Lezione 6 -

Inizio della Lezione 10:33

Usiamo il PLV in 3 forme:

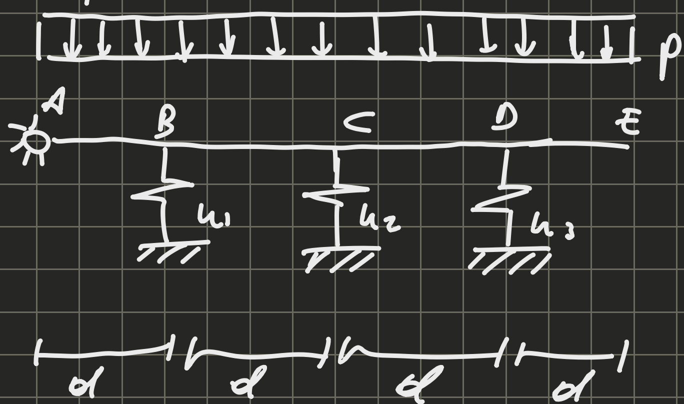
- identità: togliamo spostamenti generalizzati virtuali e lavoro virtuali esterni
- corollario 1 → se risolvi il pr statico → cinematico e congruente
- corollario →

Corollario 2 per scrivere equazioni di congruenza

Dobbiamo scrivere X che ci trovano il sistema cinematico congruente

Equazioni risolventi del metodo delle forze → $\underline{\underline{\eta}}\,\underline{X} + \underline{\eta}_0 = \underline{0}$ (?)

Esempio con $s=2$



$\ell = 4d$

$N = 1$

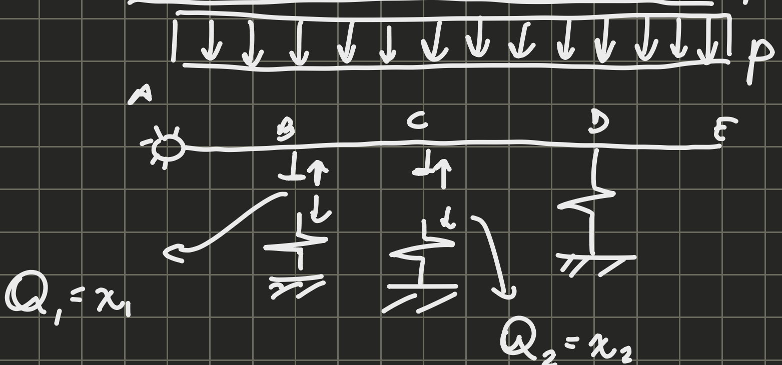
→ 1 gdl se togliamo tutte le molle

→ Possiamo usare una rotazione intorno ad A per descrivere

$-3n_c + 5n_r = 2 = s$

$$\underline{X} = (x_1, x_2)^T$$

Struttura Isostatica Principale



Congruenza

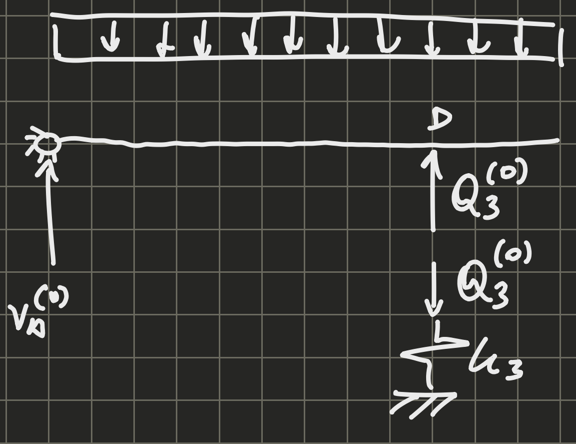
$$\begin{cases} \Delta v_B = 0 \\ \Delta v_C = 0 \end{cases}$$

Spostamento relativo tra sezione di molle steccate e trave

→ Dipendono da P, X_1, X_2

Dobbiamo definire s+1 struttura ausiliaria

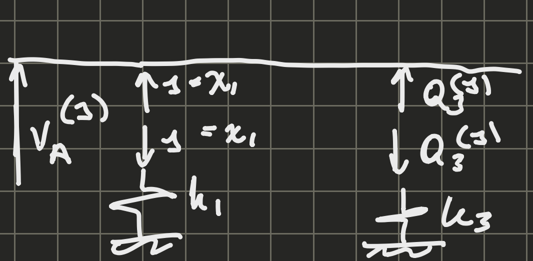
Struttura Ausiliaria "0" → dove agiscono solo i carichi esterni



Le molle B e D sono tolte per semplicità grafica, ci sono ma sono scariche

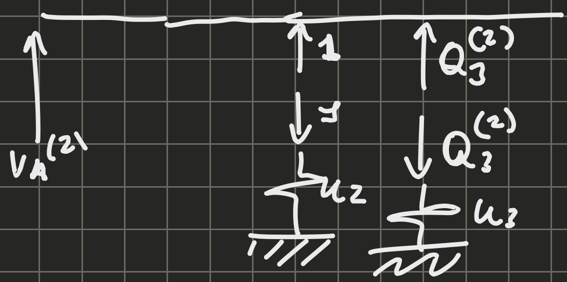
$$\begin{cases} Q_1^{(0)} = 0 \\ Q_2^{(0)} = 0 \\ Q_3^{(0)} = \frac{8}{3} p d \end{cases} \qquad \begin{cases} q_1^{(0)} = 0 \\ q_2^{(0)} = 0 \\ q_3^{(0)} = \frac{Q_3^{(0)}}{k_3} = \frac{8}{3} \frac{p d}{k_3} \end{cases}$$

Struttura Ausiliaria "1" → spegniamo tutto eccetto X_1



$$\begin{cases} Q_1^{(1)} = 1 \\ Q_2^{(1)} = 0 \\ Q_3^{(1)} = -1/3 \end{cases} \qquad \begin{cases} q_1^{(1)} = 1/k_1 \\ q_2^{(1)} = 0 \\ q_3^{(1)} = \frac{-1}{3k_3} \end{cases}$$

Struttura Ausiliaria "2"



Siamo capaci di risolvere tutte queste strutture
(V_A non le esplicitiamo)

$$\begin{cases} Q_1^{(2)} = 0 \\ Q_2^{(2)} = 1 \\ Q_3^{(2)} = -\frac{2}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} q_1^{(2)} = 0 \\ q_2^{(2)} = 1/k_2 \\ q_3^{(2)} = -\frac{2}{3k_3} \end{cases}$$

<u>Come calcoliamo Δv_B?</u>

$$\Delta v_B = \Delta v_B^{(0)} + \Delta v_B^{(1)} X_1 + \Delta v_B^{(2)} X_1$$

↳ Movimento relativo tra struttura e molla in ogni struttura ausiliaria.

10:56

Metto un carico esterno nella stessa direzione e verso dello spostamento che vogliamo calcolare, per

Qualcosa ← 10:58

$\boxed{\Delta v_B^{(0)}}$ Per Δv_C sarà

Statica Ammissibile → Struttura Ausiliaria "3"

↳ Da dove il carico è applicato per trovare lo spostamento specifico

→ Perché è quella in cui lo spostamento è quello che stiamo guardando

Cinematica Ammissibile → Struttura Ausiliaria "0"

↳ Nella struttura vogliamo calcolare lo spostamento

$$L_{ext} = 1 \cdot \Delta v_B^{(0)} = \sum_{j=1}^{3} Q_j^{(1)} \cdot q_i^{(0)} = L_{INT}$$

$$\rightarrow \Delta v_B^{(0)} = -\frac{8}{9} \frac{pd}{k_3}$$

Stiamo calcolando lo spostamento per ogni isostatica per poi metterle insieme e trovare la congruenza.

↳ Gli effetti sono lineari, quindi è comodo separarli

$\Delta v_B^{(1)}$

↳ Statica ammissibile → Struttura Ausiliaria "1"

↳ Cinematica ammissibile → Struttura Ausiliaria "1"

$$\Delta v_B^{(1)} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{9k_3} \quad (>0)$$

$\boxed{\Delta v_B^{(2)}}$ $\boxed{11:06}$

↳ Statica è associata alla direzione in essa, quindi seguiamo la statica che la genera

Statica Ammissibile → Struttura Ausiliaria "1"

Cinematica Ammissibile → Struttura Ausiliaria "2"

$$\Delta v_B^{(2)} = \frac{2}{9k_3}$$

$\Delta v_C^{(0)}$

Statica → "2"

Cinematica → "0"

$$\Delta v_C^{(0)} = -\frac{16}{9}\, p\frac{d}{k_3}$$

Ogni volta cambiamo i pedici nel PLV, ma è troppo lungo quindi lo salto

$\Delta v_C^{(1)}$

Statica → "2"

Cinematica → "1"

$$\Delta v_C^{(1)} = \frac{2}{9k_3} \quad \left(= \Delta v_B^{(2)}\right)$$

$\Delta v_C^{(2)} =$

Statica → "2"

Cinematica → "2"

$$\Delta v_C^{(2)} = \frac{1}{k_2} + \frac{4}{9k_3} \quad (>0)$$

Il PLV ci da tutti gli spostamenti relativi che stiamo cercando, cambiano solo i pedici.

$$\Delta v_B = \Delta v_B^{(1)} X_1 + \Delta v_B^{(2)} X_2 + \Delta v_B^{(0)} = \eta_{11} X_1 + \eta_{12} X_2 + \eta_{01} = 0$$

$$\Delta v_C = \Delta v_C^{(1)} X_1 + \Delta v_C^{(2)} X_2 + \Delta v_C^{(0)} = \eta_{21} X_1 + \eta_{22} X_2 + \eta_{02} = 0$$

$$\rightarrow \quad \underline{\underline{\eta}}\,\underline{X} + \underline{\eta_0} = \underline{0}$$

$$\underline{X} = -\underbrace{\underline{\underline{\eta}}^{-1}}_{\text{Matrice di Flessibilità del sistema o anche della cedevolezza}} \underline{\eta_0} \rightarrow \text{Diamo forze rispetto ad uno spostamento noto}$$

Proprietà di $\underline{\underline{\eta}}$

↳ 1. $\underline{\underline{\eta}}$ è simmetrica

2. $\eta_{ii} > 0$

3. $\det(\underline{\underline{\eta}}) = \eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}\eta_{21} = \eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}^2 > 0$

4. $\underline{\underline{\eta}}$ è sdp $\Rightarrow$ esiste una e una sola soluzione di $\underline{X}$

$\boxed{11:18}$

Generalizziamo i risultato dell'esempio

Formule generali per $\underline{\underline{\eta}}$ e η_0

$$\Delta_{v_B}^{(0)} = \eta_{01} = \sum_{1}^{J} Q_j^{(1)} q_j^{(0)} = \underbrace{\underline{Q}^{(1)T}}_{\text{Azioni interne in "1"}} \cdot \underbrace{\underline{q}^{(0)}}_{\text{Spostamento in "0"}} =$$

Equazioni legame costitutivo

$$q_i = \frac{Q_i}{k_i} \qquad \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 1/k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/k_n \end{pmatrix}$$

Se ele l'inisco

Posso scrivere

$$\underline{q} = \underline{\underline{C}}\,\underline{Q}$$

$$= \underline{Q}^{(1)T}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{Q}^{(0)} =$$

$$\Delta v_c^{(0)} = \eta_{02} = \ldots\ldots\ldots = \underline{Q}^{(2)T}\,\underline{q}^{(0)} = \underline{Q}^{(2)T}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{Q}^{(0)} =$$

$\boxed{11:23}$ Avevamo detto

$$\underline{Q} = \underline{Q}^{(0)} + \sum_{j=1}^{s} \underline{Q}^{(j)} X_j = \underline{\underline{N}}^{(0)}\,\underline{\tilde{F}} + \underline{\underline{N}}^{(x)}\,\underline{x}$$

confronto

$$\underline{Q}^{(0)} = \underline{\underline{N}}^{(0)}\,\underline{\tilde{F}}$$

$\underline{Q}^{(j)}$ è la j-esima colonna di $\underline{\underline{N}}^{(x)}$

Questo è il vettore $Q_1^{(1)}, Q_2^{(1)}, Q_3^{(1)}$ che abbiamo trovato per ogni sistema

$$= \underline{Q}^{(1)T}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{N}}^{(0)}\,\underline{\tilde{F}}$$

$$= \underline{Q}^{(2)T}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{N}}^{(0)}\,\underline{\tilde{F}}$$

$\boxed{11:29}$

$$\boxed{\eta_0 = \underbrace{\underline{\underline{N}}^{(x)T}}_{\underline{Q}^{(j)}}\,\underline{\underline{C}}\,\underbrace{\underline{\underline{N}}^{(0)}\,\underline{\tilde{F}}}_{\underline{Q}^{(0)}}}$$

Ragionando nello stesso modo riga per riga, sarà:

$$\boxed{\underline{\underline{\eta}} = \underbrace{\underline{\underline{N}}^{(x)T}}_{} \underbrace{\underline{\underline{C}}\, \underline{\underline{N}}^{(x)}}}$$

$\underline{Q}^{(j)}$ Spostamenti nella j-esima struttura ausiliare

$$\boxed{\eta_{ij} = \eta_{ji}}$$ Proprietà

Teorema di Klapeyron → dimostrazione che $\underline{\underline{\eta}}$ è sdp

$$\boxed{\underline{\underline{\eta}}\,\underline{X}} + \underbrace{\eta_0}_{} = \underline{0}$$

↳ Spostamenti dalle forze esterne

$$\underline{\Theta} = \underline{\underline{\eta}}\,\underline{X}$$

↳ Spostamenti nella principale dato dalle incognite iperstatiche

Vogliamo calcolare il lavoro compiuto da $\underline{X}$ nel tempo

Carico

$$\underline{x} : \underline{0} \to \underline{x}$$

$$\underline{X}(t) = \alpha(t)\,\bar{\underline{X}} \to \underline{X} \text{ generico}$$

α tale che: → Non ci importa altro

$$\begin{cases} \alpha(\tau = 0) = 0 \\ \alpha(\tau = 1) = 1 \end{cases}$$

Spostamento

$$\Theta(t) = \underline{\underline{\eta}}\,\underline{X}(t) = \alpha(t)\,\underline{\underline{\eta}}\,\bar{\underline{X}}$$

$\tau = t$

↳ Stava scrivendo male

Lavoro compiuto da $\underline{X}$ per $\underline{\Theta}$

$$W = \int_{\tau=0}^{\tau=1} \underline{x}(\tau)^T \cdot d\Theta(\tau) = \underline{x}^T \underline{\underline{\eta}}\, \bar{\underline{x}} \cdot \underbrace{\int_0^1 \alpha \, d\alpha}_{1/2}$$

$$d\Theta = d\alpha\, \underline{\underline{\eta}}\, \bar{\underline{x}}$$

$$\boxed{= \frac{1}{2} \bar{\underline{x}}^T \underline{\underline{\eta}}\, \bar{\underline{x}}}$$

Teorema di Klapeyron

Il lavoro per fare gli spostamenti nel tempo è un mezzo rispetto a se facessi istantaneamente.

↳ Effetto del fatto che $\Theta(t)$ è effetto di $\underline{x}(t)$, se il legame non fosse lineare, sarebbe diverso.

$$W(\underline{x}) = \frac{1}{2} \underline{x}^T \underline{\underline{\eta}}\, \underline{x} > 0 \qquad \forall \underline{x} \neq 0$$

↳ Devo spendere lavoro per fare deformazione

⇒ stessa definizione di matrice positiva

$$\Rightarrow \underline{\underline{\eta}} \text{ sdp} \Rightarrow \det(\underline{\underline{\eta}}) > 0 \Rightarrow \underbrace{\exists\, \underline{\underline{\eta}}^{-1}}_{\text{Ci può aiutare all'esame}}$$

$\boxed{11:50}$

Corollario 1

$$\tilde{\underline{F}}^T \hat{\underline{U}} = \underline{Q}^T \hat{q} \quad \text{se vale } \forall \left\{ \hat{\underline{U}} = \underline{\underline{T}}\, \hat{\underline{U}},\ \hat{q} = \underline{\underline{B}}\, \hat{\underline{U}} \right\}$$

$$\Longrightarrow \{ \tilde{\underline{F}},\ \underline{Q} \} \in C^*$$

Definiscono

$$\tilde{\underline{F}}^T \underline{\underline{T}} \hat{\underline{U}} = \underline{Q}^T \underline{\underline{B}} \hat{\underline{U}}$$

$$(\underline{\underline{T}}^T \tilde{\underline{F}})^T \hat{\underline{U}} = (\underline{\underline{B}}^T \underline{Q})^T \hat{\underline{U}} =$$

Legame costitutivo

$$\underline{Q} = \underline{\underline{D}}\, q = \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{B}}\, \underline{U}$$

Definiamo $\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_n \end{pmatrix}$

$$= (\underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{B}}\, \underline{U})^T \hat{\underline{U}} \qquad \forall \hat{\underline{U}}$$

Coordinate lagrangiane a soluzione del problema

Generico spostamento cinematicamente ammissibile

$$\text{Vale } \forall \hat{\underline{U}} \Longleftrightarrow (\underline{F} - \underline{F}_R)^T \hat{\underline{U}} = 0 \quad \forall \hat{\underline{U}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{F} = \underline{F}$$

$$\underline{F} = \underline{\underline{T}}^T \tilde{\underline{F}}$$

Vettore delle componenti lagrangiane delle forze attive

Matrice di rigidezza elastica

$$\underline{F}_R = \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{B}}\, \underline{U} = \underline{\underline{k}}\, \underline{U}$$

Vettore delle componenti lagrangiane delle forze di richiamo elastico

$\boxed{12:03}$

↪ Controllare nome

Se imponiamo $\underline{F} = \underline{F}_R$

$$\Rightarrow \underline{\underline{k}}\,\underline{U} = \underline{F}$$ ← $\boxed{12:03}$ ← quello che ho detto a questo punto

↳ se $\exists\, \underline{\underline{k}}^{-1} \Rightarrow \underline{U} = \underline{\underline{k}}^{-1}\underline{F}$

Proprietà di $\underline{\underline{k}}$ → domani

Teoria della trave → domani

Tensore di Sforzo e Deformazione

↳ Nelle note del corso