Lezione 15 - Proprietà della Trasformata di Laplace e Metodi Numerici per Risolvere gli ODE

Nella ultima lezione abbiamo visto la trasformata di Laplace che prende forma:

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

Ci permettono di convertire un problema di ODE in un problema algebrico e indietro ad un problema ODE quando abbiamo ricavato la soluzione in forma algebrica.

Proprietà della Trasformata

Proprietà 1 - Linearità

Abbiamo descritto questa proprietà nella ultima lezione e abbiamo dato anche un esempio della trasformata e uno della antitrasformata.

Proprietà 2 - Formule di Shift

Abbiamo visto un esempio dello shift nella ultima lezione quando abbiamo visto che:

$$\mathscr{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a}$$

Vediamo allora che moltiplicando per e^{at}, si causa uno shift a destra di a. Questa moltiplicazione causa un shift nella variabile indipendente.

In forma generale possiamo scrivere che $\forall a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{matrix}\text{Primo teorema} \\ \text{dello shift}\end{matrix} \begin{cases} \mathscr{L}[e^{at} \cdot f(t)](s) = F(s-a) \\ \mathscr{L}^{-1}[F(s-a)](t) = e^{at} \cdot f(t) \end{cases}$$

Facciamo un esempio per la trasformata:

$$\mathscr{L}[\cos(\alpha t)](s) = \frac{s}{s^2+\alpha^2} = F(s)$$
$$\mathscr{L}[e^{\beta t}\cos(\alpha t)](s) = F(s-\beta) = \frac{s-\beta}{(s-\beta)^2+\alpha^2}$$

E un esempio per la antitrasformata:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{4}{s^2+4s+20}\right](t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s+2)](t) = e^{-2t}\sin(4t)$$
$$\text{perché}:$$
$$f(t) = \sin(\alpha t) \to F(s) = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$$
$$\frac{4}{s^2+4s+20} = \frac{4}{(s+2)^2+16} = F(s+2)$$

Proprietà 3 - Trasformata del Prodotto di Convoluzione

Avendo le funzione $f(t)$ e $g(t)$ con $t \geq 0$

La convoluzione è:

$$(f^*g) = \int_0^t f(t-u)g(u)\,du = \int_0^t f(u)g(t-u)\,du \text{ per } t \geq 0$$

Supponiamo che abbiamo rispettivamente $F(s)$ e $G(s)$, la trasformata di Laplace della convoluzione è:

$$\mathscr{L}[(f^*u)](s) = F(s) \cdot G(s)$$
$$\mathscr{L}^{-1}[F(s) \cdot G(s)](t) = (f^*g)(t)$$

Facciamo un esempio per la trasformata:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+1)^2}\right](t)$$
$$\text{per } f(t) = t^n \to F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \xrightarrow[n=1]{} \frac{1}{s^2}$$
$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right](t) = t \to g$$
$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right] = t \cdot \underbrace{e^{-t}}_{\text{shift}} \to f$$
$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{(s+1)^2}\right)(t) = \int_0^t \underbrace{e^{-(t-u)}(t-u)}_{f(t-u)} \cdot \underbrace{u}_{g(u)}\,du =$$
$$= (t+2) \cdot e^{-t} + (t-2)$$

Proprietà 4 - Trasformata della Derivata

Con la trasformata di Laplace possiamo fare la trasformata della derivata attraverso un integrazione per parti.

$$\mathscr{L}[y'(t)](s) = \int_0^\infty y'(t) \cdot e^{-st}\,dt = \underbrace{y(t)e^{-st}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty y(t)(-s)e^{-st}\,dt}_{\text{Integrato per parti}}$$
$$= -y(0) + s\underbrace{\int_0^\infty y(t)e^{-st}\,dt}_{\mathscr{L}[y(t)](s)}$$

Abbiamo visto allora che:

$$\mathscr{L}[y'(t)](s) = s\mathscr{L}[y(t)](s) - y(0)$$

Applicando questo ad un ODE di grado 2, vediamo che:

$$\mathscr{L}[\underbrace{y''(t)}_{(y'(t))'}](s) = s\mathscr{L}[y'(t)](s) - y'(0) = s[s\mathscr{L}[y(t)](s) - y(0) - y'(0)]$$
$$= s^2\mathscr{L}[y(t)](s) - sy(0) - y'(0)$$

Esempio applicativo della trasformata di Laplace su un problema di Cauchy

Dato il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = 4y(t) + 1 \rightarrow t \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Applichiamo la trasformata di Laplace su:

$$y'(t) - 4y(t) = 1$$

$$\mathscr{L}[y'(t) - 4y(t)](s) = \mathscr{L}[1](s)$$

$$\mathscr{L}[y'(t) - 4y(t)(s)] \overset{P1}{=} \mathscr{L}[y'(t)](s) - 4\mathscr{L}[y(t)](s)$$

$$\overset{P4}{=} s\mathscr{L}[y(t)](s) - \underbrace{1}_{y(0)} - 4\mathscr{L}[y(t)](s)$$

$$\mathscr{L}[1](s) = \frac{1}{s}$$

$$\rightarrow s\mathscr{L}[y(t)](s) - 4\mathscr{L}[y(t)](s) - 1 = \frac{1}{s}$$

$$\text{Preso } Y(s) = \mathscr{L}[y(t)](s)$$

$$sY(s) - 4Y(s) - 1 = \frac{1}{s} \rightarrow \text{Problema Algebrico}$$

$$Y(s) \cdot (s-4) = \frac{1}{s} + 1 \rightarrow Y(s) = \frac{1}{s-4}\left(1 + \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s-4} + \frac{1}{s(s-4)}$$

$$\implies \mathscr{L}[y(t)](s) = \frac{1}{s-4} + \frac{1}{s(s-4)}$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-4} + \frac{1}{s(s-4)}\right](t)$$

$$\overset{P1}{=} \underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-4}\right]}_{e^{4t}} + \underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s-4)}\right](t)}_{\frac{1}{4}(e^{4t}-1)} = e^{4t} + \frac{1}{4}(e^{4t} - 1) = \frac{1}{4}5e^{4t} - 1$$

Metodi Numerici per Risolvere gli ODE

Prendiamo un problema di Cauchy sapendo che la soluzione esiste ed è unica:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \rightarrow t \in [t_0, T] = I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Laplace si può usare solo per ODE a coefficienti costanti, ma un mondo di problema che non sono a coefficienti costanti che dobbiamo risolvere.

Per trovare $y(t)$ andiamo a discretizzare t, e andiamo ad approssimare $y(t)$.

Prendiamo $t_0 < t_1 < \cdots < t_{N_h} \equiv T$, cioè prendiamo $N_h + 1$ punti di campionamento.

Il passo di discretizzazinoe $h = \frac{T - t_0}{N_h}$

Per i metodi numerici prendiamo approssimazione di valori di y a quegli istanti:

$$u_n \simeq y(t_n) \rightarrow \forall n = 0, \dots, N_h$$

Chiediamo allo schema che per almeno il primo punto $u_0 = y_0$.
Ci fornisce una approssimazione sulla soluzione esatta della funzione.

Metodo di Eulero in Avanti

Preso $t = t_n$ e $y'(t_n) = f(t_n, y(t_n))$, andiamo ad approssimare $y'(t_n)$ facendo:

$$\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} \simeq f(t_n, y(t_n))$$

u_n approssima $y(t_n) = y_n$ che è il valore della funzione nell'istante n.
Scambiando questa stima nella funzione di prima:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} \simeq f(t_n, y_n) \longrightarrow \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_n, y_n)$$

Facendo questa stima ad ogni istante, possiamo scrivere lo schema:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n) \text{ per } n = 0, 1, \dots, N_h \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

Questo è noto come il metodo di Eulero in Avanti, è uno schema esplicito, cioè non fa riferimento a se stesso per calcolarsi. È anche uno schema one-step, tutti gli schemi che guardiamo per gli ODE sono one-step.

C'è un'accumulo degli errore da un istante ad un'altro.

Metodo di Eulero all'Indietro

Preso $t = t_{n+1}$ e $y'(t_{n+1}) = f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$, per approssimare la derivata a t_{n+1} facciamo:

$$\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} \simeq f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$$

Usando i valori approssimati invece degli errori immediati:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} \simeq f(t_{n+1}, y_{n+1}) \longrightarrow \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_{n+1}, u_{n+1})$$

Lo schema per questo metodo è:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1}) \rightarrow n = 0, 1, \dots, N_h - 1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

Lo schema del metodo di Eulero all'indietro è uno schema implicito perché per trovare u_{n+1} dobbiamo usare u_{n+1} nella funzione f, questo ci causa più complicazioni, visto che dobbiamo attivare uno schema non lineare per avere la soluzione, e lo dobbiamo attivare per ogni iterazione.

Metodo di Crank-Nicolson

Il metodo di Crank-Nicolson è un metodo che mette insieme il metodo di Eulero esplicito ed Eulero implicito.

Sommando i due metodi abbiamo:

$$2u_{n+1} = 2u_n + h[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})]$$
$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})]$$

Lo schema del metodo di Crank-Nicolson:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})] \to n = 0, 1, \ldots, N_h - 1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

Crank-Nicolson è un metodo implicito, è un metodo one-step.

Analisi di questi schemi

Facciamo l'analisi degli schemi per vedere se c'è un vantaggio agli schemi impliciti.

Guardiamo la convergenza, consistenza e stabilità.

Convergenza di EE ed EI

Come abbiamo visto nella prima parte del corso vediamo per $h \to 0$.

$\forall n = 0, \ldots, N_h$ la convergenza ha equazione:

$$|u_n - y_n| \leq Ch^p$$

Dove p è l'ordine di convergenza dello schema.
Troviamo questo ordine di convergenza per Eulero esplicito e poi diamo solo il risultato per il resto.

L'errore dello schema è:

$$e_n = u_n - y_n = \underbrace{(u_n - u_n^*)}_{\substack{\text{Errore} \\ \text{accumulato}}} + \underbrace{(u_n^* - y_n)}_{\substack{\text{Errore} \\ \text{associato al} \\ \text{passo}}}$$

Dove u_n^* è la stima di y_n avendo y_{n-1} come valore noto. È l'errore del passo se sapessimo esattamente dove siamo e facciamo un passo stimatorio da li.

Graficamente questo errore è:

Se possiamo far vedere che tutte e due le parti vanno a 0 per $h \to 0$ allora possiamo dire che converge.

Guardiamo al secondo termine (e vediamo ci porta a definire la consistenza).

Il secondo termine è:

$$u_n^* - y_n = y_{n-1} - y_n + h\underbrace{f(t_{n-1}, y_{n-1})}_{y'(t_{n-1})}$$

Di nuovo u_n^* è il risultato dello schema se mettiamo il valore vero y_{n-1} invece della approssimazione u_{n-1}.

Facciamo una espansione di Taylor centrata in t_{n-1}, e valutiamo in t_n:

$$y(t_n) = y(t_{n-1}) + hy'(t_{n-1}) + \frac{h^2}{2}y''(\alpha_n) \text{ con } \alpha_n \in (t_{n-1}, t_n)$$

Mettendo questa stima nel secondo termine semplifichiamo l'equazione e abbiamo:

$$u_n^* - y_n = -\frac{h^2}{2}y''(\alpha_n) \xrightarrow{h \to 0} 0$$

Definizione di consistenza per uno schema one-step

L'errore di troncamento locale è definito come:

$$\tau_n(h) = \frac{u_n^* - y_n}{h}$$

Invece l'errore di troncamento globale è:

$$\tau(h) = max\,|\tau_n(h)|$$

Per $n = 0, \dots, N_h$

Uno schema ad un passo si dice consistente quando $\lim_{h \to 0} \tau(h) = 0$.

Se l'ordine di consistenza è se $\tau(h) = O(h^q)$, lo schema ha ordine di consistenza pari a q.

Per lo schema Eulero esplicito:

$$\tau_n(h) = -\frac{h}{2}y''(\alpha_n) = f'(\alpha_n, y(\alpha_n))$$

Ci riferiamo a f perché è noto, invece y no. Non saremmo neanche riusciti a prendere il massimo di y'' perché y non è noto.

L'errore di troncamento globale allora è:

$$\tau(h) = \frac{h}{2}M \text{ con } M = \underset{t \in I}{max}\,|f'(t, y(t))| = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'(t)$$

$\tau(h) \to 0$ per $h \to 0$ con ordine di consistenza 1.