Lezione 6-

Criteri d'Arresto

$N_{max}$

TOL

C >> 1 va male

C ≳ 1 va bene

costante di affidabilità dello stimatore

? $K_{min} \in \mathbb{N}$ t.c $\underbrace{\|e^{(k_{min})}\|}_{\text{Non implementabile, perchè dipende da x esatto che non so}} \leq C \, \boxed{S \leq TOL}$

$= 10^{-5}$

Se $C = 10^{-4}$ facciamo lavorano in più, potevamo uscire prima.

meglio questo che $10^{4}$

controllare la tolleranza serve che funzioni

$S \to S_1$ residuo relativo

$S \to S_2$ incremento

Dovremo costante specifica a C.

$S_2$

? $k_{min} \in \mathbb{N}$ tale che $\dfrac{\|r^{(k_{min})}\|}{\|b\|} \le TOL$

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$$

→ fattore di scalatura perché è $r^{(0)}$

Ricavo $\le$ per $S_1$ → Errore su valore relativo

$$\frac{\|\overset{x - x^{(k_{min})}}{\overset{\parallel}{e^{(k_{min})}}}\|}{\|x\|} \le \boxed{\phantom{k(A)}} \underbrace{\frac{\|r^{(k_{min})}\|}{\|b\|}}_{S_1}$$

Perturbazione di $Ax=b$

$$(A+\delta A)(x+\delta x) = (b+\delta b)$$

se $\delta A = 0 \Rightarrow A(\underbrace{x - \delta x}_{\tilde{x}}) = (b+\delta b)$

$\tilde{x}$ → Errore nella approssimazione di $x$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le k(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = k(A)\frac{\|\tilde{r}\|}{\|b\|}$$

$$\delta b = A\tilde{x} - b = -\tilde{r}$$

$$\frac{\|x - \overset{x^{(k_{min})}}{\overset{\parallel}{\tilde{x}}}\|}{\|x\|} \le k(A)\frac{\|\tilde{r}\|}{\|b\|}$$

Se costituisco $\tilde{x}$ con $x^{(k_{min})}$ e la stessa espressione di prima

$$\frac{\overset{\displaystyle x - x^{(k_{min})}}{\overset{\|}{\|e^{(k_{min})}\|}}}{\|x\|} \le \underbrace{K(A)} \quad \underbrace{\frac{\|r^{(k_{min})}\|}{\|b\|}}_{S_1}$$

$\geq 1$, non possiamo fare lavoro in più ma non è un problema

Se il sistema è ben condizionato allora anche il criterio di arresto è affidabile

Se $\underset{\text{malcondizionato}}{\wedge}$, non è affidabile

Determinazione di C del secondo criterio

$S_2$ ? $k_{min} \in \mathbb{N}$ tale che $\|e^{(k_{min})}\| \le C \underbrace{\|x^{(k_{min}+1)} - x^{(k_{min})}\|}_{S_2} \le TOL$

Qui per fermarmi a $k_{min}$ devo fermarmi a $k_{min}+1$ per controllare

Caso B sdp con $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$

$$e^{(k_{MIN})} = x - x^{(k_{MIN})} = x - x^{(k_{MIN}+1)} + \underbrace{x^{(k_{MIN}+1)} - x^{(k_{MIN})}}_{S_2}$$

Per semplicità $S_2 = \delta x^{(k_{MIN})}$

$$\|e^{(k_{MIN})}\| = \|x - x^{(k_{MIN}+1)} + \delta x^{(k_{MIN})}\| \le \underbrace{\|x - x^{(k_{MIN}+1)}\|}_{\|e^{(k_{MIN}+1)}\|} + \underbrace{\|\delta x^{(k_{MIN})}\|}_{\delta_2}$$

$$\le \rho(B)\|e^{(k_{MIN})}\| + \|\delta x^{(k_{MIN})}\|$$

$\|B\|_2 \leftarrow \rho(B)$

se $B$ sdp $\|B\|_2 = \rho(B)$

$$(1-\rho(B))\|e^{(k_{MIN})}\| \le \|\delta x^{(k_{MIN})}\|$$

$$\downarrow$$

$$\|e^{(k_{MIN})}\| \le \underbrace{\frac{1}{1-\rho(B)}}_{C} \underbrace{\|\delta x^{(k_{MIN})}\|}_{\delta_2}$$

- Sempre positivo perché $\rho(B) \le 1$
- Vicino è $\sim 1$ quando $\rho(B)$ è piccolo
- Più è $\underbrace{\text{convergente}}_{\text{più piccolo è } \rho(B)}$, più è affidabile è l'algoritmo
- Vale anche quando $B$ non è sdp, sdp ci ha permesso di trovare l'uguaglianza

Fine equazione lineare

## Approssimazioni di equazioni non lineari

### Equazioni non-lineari

$f: [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
↳ Non-lineare

$y = a_0 + a_1 x$ lineare

$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ non lineare

Polinomi → $P_n$ con $\geq 2$ sono non lineare

La maggior parte delle funzioni non sono lineare

Il problema che vogliamo risolvere è trovare gli 0.

? $\alpha \in [a,b]$ tale che $f(\alpha) = 0$

Legge dei Gas è non-lineare

? V

noti p, T

$$\left[p + a\left(\frac{N}{V}\right)^2\right](V - Nb) = kNT$$

Numero molecole

Cost. Boltzmann

Per trovare lo 0:

$$\left[p + a\left(\frac{N}{V}\right)^2\right](V - Nb) - kNT = 0$$

Per $P_n$ non ci sono modi per trovare le radici.

→ Metodi per trovare le radici di una funzione

### Metodi di Punto Fisso

$f(\alpha) = 0$

· ..(cos(cos (1))) $\rightarrow$ $\alpha = 0,73908513$

radianti

Dopo n iterazioni si blocca, implicando che $\cos\alpha = \alpha$

cioè è un punto fisso dell'equazione

Pensando matematicamente

$x^{(0)} = 1$

$x^{(1)} = \cos(x^{(0)})$

$x^{(2)} = \cos(x^{(1)})$

$\vdots$

$x^{(k+1)} = \cos(x^{(k)}) \longrightarrow \cos\alpha = \alpha$

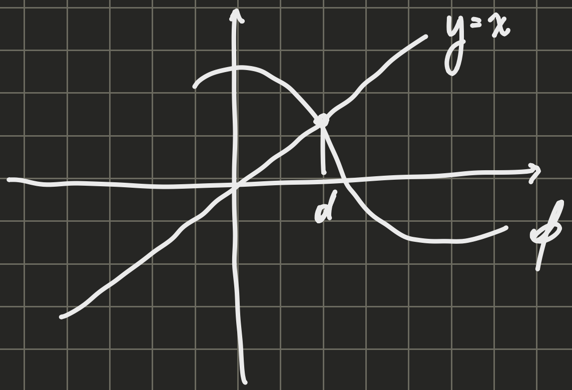
<u>Definizione</u> di <u>punto fisso</u>:

$\phi : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  $\phi \in \underbrace{C^0([a,b])}_{\text{Insieme funzioni continue in } [a,b]} \Rightarrow \phi$ è continua

$\alpha$ è punto fisso di $\phi$, se $\alpha) = \alpha$
$\in [a,b]$

$\hookrightarrow$ si trovano i punti fissi facendo le intersezione di $\phi$ e della bisettrice dei quadranti 1,3

$$\begin{cases} y(x) = \phi(x) \\ y(x) = x \end{cases} \qquad \phi(x) = x$$




Non tutte le funzioni hanno punto fisso, come $1/x$, e l'esponenziale.

$? \alpha \in [a, b]$ tale che $\phi(\alpha) = \alpha$

$\underbrace{\{x^{(k)}\}}$ Insieme di approssimazione di $\alpha$

$x^{(0)}$ guess iniziale

$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}) \quad k \geq 0$

C'è legame tra $\phi(\alpha) = \alpha$ e $f(\alpha) = 0$

Se riesco a legare opportunamente $\phi$ e $f$, i punti fissi di $\phi$ sono gli zero di $f$

---

$? \alpha$ tale che $f(\alpha) = 0 \longleftrightarrow ? \alpha$ tale che $\phi(\alpha) = \alpha$

A patto di legare opportunamente $f$ e $\phi$, la soluzione di $\phi(\alpha) = \alpha$ sarà soluzione di $f(\alpha) = 0$

Prendere $f(x) = 0 \xrightarrow[\text{come}]{\text{Scrivere}} \phi(x) = x$ risolvere

e troviamo soluzione approssimata di $f(x)$

Dati $f(x)=0$ riscriviamo come $\phi(x)=x$, risolviamo e troviamo soluzioni approssimate di $f(x)=0$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)+x-x=0 \\ \\ f(x)+x=x \end{array}\right\}$$

Un modo per riscrivere $f(x)=0$

$$\underbrace{f(x)+x}_{\phi(x)}$$

Dimostriamo l'equivalenza quando è così

Tesi

Hp $f(\alpha)=0$ Th $\phi(\alpha)=\alpha$

$$\phi(\alpha) = \alpha + f(\alpha) \overset{Hp}{=} \alpha$$

Hp $\phi(\alpha)=\alpha$ Th $f(\alpha)=0$

$$\phi(\alpha)=\alpha$$

$$\cancel{\alpha}+f(\alpha)=\cancel{\alpha} \quad =0$$

Altri modi riscrivere

$$f(x)+3x-3x=0$$

$$f(x)+3x=3x$$

$$\frac{f(x)+3x}{3}=x$$

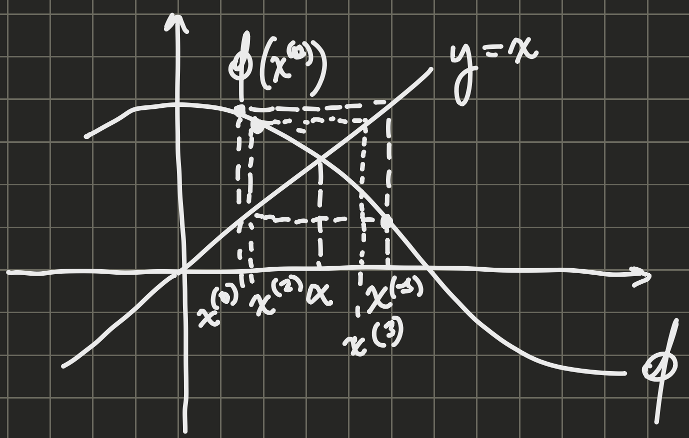
Se una $\phi(x)$ non ha punto fisso, non significa che cambiando $\phi(x)$ non troviamo punti fissi. È possibile che ci sia, ma solo uno. Ma non un unicità di $\phi(x)$ funziona a nostro favore

Possiamo riscrivere per funzioni che non hanno punto fisso sulla bisettrice.

funzioni diverse ci permettono di trovare i punti fissi di funzioni che con la modifica più semplice non trovano un punto fisso.

<u>Come costruiamo le iterate del punto fisso</u>

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$$




$$x^{(1)} = \phi(x^{(0)})$$

Usiamo la bisettrice per trovare $x^{(1)}$

$$x^{(2)} = \phi(x^{(1)})$$

$$x^{(3)} = \phi(x^{(2)})$$

Le approssimazioni si stanno stringendo su $\alpha$

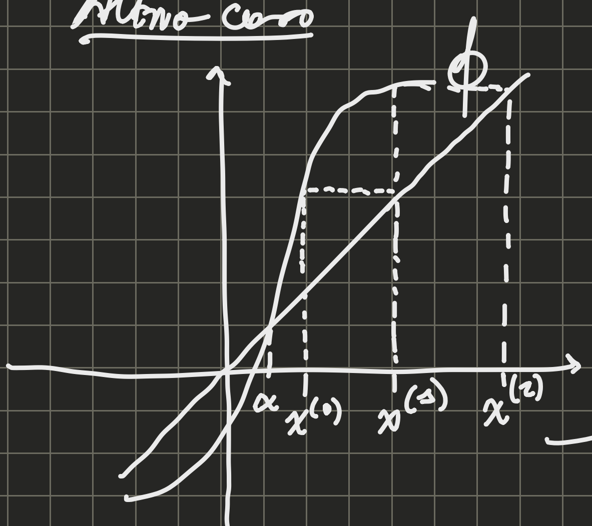
C'è convergenza non-monotona, $\alpha$ è un attrattore, c'è convergenza sia da sinistra che destra

Condizione attrattore monotono

Caso buono

<u>Altro caso</u>

Condizione repulsore monoto




Con sempre esso un $\phi$ buono, la successione diverge

Altre sono convergenza monotona

↳ Tutte le condizioni

e repulsore non-monotone
È possibile che $\phi$ non converga.

Monotono → sta allo stesso lato di x

Ci sono delle condizioni per trovare le convergenze.

Possiamo fare varie proposte di $\phi$ che possono o non possono aiutare

→ ~~la~~ molteplicità di $\phi$ ci aiuta di nuovo

→ la derivata prima è la ragione per la coincidenza

→ la pendenza ~1 aiuta la convergenza, invece se è molto diversa non converge

Usiamo $\phi'(\alpha)$ come il criterio della convergenza.

Teorema (Ostrowski) (<u>locale</u>)

Si considera un intorno $I_\alpha = (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$. ⇒ Chiusura

Suppongo $\exists!\, \alpha$ punto fisso di $\phi \in C^1(\bar{I}_\alpha)$

Derivabile 1 volta

Se $|\phi'(\alpha)| < 1$ allora $\exists \delta > 0$ tale che se

prendo $x^{(0)} : |x^{(0)} - \alpha| < \delta$, le iterazioni di punto fisso, $\{x^{(k)}\}$,

convergono ad $\alpha$ e vale :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^{(k+1)}-\alpha}{x^{(k)}-\alpha} = \phi'(\alpha)$$

non sappiamo chi è $\alpha$. Possiamo fare su questo iniziale.

È una convergenza lineare / di ordine 1.

Ordine di convergenza

Supponiamo di ordine $\{x^{(k)}\} : x^{(k)} \simeq \alpha$

ordine $p$

$$\frac{|x^{(k+1)}-\alpha|}{|x^{(k)}-\alpha|^p} \leq C \quad \forall k \geq k_0$$

indipendente da $k$

Converge in ordine $p$ se esiste $C$ maggiore del rapporto.

Quando $p=1$ : lineare convergenza.

$p=2$ : quadratica

$p=3$ : cubica

$\vdots$

$$|x^{(k+1)}| \leq C \underbrace{|x^{(k)}-\alpha|}_{10^{-1}}{}^p$$

Supponiamo

$\underbrace{\qquad}_{10^{-2}}$ 2° giro

$\underbrace{\qquad}_{10^{-4}}$ 3° giro

se $p > 1$ $C$ può esser qualsiasi

se $p = 1$, no

Hanno derivata ad altri, per $p > 2$, diminuisce sempre.

$10^{-1} \to 10^{-3} \to 10^{-9}$ per cubico

Può esser qualunque, $\overset{\text{per } p>1}{\vee}$ perchè anche per C grande si può battere e convergere

Per $p=1 \to$ l'errore rimane uguale, per

$p=1$, $\underbrace{C<1}_{\text{deve}}$ per assicurare convergenza.

↳ come prima $|\phi'(\alpha)|<1$

<u>Conseguenze di Ostrowsky</u>

$|\phi'(\alpha)| < 1$ converge

$|\phi'(\alpha)| > 1$ divergenza (per $p=1$

$|\phi'(\alpha)| = 1$ non si può dir niente, non c'è un andamento

:

Esempio 1) $\phi(x) = \cos(x)$

$\phi'(x) = -\sin(x)$

$|\phi'(\alpha)| = |\sin \alpha| < 1$

Sappiamo sicuramente dove non cerchiamo $\alpha = 0$

Esempio 2) $\phi(x) = x^2 - 1$

$\phi'(x) = 2x$

Determiniamo i punti fissi noi

$x = \phi(x) \rightarrow x^2 - x - 1 = 0$

$$\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$|\phi'(\alpha_{1,2})| = |1 \pm \sqrt{5}| > 1$

Non va bene

Esempio 3) $f(x) = \log(x) + 2$

Newton Va bene

No funziona

$$\phi_N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad \phi_1(x) = \log(x) + 2 + x$$

Prendiamo in omaggio → Vedremo lunedì che si può fare

$x \log(x) + 2x = 0$

$x \log(x) = -2x$

$$\phi_2(x) = \frac{x \log(x)}{-2} = x \rightarrow \text{Funziona}$$

Aumentando le possibilità di $\phi_n$ è più probabile successo

Parte di Ostrowsky con $\alpha$

$\exists \delta > 0$ t.c. se $x^{(0)}: |x^{(0)} - \alpha| < \delta$

$\boxed{16:50}$

Possiamo usare la bisezione per stimare $\alpha$,

↳ Converge sempre ed è facile

↳ Possiamo usare schemi diversi per aiutarci.

Predictor - Corrector → accoppiaggio di metodi

$\underbrace{\text{(Bisezione)}}_{\text{Per generare guess iniziale}}\underbrace{\text{(Punto Fisso)}}_{\text{Per raffinare la stima}}$

Bisezione $\xrightarrow[\text{Si raccolgono}]{}$ $I^{(0)}, I^{(1)}, I^{(2)}, \dots$

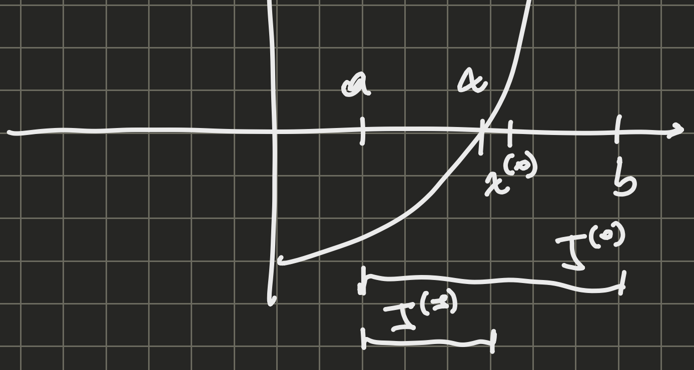
intervalli, di metà la dimensione di quello prima

$I^{(0)} \supset I^{(1)} \supset I^{(2)} \supset \dots$

$\alpha \in I^{(k)}$

↳ Convergenza è sempre garantita

Rappresentazione grafica




$I^{(0)}$ $[a, b]$ $a^{(0)} = a$, $b^{(0)} = b$

$$x^{(0)} = \frac{a^{(0)} + b^{(0)}}{2}$$

$f(x^0) f(a^0)$

↳ $< 0$ $\quad a^{(1)} = a^{(0)}$ e $b^{(1)} = x^{(0)}$

Requisiti della bisezione

f è continua $\in C^0([a,b])$

$f(a)f(b) < 0$ → Teorema degli zeri

↳ se $> 0$ $\quad a^{(1)} = x^{(0)}$ e $b^{(1)} = b^{(0)}$

↳ se $= 0$ break

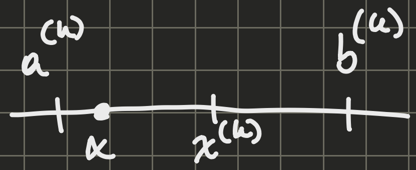
Cambiando tutto con k e k+1 è l'algoritmo

Verifichiamo la convergenza

$$|e^{(k)}| = |x^{(k)} - \alpha| < \frac{1}{2}|I^{(k)}| = \frac{b-a}{2^{k+1}} = (b-a)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

$\Downarrow$

Converge




$\underbrace{|I^{(k)}|}$

La misura, la lunghezza se intervallo

Se segmento è area se spazio e volume

$$|I^{(0)}| = b-a$$

$$|I^{(1)}| = \frac{|I^{(0)}|}{2} \qquad |I^{(2)}| = \frac{|I^{(1)}|}{2}$$

$$|I^{(k)}| = \frac{(b-a)}{k}$$

$$|e^{(k)}| \le \underbrace{(b-a)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}} < TOL$$

Da qui possiamo trovare $N_{max}$ per la bisezione

$$\frac{b-a}{TOL} < 2^{k+1} \qquad k_{MIN} > \log_2\left(\frac{b-a}{TOL}\right) - 1$$

↳ Non numero intero, si prende il numero successivo