MCS-L02

Sistemi Rigidi ad Elasticità Concentrata

- Definizione / Formulazione del problema elastico
- Cinematica → Trasformazione da uno stato ad un altro
- Statica → Condizioni d'equilibrio
- Risposta elementi elastica → Risposta di eventuali elementi elastici

Definizioni

↳ Corpi rigidi n_c → numero corpi

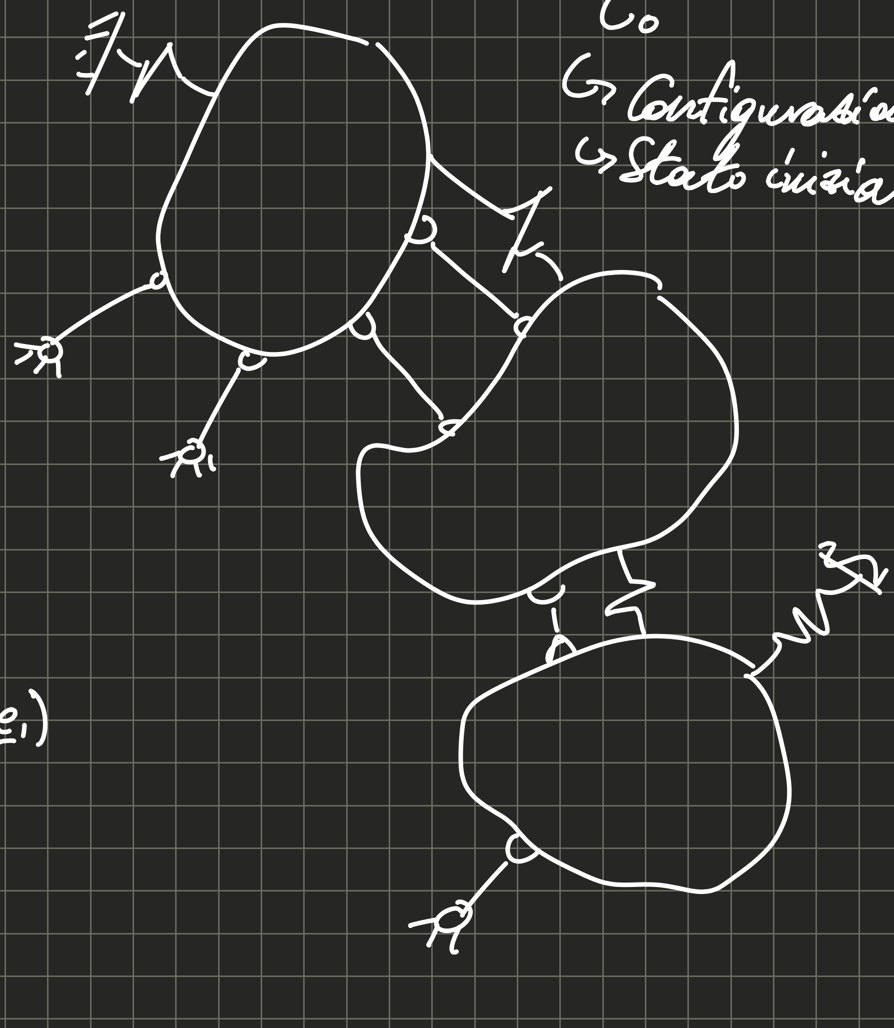
↳ Qualsiasi corpo, in questo corso consideriamo solo aste.

n_v → numero di vincolo

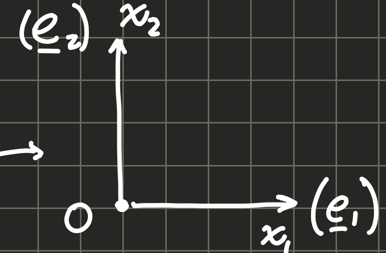
C_0

↳ Configurazione 0

↳ Stato iniziale



Riferimento

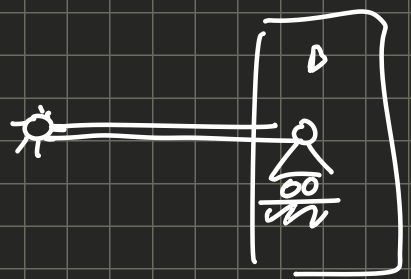


Tipi di Collegamentro tra corpi

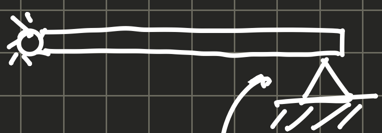
- Vincoli perfetti → $\underbrace{\text{Olonomi, bilateri, lisci}}$

Non entrano mai elementi infinitesimi; non entrano derivate

e.g



→ $V_B = 0$



$V_B \leq 0$

Se è posto direttamente sopra.

m_i → molteplicità dell'i-esimo vincolo

Se i vincoli non dissipano attrito sono perfetti

→ se $m_i = 1$ è vincolo semplice

→ ad ogni vincolo associo m_i equazioni di vincolo

Possiamo dire

$$m_v = \sum_{i=1}^{n_v} m_i$$

↳ Equazioni di vincolo introdotte al sistema.

Elementi elastici (0-dimensionali, ha azioni puntuali)

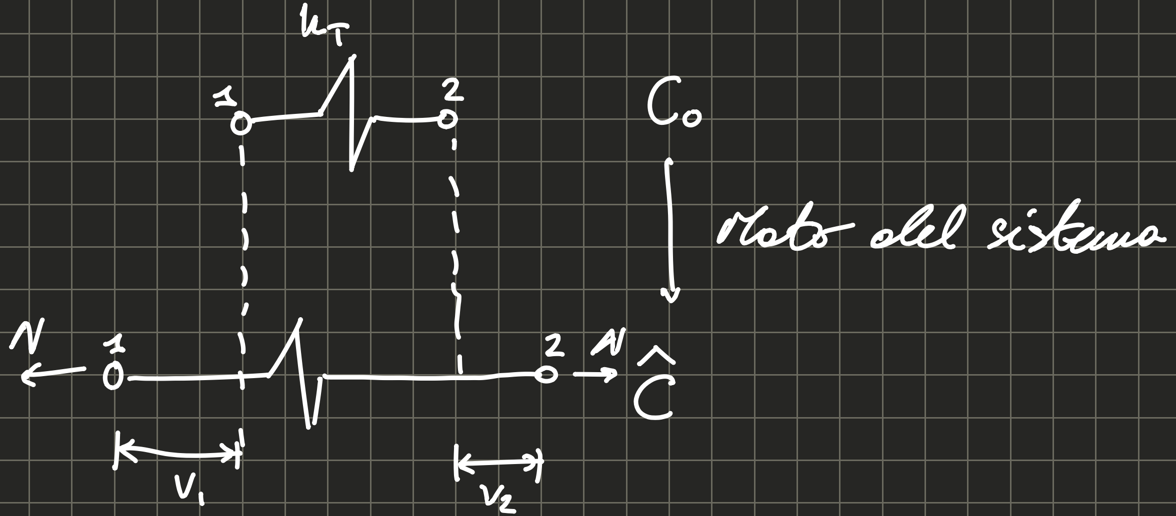
↳ Molle
- ↳ Traslazionali
- ↳ Rotazionali

} Scopo di oggi è capire che si trattano allo stesso modo

C_0 → Configurazione iniziale del sistema

↳ A questo punto le molle sono indeformate

Molla traslazionale

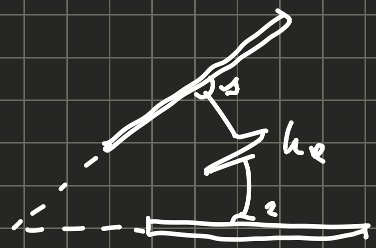


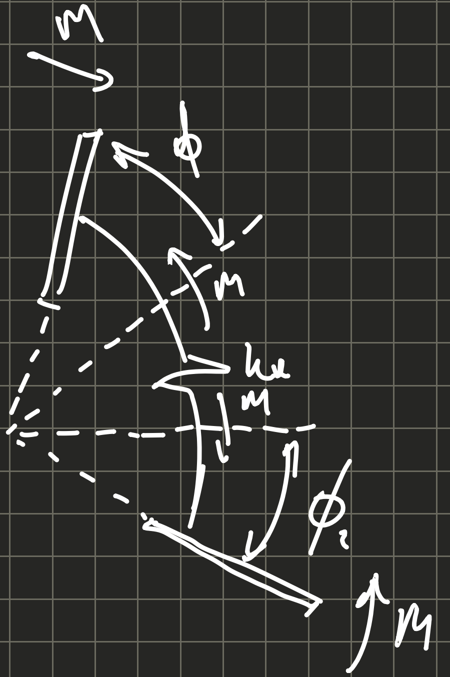
Spostamento relativo

Se tra C_0 e $\hat{C}$ $\quad \Delta v = v_1 + v_2 \neq 0$

Nasce la forza $N = k_T \, \Delta v$

Molla rotazionale





$$C_0 \xrightarrow{\text{Moto del sistema}} \hat{C}$$

Spostamento relativo rotazionale

$$\Delta\phi = \phi_1 + \phi_2$$

$$M = k_R \Delta\phi$$

↳ Momento generato

Δv e $\Delta\phi$ → deformazione "Generalizzata"

N e M → Sforzi "generalizzati"
anche azioni interne
anche Forze di richiamo elastiche

Azioni interne sono l'impegno statico dei corpi

Le molle contrastano le azioni che tentano a deviare dalla loro condizione indeformata

→ Perchè richiamano all'indeformata

Parrone

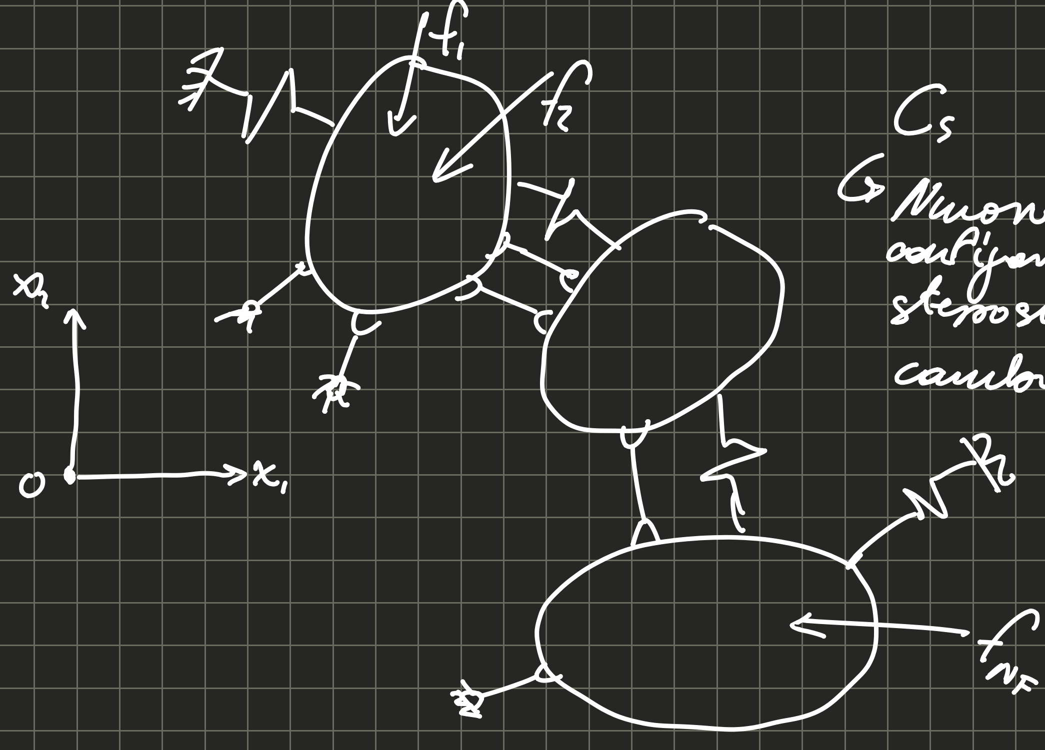
Deformazione generalizzata → q_i

Sforzo "Generalizzato" → Q_i

Per ogni elemento elastico $\boxed{Q_i = k_i q_i}$

↳ Equazioni di legame Costitutivo (Elastico lineare)

<u>Forze Esterne</u> (n_F → numero di forze esterne)



C_s

↳ Nuova configurazione, stesso sistema con cambi piccoli

C_s è configurazione congruente, soddisfa i vincoli

↳ Cioè non si sono rotti vincoli.

C_s → equilibrata (staticamente ammissibile) e congruente (o cinematicamente articolata)

Se esiste C_s è la soluzione al problema elastico.

↳ Possiamo definire tutti i vincoli, le reazioni, azioni e spostamenti.

Ipotesi di piccoli spostamenti

↳ Implicazione

1. Ai fini della scrittura delle equazioni di equilibrio, posso "confondere" le configurazioni C_0, C_s.

   ↳ Possiamo porre le forze e definire le reazioni vincolari

2. Spostamenti sono "piccoli" rispetto ad una dimensione caratteristica del sistema.

$C_0 \rightarrow \hat{C}$, la trasformazione è retta da equazioni lineari

↳ Prendiamo ogni variazione come lineare.

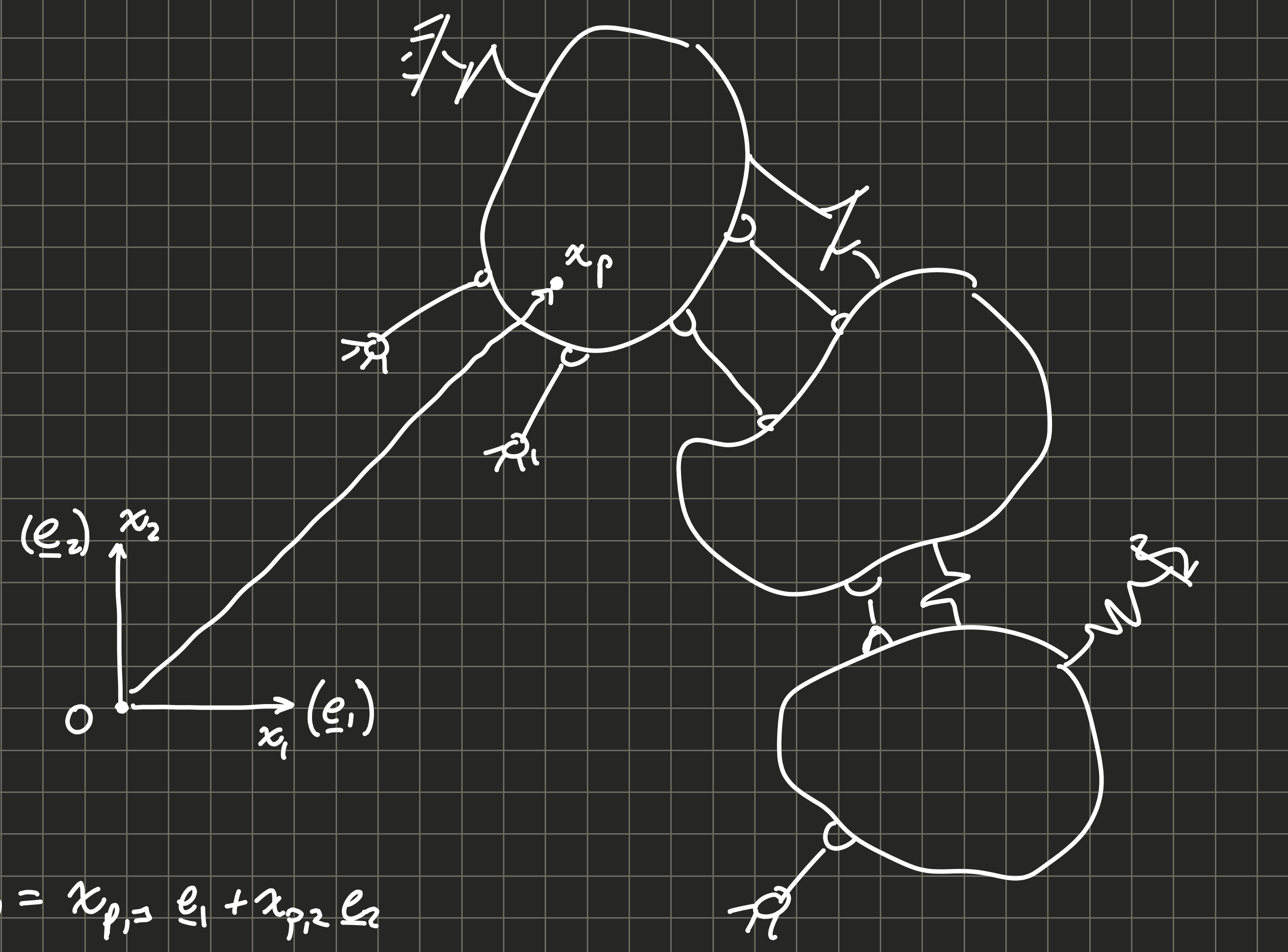
Cinematica

$C_0 \to \hat{C}$

Vogliamo descrivere la risposta dei vincoli (congruente)

↳ Vogliamo usare il minimo numero necessario di variabili cinematiche (spostamento o rotazioni)

Usiamo $\underline{U}$ → spostamento generalizzati del sistema in coordinate lagrangiane

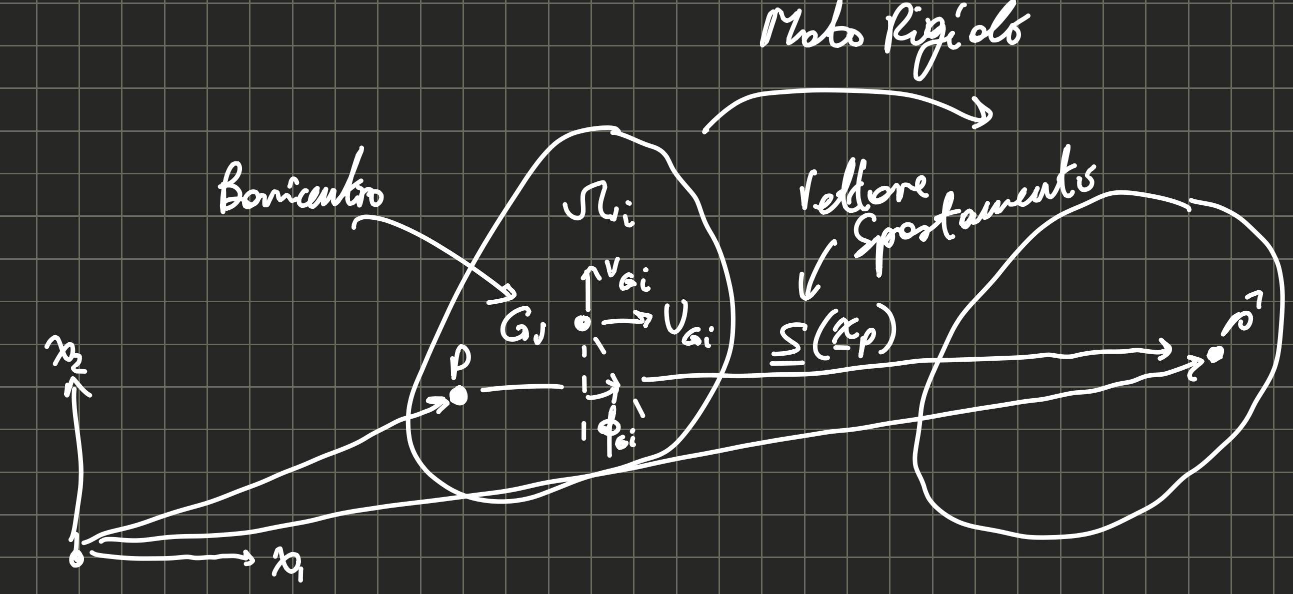


$$\underline{x}_p = x_{p,1}\,\underline{e}_1 + x_{p,2}\,\underline{e}_2$$

$$\underline{x}_p = \begin{bmatrix} x_{p,1} \\ x_{p,2} \end{bmatrix} = \left(x_{p,1}, x_{p,2}\right)^T$$

Le molle non introducono restrizione tra C_0 e $\hat{C}$, non forzano la posizione di certi punti,

↳ Perciò per lo studio della cinematica li togliamo.

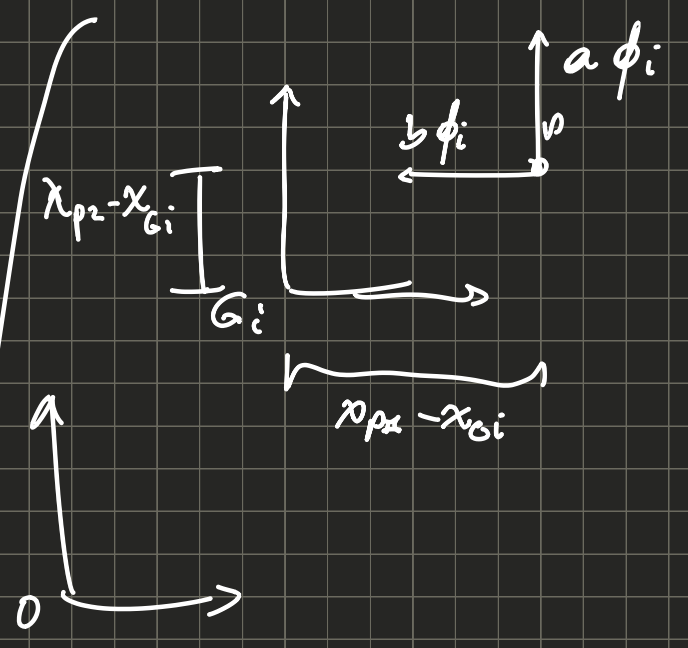


$$\underline{U}_{Gi} = \underbrace{\left(U_{Gi},\, V_{Gi},\, \phi_i\right)^T}$$

Numero di parametri per corpo rigido senza vincoli

$$\underline{S}(\underline{x}_p) = \hat{\underline{x}}_p - \underline{x}_p$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{S}_{x_{p,1}} \\ S_{x_{p,2}} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} U_{Gi} \\ V_{Gi} \end{pmatrix}}_{\text{Spostamento del baricentro}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -(x_{p,2} - x_{Gi,2}) \\ +(x_{p,1} - x_{Gi,1}) \end{pmatrix}}_{\text{Rotazione}} \phi_i$$



Semplificazione matriciale

Spazio occupato dal corpo

$$\underline{s}(\underline{x}_p) = \underline{\underline{A}}_i(\underline{x}_p)\,\underline{U}_i \qquad \forall \underline{x} \in \Omega_i$$

↳ Vettore delle lagrangiane del corpo privo di vincoli

Matrice relativa allo spostamento del generico punto p

$$\underline{\underline{A}}_i(\underline{x}_p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(x_{p,2} - x_{G,i2}) \\ 0 & 1 & (x_{p,1} - x_{G,i1}) \end{bmatrix}$$

L'abbiamo resa una relazione lineare, facendo questo passo siamo andati da una funzione continua ad una discretizzata dove dobbiamo sapere sono i parametri in $\underline{U}_i$

$$\tilde{\underline{U}} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ \underline{U}_{nc} \end{pmatrix}$$

→ Vettori di tutti i parametri cinematico di ogni corpo rigido

↳ I parametri cinematici del sistema di corpi, privo di vincoli.

$3 n_c \times 1$

↳ Numero dei corpi

<u>Vincoli</u> → Introducendo vincoli riduce le coordinate richieste nel sistema.

↓

m_v

Dall'ipotesi dei piccoli spostamenti, le equazioni saranno lineari.

Se non ci sono cedimenti vincolari,

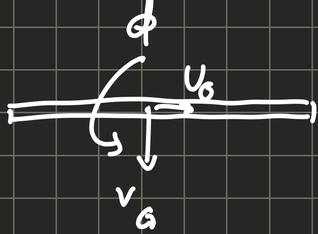
sappiamo che alcuni spostamento saranno nulli, perciò

ci sono m_v equazioni lineari omogenee

$$\sum_{j=1}^{3n_c} Z_{ij} \tilde{U}_j = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, m_v$$

→ Ogni sistema avrà la sua matrice Z, con Z_{ij} sono fattori di conversione per ogni reazione.

↳ <u>Esempio</u>



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{l}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{U}_3 \end{pmatrix}$$

$u_A = 0$

$v_B = 0$

Non generalizzate, non sono $\tilde{U}$

$u_A = u_G$

$v_B = v_G - l/2 \cdot \phi = 0$

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} u_G \\ v_G \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{U}_3 \end{pmatrix}$$

$z_{11} = 1$ $\quad z_{21} = 0$

$z_{12} = 0$ $\quad z_{22} = 1$

$z_{13} = 0$ $\quad z_{23} = \frac{-l}{2}$

→ matrice delle equazioni vincolo

$$\underset{m_v \times 3n_c}{\underline{\underline{Z}}}\ \underline{\tilde{U}}_{3n_c \times 3} = \underline{0}$$ → Sono nulle perché è statico

Rango $(\underline{\underline{Z}}) = m_v$ ⟸ Tutte le equazioni di vincolo sono linearmente indipendenti.

Casi

→ Se si rompe un vincolo sarà lo stesso tra ① e ②

① $m_v > 3n_c$ ⇒ Cinematicamente sovradeterminato

⇒ L'unica soluzione è che $\tilde{U} = 0$ → C_0 è l'unica soluzione possibile

$\nexists \hat{C}$

② $m_v = 3n_c$ → Cinematicamente determinato

⇒ $\tilde{U} = \underline{0}$ ⇒ C_0 $\nexists \hat{C}$

→ Se si rompe un vincolo sarà ③

Caso che ci interessa

③ $m_v < 3n_c$

Ammette ∞^N soluzioni dove $N = 3n_c - m_v$

↳ N° di gradi di libertà

$\underline{U}_{N\times 1}$

↳ ci dice anche il numero di coordinate lagrangiane che possiamo usare.

$$\underline{\tilde{U}} = \begin{pmatrix} \tilde{U}_{A\ m_v\times 1} \\ \tilde{U}_{B\ \underbrace{(3n_c - m_v)}_{N}\times 1} \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{Z}}$ è più corta di $\tilde{U}$

↓

la lasciamo per estendere la matrice e permettere il calcolo

Possiamo scrivere:

$$\underline{\underline{Z}}\,\underline{\tilde{U}} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} \underline{\underline{Z}}_{A\ m_v\times m_v} & \underline{\underline{Z}}_{B\ m_v\times N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{U}_A \\ \tilde{U}_B \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$\underline{\underline{Z}}_A$ quadrata ha rango$(\underline{\underline{Z}}_A)$ = rango$(\underline{\underline{Z}}) = m_v$

$\Rightarrow \exists\, \underline{\underline{Z}}_A^{-1}$

$$\tilde{U}_A = -\underline{\underline{Z}}_A^{-1}\,\underline{\underline{Z}}_B\,\tilde{U}_B$$

↳ posso arbitrariamente prendere $\tilde{U}_B$ e

possiamo trovare $\tilde{U}_A$ dato che deriviamo da Z_A e Z_B

|

↳ Esistono ∞^N soluzioni, perché fissate arbitrariamente le N variabili, le altre si determinano per effetto del sistema

$\tilde{U}_B$ è così arbitrario che lo scriviamo come

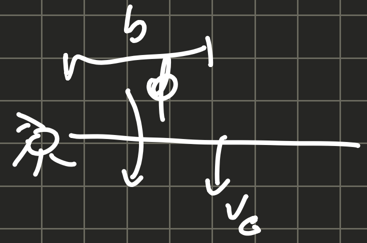
$\underline{U}_{N\times 1}$

$$\hat{\underline{U}}_A = -\underline{\underline{Z}}_A^{-1}\,\underline{\underline{Z}}_B\,\underline{U}$$

$$\tilde{\underline{U}} = \begin{pmatrix} -\underline{\underline{Z}}_A^{-1}\underline{\underline{Z}}_B & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{I}} \end{pmatrix} \underline{U} = \underset{3n_0+N}{\underline{\underline{T}}}\ \underline{U}_{N\times 1}$$

Da qui per ogni S possiamo trovare $\underline{U}_{N\times 1}$

Esempio:



Se vogliamo trovare v_G, non abbiamo ϕ,

- possiamo fissare arbitrariamente ϕ per poi trovare $v_G = \phi\, b$

quindi ϕ sarà parte di $\underline{U}$ e b sarà parte di $\underline{\underline{T}}$, dove v_G è parte di $\tilde{\underline{U}}_A$