Esercitazione 2 -

Serie di Fourier

Prendiamo $u(x)$, $2T$ periodica

Definiamo $\omega = \pi/T$

Congetturiamo $u(x) = \underbrace{U}_{\text{Termine costante}} \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)\}$

$u(x)$ di qualsiasi ordine di complessità si può scrivere come questa serie, il nostro presupposto.

È vero preso:

$$U = \frac{a_0}{2} \rightarrow a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} u(x)\,dx \rightarrow \text{media di } u(x)$$

↳ per comodità

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} u(x)\cos(k\omega x)\,dx$$

$$b_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} u(x)\sin(k\omega x)\,dx$$

- Se $u(x)$ è funzione $\overbrace{\text{pari}}^{u(x)=u(-x)}$ allora $\Rightarrow b_k = 0, \; k \geq 1$
- Se $u(x)$ è funzione $\underbrace{\text{dispari}}_{u(x)=-u(-x)}$ allora $\Rightarrow a_0 = a_k = 0, \; k \geq 1$

Esempio:

Scriviamo la serie di Fourier di:

$$u(x) = |x| \quad su \quad [-\pi, \pi]$$

$T = \pi, \quad \omega = \frac{\pi}{\pi} = 1$

$u(x)$ è pari $\Rightarrow b_k = 0 \quad \forall k \geq 1$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} (-x) \, dx + \int_0^{\pi} x \, dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^{0} + \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{1}{\pi} \pi^2 = \pi$$

$= \text{Uguale a} = \frac{2}{T} \int_0^T x \, dx = \pi$

$$a_k = \underbrace{\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi}}_{\text{Possiamo perchè pari}} \underbrace{x}_{u} \underbrace{\cos(kx)}_{v'} \, dx \underset{\text{Integrando per parti}}{=} \frac{2}{\pi} \left[x \cdot \frac{1}{k} \sin(kx) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{k} \sin(kx) dx \right]$$

$$\left(\int_a^b u v' = u v \Big|_a^b - \int_a^b u' v \right)$$

$$v' = \cos(k\omega) \Rightarrow v = \frac{1}{k} \sin(kx)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[(0 - 0) - \frac{1}{k} \left(-\frac{1}{k} \cdot \cos kx \Big|_0^{\pi} \right) \right]$$

perchè $\sin(k\pi) = 0$

$$= \left[\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k^2} \cdot \cos(kx) \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k^2} \cdot (\cos k\pi - 1)$$

$$= \begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ \frac{-4}{\pi k^2} & k \text{ dispari} \end{cases}$$

$$u(x) = \frac{a_0}{2} - \sum_{k \text{ dispari}}^{\infty} \frac{4}{\pi k^2} \cos(kx)$$

Verifichiamo che $b_k = 0 \rightarrow$ Non necessaria

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -x\sin(kx)\,dx + \int_{0}^{\pi} x\sin(kx)\,dx\right] =$$

$$\int_{-\pi}^{0} \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{\sin(kx)}_{v'}\,dx = \frac{-x}{k}\cos(kx) - \int -\frac{1}{k}\cos(kx)\,dx$$

$$= \frac{-x}{k}\cos(kx) + \frac{1}{k^2}\sin(kx)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-x}{k}\cos(kx) + \frac{1}{k^2}\sin(kx)\right]_{-\pi}^{0}$$

$$= \frac{1}{\pi}\Bigg\{ \underbrace{-\left(0 - \begin{cases} \frac{\pi}{k}(-1) & k \text{ dispari} \\ \frac{\pi}{k} & k \text{ pari} \end{cases}\right)}_{\text{Primo lato}} +$$

$$+\left(\begin{cases} \frac{\pi}{k} & k \text{ dispari} \\ -\frac{\pi}{k} & k \text{ pari} \end{cases} - 0\right)$$

$$= \begin{cases} \pi/k(-1) + \frac{\pi}{k} & k \text{ dispari} = 0 \\ \frac{\pi}{k} - \frac{\pi}{k} & k \text{ pari} \quad = 0 \end{cases} = 0 \quad \forall k$$

$u(x) = x$ su $[-\pi, \pi]$ $\rightarrow$ Esercizio in classe

$u(x) = x(\pi - x)$ $\rightarrow$ a casa

Separazione di Variabili

Dato

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \end{cases} \qquad \Omega = (0, L) \times (0, H)$$

$$\begin{cases} u = g_1 \neq 0 & \Gamma_1 := (0,L) \times \{0\} \\ u = g_2 = 0 & \Gamma_2 := (0,L) \times \{H\} \\ u = g_3 = 0 & \Gamma_3 = \{0\} \times (0,H) \\ u = g_4 = 0 & \Gamma_4 = \{H\} \times (0,H) \end{cases}$$

Passaggi per separazioni di variabili

1) Sodolisfacimento dell'equazione differenziale
2) Nell'equazione per $X(x)$ risoluzione con condizioni al bordo
   ↳ Caso 2a, 2b, 2c di analisi di λ

3) Nell'equazione $Y(y)$, risoluzione con condizioni al bordo

4) Usiamo il dato di bordo non nullo per trovare i coefficienti

Assunto di poter scrivere $U(x,y) = X(x)Y(y)$

Studiamo un caso generico
↳ dove tutti i dati di bordo sono non-nulli.

Scriviamo 4 problemi dove un dato non è nullo ed il resto sia, e poi sommiamo le soluzioni

$$u(x,y) = \sum_{i=1}^{4} u_i(x,y)$$

u_i risolve il problema di Laplace con $g_i \neq 0$ e $g_{j \neq i} = 0$.

$$U_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{1,n}}{\sinh(n\pi H/L)} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{L}(H-y)\right)$$

↳ Quella che abbiamo visto

$$U_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{2,n}}{\sinh\left(\frac{n\pi H}{L}\right)} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot \sinh\left(\frac{n\pi}{L}y\right)$$

$$U_3(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{3n}}{\sinh\left(\frac{n\pi L}{H}\right)} \cdot \sinh\left(\frac{n\pi}{H}(L-x)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{H}y\right)$$

$$U_4(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{4,n}}{\sinh\left(\frac{n\pi L}{H}\right)} \cdot \sinh\left(n\pi \frac{x}{H}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{H} \cdot y\right)$$

$A_{1,n}$ $A_{2,n}$ $A_{3,n}$ $A_{4,n}$

si calcolano come:

$$A_{1,n} = \frac{2}{L}\int_0^L g_1(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

$$A_{2,n} = \frac{2}{L}\int_0^L g_2(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

$$A_{3,n} = \frac{2}{H}\int_0^H g_3(x) \sin\left(\frac{n\pi}{H}y\right) dy$$

$$A_{4,n} = \frac{2}{H}\int_0^H g_4(x) \sin\left(\frac{n\pi}{H}y\right) dy$$

Se abbiamo complessità maggiore di un CB non nullo. la soluzione è la somma del caso in cui ognuno è da solo non nullo.

Esercizio

$L = \pi$, $H = 2\pi$

$g_1 = \sin(2x)$ $g_2 = 0 = g_4$, $g_3 = \frac{1}{3}\sin(y)$

$A_{2,n} = A_{4,n} = 0$

$$A_{1,n} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(2x)\sin(nx)\, dx \overset{D=\pi}{=} \frac{2}{\pi} \cdot \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ se } n=2 \\ 0 \text{ se } n \neq 2 \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ se } n=2 \\ 0 \text{ se } n \neq 2 \end{cases}$$

Ricordiamo $\rightarrow \int_0^D \sin\left(\frac{n\pi}{D}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{D}x\right)dx = \begin{cases} \frac{D}{2} & n=m \\ 0 & n\neq m \end{cases}$

$$A_{1,n} = \{\underset{0}{\underset{\parallel}{A_{1,1}}}, \underset{2}{\underset{\parallel}{A_{1,2}}}, \underset{0}{\underset{\parallel}{A_{1,3}}}, \underset{0}{\underset{\parallel}{\dots}}, \underset{0}{\underset{\parallel}{A_{1,\infty}}}\}$$

$$A_{3,n} = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\sin(y)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{2\pi}y\right)dy$$

$$= \frac{1}{3\pi}\int_0^{2\pi}\sin(y)\cdot\sin\left(\frac{n}{2}y\right)dy = \frac{1}{3\pi}\cdot\begin{cases}\pi & \text{se } \frac{n}{2}=1 \Leftrightarrow n=2 \\ 0 & \text{se } \frac{n}{2}\neq 1\end{cases}$$

$$\underset{0}{\underset{\parallel}{A_{3,1}}}, \underset{1/3}{\underset{\parallel}{A_{3,2}}} \quad \underset{0}{\underset{\parallel}{A_{3,3}}} \quad \dots \quad \underset{0}{\underset{\parallel}{A_{3,\infty}}}$$

Gli unici coefficienti non nulli sono $A_{1,2}$ e $A_{3,2}$

$$u = U_1 + \cancel{U_2} + U_3 + \cancel{U_4}$$

$$= \frac{1}{\sinh(4\pi)}\cdot\sin(2\pi)\cdot\sinh(4\pi-2y) +$$

$$+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sinh(\pi)}\sinh(\pi-x)\sin(y)$$

Se u è armonica, ovvero risolve Laplace, inoltre se $u\in C^2(\Omega)$ e $u\in C^0(\bar{\Omega})$:

Vale il teorema della media e vale anche il principio del massimo

Principio del massimo

$$\min_{\partial\Omega} u(x) \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u(x)$$

Principio del massimo generalizzato

se $-\Delta u - f > 0 \rightarrow \min_{\partial\Omega} u \leq u(x)$

se $-\Delta u - f < 0 \rightarrow \max_{\partial\Omega} u \geq u(x)$

$\hookrightarrow$ Andiamo ad analizzare i minimi e massimi di questa funzione.

È soluzione di $-\Delta u = 0$ con al bordo g_1, g_2, g_3, g_4

Possiamo analizzare i minimi e massimi partendo da g_1, g_2, g_3, g_4

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$; $\max = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$g_1(x) = \sin(2x)$ minimo in $\frac{3\pi}{4}$ e max in $\frac{\pi}{4}$ per $x \in [0, L)$

$g_1'(x) = 2\cos(2x) > 0$ per $0 < x < \frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$

$g_2 = g_4 \Rightarrow \min g_2 = \min g_4 = \max g_2 = \max g_4 = 0$

$g_3 = \frac{1}{3}\sin(y)$

$\min g_3 = \frac{-1}{3}$ $\qquad x = 0, \; y = \frac{3\pi}{2}$

$\max g_3 = \frac{1}{3}$ $\qquad x = 0 \quad y = \frac{\pi}{2}$

$$\min\left\{-1, 0, \frac{-1}{3}, 0\right\} \leq u(x) \leq \max\left\{1, \underset{g_2}{0}, \frac{1}{3}, \underset{g_4}{0}\right\}$$

$\Downarrow$

$$-1 \leq u(x) \leq 1$$
$\left(\text{in } \frac{3\pi}{4}, 0\right)$ $\left(\text{in } \frac{\pi}{4}, 0\right)$

Compatibilità dei dati per un'equazione di Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \nabla u \cdot \underline{n} = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$
$\hookrightarrow$ Normale esterna

Se ammette soluzione $\Longrightarrow$ $\exists\ \infty$ soluzione che si differenziano per una costante.

Il problema ammette ∞ soluzioni se

$$-\int_{\Omega} f \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} g \, dS$$ $\rightarrow$ condizione di compatibilità del dato il problema.

Esercizio

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = x+1 & \text{su } B = \text{(cerchio di } R=2) \\ \nabla u \cdot \underline{n} = a \end{cases}$$
$\hookrightarrow \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4 = R^2$

Quanto all'inizio esistono soluzioni?

Applichiamo CC

$$\int_{\Omega} f \, d\Omega = \int_{\Omega} (x+1) \, dx \qquad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (\rho^2\cos\theta + \rho) \, d\rho \, d\theta$$

$$= \int_0^2 \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta + \int_0^2 \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \cancel{\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2 \left[\sin\theta\right]_0^{2\pi}}^{\,0} + \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^2 \left[\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= 2 \cdot 2\pi = 4\pi$$

$$\int_{\partial\Omega} a \, dS = a \int_{\partial\Omega} 1 \, dS = a\,(2\pi \cdot 2) = 4\pi a$$

$-4\pi = 4\pi a \Rightarrow a = -1 \Rightarrow$ sono compatibili per $a = -1$, ci sono ∞ soluzioni al problema.

Condizione di compatibilità

x in Fourier

1.2

2.2 (TdE)

3.2 condizione di compatibilità