Lezione 7 -

$? \alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $f(\alpha) = 0$

$\Updownarrow$ — opportunamente Agate → non univoco

$? \alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $\phi(\alpha) = \alpha$

Ostrowsky

→ Condizione sufficiente per la convergenza.

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$$

→ Basta che $x^{(k)}$ si abbastanza vicino ad α

→ Non conosciamo

→ Usiamo la bisezione per trovare il guess iniziale

→ Non è veloce

→ Ma converge sempre

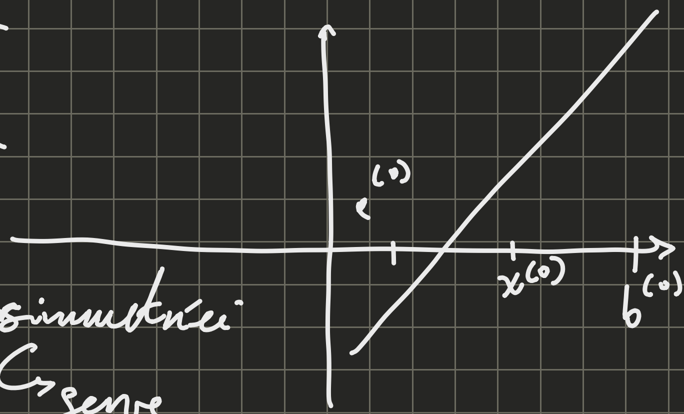
→ Usiamo poi punto fisso per raffinare

Abbiamo trovato N_{MAX}

Bisezione

Lo schema non risolve velocemente problemi semplici come la retta

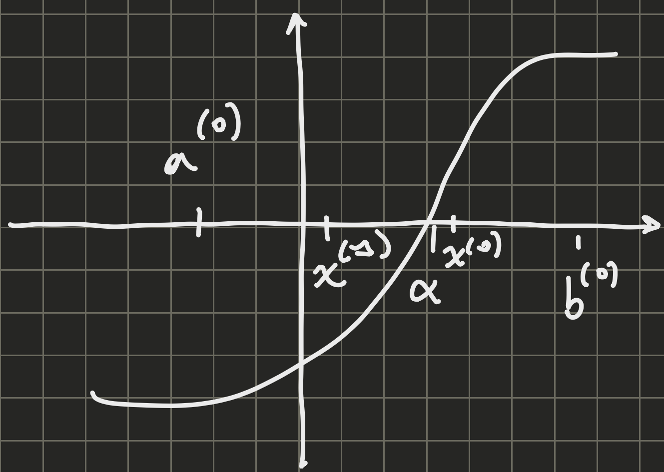
Non riesce in un passo a risolvere, l'unico modo è se a e b sono simmetrici
↳ serve sapere α



La convergenza della bisezione non è monotona

$$|x^{(1)}-\alpha| > |x^{(0)}-\alpha|$$

↳ Non ha senso la scelta di intervalli
↳ l'errore può aumentare



Bisezione

Pro	Contro
Convergenza garantita	Non riesce a risolvere radice di una retta
	Non monotona

La funzione sfrutta solo il segno della funzione, non tiene a conto dei valori di f, se $f(a) = -0{,}01$

sarebbe utile sfruttarlo.

$$N_{MAX} = \log_2\left(\frac{b-a}{Toz}\right) - 1$$ → k_{MIN} è indipendente da f, dipende solo dall'ampiezza dell'intervallo.

Ordine di Convergenza di Ostrowsky

$$\frac{|x^{(k+1)} - \alpha|}{|x^{(k)} - \alpha|} < \phi'(A)$$

Deve essere <1 → come abbiamo visto dopo

Generalizziamo schema di Ostrowsky per schemi di ordine più alto

→ Generalizzazione di Ostrowsky

era 1 per Ostrowsky

Teorema

insieme di funzioni continue con derivate p continue

Sia α punto fisso di $\phi : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

e $\phi \in C^p(I_\alpha)$, $p \in \mathbb{N}$.

Ordine di derivata

Se $\phi^{(i)}(\alpha) = 0$ con $1 \leq i \leq p-1$ e se $\phi^{(p)}(\alpha) \neq 0$

$\Longrightarrow \exists \delta > 0$ t.c. $x^{(0)}$ se $|x^{(0)} - \alpha| < \delta \to \{x^{(k)}\}$ converge ad α

e $$\lim_{k\to\infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{[x^{(k)} - \alpha]^p} = \frac{\phi^{(p)}(\alpha)}{p!}$$ ← Si ricava con Taylor

se $p = 1$
astrously parre
perché $0 < 1$

↳ Schema di punto fisso di ordine p

di ordine p

La regolarità è di ϕ non f

Lo schema di accelerazione è:

$$\phi_N^2 = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad \boxed{p=2}$$

Newton

→ $2 > 1$

↳ Abbiamo meno costo rispetto a schemi di ordine 1.

→ ϕ che soddisfa il teorema per $p=2$

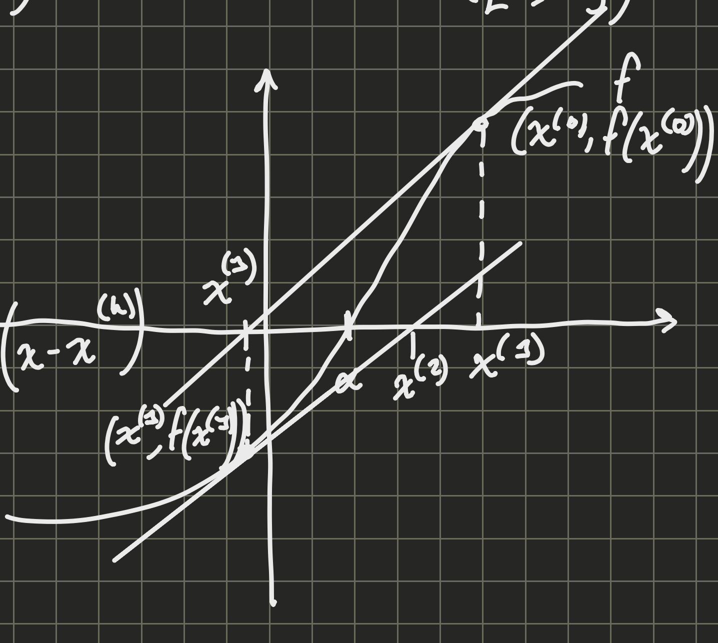
NB: La bisezione si applica ad f

Metodo di Newton / Metodo delle Tangenti

$$? \ \alpha \in [a,b] \subset \mathbb{R} : f(\alpha) = 0 \quad \text{con } f \in C^1([a,b])$$

Iterata Generica

$$\left(x^{(k)}, f(x^{(k)})\right) \begin{cases} y = 0 \\ y(x) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) \end{cases}$$



$$0 = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(\underset{\substack{\| \\ x^{(k+1)}}}{x} - x^{(k)})$$

$$x^{(k+1)} = \frac{-f(x^{(k)}) + x^{(k)} \cdot f'(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

$$= x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)}) \neq 0} \qquad k \geq 0 \quad \text{dato } x^{(0)}.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Dato } x^{(0)} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \quad k \geq 0 \end{array}}$$

$$x^{(k+1)} = \phi_N(x^{(k)}) \quad \text{con} \quad \phi_N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Ricavo Geometrico

Newton è veramente derivato da Taylor, è una sua approssimazione.

Newton $\simeq$ Taylor

$f \in C^2([a,b]) \hookrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{II}^\circ \text{ ordine } x^{(k)} \text{ centro} \\ \text{Valutiamo } x^{(k+1)} \end{array} \right.$

$$f(\alpha) \simeq f(x^{(k+1)}) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) + \underbrace{O([x^{(k+1)} - x^{(k)}]^2)}$$

Una delle possibili espansioni di $O(\ )$ → $= \dfrac{f''(\alpha_k)}{2!}(x^{(k+1)} - x^{(k)})^2$

con α_k tra $x^{(k)}$ e $x^{(k+1)}$

Approssimazione per k grande opportunamente

$$x^{(k+1)} \approx \alpha$$

→ Velocità di convergenza con cui va a 0.

→ Togliendo il calcolo dipende una iterazioni

→ Approssimazione di troncamento

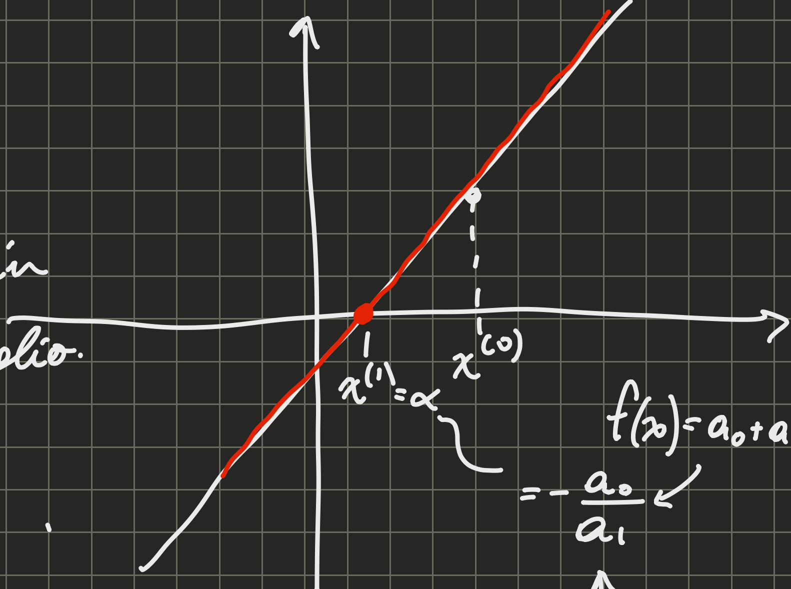
$$0 \simeq f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)})$$

↳ Possiamo trovare come prima da qui

→ Derivazione analitici

Con Newton

vediamo che newton con la retta converge in un solo passo, che è meglio.



$f(x) = a_0 + a_1 x$

$= -\dfrac{a_0}{a_1}$

È lo stesso, converge.

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})} = x^{(0)} - \frac{a_0 + a_1 x^{(0)}}{a_1} = -\frac{a_0}{a_1} = \alpha$$

Convergenza di Newton

Newton
↓
Predictor/Corrector
↑

Ipotesi:

1) $x^{(0)}$ è sufficientemente vicino ad α → (bisezione/plot)

2) α è zero semplice di f → $[f(\alpha)=0$ ma $f'(\alpha)\neq 0]$

e.g. $f(x)=(x-1)^2$

$\alpha=1$ ma ha molteplicità 2, quindi non è semplice

Se abbiamo le ipotesi 1 e 2,
Newton converge, ma non possiamo sapere la velocità

3) $f\in C^2([a,b])$

Se tutte e 3 vere, vale il limite $\lim_{k\to\infty} \frac{x^{(k+1)}-\alpha}{[x^{(k)}-\alpha]^2} = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$

$p=2$

Non che problemi perchè sappiamo $f'_{(\alpha)}\neq 0$

Forse riguardare questo.

Scenario solo H1 e H3, converge ma $p>1$, si perde il punto di forza di Newton.

Newton Modificato → ci garantisce convergenza quadratica anche quando $m>1$

molteplicità della radice

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{m f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \quad k \geq 0$$

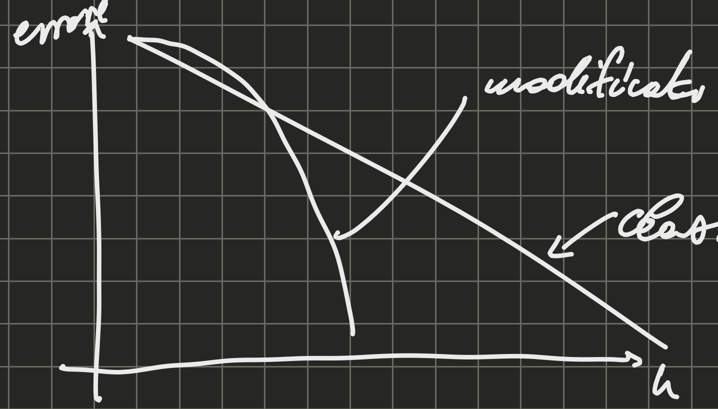
molteplicità della radice

devo conoscere m

Esempio:

$f(x) = (x-1)\log(x)$, $\alpha = 1$, $m = 2$

Errore tra Newton classico e modificato



Criteri d'Arresto

Affidabilità dello stimatore

? $k_{min} \in \mathbb{N}$ t.c. $|e^{(k_{min})}| \leq C \boxed{S = TOL}$

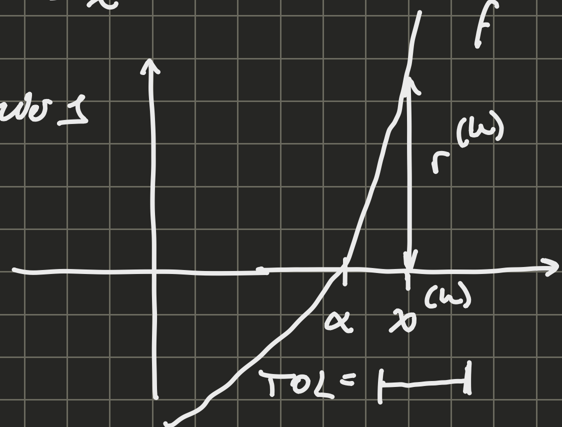
$S \to S_1 = r^{(k)}$ → Residuo (non-relativo)

$S \to S_2 = \delta^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$

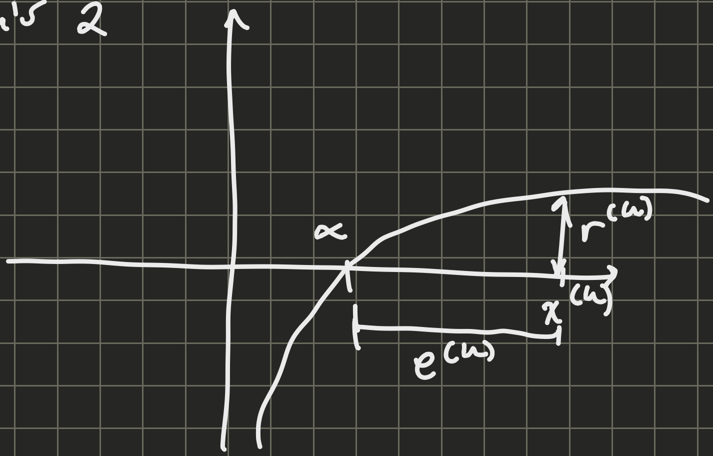
$\underline{S_1}$

$r^{(k)} = f(x^{(k)})$

Scenario 1



Scenario 2



$|\alpha - x^{(k)}| < TOL$

↳ Non lo conosco

→ Uso stimatore

→ $r^{(k)} > TOL$, il codice continua anche se potremmo già uscire

→ Lo stimatore sovrastima l'errore.

↳ Poco efficiente ma no problema.

$r^{(k)} < TOL$ ma $|\alpha - x^{(k)}| > TOL$,

quindo usciamo prima di quando dovremmo.

→ Lo stimatore sta sottostimando l'errore.

→ Questo è il guaio più grande, molto grave in casi:

$\underline{S_2}$

$$S_2 = x^{(k+1)} - x^{(k)}$$

$$\alpha - x^{(k)} \propto S_2$$

Parto da ϕ

$$\alpha - x^{(k)} = \alpha - x^{(k+1)} + \underbrace{x^{(k+1)} - x^{(k)}}_{\delta^{(k)}}$$

Iterata è giusta

$$\alpha - x^{(k+1)} = \underbrace{\phi(\alpha)}_{\text{Definizione punto fisso}} - \underbrace{\phi(x^{(k)})}_{\text{Definizione iterata punto fisso}} = \phi'(\beta_k)(\alpha - x^{(k)})$$

Definizione punto fisso: $\phi(\alpha) = \alpha$

Definizione iterata punto fisso: $\phi(x^{(k)}) = x^{(k+1)}$

→ Teorema del punto medio 9:47

↳ Esiste angolo tra i due punti e le funzioni

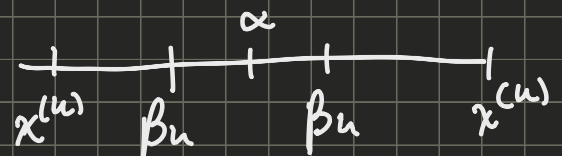
$$\alpha - x^{(k)} = \phi'(\beta_k)(\alpha - x^{(k)}) + \delta^{(k)}$$

↳ Come lo abbiamo visto

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

$$\alpha - x^{(n)} = \frac{1}{1-\phi'(\beta_n)} \delta^{(n)}$$

↳ β_n è inutile perché non lo consideriamo



Per k opportunamente grande $\beta_n \approx \alpha$

$$\alpha - x^{(n)} \approx \underbrace{\frac{1}{1-\phi'(\alpha)}}_{C} \delta^{(n)}$$

Per $\beta_n \approx \alpha$

Ci piacerebbe che sia 1, $\Rightarrow \phi'(\alpha) = 0$

$\Rightarrow$ la convergenza ha ordine $p=2$

Per il teorema generalizzato

↳ È quello che di solito accompagna Newton e ogni altro schema dove $p \geq 2$

✳ Affidabilità di S_1

Nel caso 1 $f'(\alpha) \gg 1$

Nel caso 2 $f'(\alpha) \ll 1$

Funziona quando $f'(\alpha) \approx 1$ funziona il suo meglio

---

↳ È affidabile se lo schema ha ordine $p \geq 2$

Newton per sistemi

9:57 → Forse utile nel futuro

$$\begin{cases} \sin(x_1) + \sqrt{x_2} = 3 \\ \tan(x_1) + |x_2| = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \underbrace{\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}}_{C'^{(k)}}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \underbrace{C^{(k)}}_{\text{Vettore correttivo}}$$

↳ Simile a richardson

$$C^{(k)}: \quad f'(x^{(k)})C^{(k)} = -f(x^{(k)})$$

↳ Modo diverso per vedere Newton

$$\vec{x} = x_1, x_2, \dots, x_n$$

$$\begin{cases} f_1(\vec{x}) = 0 \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}) = 0 \end{cases} \qquad \vec{f} = [f_1(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x})]^T$$

$$\vec{x}^{(k)} = [x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}]^T \qquad [J_f(\vec{x})]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

$$\vec{x}^{(k+1)} = [x_1^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)}]^T$$

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \vec{C}^{(k)}$$

Generalizzazione vettoriale di questo caso

$$J_{\vec{f}}\left(\vec{x}^{(k)}\right) \vec{C}^{(k)} = -\vec{f}\left(\vec{x}^{(k)}\right)$$