Lezione 12-

Lezione 12-

Determinazione di Autovalori → solo teoria

Autovalori e Autovettori

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

λ, v $\quad \lambda \in \mathbb{C}$, $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$ tale che $Av = \lambda v$

Quoziente di Rayleigh

Noto v, allora $\lambda = \dfrac{v^H A v}{\|v\|^2}$

Generalizzazione al campo complesso del trasposto

v^H = complesso coniugato di ogni trasposto

$\|v\|^2 = v^H v$

Trovato autovettore abbiamo l'autovalore.

Gli autovalori si trovano per il polinomio caratteristico

$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

↳ Non il metodo preferito

A ha n radici, distinte o a molteplicità, lavoriamo in $\mathbb{R}^{n\times n}$, è possibile che sia una radice complessa,

allora si ha anche il suo complesso coniugato che ci permette di tornare al caso reale

Diagonalizzabile

A diagonalizzabile se $\exists\, U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertibile

tale che $U^{-1}AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

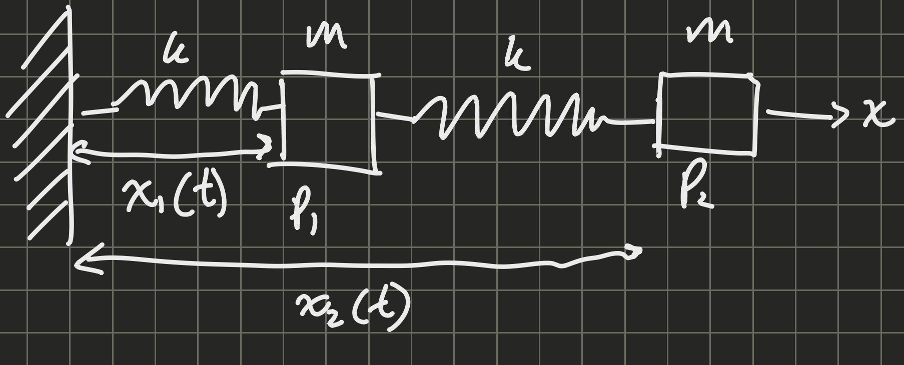
↳ Se non si può usare questo allora si usano i metodi che vediamo oggi.

$\boxed{8:42}$

↳ Spettro

Matrici diagonali e triangolari ha λ facili da trovare.

Esempio dalla fisica con molle



$P_1 \quad m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) - k x_1$

$P_2 \quad m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2)$

$$m\begin{bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2k & k\\ k & -k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\end{bmatrix}}_{\text{Ampiezza}} e^{i\omega t} \qquad \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_1\\ A_2\end{bmatrix} i\omega e^{i\omega t} \qquad \begin{bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_1\\ A_2\end{bmatrix} -\omega^2 e^{i\omega t}$$

$$-m\omega^2\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\end{bmatrix}\cancel{e^{i\omega t}} = \begin{bmatrix}-2k & k\\ k & -k\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\end{bmatrix}\cancel{e^{i\omega t}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}2k & -k\\ -k & k\end{bmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\end{bmatrix}}_{v} = \underbrace{-m\omega^2}_{\lambda}\underbrace{\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\end{bmatrix}}_{v}$$

È un problema di autovettori → di ordine 2

Ci sono 2 classi di metodi:

metodi
- → spettro intero (QR)
- → 1 autovalore target + corrispondente autovettore
  - → quello che guardiamo.
  - → Metodo delle potenze e potenze inverse

Metodo delle potenze

per trovare ($\lambda_{MAX} = \lambda_1$ e x)

x: autovettore corrispondente

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Metodo Iterativo

Ipotesi 1: $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$

Dominante in modulo, considera anche autovalori complessi

Richiesta computazionale (λ_1, x_1)

x_1: lunghezza unitaria

Ipotesi 2: Autovettori di A sono linearmente indipendenti

Ci permette di usarli come una base

$x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$; $y^{(0)} = \dfrac{x^{(0)}}{\|x^{(0)}\|}$,

$x^{(0)}$: guess iniziale per autovettori

Gli oggetti del tipo y trovano x_1

$k = 1, \ldots$ $\quad x^{(k)} = A y^{(k-1)}$

$y^{(k)} = \dfrac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|}$ → per $k \to \infty$ $\quad y^{(k)} \simeq x_1$

$\lambda^{(k)} = \left(y^{(k)}\right)^H A y^{(k)}$ → per $k \to \infty$ $\quad \lambda^{(k)} \simeq \lambda_1$

Quoziente di Rayleigh

$Av = \lambda v$, con $\lambda = 1$, è simile ad un punto fisso finché $Av = v$

Normalizzazione dell'autovettore

Criterio d'Arresto:

N_{MAX} e $\underbrace{\frac{|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}|}{|\lambda^{(k)}|}}_{\text{Incremento relativo non assoluto.}} < \varepsilon$

Perché si chiama metodo delle potenze?

Scriviamo alcune iterazioni

$k=1$ $\quad x^{(1)} = A y^{(0)}; \quad y^{(1)} = \frac{A y^{(0)}}{\|x^{(1)}\|}, \quad \lambda^{(1)} = (y^{(1)})^H A (y^{(1)})$

$k=2$ $\quad x^{(2)} = A y^{(1)}; \quad y^{(2)} = \frac{A y^{(1)}}{\| x^{(2)}\|}; \quad \lambda^{(2)} = (y^{(2)})^H A y^{(2)}$

$$= \frac{A^2 y^{(0)}}{\|x^{(1)}\|\|x^{(2)}\|} = \beta^{(2)} A^2 y^{(0)}$$

$$\beta^2 = (\|x^{(1)}\|\|x^{(2)}\|)^{-1}$$

Iterata k-esima

$$x^{(k)} = A y^{(k-1)} \qquad y^{(k)} = \beta^{(k)} A^k y^{(0)}$$

$$\beta^{(k)} = \left(\prod_{i=1}^{k} \|x^{(i)}\|\right)^{-1}$$

$$\underbrace{\lambda^{(k)} = (y^{(k)})^H A y^{(k)}}_{\text{Molto più utile per computazione}}$$

Analisi della convergenza

Sfruttiamo la ipotesi 2 → v linearmente indipendenti.
⇒ formano base di $\mathbb{C}^{n \times n}$

$$\underbrace{x^{(0)}}_{\text{Guess iniziale}} = \sum_{i=1}^{n} \underset{\in \mathbb{C}}{\alpha_i} \underbrace{x_i}_{\text{Autovettori di } A} \implies y^{(0)} = \gamma^{(0)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

$$\gamma^{(0)} = \frac{1}{\| x^{(0)} \|}$$

Convergenza → $x^{(k)}$ ha direzione di x_1
e $\lambda^{(k)}$ ha valore di λ_1

$k = 1$

$$x^{(1)} = A y^{(0)} = \gamma^{(0)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{A x_i}_{\lambda_i x_i} = \gamma^{(0)} \sum \alpha_i \lambda_i x_i$$

perché x_i è autovettore di A per definizione

$$y^{(1)} = \gamma^{(1)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i x_i$$

$$\gamma^{(1)} = \left(\| x^{(0)} \| \| x^{(1)} \| \right)^{-1}$$

$k = 2$

$$x^{(2)} = A y^{(1)} = \gamma^{(1)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \underbrace{A x_i}_{= \lambda_i x_i} = \gamma^{(1)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^2 x_i$$

$$y^{(2)} = \gamma^{(2)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^2 x_i$$

$$\gamma^{(2)} = \left(\| x^{(0)} \| \| x^{(1)} \| \| x^{(2)} \| \right)^{-1}$$

$$\boxed{k \qquad y^{(k)} = \gamma^{(k)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k x_i}$$

$$y^{(k)} = \left(\prod_{i=0}^{k} \|x^{(i)}\|\right)^{-1}$$

Sfruttiamo la ipotesi 1

$$y^{(k)} = \gamma^{(k)}\left[\alpha_1 \lambda_1^k x_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \lambda_i^k x_i\right]$$

Isolato termine di Autovalore dominante

$$= \alpha_1 \lambda_1^k \left[x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k x_i\right] \quad \text{con } \alpha_1 \neq 0$$

Abbiamo isolato la direzione x_1, vogliamo che converga a quello

Ipotesi 1: $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$

Per $k \to \infty$ $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \to 0 \Rightarrow \underbrace{\sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k x_i}_{=0}$

$\Rightarrow$ $y^{(k)}$ si allinea con x_1 per $k \to \infty$

autovettore

$\Rightarrow \lambda^{(k)} \to \lambda_1$

$$\lambda^{(k)} = (y^{(k)})^H A y^{(k)}$$

Osservazioni

- Richiesta che $\alpha_1 \neq 0$

α_1 è appreso quando

$$x^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \;,\quad \alpha_1 \neq 0 \Rightarrow x^{(0)} \text{ abbia componente lungo } x_1$$

non è ricavabile direttamente

Se potessi dire chi è α_1 non staremmo ad approssimare il sistema,

se $x^{(0)}$ ha $\alpha_1 = 0 \Longrightarrow y^{(k)}$ inizia a generare componenti lungo x_i tale che se $\alpha_1 = 0$ all'inizio, $\alpha_1 \neq 0$ alla fine.

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{bmatrix}$$

$x_1 = [1/2, 1/2, 1/2, 1/2]$

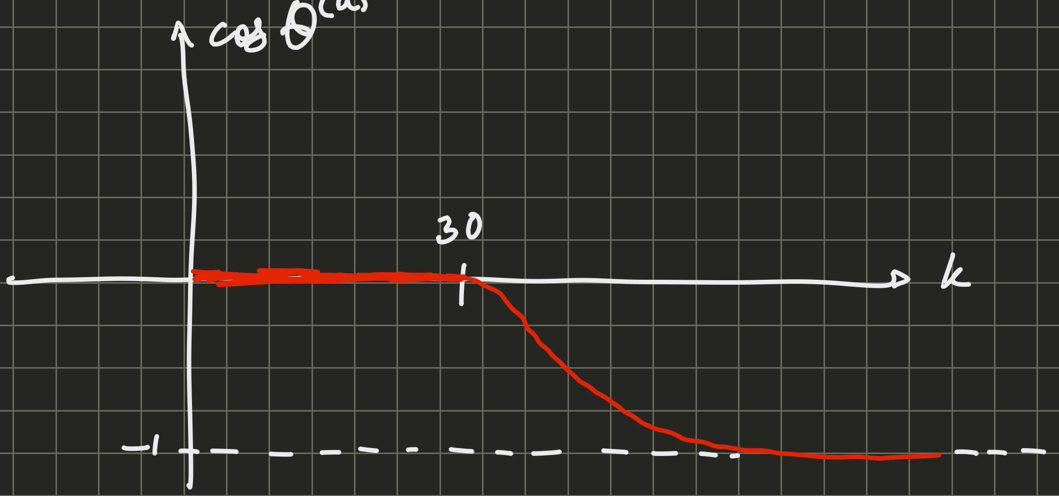
prendiamo

$x^{(0)} = [2, -2, 3, -3]$

$x^{(0)} \perp x_1 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

Facciamo un plot di

$$\cos \theta^{(k)} = \frac{(y^{(k)})^T x_1}{\|y^{(k)}\| \, \|x_1\|}$$



È causato da problemi di arrotondamento.

↳ In questo caso i problemi sono utili

Velocità di Convergenza

$$\|x_1 - y^{(k)}\| =$$

$$= \left\|x_1 - x_1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_1}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k x_i\right\|$$

$$= \left\|\sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_1}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k x_i\right\| = \left[\sum_{i=2}^{n} \left[\frac{\alpha_i}{\alpha_1}\right]^2 \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2k}\right]^{1/2}$$

↳ x_i perso perché è unitario

$$\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_1|} > \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_2|} \geq \dots \geq \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_n|}$$

Tutto sotto sono minori o uguali a questo

$$\leq \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k \left[\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\alpha_i}{\alpha_1}\right]^2\right]^{1/2} \qquad \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} << 1$$

↳ 0, è indicato della velocità di convergenza, più sono lontani più veloce è la convergenza.

Matrice Hermitiana è il significato di matrice simmetrica nel caso complesso

$\Rightarrow A = A^H$

$\uparrow$

Hermitian

Simmetrica

$\hookrightarrow A = A^T$

$\hookrightarrow$ convergenza è $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}$

Nei $\lambda \in \mathbb{C}$ possiamo esser distinti ma con modulo uguale, in quel caso non funziona

<u>Metodo delle Potenze inverse</u> $\Rightarrow$ per trovare λ_n, x_n

autovalore minimo

autovettore corrispondente

Requisiti = A invertibile

Autovalori di A sono gli inversi di A^{-1}

(λ, x) $\qquad$ $(1/\lambda, ?)$

Applicando il metodo delle potenze si A^{-1} troviamo $1/\lambda_1$ poi possiamo invertire per trovare λ_n

$$A x = \lambda x$$
$$A^{-1} A x = \lambda A^{-1} x$$

$x = \lambda A^{-1} x$

$A^{-1} x = \frac{1}{\lambda} x$ → gli autovalori di A sono autovalori di A^{-1}

Ipotesi :

$$\frac{1}{|\lambda_1|} < \frac{1}{|\lambda_2|} \leq \dots < \frac{1}{|\lambda_n|}$$

Solo maggiorazione