Lezione 11 -

10 Dicembre

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{con } f \in C^0([a,b])$$

Errore rettangolo e Trapezio

$$I(f) - \tilde{I}_{pm}(f) = \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\alpha) \qquad \beta, \alpha \in [a,b]$$

$$I(f) - \tilde{I}^c_{pm}(f) = \frac{1}{24}(b-a)H^2 f''(\beta) \qquad f \in C^2([a,b])$$

$$I(f) - \tilde{I}_T(f) = \frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\delta) \qquad \gamma, \delta \in [a,b]$$

$$I(f) - \tilde{I}^c_T(f) = \frac{1}{12}(b-a)H^2 f''(\gamma) \qquad f \in C^2([a,b])$$

Errore di Simpson

$$I(f) - \tilde{I}_S(f) = \frac{-1}{2880}(b-a)^5 f^{(4)}(\sigma) \qquad \rho, \sigma \in [a,b]$$

$$I(f) - \tilde{I}^c_S(f) = \frac{-1}{2880}(b-a)H^4 f^{(4)}(\rho) \qquad f \in C^4([a,b])$$

↳ Più restrittivo

Non sono immediatamente ricavabile per i valori non noti, per togliere questi si prende il massimo, togliendo il valore non noto

Formula Semplice

$$\underbrace{\max_{x\in[a,b]} \left| I(f) - \tilde{I}_*(f) \right|}_{\text{massimo dell'errore}} \le C_*(b-a)^{\theta_*} \max_{x\in[a,b]} \left| f^{(\ell_*)}(x) \right|$$

$* = PM, T, S$

Non più costante perciò

prendiamo il max

Formula Composita $\max_{x\in[a,b]} \left| I(f) - \tilde{I}^c_n(f) \right| \leq C_n (b-a) H^{(\theta_n - 1)} \max_{x\in[a,b]} \left| f^{(\ell_n)}(x) \right|$

$\leq$ TOL

Per garantire la accuratezza, possiamo solo cambiare H

Quale H serve per avere una certa tolleranza

Criteri di Classificazione delle formule di quadratura

1) ordine di accuratezza
2) grado di esattezza

legato alla velocità di convergenza a 0, $\rightarrow H$ è l'unica cosa che cambia quindi per $H \to 0$

l'ordine di accuratezza è la potenza di H, cioè θ_n

All'esame: la velocità con cui l'errore va a 0 per H che tende a 0.

$PM = 2$
$T = 2$
$S = 4$

ordini di convergenza per diverse formule.

ordine di accuratezza $= \theta_n - 1$

solo per le composite

↳ Il massimo grado dei polinomi che vengono integrati esattamente dalla formula di quadratura $\underbrace{\text{formula di quadratura}}_{\tilde{I}(f)}$

↳ Sia per semplicità che composita

$f = p_m \in \mathbb{P}_m$

$I(p_m) = \tilde{I}(p_m)$

↳ Quale è il massimo grado dei polinomi la cui derivata l_0 è nulla.

↳ PM = 1

↳ T = 1

↳ S = 3

↳ grado di esattezza = $l_0 - 1$

$\boxed{14:58}$

↳ Circa

<u>Se non avessimo la formula per l'errore della formula di quadratura</u>

↳ Si usa il grado di esattezza

$I(f) \qquad \tilde{I}(f)$

$f \in \mathbb{P}_m$

Prendiamo $f \in \mathbb{P}_0 \qquad I(f) \overset{?}{=} \tilde{I}(f)$ ✓

$f \in \mathbb{P}_1 \qquad I(f) \overset{?}{=} \tilde{I}(f)$ ✓

$f \in \mathbb{P}_2 \qquad I(f) = \tilde{I}(f)$ ✗

se $f \in \mathbb{P}_3 \qquad I(f) = \tilde{I}(f)$ ✓ ← Anche se questo passa il grado di esattezza è 0, perché è il massimo prima del primo errore.

Per semplicità se ω viene data solo la formula di interpolazione, per semplicità usiamo $f = 1, x, x^2, x^3, \dots$, in base al grado del polinomio che stiamo cercando.

Formule di quadratura <u>interpolatorie</u>
↳ le formule che abbiamo visto

$$I(f) \simeq \tilde{I}(f) = \sum_{j=1}^{J} f(x_j)\,\alpha_j$$

$\alpha_j \in \mathbb{R}$ → pesi di quadratura

$x_j \in [a,b]$ → nodi di quadratura

Punto Medio $\quad J = 1 \quad x_1 = \frac{a+b}{2} \quad \alpha_1 = b-a$

Trapezi $\quad J = 2 \quad x_1 = a \quad x_2 = b \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{b-a}{2}$

Simpson $\quad J = 3 \quad x_1 = a, \; x_2 = \frac{b+a}{2}, \; x_3 = b_3 \quad \alpha_1 = \frac{b-a}{6}, \; \alpha_2 = \frac{2}{3}(b-a), \; \alpha_3 = \frac{b-a}{6}$

$$\int_a^b \Pi f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{J} f(x_i) \underbrace{\int_a^b \varphi_i(x)\,dx}_{\alpha_i}$$

Sono legati ai polinomi caratteristici di Lagrange

$\boxed{15:18}$

se $f=1$

$$I(1) = \tilde{I}(1)$$ Minimo che una formula di quadratura

$$\int_a^b 1\,dx = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j$$

$\int_a^b 1\,dx = b-a$

Ci sono due famiglie di formule di quadratura interpolatorie

Newton-Cotes

Quello che abbiamo visto

Gaussiane

↳ il pesi sono ottimizzati con un criterio di ottimalità

Le formule Gaussiane sono quelle che a parità di nodi massimizzano il grado di esattezza

Esempio : $J=2 \rightarrow 2$ nodi

↳ Newton Trapezio

↳ grado di esattezza sarà ≥ 1

grado di esattezza trapezio di newton

x_1 equazione 1 impone gde $=0$

x_2 equazione 2 impone gde $=1$

α_1 equazione 3 impone gde $=2$

α_2 equazione 4 impone gde $=3$

La forma è la stessa $\quad \tilde{I}(f) = \sum_{j=1}^{J} f(x_j)\,\alpha_j$

gde 0 $\Rightarrow b - a = I(1) = \sum_{j=1}^{2} \alpha_j$

gde 1

$$I(x) = \tilde{I}(x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

$$\begin{array}{c} \| \\ \int_a^b x\,dx \\ \| \\ \dfrac{b^2}{2} - \dfrac{a^2}{2} \end{array}$$

$$I(x^2) = \tilde{I}(x^2) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2$$

$$\begin{array}{c} \| \\ \int_a^b x^2\,dx \\ \| \\ \dfrac{b^3}{3} - \dfrac{a^3}{3} \end{array}$$

$$I(x^3) = \tilde{I}(x^3) = \alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 x_2^3$$

$$\begin{array}{c} \| \\ \int_a^b x^3\,dx \\ \| \\ \dfrac{b^4}{4} - \dfrac{a^4}{4} \end{array}$$

Sistema di equazioni non lineari

↳ usiamo newton per sistemi

$$x_1 = a + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

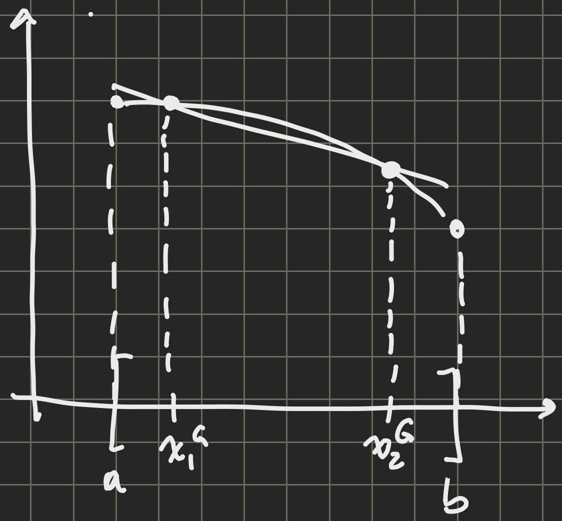
$$x_2 = a + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{b-a}{2}$$ → I pesi in questo caso sono gli stessi

Questi sono tabulati

$$\tilde{I}_{G2}(f) = \frac{b-a}{2}\left[f(x_1^G) + f(x_2^G)\right]$$

↳ È la form. del trapezio dove le basi non sono calcolate agli estremi ma in posti opportuni



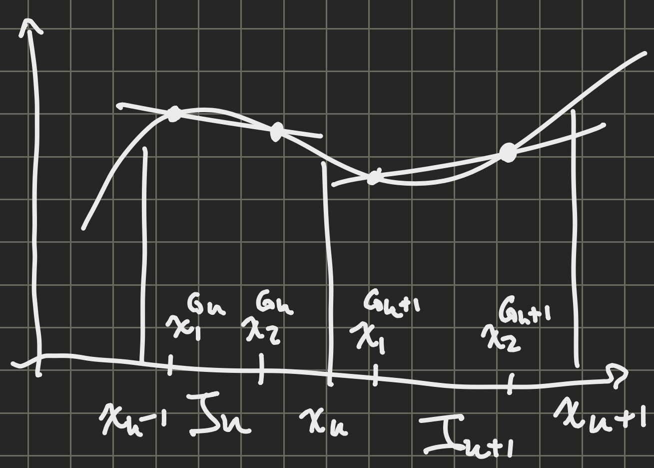
Errore della formula gaussiana:

$$I(f) - \tilde{I}_{G2}(f) = \frac{1}{4320}(b-a)^5 f^{(4)}(\nu) \qquad \nu \in [a,b]$$

$$f \in C^{(4)}([a,b])$$

↳ stessa struttura di Simpson che ne usava 3, ed è più piccolo di quello con meno nodi

Ha grado di esattezza 3 per costruzione.



$$I(f) - \tilde{I}^{c}_{G2}(f) = \frac{1}{4320}(b-a)\,H^4 f^{(4)}(\phi)$$

ordine di accuratezza = 4
grado di esattezza = 3 } Come Simpson ma con solo 2 nodi

Fine approssimazione integrali

Approssimazione di derivate

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

$f \in C^1([a,b])$

Vogliamo approssimare $f'(\bar{x})$, con $\bar{x} \in [a,b]$

↳ Non vogliamo approssimare la derivata come funzione, solo valori della derivata in punti.

Dall'analisi sappiamo che $f'(\bar{x}) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h}$

Non è computabile perchè il limite è banno

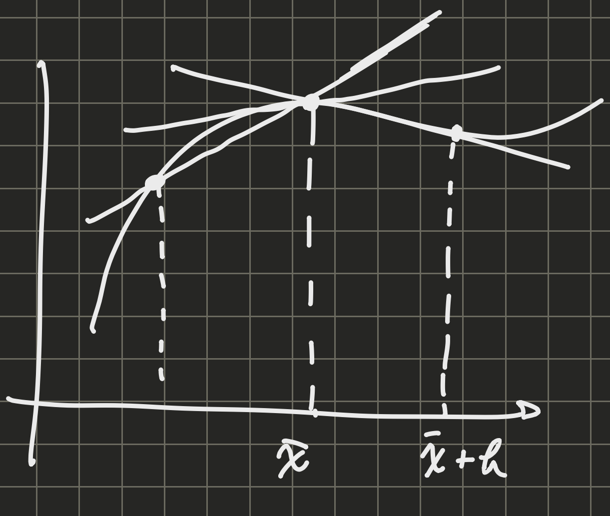
Allora si può fare:

$$f'(\bar{x}) \simeq \underbrace{\delta_+}_{} f(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h}$$

Simbolo unico con $\Pi_n f(x)$

in avanti / a destra

↳ Schema alle differenze finite in avanti.



Questa approssimazione fa schifo,

per migliorare deve esser utilizzato solo quando h è piccolo.

<u>Errore</u> di questo schema

$$f'(\bar{x}) - \delta_+ f(\bar{x})$$

Taylor centrato in $\bar{x}$ 2° ordine $\Rightarrow f \in C^2([a,b])$

$$\rightarrow \frac{f(\bar{x}+h)}{h} = \frac{f(\bar{x})}{h} + \cancel{h} f'(\bar{x}) + \frac{h^{\cancel{2}}}{2} f''(\alpha)$$

$$\alpha \in [\bar{x}, \bar{x}+h]$$

$$f'(\bar{x}) - \underbrace{\frac{f(\bar{x}+h)}{h} + \frac{f(\bar{x})}{h}}_{} = -\frac{h}{2} f''(\alpha)$$

$$f'(\bar{x}) - \underbrace{\frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h}}_{}$$

$\delta_+ f(\bar{x})$

$$f'(\bar{x}) - \delta_+ f(\bar{x}) = \frac{-h}{2} f''(\alpha) \to \text{errore}$$

Schema di ordine 1

Alternativa della definizione:

$$f'(\bar{x}) = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x}-h)}{h}}_{\delta_- f(\bar{x})}$$

Schema delle differenze finite all'indietro

$$\delta_- f(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x}-h)}{h}$$

Taylor 2° ordine $f \in C^2([a,b])$

$$f(\bar{x}-h) = f(\bar{x}) - h f'(\bar{x}) + \frac{h}{2} f''(\beta) \quad \in [\bar{x}-h, \bar{x}]$$

$$f'(\bar{x}) - \delta_- f(\bar{x}) = \text{error}$$

$$f'(\bar{x}) \underbrace{- \frac{f(\bar{x})}{h} + \frac{f(\bar{x}-h)}{h}}_{\delta_- f(x)} = \frac{h}{2} f''(\beta)$$

$$f'(\bar{x}) - \delta_- f(x) = \frac{h}{2} f''(\beta)$$

$\delta_- f(\bar{x})$

$$\left[\text{retta che interpola } f \quad \begin{matrix} (\bar{x}-h, f(\bar{x}-h)) \\ (\bar{x}, f'(\bar{x})) \end{matrix} \right]' (\bar{x})$$

come x_0

come x_1

$$\Pi_1 f(x) = f(\bar{x}-h)\,\varphi_{\bar{x}-h}(x) + f(\bar{x})\,\varphi_{\bar{x}}(x) = f(\bar{x}-h)\frac{(x-\bar{x})}{(\bar{x}-h-\bar{x})} + f(\bar{x})\frac{(x-\bar{x}+h)}{\bar{x}-\bar{x}+h} =$$

$$= f(\bar{x}-h)\frac{(\bar{x}-x)}{h} + f(\bar{x})\cdot\frac{(x-\bar{x}+h)}{h}$$

$$\underbrace{\left[\Pi_1 f(x)\right]' = -\frac{1}{h} f(\bar{x}-h) + \frac{1}{h} f(\bar{x}) = \delta_- f(\bar{x})}$$

Cosa fare quando chiedono di trovare $\delta_- f(0)$ passando per la funzione interpolatrice di Lagrange

Invece di fare solo una direzione lo facciamo in tutte e due direzioni

$$f'(\bar{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x}+h) - f'(\bar{x}-h)}{2h}$$

$$\delta f(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}-h)}{2h}$$

È uno schema del secondo ordine. $\qquad \sigma, \gamma \in [\bar{x}, \bar{x}+h]$

Taylor 3° ordine $f \in C^3([a,b])$

Centrato in $\bar{x}$, una volta per $\bar{x}+h$ e una per $\bar{x}-h$

$$f(\bar{x}+h) = \cancel{f(\bar{x})} + hf'(\bar{x}) + \cancel{\frac{h^2}{2} f''(\bar{x})} + \frac{h^3}{6} f'''(\gamma)$$

$$f(\bar{x}-h) = \cancel{f(\bar{x})} - hf'(\bar{x}) + \cancel{\frac{h^2}{2} f''(\bar{x})} - \frac{h^3}{6} f'''(\sigma)$$

$$f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}-h) = 2hf'(\bar{x}) + \frac{h^3}{6}\left[f'''(\gamma) + f'''(\sigma)\right]$$

$$f'(\bar{x}) - \underbrace{\frac{f'(\bar{x}-h)}{2h} - \frac{f(\bar{x}+h)}{2h}}_{\delta f(\bar{x})} = \underbrace{-\frac{h^2}{12}\left[f'''(\gamma) + f'''(\sigma)\right]}_{\text{Errore}}$$

È uno schema che è accurato al secondo ordine. L'errore converge molto più velocemente.

$$f'(\bar{x}) = \begin{cases} \delta_+ f(x) & \text{ordine } 1 \qquad f \in C^2 \\ \delta_- f(x) & \text{ordine } 1 \qquad f \in C^2 \\ \delta f(x) & \text{ordine } 2 \qquad f \in C^3 \end{cases}$$

δ_+	δ	δ	δ	δ	δ	δ	δ_-
$a = x_0$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$b = x_7$

Se è presente un singolo δ_+ o δ_- è di ordine 1 la approssimazione

Esistono schemi di ordine 2 che funzionano anche agli estremi.