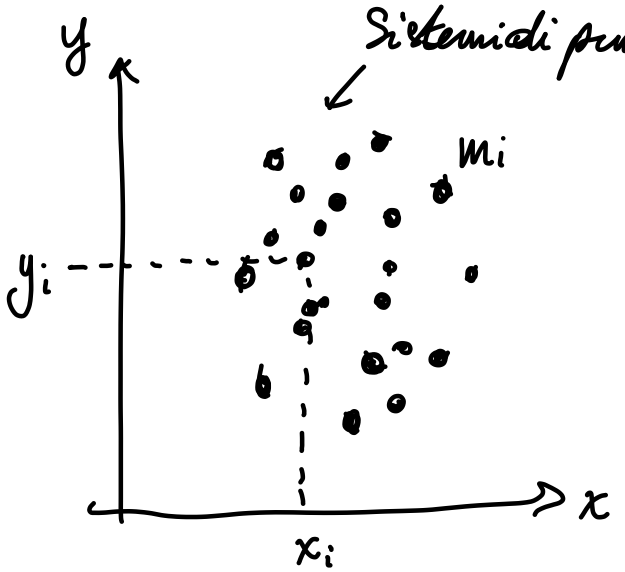
Lezione 10 - Studio di Dinamica di corpi rigidi

Baricentro di Massa / Centro di Momenti Statici

Sistema di punti con ognuno la sua massa



Baricentro

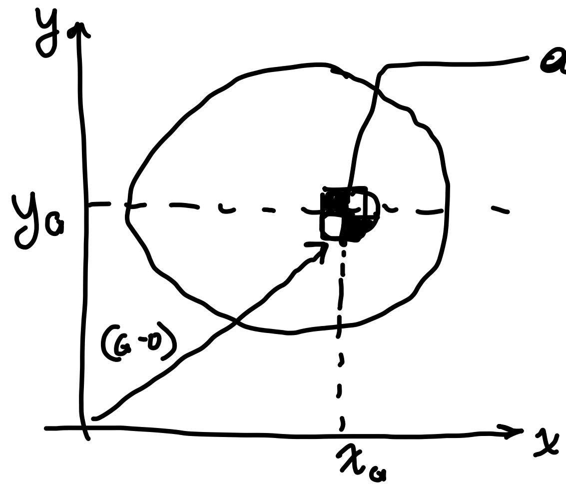
$$x_G = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$$

$$y_G = \frac{\sum m_i y_i}{\sum y_i}$$

Sistema Discreto

Sistema Continuo

Dato un corpo rigido



$dm = \rho \, dV$

densità $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$ può esser continua o variante

$$x_G = \frac{1}{M} \int_V x \rho \, dV$$

$$y_0 = \frac{1}{M}\int_G y\rho\, dv$$

Identificano il baricentro

Ha le sue caratteristiche

$$(G-O) = \frac{1}{M}\int (P-O)\rho\, dv$$

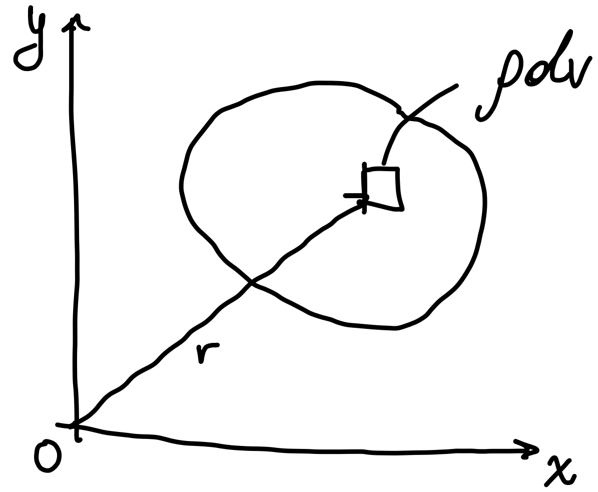
$(P-O) \to x\hat{i} + y\hat{j}$

$(P-O) \to$ qualsiasi punto nel corpo

Forma Vettoriale, rispetto a riferimento

G sarà sempre lo stesso dentro al corpo, non cambia con il movimento rispetto al sistema di riferimento

Momento d'inerzia di massa

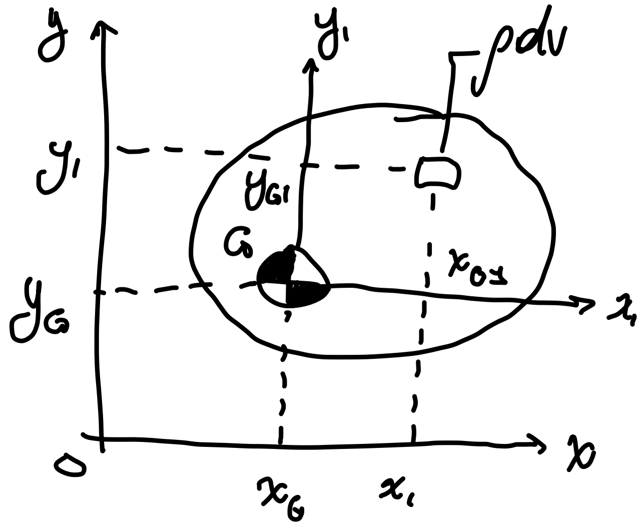


Rispetto all'asse che passa per O

Rispetto ad O

$$J_0 = \int_V r^2 \rho\, dv$$

$$= \int_V (x^2 + y^2)\rho\, dv =$$



Immaginiamo di aver trovato G e poniamo un sistema di riferimento in G

$$= \int_V \left[(x_G + x_1)^2 + (y_G + y_1)^2 \right] \rho \, dV$$

$$= \int_V (x_G^2 + y_G^2) \rho \, dV + \int_V (x_1^2 + y_1^2) \rho \, dV + \int_V 2 x_G x_1 \rho \, dV + \int_V 2 y_G y_1 \rho \, dV$$

x_G e y_G sono noti $\Rightarrow$ si possono tirare fuori

$$= (x_G^2 + y_G^2) \int_V \rho \, dV + J_G + 2 x_G \int_V x_1 \rho \, dV + 2 y_G \int y_1 \rho \, dV =$$

Momento inerzia rispetto ad asse baricentrico perpendicolare al piano

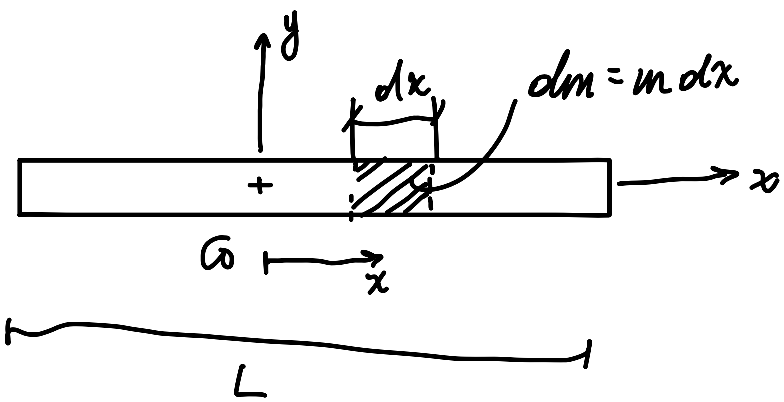
$$2 x_G \underbrace{\int_V x_1 \rho \, dV}_{x_{G1} M}$$

in generale $x_G = \frac{1}{M} \int x \rho \, dV \Rightarrow x_{G1} = 0$ G rispetto al suo sistema di riferimento è 0

$$\Rightarrow J_0 = M\overline{OG}^2 + J_G \quad \Big\}\ \text{Legge del Trasporto}$$

→ J_G è il minimo momento d'inerzia di massa quando x_G e $y_G = x$ e y

Esempio 1: Asse Sottile



$$m = \frac{M}{L}\left[\frac{kg}{L}\right]$$

$$J_G = \int_V r^2 \rho \, dV = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 m \, dx =$$

$$= \frac{m}{3}\Big| x^3 \Big|_{L/2}^{L/2}$$

$$= \frac{m}{3}\left[\frac{L^3}{8} - \left(-\frac{L^3}{8}\right)\right] =$$

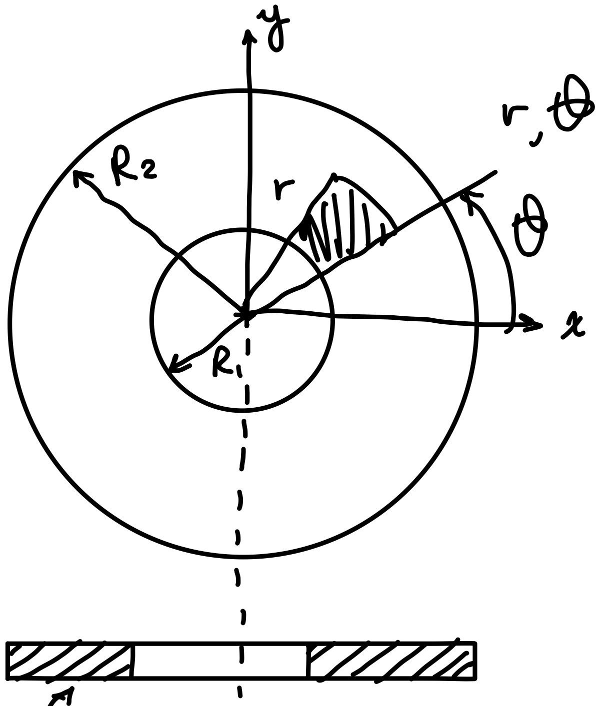
$$= \frac{mL^3}{12} = \frac{ML^2}{12} = J_G$$

$$J_G = M\rho_G^2$$

ρ_G = raggio giratore

$$\frac{\cancel{M}L^2}{12} = \cancel{M}\rho_G^2 \Rightarrow \rho_G = \frac{L}{2\sqrt{3}}$$

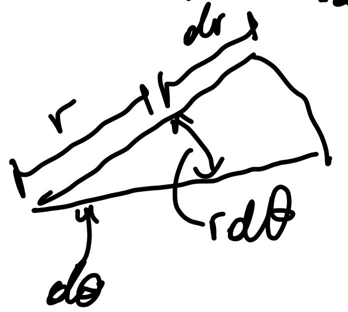
Esempio 2 : Corona Circolare a Spessore Costante



$r, \theta, h = \text{cost}$

Disegnato male

Usiamo polari per semplicità!



$$\rho\, dV = \rho \underbrace{h\, dr \cdot r\, d\theta}_{dV}$$

$$J_G = \int_V r^2 \rho\, dV = \int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi} h r^2 \rho\, r\, dr\, d\theta =$$

$$= \rho h \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$J_G = \rho h \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \cdot 2\pi = \rho h 2\pi \left| \frac{r^4}{4} \right|_{R_1}^{R_2} =$$

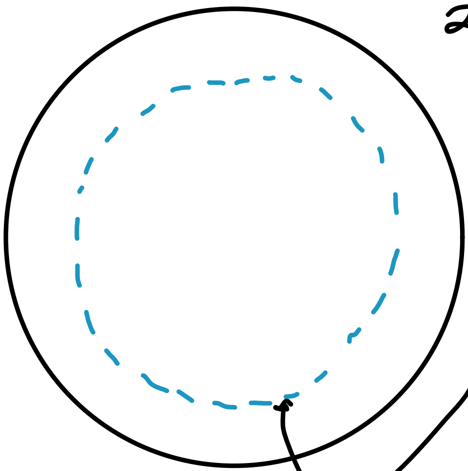
$$= \rho h \cancel{2}\pi \frac{R_2^4 - R_1^4}{\cancel{4}_{\,2}} = \underbrace{\rho h \pi \left(R_2^2 - R_1^2\right)}_{\rho \cdot V = M} \cdot \frac{\left(R_1^2 + R_2^2\right)}{2}$$

$$\Rightarrow M \cdot \frac{\left(R_1^2 + R_2^2\right)}{2} = J_G$$

$$J_G = M\frac{R_1^2+R_2^2}{2}$$

Casi estremi:

$R_1=0, R_2=R \Rightarrow J_G = \frac{MR^2}{2}$



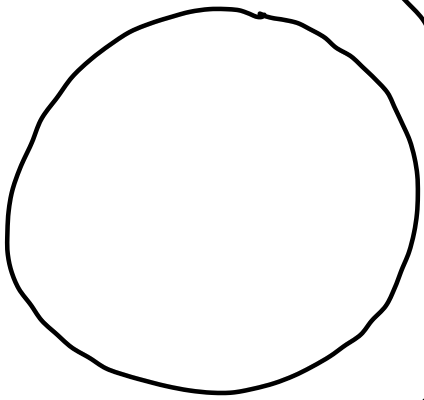
pieno

come se massa fosse concentrata lì

$= M\rho_G^2 \Rightarrow \rho_G = \frac{R}{\sqrt{2}}$

$R_1 = R_2 = R$

$J_G = MR^2$



sottile

$= M\rho_G^2 \Rightarrow \rho_G = R$

Dinamica del punto (Richiamo)

$$\vec{R} = M\vec{a} \rightarrow \vec{R} - M\vec{a} = 0 \rightarrow \vec{F}_{in} = -M\vec{a}$$

Forza

$[N]$ $[kg \frac{m}{s^2}]$

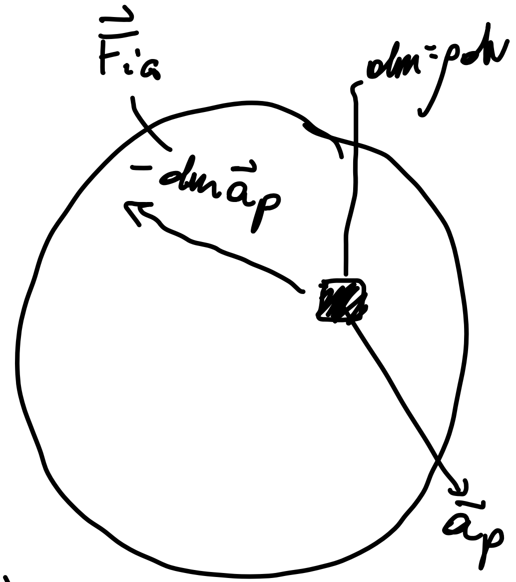
"forza" d'inerzia

$\Rightarrow \boxed{\vec{R} + \vec{F}_{in} = 0} \rightarrow$ Stabile quando reazioni vincolari e forze d'inerzia si cancellano

D'alambert

Per $\vec{F}_{in}$ non c'è reazione opposta quindi non è forza ma in generale è usabile come ed è quello che facciamo

<u>Azioni d'inerzia agenti su un corpo rigido</u>



$$\vec{F}_{iG} = -\int_V \vec{a}_p \overbrace{\rho dV}^{dm}$$

Forza inerzia sul corpo

Dato che è un corpo rigido

$$= -\int_V \underbrace{\left(\vec{a}_G + \dot{\vec{\omega}} \times (P-G) - \omega^2 (P-G)\right)}_{\vec{a}_p} \rho dV$$

$$\vec{F}_{iG} = -\vec{a}_G \int_V \rho dV - \dot{\vec{\omega}} \times \underbrace{\int_V (P-\cancel{G}) \rho dV}_{M(G-G)=0} + \cancel{\omega^2 \int_V (P-G) \rho dV} =$$

Variando P porta a G

$$= -M\vec{a}_G$$

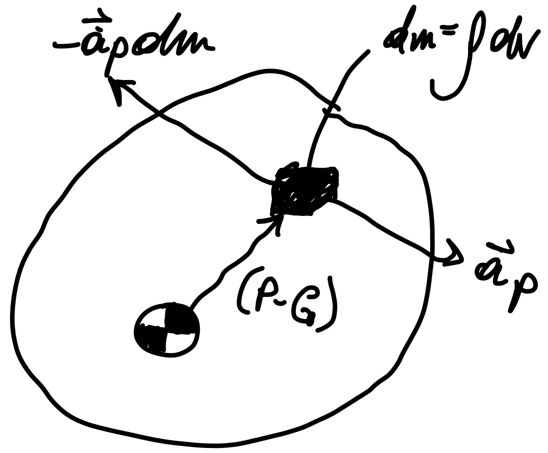
$$= -M\vec{a}_G$$

$\vec{F}_{IG} = -M\vec{a}_G \rightarrow$ per ogni punto del corpo agisce come il centro.

Momento delle Azioni D'Inerzia

$$\vec{C}_{IG} = \int_V (P-G)\times(-\vec{a}_P)\,\rho\, dV =$$

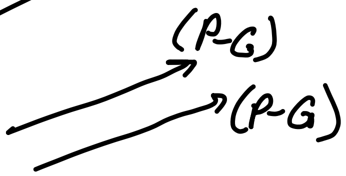
Coppia d'inerzia rispetto a G

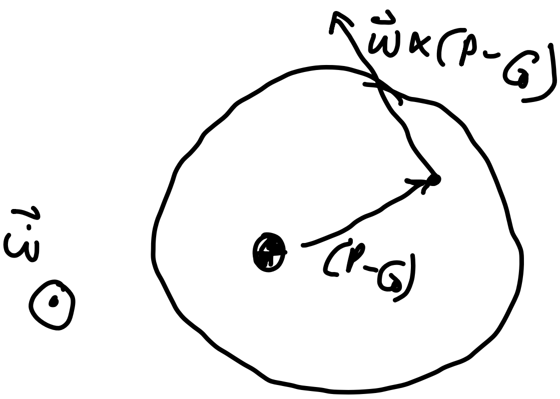


$$= -\int_V (P-G)\times\left(\vec{a}_G + \dot{\vec{\omega}}\times(P-G) - \omega^2(P-G)\right)\rho\, dV$$

$$\vec{C}_{IG} = -\overbrace{\left(\int (P-G)\,\rho\, dV\right)}^{M(G-G)} \times \vec{a}_G - \int_V \underbrace{(P-G)\times\left(\dot{\vec{\omega}}\times(P-G)\right)}_{\to (P-G)^2\cdot\dot{\omega}\,\hat{k}}\rho\, dV$$

$$+\ \omega^2\int_V \cancel{(P-G)\times(P-G)}\,\rho\, dV$$



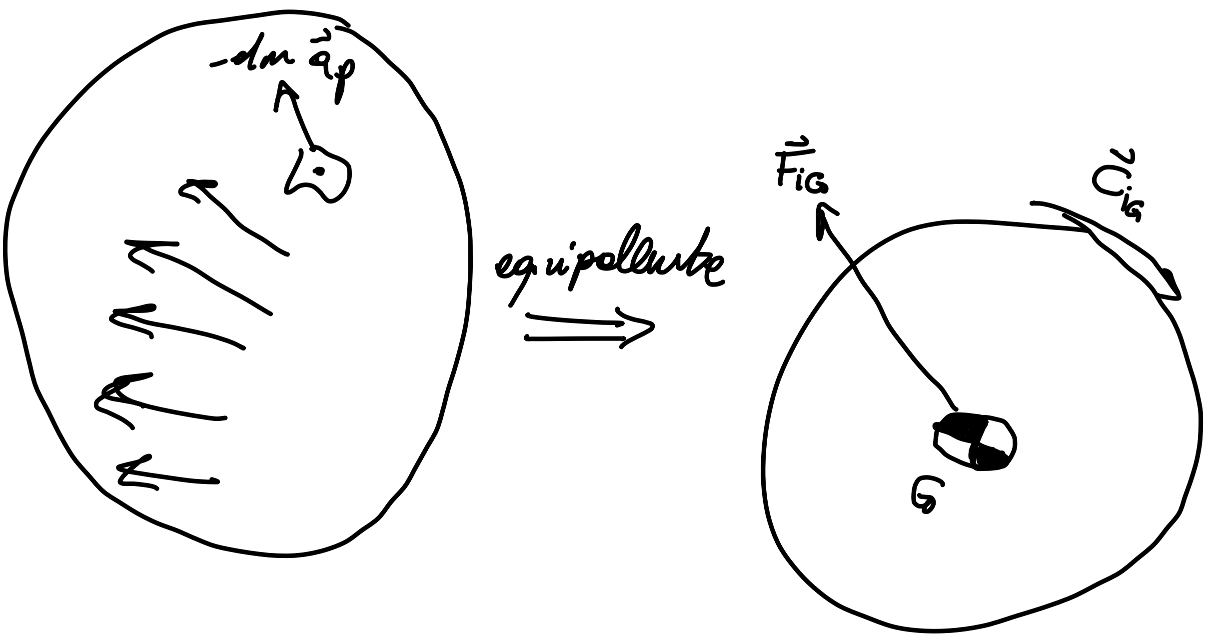


$$= -\int_V |P-G|^2\,\dot{\omega}\,\hat{k}\,\rho\, dV$$

$$\vec{C}_{iG} = \dot{\vec{\omega}} \int_V |P-G|^2 \rho \, dv = -J_G \, \dot{\vec{\omega}}$$

$(P-G)^2 M \rightarrow$ come abbiamo visto prima

$|P-G|^2 \rightarrow$ Distanza di ogni volume dal baricentro



È una equipollenza dell'equilibrio non dello stato di sforzo.

$$\vec{F}_{iG} = -M \vec{a}_G$$

$$\vec{C}_{iG} = -J_G \, \dot{\vec{\omega}}$$