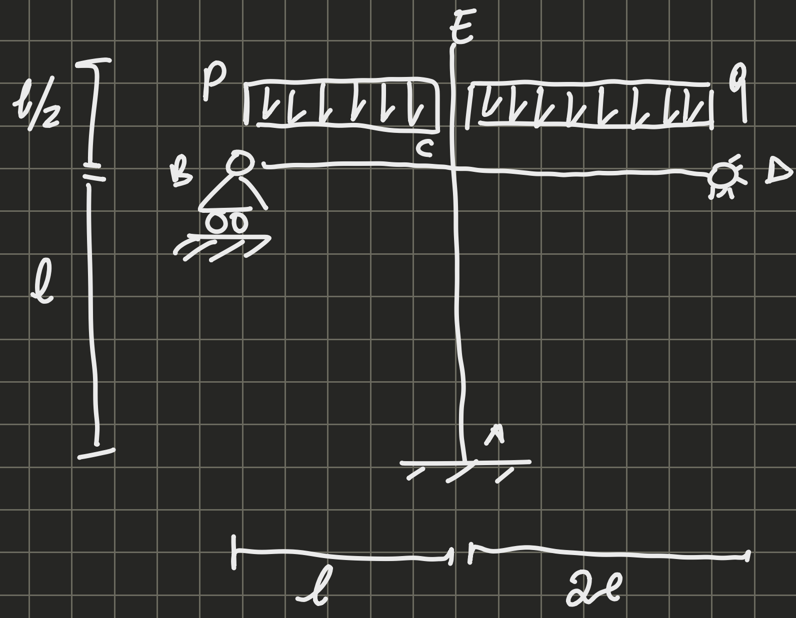
Esercitazione 3

Analisi dei telai
↳ Temi d'Esame su MDF

TdE (MDF) <u>20/06/2022</u>



Hp: $EA \to \infty \Rightarrow N=0$
$GA^* \to \infty \Rightarrow T=0$

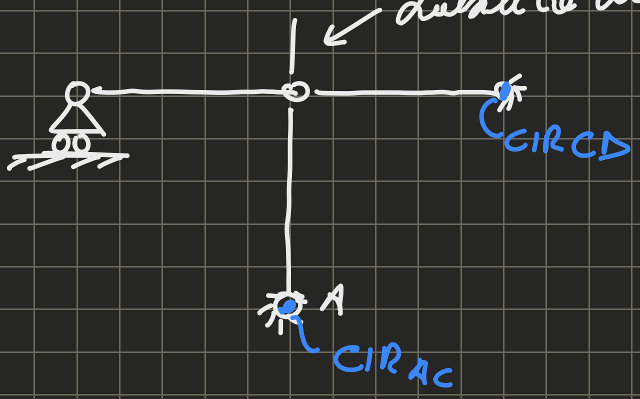
E è estremo libero

Possiamo applicare MDF solo a telai a nodi fissi
↳ Per determinare studiamo la cinematica

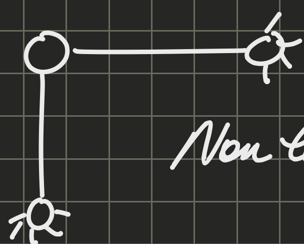
1: Analisi Cinematica

"Labilità locale" → spiega il nostro appendice isostatica → si può spostare come vuole

Svincoliamo

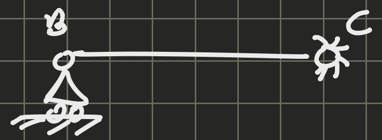


ACD arco a 3 cerniere non allineate



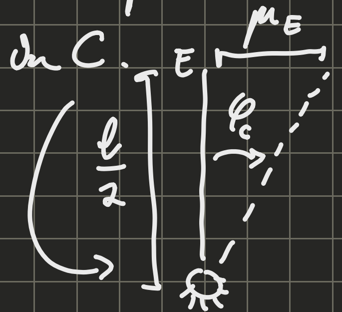
Non labile

Ci rimane:



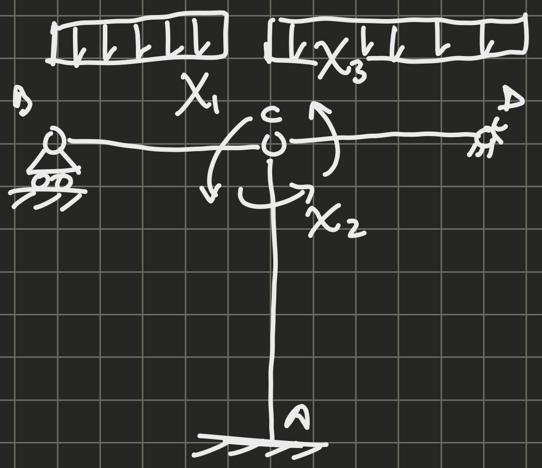
È isostatica, tutta la struttura caricata è isostatica ⇒ il telaio iniziale è a nodi fissi

+ Il punto E può spostarsi per effetti di una rotazione in C.



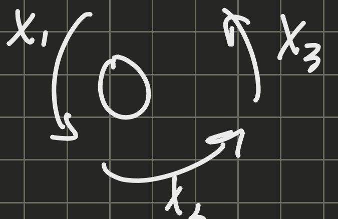
$$\mu_E = \varphi_C \cdot \frac{l}{2}$$

Soluzione al telaio con l'MDF



Abbiamo già tabellato l'incastro quindi è utile svincolare solo in C e mettere tutte le incognite iperstatiche in C e basta.

Il nodo deve essere in equilibrio → si può fare per tanti telai



$$X_1 + X_2 + X_3 = 0$$

Possiamo scrivere allora:

$$X_3 = -X_1 - X_2$$

Ci dice di un calcolo.

Quando convergono iperstatiche ad un nodo possiamo scrivere un'equazione di equilibrio.

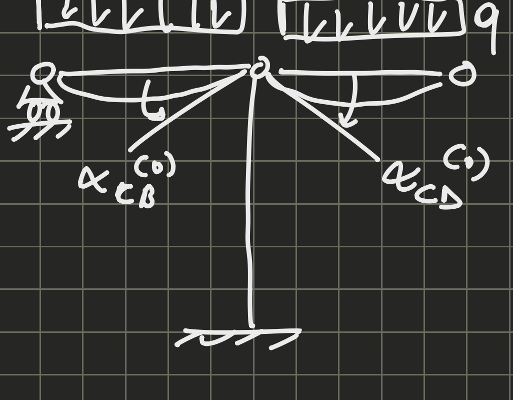
Equazione di congruenza

$\Delta(B\hat{C}D) = 0$

$\Delta(A\hat{C}D) = 0$

X_2 tende a chiudere l'angolo tra $B\hat{C}A$. perché agisce sul pilastro, e X_1 agiscono sull'angolo della asta orizzontale tutte e due devono avere rotazione relativa di 0.

Struttura "0" $(p, q \neq 0, X_1 = X_2 = 0)$

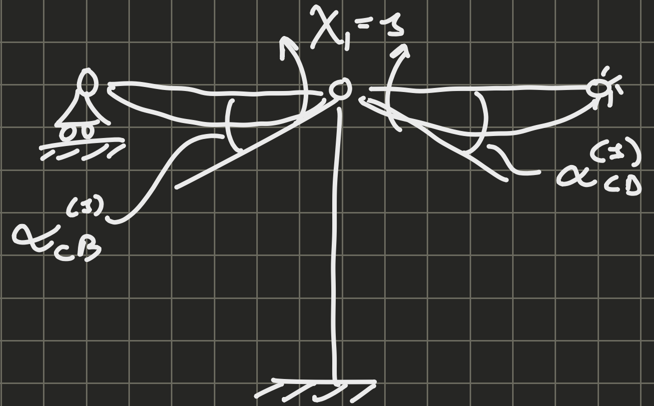


$$\alpha_{CB}^{(0)} = \frac{pl^3}{24EI}$$

$$\alpha_{CD}^{(0)} = \frac{q(2l)^3}{24EJ} = \frac{ql^3}{3EI}$$

Struttura "1" $(X_1 = 1, X_2 = 0, p = q = 0)$

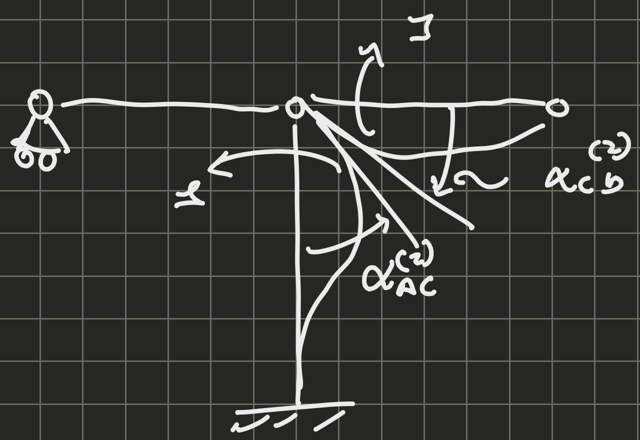
Perché $\curvearrowleft = X_1 + \underset{0}{X_2} = X_1$



$$\alpha_{CB}^{(1)} = \frac{l}{3EI}$$

$$\alpha_{CD}^{(1)} = \frac{2l}{3EI}$$

Struttura "2"



$$\alpha_{CD}^{(2)} = \frac{2l}{3EI}$$

$$\alpha_{AC}^{(2)} = \frac{l}{4EI}$$

Equazioni risolventi

$$\Delta(B\hat{C}D) = 0$$

$$= \underbrace{\left(\alpha_{CB}^{(1)} + \alpha_{CD}^{(1)}\right)}_{\text{tutte due sono concordi con } X_2} X_1 + \underbrace{\alpha_{CD}^{(2)}}_{\alpha_{AC}^{(2)} \text{ non ha effetto su } B\hat{C}D} \cdot X_2 + \left(\alpha_{CB}^{(0)} + \alpha_{CD}^{(0)}\right) = 0$$

$$= \frac{l}{EI}\left[\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) X_1 + \frac{2}{3} X_2\right] + \frac{p l^3}{24EI}\left(1 + 8\frac{q}{p}\right) = 0$$

$$\Delta(A\hat{C}D) = 0$$

$$= \alpha_{CD}^{(1)} \cdot X_1 + \left(\alpha_{CD}^{(2)} + \alpha_{CA}^{(2)}\right) \cdot X_2 + \alpha_{CD}^{(0)} = 0$$

$$= \frac{l}{EI}\left[\frac{2}{3} X_1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right) X_2\right] + \frac{q l^3}{3EI} = 0$$

$\rightarrow$ Se avessimo scelto $\Delta(A\hat{C}B)$ avremmo dovuto prendere l'equilibrio in modo diverso.

↳ Abbiamo scelto $\widehat{ACD}$ perchè abbiamo preso X_3 in funzione di X_1 e X_2, riducendoci i calcoli.

$$\overline{X}_1 := \frac{X_1}{ql^2} \qquad \overline{X}_2 := \frac{X_2}{ql^2} \qquad \left[\frac{Nm^2}{Nm^2}\right] = [\text{adim}]$$

$$\overline{X}_1 + \frac{2}{3}\overline{X}_2 = -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{8}\frac{p}{q}\right) \quad (1)$$

$$\frac{2}{3}\overline{X}_1 + \frac{11}{12}\overline{X}_2 = \frac{-1}{3} \quad (2)$$

Da (2) $\quad \overline{X}_1 = \frac{-11}{8}\overline{X}_2 - \frac{1}{2}$

(1) -> $\overline{X}_2 = \frac{-4}{17} + \frac{1}{17}\frac{p}{q}$

Calcoliamo momento flettente dove $\frac{p}{q} = 1$

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \frac{-35}{136}ql^2 \\ X_2 &= \frac{-24}{136}ql^2 \end{aligned}\right\}$$ Abbiamo preso i versi opposti a quelli veri.

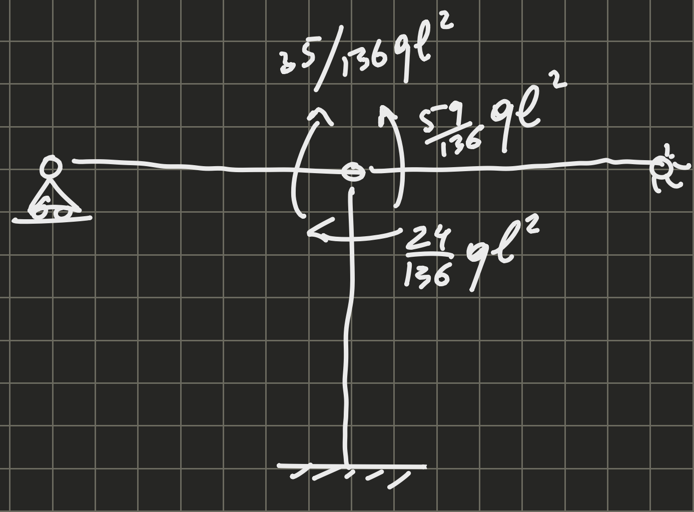
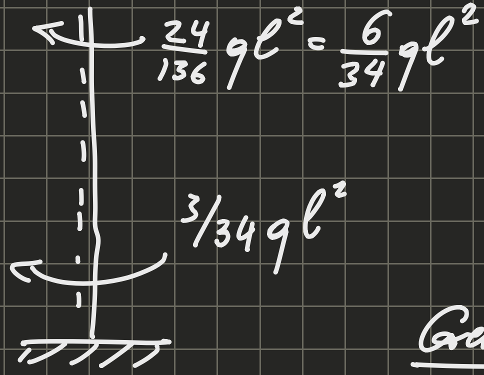
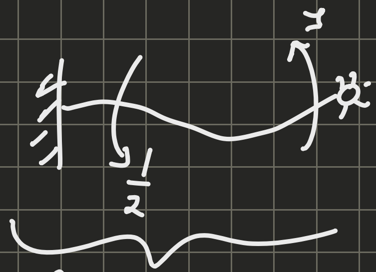


Diagramma del momento

Tratto $\overline{AC}$

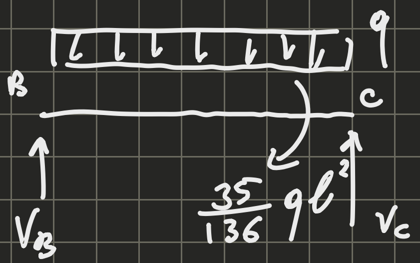


Generalmente

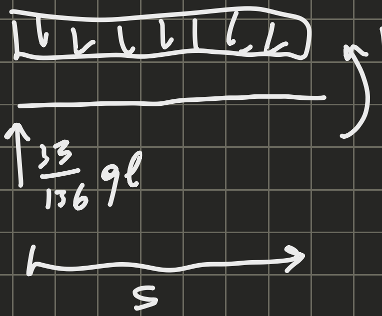


La ragione per cui lo svincolamento all'incastro era superfluo

Tratto BC



$$\sum M_c^{\overline{BC}} = 0 \qquad V_B l - q\frac{l^2}{2} + \frac{35}{136} q l^2 = 0 \Rightarrow V_B = \frac{33}{136} q l$$

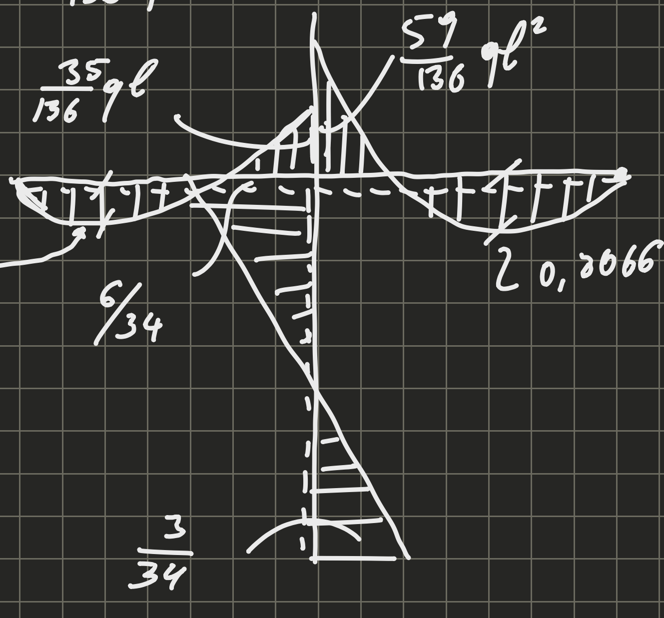


$$M(s) \frown = \frac{33}{136} q l s - \frac{q s^2}{2}$$

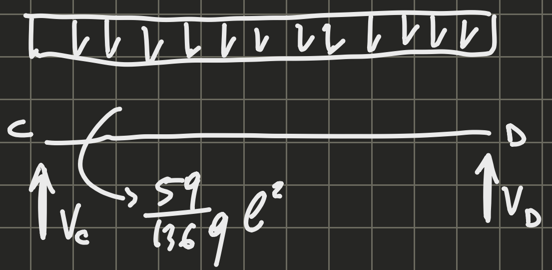
$$M(s=l) = \frac{-35}{136} q l$$

$$\frac{dM}{ds} = 0 \Rightarrow s = \frac{33}{136} l$$

$$M\left(\frac{33}{136} l\right) \simeq 0{,}0294 q l^2$$



Tratto CD

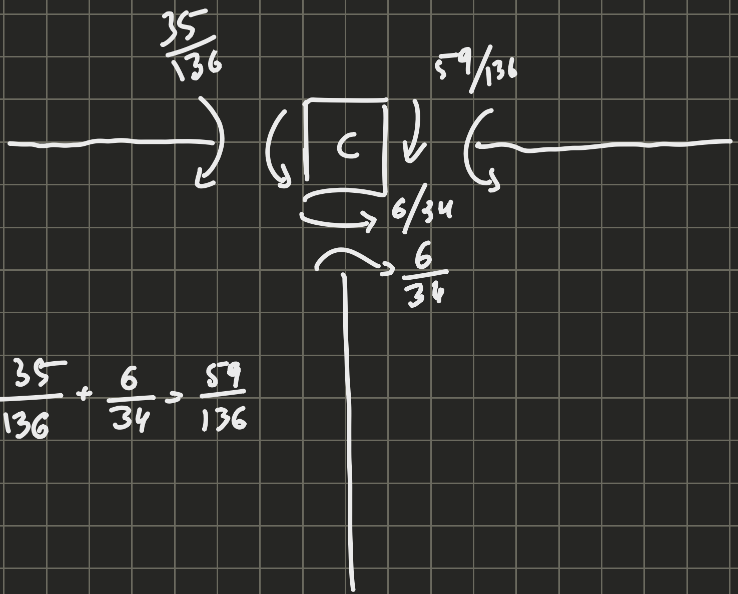


$$\sum M_C^{CD} = V_D\, 2l - 2ql^2 + \frac{59}{136} ql^2 = 0$$

$$\rightarrow V_D = \frac{213}{272} ql$$

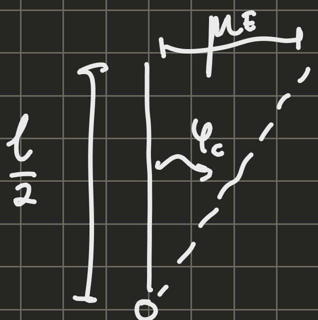
$$M(s) = \frac{213}{272} qls - \frac{qs^2}{2}$$

$$M(0) = 0$$
$$M(2l) = -\frac{59}{136} ql^2$$



$$\frac{35}{136} + \frac{6}{34} = \frac{59}{136}$$

Spostamento del punto E



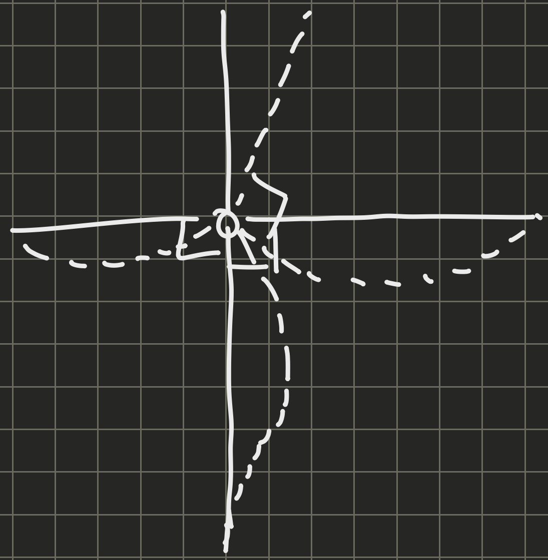
$$\mu_E = \varphi_c \frac{l}{2}$$

Abbiamo già i cambi d'angolo per trovare φ_c

$$\varphi_c = \alpha_{CD}^{(1)} X_1 + \alpha_{CD}^{(2)} X_2 + \alpha_{CD}^{(0)}$$

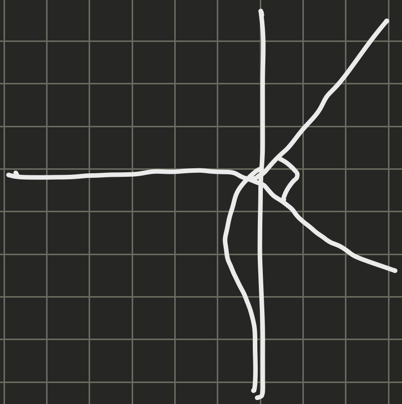
$$= \frac{2l}{3EI} \cdot \frac{-35}{136} ql^2 + \frac{2l}{3EI} \cdot \frac{-24}{136} ql^2 + \frac{ql^2}{3EI}$$

$$= \frac{3}{68} \frac{ql^2}{EI}$$

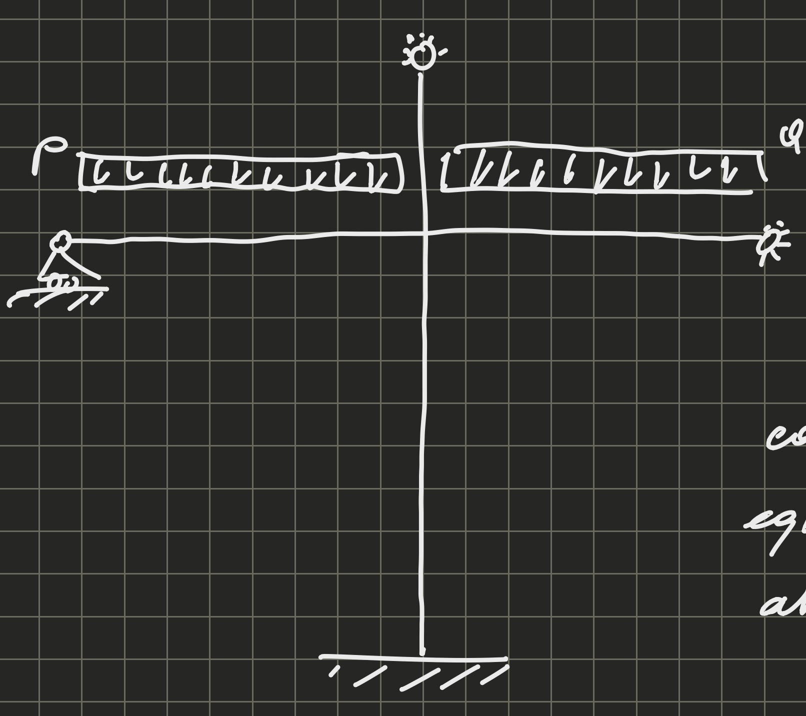


L'asta è continua con le altre quindi prevale l'angolo della parte di trave sotto visto che rimane con angolo di 180 tra i due lati per D $(B\hat{C}D) = 0$

Avremmo potuto prendere anche gli altri angoli, il risultato sarebbe stato lo stesso.



Esercizio 1.2 dello stesso tema d'esame



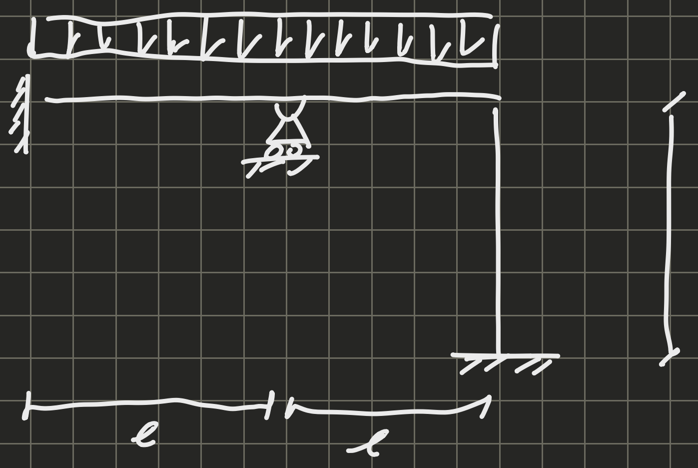
Scrivere solo il sistema di equazioni risolvente

4 incognite iperstatiche con 1 che possiamo scrivere in equilibrio con le altre 3, come abbiamo fatto in 1.1

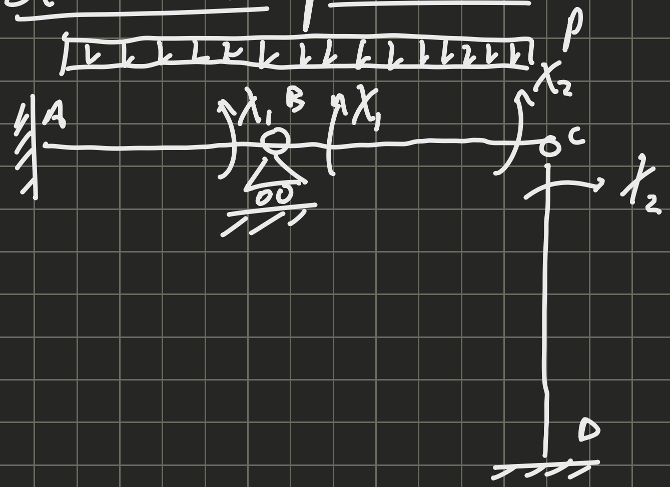
Altro esempio che imposta $\boxed{MdF}$ → Metodo delle rotazioni
↳ È più facile mettere in evidenza i momenti per continuità vincolate

$H_p: \ EA \to \infty$

$GA^* \to \infty$



Struttura Principale Iso

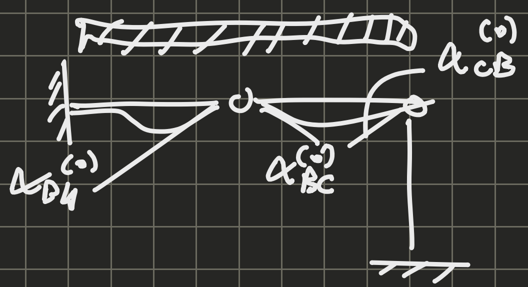


$\underline{X} = [X_1, X_2]^T$

$\Delta \varphi_{\hat{ABC}} = 0 \qquad X_1$

$\Delta \varphi_{\hat{BCD}} = 0 \qquad X_2$

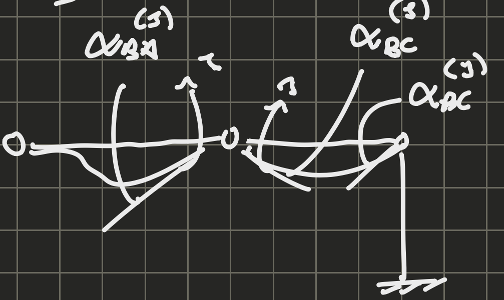
Struttura "0"



$\alpha_{BA}^{(0)} = \frac{p l^2}{48EI}$

$\alpha_{BC}^{(0)} = \alpha_{CB}^{(0)} = p\frac{l^3}{24EI}$

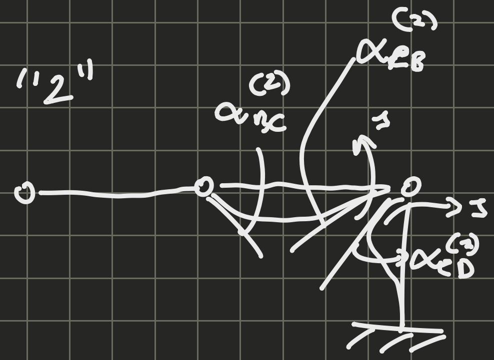
"1" $X_1 = 1$



$\alpha_{BA}^{(1)} = \frac{l}{4EI}$

$\alpha_{BC}^{(1)} = \frac{l}{3EI} \qquad \alpha_{CB}^{(1)} = \frac{l}{6EI}$

"2"



$$\alpha_{CB}^{(2)} = \frac{l}{3EJ}$$

$$\alpha_{BC}^{(2)} = \frac{l}{6EJ}$$

$$\alpha_{CD}^{(2)} = \frac{l}{4EJ}$$

Equazioni di Congruenza

$$\Delta\varphi_{A\hat{B}C} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\alpha_{BA}^{(1)} + \alpha_{BC}^{(1)}\right) X_1 + \alpha_{BC}^{(2)} X_2 + \alpha_{BA}^{(0)} + \alpha_{BC}^{(0)} = 0$$

$$\Delta\varphi_{B\hat{C}D} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_{CB}^{(1)} \cdot X_1 + \left(\alpha_{CB}^{(2)} + \alpha_{CD}^{(2)}\right) \cdot X_2 + \alpha_{CB}^{(0)} = 0$$

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) \bar{X}_1 + \frac{1}{6} \bar{X}_2 + \left(\frac{1}{48} + \frac{1}{24}\right) = 0$$

$$\frac{1}{6} \bar{X}_1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \bar{X}_2 + \frac{1}{24} = 0$$

Simmetrico → quello che vogliamo

$$\bar{X}_1 = \frac{X_1}{pl^2}$$

$$\bar{X}_2 = \frac{X_2}{pl^2}$$

Variazione percorso termico su pilastro

Non cambia η cambia solo η_0