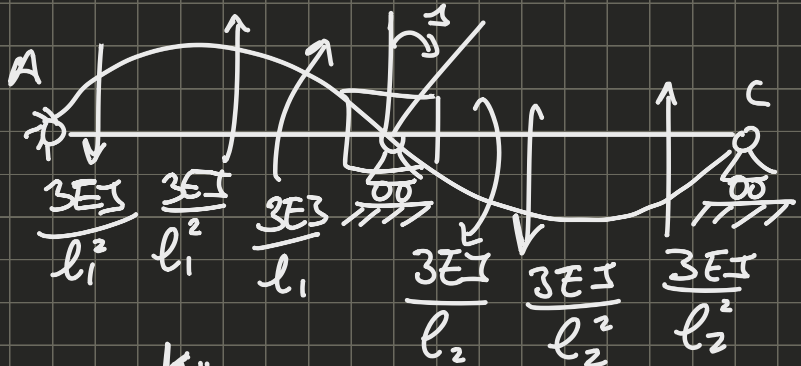


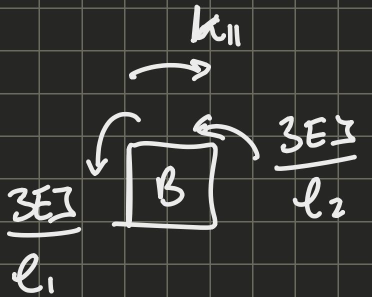
Per cedimenti non si instaurato momenti flettenti al vincolo stesso.



$$P_1 = -\frac{3EI}{l_2^2} v$$

Struttura Ausiliaria "1" $\quad \varphi_B \neq 0, \; v = 0$





$$k_{11} = 3EI\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)$$

$$\underline{\underline{K}}\,\underline{U} + \underline{P} = 0$$

$$3EI\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)\varphi_B = \frac{3EI}{l_2^2} v$$

$$\varphi_B = \frac{l_1}{l_2} \frac{v}{l_1 + l_2}$$

$$M_{BA} = -\frac{3EI}{l_1}\varphi_B = -\frac{3EI}{l_1} \cdot \frac{v}{l_2 + l_1} \quad \text{Tese in alto}$$

$$M_A = 0 \qquad M_C = 0$$

$$M_{BC} = -\frac{3EJ}{l_2^2} v + \frac{3EJ}{l_2} \varphi_B = \frac{-3EJ}{l_2(l_1+l_2)} v$$

Fibre Tese sopra