Lezione 10 - Errore della Media Quadratica e Approssimazione dell'integrale

Minimi Quadrati

Usiamo i minimi quadrati per trovare un'andamento medio. Troviamo un polinomio che minimizza gli scarti quadratici.

Nel caso lineare (m=1) abbiamo:

$$
\begin{gathered}
\widetilde{f} = a_0 + a_1 x \\
p_m(x) = b_0 + b_1 x \\
\frac{\partial \phi}{\partial b_0}(a_0, a_1) = 0 \xrightarrow{\text{Ci da}} \sum_{i=0}^{n} [a_0 - y_i + a_1 x_i] = 0 \\
\frac{\partial \phi}{\partial b_1}(a_0, a_1) = \xrightarrow{\text{Ci da}} \sum_{i=0}^{n} [a_1 x_i^2 - y_i x_i + a_0 x_i] = 0
\end{gathered}
$$

Quali sono a_1 e a_0. Abbiamo 2 incognite per 2 equazioni quindi le possiamo trovare.

Possiamo scrivere queste due equazioni di sommatorie come una matrice in forma: $B\vec{a} = \vec{g}$, dove $\vec{a} = [a_0, a_1]^T$

Dobbiamo trovare i valori nella matrice B e nel vettore g.

Tiriamo fuori della sommatorie le variabili che vogliamo:

$$
\begin{gathered}
a_0 \overbrace{\cancelto{(n+1)}{\sum_{i=0}^{n} 1}}^{b_{11}} + a_1 \overbrace{\sum_{i=0}^{n} x_i}^{b_{12}} = \overbrace{\sum_{i=0}^{n} y_i}^{g_1} \\
a_0 \underbrace{\sum_{i=0}^{n} x_i}_{b_{21}} + a_1 \underbrace{\sum_{i=0}^{n} x_i^2}_{b_{22}} = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} x_i y_i}_{g_2}
\end{gathered}
$$

Dai valori che abbiamo trovare per la matrice B troviamo che la matrice è sdp.

Generalizziamo questo ricavo fino al grado m.

$$
\begin{gathered}
\widetilde{f}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m \\
p_m(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m \\
\frac{\partial \phi}{\partial b_i}(a_0, \ldots, a_m) = 0 \to i = 0, \ldots, m
\end{gathered}
$$

Guardando i valori di B che abbiamo trovato, vediamo che andando a destra guadagniamo una potenza e lo stesso in giù. L'andamento in giù continua anche in g per ragioni matematica ovvie.

$$
\begin{aligned}
&a_0 \sum_{i=1}^{n} 1 + a_1 \sum x_i + \cdots + a_m \sum x_i^m = \sum y_i \\
&a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum x_i^2 + \cdots + a_m \sum x_i^{m+1} = \sum x_i y_i \\
&\vdots \\
&a_0 \sum x_i^m + a_1 \sum x_i^{m+1} + \cdots + a_m \sum x_i^{2m} = \sum x_i^m y_i
\end{aligned}
$$

Noi abbiamo preso $\widetilde{f} \in \mathbb{P}_m$ ma si potrebbe prendere di natura diversa.

Approssimazione di Integrali

Ci occupiamo di integrali di funzioni continue, cioè:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx \rightarrow f \in C^0([a,b])$$

Le approssimazioni degli integrali si possono fare anche quando l'integrale ha un salto o un'asintotica, è più difficile e non lo facciamo in questo corso.

Data una funzione f(x) difficile da in integrare, possiamo fare un sostituzione con un polinomio ricavando allora:

$$\widetilde{I}(f) = \int_a^b \widetilde{f}(x)\, d \rightarrow \widetilde{I}(f) \simeq I(f), \text{ con } \widetilde{f} \in \mathbb{P}_m$$

Formule di Quadratura

Le formule di quadratura sono la conversione del calcolo dell'integrale da una forma infinitesima ad una forma discreta.

Per fare la quadratura, prendiamo l'intervallo d'integrazione e facciamo una partizione in M sotto intervalli:

Facciamo M partizioni dell'intervallo, prendendo x_0, x_1, x_M equispaziati, cioè $x_k = x_0 + kH$, con $H = \frac{b-a}{M}$.

Ogni sotto intervallo può esser definito come:

$$I_k = [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, \ldots M$$

La quadratura ha equazione:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{M} \int_{I_k} f(x)\, dx \simeq \sum_{k=1}^{M} \int_{I_k} \widetilde{f}(x)\, dx = \widetilde{I}(f)$$

Quadratura a vari ordini

m = 0

Per l'ordine m=0, rimpiazziamo la funzione con dei valori costanti, per semplicità prendiamo il valore medio.

La quadratura allora sarà:

La formula di quadratura del rettangolo/del punto medio è:

Per $I_k, \overline{x}_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$

$$\widetilde{I}_{pm}(f) = H \cdot \sum_{k=1}^{M} f(\overline{x}_k)$$

In effetti stiamo interpolando a tratti con grado 0, quindi potremmo dire che il polinomio della nostra interpolazione è Π_0^H.

Un vantaggio della quadratura del punto medio è che tende a ridurre l'errore perché tende ad avere sia parti dove sovrastima che parti che sottostima.

Per il caso dove prendiamo l'intervallo intero/ prendiamo un singolo rettangolo.

La quadratura sarà:

$$\widetilde{I}(f) = (b-a)f\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

m = 1

Nel caso di grado 1, la forma della quadratura è di un trapezoide:

Questa è la stessa interpolazione della funzione $\Pi_1^H f$.

La formula di quadratura è:

$$\widetilde{I}_T^C(f) = \frac{H}{2}\sum_{k=1}^{M}[f(x_{k+1}) + f(x_k)]$$

Il mezzo sarebbe dalla due valori trovati in f, ma è costante quindi lo abbiamo tirato fuori.
Il pedice indica che è composito, cioè è composto da più sotto-intervalli che è evidente dalla presenza della sommatoria.

Tutti i punti vengono valutati due volte, che non è computazionalmente intelligente, per riduce i calcoli possiamo riscrivere la formula di quadratura come:

$$= \frac{H}{2}(f(a) + f(b)) + H\sum_{k=1}^{N-1} f(x_k)$$

La prima parte viene dalla al fatto che in questo modo non potremmo scrivere la fine e l'inizia. Nella seconda parte togliamo il pezzo perché anche se facciamo lo stesso la media, stiamo contando lo stesso tutti i valori due volte, quindi il costante si annulla.

Per il singolo trapezio:

L'equazione di quadratura è:

$$\widetilde{I}_T(f) = \frac{(b-a)}{2}[f(a) + f(b)]$$

m = 2

La funzione di quadratura per il grado due prende la forma parabolica.

La funzione di quadratura sarà:

$$\begin{aligned}\widetilde{I}_S^C &= \frac{H}{6}\sum_{k=1}^{M}[f(x_{k+1})+4f(\overline{x}_k)+f(x_k)]\\ &= \frac{H}{6}[f(a)+f(b)]+\underbrace{\frac{H}{3}}_{\frac{H}{6}\cdot 2}\sum_{k=1}^{M-1}x_k+\frac{2}{3}H\sum_{k=1}^{M}f(\overline{x}_k)\end{aligned}$$

Prendiamo l'indice S per Simpson che originò questa interpolazione.

Prendendo una singola parabola, il diagramma è:

$$\widetilde{I}_S = \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

Questo è Simpson semplice/ ad un'intervallo.

Errore di Quadratura

Definiamo $\overline{x} = \frac{a+b}{2}$

Errore punto medio (semplice)

$$\begin{aligned}I(f)-\widetilde{I}_{pm}(f) &= \int_a^b f(x)\,d-(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\\ &= \int_a^b f(x)\,d-\int_a^b f(\overline{x})\,dx\\ &= \int_a^b [f(x)-f(\overline{x})]\,dx\end{aligned}$$

Facciamo Taylor quindi un requisito per questo calcolo è che: $f \in C^2([a,b])$
$f(x) = f(\overline{x}+f'(\overline{x}))(x-\overline{x})+\frac{f''(\alpha(x))}{2}(x-\overline{x})^2$

Tornando al calcolo dell'errore abbiamo:

$$= \int_a^b f'(\overline{x})(x-\overline{x})\,dx+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\alpha(x))(x-\overline{x})^2\,dx$$

Risolviamo la prima parte delle funzione, la componente derivata è costante quindi la tiriamo fuori e risolviamo solo l'integrale del monomio:
$\int_a^b (x-\overline{x})\,dx = \frac{(x-\overline{x})^2}{2}\Big|_a^b = \frac{1}{2}\left[\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(b-a)^2}{4}-\frac{(a-b)^2}{4}\right] = 0$
Questo ci lascia con il loro componente alla destra.

Per il teorema del valore medio dell'integrale possiamo riscriverlo come:

$$= \frac{1}{2} f''(\beta) \int_a^b (x - \overline{x})^2 \, dx \text{ per } \beta \in [a, b]$$

Risolvendo l'integrale:

$$\int_a^b (x - \overline{x})^2 \, dx = \frac{(x - \overline{x})^3}{3} |_a^b = \frac{1}{3} \left[\left(b - \frac{a+b}{2} \right)^3 - \left(a - \frac{a+b}{2} \right)^3 \right] = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{b-a}{2} \right)^3 - \left(\frac{a-b}{2} \right.\right.$$

L'errore allora ha valore:

$$= \frac{1}{24} (b-a)^3 f''(\beta)$$

Errore punto medio (composito)

L'errore nel composito sarà la somma dell'errore di ogni sottointervallo:

$$I(f) - \widetilde{I}^C_{pm}(f) = \sum_{k=1}^{M} \left[\underbrace{\int_I f(x) \, dx - \widetilde{I}^C_{pm}(f)|_{I_i}}_{\frac{1}{24} H^3 f''(\beta_k)} \right]$$
$$= \frac{H^3}{24} \sum_{k=1}^{M} f''(\beta_k)$$

Usiamo il teorema del valore medio al calcolo dell'integrale in forma discreta. Definendo $\alpha \in [a, b]$.

$$= \frac{H^3}{24} M f''(\alpha)$$
$$= \frac{(b-a)}{24} H^2 f''(\alpha)$$

Vediamo che la forma composita e la forma semplice hanno forma uguale, cambia la costante che mettiamo nella seconda derivata.

Errore Trapezio (semplice)

L'errore sarà:

$$I(f) - \widetilde{I}_T(f) = \int_a^b \underbrace{\underbrace{E_1 f}_{\substack{\text{Errore} \\ \text{di} \\ \text{Interp.}}}}_{= \frac{f^{(n+1)}(\gamma(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)} dx$$

$$= \int_a^b \frac{f''(\gamma(x))}{2} (x-a)(x-b) \, dx$$

Per il teorema dei valori medi troviamo: $\sigma \in [a, b]$

$$= \frac{1}{2} f''(\sigma) \int_a^b (x-a)(x-b)\, dx$$

Integrando l'integrale per parti abbiamo:

$$\begin{aligned}
&= - \int_a^b \frac{(x-a)^2}{2}\, dx + \cancelto{0}{\frac{(x-a)^2}{2}(x-b)|_a^b} \\
&= -\frac{1}{2} \int_a^b (x-a)^2\, dx \\
&= -\frac{1}{2} \frac{(x-a)^3}{3} |_a^b = -\frac{1}{6}(b-a)^3
\end{aligned}$$

L'errore allora ha equazione:

$$= -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\sigma)$$

Errore Trapezio (composito)

L'errore per il trapezio composito è:

$$-\frac{1}{12}(b-a)H^2 f''(\rho)$$

con $\rho \in [a, b]$

Confronto degli errori

Per il punto medio e trapezio gli errori sono:

$$\begin{aligned}
I(f) - \widetilde{I}_{pm}(f) &= \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\beta) \\
I(f) - \widetilde{I}_{pm}^{C}(f) &= \frac{b-a}{24} H^2 f''(\alpha) \\
I(f) = \widetilde{I}_T(f) &= -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\sigma) \\
I(f) - \widetilde{I}_T^{C}(f) &= -\frac{1}{12}(b-a)H^2 f''(\rho)
\end{aligned}$$

Questo che vediamo è che con l'aumento nel grado delle funzioni di integrazione l'errore aumenta, questo è consistente con quello che abbiamo visto negli esempi. La ragione per cui l'errore è minore e perché i rettangoli tendono a sottovalutare in parti e sopravalutare in altre parti, che si annulla causa un errore minore. Questo ci fa vedere che non è solo qualcosa è limitato alle funzioni che abbiamo disegnato ma è un fenomeno generale che causa l'errore ad esser minore. A parità di costante per la derivata seconda.