Esercitazione 3 - Formulazione Deboli / Lax - Milgram

Guardiamo domini 1D

a ———— b $\quad \Omega \subset \mathbb{R} \to \Omega = [a, b] = (0, L)$

$$v \in H^1(\Omega) = \{ v \in L^2(\Omega) \text{ tale che } v' \in L^2(\Omega) \}$$

$$H^1(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega}) \text{ in } 1D$$

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v'\|^2_{L^2(\Omega)}}$$

Risultati

***0** Disuguaglianza Triangolare

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

***1** $H^1(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$

***2** $\|v\|^2_{H^1(\Omega)} = \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|v'\|_{L^2(\Omega)}$

Conseguenze

- *2a $\quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$
- *2b $\quad \|v'\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$

***3** Disuguaglianza di Cauchy Schwarz

$f, g \in L^2(\Omega)$ allora $\left| \int_\Omega f \cdot g \, d\Omega \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^2(\Omega)}$

*4 Disuguaglianza di Poincaré

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p \|v'\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{solo se } v \in H_0^1(\bar{\Omega})$$

↳ se 0 ad uno dei due estremi di Ω.

oppure H

*4a Ricordiamo *2

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v'\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\Longrightarrow \leq \underbrace{C_p^2 \|v'\|_{L^2(\Omega)} + \|v'\|_{L^2(\Omega)}}_{(C_p^2+1)\|v'\|_{L^2(\Omega)}}$$

$$\Longrightarrow \|v'\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \frac{1}{C_p^2+1} \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \quad \text{se } v \in H_0^1(\Omega)$$

*5 Disuguaglianza di Traccia

1d ⇒ *1

$$|v(a)| \leq C_T \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

$$|v(b)| \leq C_T \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\forall v \in H^1(\Omega)$$

* Disuguaglianza di Hölder

$$f \in L^p(\Omega),\ g \in L^q(\Omega) \text{ con } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\Longrightarrow \|fg\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |fg|\, d\Omega \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^q(\Omega)}$$

Loosiamo quando $p=1,\infty$ e $q=\infty,1$

Lax – Milgram

Step 0 → Scriviamo formulazione debole

Trovare $u \in V$ $\quad a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in V$

↳ Dobbiamo definire V

Lax - Milgram

$a : V \times V \to \mathbb{R}$ → a è bilineare, continua e coerciva

$F : V$ → F è funzionale lineare, continuo $\Leftrightarrow$ limitato (se continuo)

⇒ se tutto verificato ⇒ $\exists ! \, u \in V$

e $\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{V'}$

$$\|F\|_{V'} = \sup_{v \setminus \{0\}} \frac{|F(v)|}{\|v\|_V}$$

Facciamo casi diversi da quelli visti in classe

$$\begin{cases} -(\mu(x)\, u'(x))' = 0 & \Omega = (0,L) \\ u(0) = 0 \\ -\mu(L)\, u'(L) = \gamma_2\, u(L) + q_2 \end{cases}$$

$V := H^1_S(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega)$ tale che $v(0) = 0$

↳ La sua nomenclatura

Formulazione Debole

$$-\int_0^L \left(\mu(x)\,u'(x)\right)' v(x)\,dx = 0$$

$$\int_0^L \mu(x)\,u'(x)\,v'(x)\,dx - \left[\mu(x)\,u(x)\,v(x)\right]_0^L = 0$$

Includo il meno

$$\int_0^L \mu(x)\,u'(x)\,v'(x)\,dx - \underbrace{\mu(L)\,u(L)\,v(L)}_{q_2 + \gamma_2 u(L)} + \cancel{\mu(0)\,u(0)\,v(0)} = 0 \qquad v(0)=0$$

$$\underbrace{\int_0^L \mu\,u'v\,dx + \gamma_2\,u(L)\,v(L)}_{a(u,v)} = \underbrace{-q_2\,v(L)}_{F(v)}$$

$$a(u,v) = \int_0^L \mu\,u'v'\,dx + \gamma_2\,u(L)\,v(L)$$

$$F(v) = -q_2\,v(L)$$

<u>Bilinearità</u>

$$a(\beta v + \gamma w, z) = \beta\,a(v,z) + \gamma\,a(w,z)$$

$$a(\beta v + \gamma w, z) = \int_0^L \mu(\beta v + \gamma w)' z'\,dx + \gamma_2\left[\beta v(L) + \gamma w(L)\right] z(L) =$$

$$= \beta\,\underbrace{\left[\int_0^L \mu\,v'z'\,dx + \gamma_2\,v(L)\,z(L)\right]}_{a(v,z)} + \gamma\,\underbrace{\left[\int_0^L \mu\,w'z'\,dx + \gamma_2\,w(L)\,z(L)\right]}_{a(w,z)}$$

$\Rightarrow$ è lineare rispetto al primo argomento, per il secondo argomento si fa in modo analogo

All'esame si può bypassare, citando la linearità degli integrali

Continuità

$$\underbrace{|a(u,v)|} \leq M \|u\|_V \|v\|_V$$

$$= \left| \int_0^L \mu u' v' \, dx + \gamma_2 u(L) v(L) \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_0^L \mu u' v' \, dx \right| + \left| \gamma_2 u(L) v(L) \right| \leq$$

$$\leq \int_0^L |\underbrace{\mu}_{f} \underbrace{u' v'}_{g}| \, dx + |\gamma_2 u(L) v(L)| \leq$$

$\mu \in L^\infty(\Omega)$ e $u'v' \in L^1(\Omega)$

*6

$$\leq \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)} \|u'v'\|_{L^1(\Omega)} + \gamma_2 |u(L) v(L)|$$

Abbiamo saltato un passo

*3

$$\leq \|\mu\|_{L^\infty} \|u'\|_{L^2(\Omega)} \|v'\|_{L^2(\Omega)} + \gamma_2 |u(L)| \cdot |v(L)|$$

*2

$$\leq \|\mu\|_{L^\infty} \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} + \gamma_2 |u(L)| |v(L)|$$

*5

$$\leq \|\mu\|_{L^\infty} \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} + \gamma_2 \tilde{C}_2 \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} =$$

$$|a(u,v)| \leq (\|\mu\|_{L^\infty} + \gamma_2 \hat{C}_2) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{M}$$

Coercività

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2$$

$$a(v,v) = \int_0^L \mu (v')^2 dx + \gamma_2 (v(L))^2$$

$\mu(x) \geq \mu_0 > 0 \rightarrow$ Dato, la funzione μ ha un minimo

$$\geq \mu_0 \underbrace{\int_0^L (v')^2 dx}_{=\|v'\|_{L^2(\Omega)}} + \underbrace{\gamma_2 (v(L))^2}_{>0} \geq \mu_0 \|v'\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$a(v,v) \geq \mu_0 \|v'\|^2_{L^2(\Omega)} \overset{*4a}{\geq} \underbrace{\frac{\mu_0}{1+C_p^2}}_{=\alpha} \|v\|^2_{H^1}$$

F lineare per linearità dell'integrale.

$$F(\beta v + \gamma w) = \beta F(v) + \gamma F(w)$$

$$= -q_L (\beta v(L) + \gamma w(L)) = \beta(\underbrace{-q_L v(L)}_{F(v)}) + \gamma(\underbrace{-q_L w(L)}_{F(w)})$$

limitato

$$|F(v)| \leq C \|v\|_V$$

$$|F(v)| = |-g_2|\,|v(L)| \overset{*5}{\leq} \underbrace{|-g_2|\,\tilde{C}}_{=C}\,\|v\|_{H^1}$$

Lax-Milgram dimostrato $\Rightarrow \exists!\, u \in V$

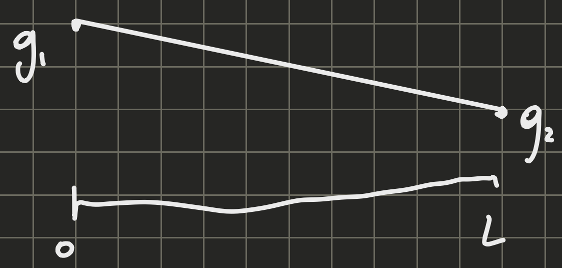
$$\|u\|_V \leq \underbrace{\frac{1}{\alpha}}_{\substack{\text{costante}\\ \text{di coercività}}}\|F\|_{V'} = \frac{1+C_P^2}{\mu_0}\cdot|-g_2\tilde{C}|$$

<u>Esercizio 2</u>

$$\begin{cases} -\mu_0\, u''(x) = 0 & x \in (0,L) \\ u(0) = g_1 \\ u(L) = g_2 \end{cases}$$

con $g_1, g_2 \in \mathbb{R}$ $\quad \mu_0 \in \mathbb{R},\ \mu_0 > 0$

$R_g(x) \in H^1(x)$



$R_g(0) = g_1$

$R_g(L) = g_2$

$R_g(x) = g_1 + (g_2 - g_1)\frac{x}{L}$ $\quad$ R_g è detta rilevamento

$\hookrightarrow$ Scelta qualsiasi da noi basta che sia $\in H^1$ e che segui le CB.

$$\underset{\in H^1(\Omega)}{u(x)} = u_0(x) + \underset{\in H^1(\Omega)}{R_g(x)}$$

$$\Downarrow$$

$$u_0(x) \in H^1(\Omega)$$

$$u(0) = g_1 = u_0(0) + \underbrace{R_g(0)}_{g_1} = u_0(0) + g_1 \rightarrow u_0(0) = 0$$

$$=$$

Analogamente $u_0(L) = 0 \Longrightarrow u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$

Troviamo $u_0(x) \in H_0^1(\Omega) = V$ e poi $u = u_0 + \underbrace{R_g}_{\text{decisa da noi}}$

$$\int_0^L -\mu_0\, u''(x)\, v(x)\, dx = 0$$

$$= \int_0^L \mu_0\, u'(x)\, v'(x)\, dx - \left[\mu_0\, u'(x)\, v(x)\right]_0^L$$

$$\int_0^L \mu_0\, u'(x)\, v'(x) - \mu_0\, \cancel{u'(L)}\, v(L) + \mu_0\, \cancel{u'(0)}\, v(0) = 0$$

Sostituisco $u = u_0 + R_g$

$$\int_0^L \mu_0 (u_0 + R_g)' v'\, dx = \int_0^L \mu_0\, u_0' v'\, dx + \int_0^L \mu_0\, R_g' v'\, dx = 0$$

Trovare $u \in H^1$

$$\int_0^L \mu_0\, u' v' = 0 \qquad \forall v \in H_0^1$$

Trovare $u_0 \in H_0^1$

$$\underbrace{\int \mu_0\, u_0' v'\, dx}_{a(u_0, v)} = \underbrace{-\int_0^L \mu_0\, R_g' v'\, dx}_{F(v) = -a(R_g, v)} \quad \forall v \in H_0^1$$

Stesso problema ma usiamo il secondo perché $u \in H^1$ mentre stiamo lavorando in H_0^1 invece nel secondo coincidono/sono simmetrici, che è requisito per Lax-Milgram e Galerkin

$a(u_0, v) = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$ con $a(u_0, v) = \int_0^L \mu_0 u_0' v' dx$

a bilineare → per linearità dell'integrale

a continua

$$a(w, z) = M \|w\|_{H^1} \|z\|_{H^1}$$

$$|a(w,z)| = \left| \int_0^L \mu_0 w' z' dx \right| \leq \mu_0 \left| \int_0^L w' z' dx \right| \overset{*3}{\leq} \mu_0 \|w'\|_{L^2(\Omega)} \|z\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\overset{2b}{\leq} \underbrace{\mu_0}_{M} \|w\|_{H^1} \|z\|_{H^1}$$

· a è coerciva?

$$a(w,w) \geq \alpha \|w\|_{H^1}^2$$

$$a(w,w) = \int_0^L \mu_0 (w')^2 dx = \mu_0 \int_0^L (w')^2 dx = \mu_0 \|w'\|_{L^2}^2$$

$$\overset{*4a}{\geq} \underbrace{\frac{\mu_0}{1 + C_p^2}}_{\alpha} \|w\|_{H^1}^2$$

• F è lineare

• F è limitato, gratis perchè $F(v) = -a(R_g, w)$

⟹ tutte le proprietà per a sono vere per f, siccome a è bilineare, F è continua, siccome a è continua, F è continua.

$$\Longrightarrow \exists!\, u_0 \in H_0^1(\Omega) \qquad a(u_0, v) = F(v) \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Rightarrow \exists!\, u \in H^1(\Omega) \quad \text{con} \quad u = u_0 + R_g$$

<u>Esercizio 3</u> ~ Esercizio 1 ma $\sigma_0 = 0$

$$\begin{cases} -\mu_0 u''(x) + \beta_0 u'(x) = f(x) \ x \in (0, L) \\ u(0) = 0 \\ u(L) = 0 \end{cases} \qquad \mu_0 > 0 \quad \beta_0 \in \mathbb{R}$$

$$f \in L^2(\Omega)$$

$$V = H_0^1(\Omega)$$

$$a(u,v) = \int_0^L \mu_0 u' v' \, dx + \int_0^L \beta_0 u' v \, dx$$

$$F(v) = \int_0^L f v \, dx$$

a bilineare ✓

a continua

$$a(u,v) \le M \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

$$|a(u,v)| = \left| \mu_0 \int_0^L u'v' \, dx + \beta_0 \int_0^L u'v \, dx \right|$$

$$\overset{\mu_0 > 0}{\le} \mu_0 \left| \int_0^L u'v' dx \right| + |\beta_0| \left| \int_0^L u'v \, dx \right|$$

$$\overset{*3}{\leq} \mu_0 \|u'\|_{L^2(\Omega)} \|v'\|_{L^2(\Omega)} + |\beta_0| \|u'\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\overset{*2}{\leq} (\mu_0 + |\beta_0|) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

<u>Coercività</u>

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2_{H^1}$$

$$a(v,v) = \underbrace{\mu_0 \int_0^L (v')^2 dx}_{\mu_0 \|v'\|^2} + \beta_0 \int_0^L \underbrace{v'v}_{\frac{1}{2}(v^2)'} dx$$

$$= \mu_0 \|v'\|^2 + \frac{\beta_0}{2} \int_0^L (v^2)' dx$$

$$= \mu_0 \|v'\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\beta_0}{2} \cancelto{0}{\left[v^2(L) - v^2(0) \right]}$$

$$\geq \frac{\mu_0}{1+C_P^2} \|v\|^2_{H^1}$$

F lineare limitata, rimane uguale.