Lezione 17 -

Metodi di predictor-corrector

Come abbiamo visto nel punto fisso

nasce dagli ODE

$$CN \rightarrow \begin{cases} u_{n+1} = \underbrace{u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})\right]}_{\phi(u_{n+1})} & n \geq 0 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

Essendo implicito serve attivare uno solver non lineare tuttavia la parte a destra può esser letta come una funzione di punto fisso per trovare u_{n+1}

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}) \rightarrow \alpha = \phi(\alpha)$$

$? \; u_{n+1} \in \mathbb{R}$

$$u_{n+1}^{(k)} \simeq u_{n+1}$$

Possiamo fare

$$u_{n+1}^{(k+1)} = \phi(u_{n+1}^{(k)})$$

Allora possiamo attivare una serie di approssimazioni per u_{n+1}

$$u_{n+1}^{(k+1)} = \phi(u_{n+1}^{(k)}) = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1}^{(k)})\right]$$

Stiamo chiedendo allo stesso schema di fare un metodo di punto fisso.

u_n è l'oggetto a cui siamo andati a convergenza all'istante prima.

Non è più uno schema implicito è uno schema esplicito.

se $u_{n+1}^{(0)}$ è "sufficientemente ricca", allora $u_{n+1}^{(1)}$ è già una buona approssimazione per u_{n+1} quindi è già la approssimazione che stiamo cercando di u_{n+1}

Cosa significa "sufficientemente ricca"?

se il mio schema implicito è di ordine p allora $u_{n+1}^{(0)}$ deve esser generata da uno schema esplicito di ordine $\geq p-1$

nel caso di CN è $\geq 1 \Rightarrow$ si può usare eulero esplicito.

CN implicito di ordine 2 } Corrector
+ EE esplicito di ordine 1 } Predictor

$$\begin{cases} u_{n+1}^{(0)} = u_n + h f(t_n, u_n) & \text{Predictor} \\ u_{n+1}^{(1)} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1}^{(0)}) \right] & \text{Corrector} \end{cases}$$

Serve una sola iterazione di corrector perché è sufficientemente ricco $u_{n+1}^{(0)}$

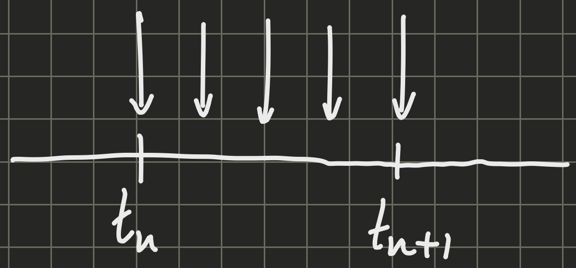
↳ Schema di Eulero migliorato (schema di Heun)

↳ preserva l'ordine di convergenza di CN è di ordine 2

Però ↳ Condizionatamente assolutamente stabile.

<u>Schemi di ordine alto</u>
- → multi-step (Adams ↳ BDF)
  - ↳ non li facciamo
- → one-step (Runge-Kutta)

Metodo di Runge-Kutta



si prende sia t_n, t_{n+1} e più istanti intermedi.

RK (a s stadi)

Calcoliamo sempre un termine prima più un termine correttore, lo spirito è lo stesso degli schemi iterativi.

$$
\begin{cases}
u_{n+1} = u_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i \\
k_i = f\left(t_n + c_i h,\ u_n + \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j\right) \quad i = 1, \dots, s \\
u_0 = y_0
\end{cases}
$$

Dipende da b_i, c_i e a_{ij}

Array di Butcher

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array} \qquad [A]_{ij} = a_{ij}$$

$$A \in \mathbb{R}^{s \times s}$$

$b, c \in \mathbb{R}^s \rightarrow [c]_i = c_i$

↳ $[b]_i = b_i$

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ c_2 & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & \cdots & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{array} \qquad \begin{array}{l} \rightarrow k_1 \\ \rightarrow k_2 \\ \\ \rightarrow k_s \\ \\ \end{array}$$

se A ha tutti elementi non nulli tutti gli k sono dipendenti da tutti gli altri k, questo è un sistema non lineare usiamo Newton per sistemi

Se A ha solo la parte triangolare inferiore non nulla allora si ha una dipendenza ad uno ad uno di tutti i k_i → cioè k_1 non dipende da altri, k_2 dipende da k_1, k_3 da k_1 e k_2 e via così.

↳ se $a_{ij} \neq 0$ per $j < i$ allora RK a s stadi è <u>esplicito</u>

↳ A deve esser strettamente triangolare inferiore

↳ se un k_i dipende da se stesso o un k_j che non abbiamo ancora trovato (cioè se dipende da k_i) allora è implicito.

Esempi di schemi di Runge-Kutta

RK4 → A 4-stadi → di ordine 4

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right] & \text{per } n \geq 0 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, u_n) \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2},\ u_n + \frac{h}{2} k_1\right) \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2},\ u_n + \frac{h}{2} k_2\right) \\ k_4 &= f(t_{n+1},\ u_n + h k_3) \end{aligned}\right\} \text{esplicito}$$

Array di Butcher per RK4

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

<u>EE</u> come Runge-Kutta ad 1 stadio (RK1)

$$u_{n+1} = u_n + h \underbrace{f(t_n, u_{n+1})}_{k_1}$$

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Array di Butcher per EE

Heun = RK2

$$\begin{cases} u_n^{(1)} = u_n + \frac{h}{2}\left[\underbrace{f(t_n, u_n)}_{k_1} + \underbrace{f(t_{n+1}, u_{n+1}^{(0)})}_{k_2}\right] \\ u_{n+1}^{(0)} = u_n + h\, \underbrace{f(t_n, u_n)}_{k_1} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Array di Butcher per Heun

I due comandi di matlab per Runge sono ode23 e ode45

$y_i : [t_0, T] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ i = 1, \dots, m$

? $y_1, y_2, \dots, y_m$

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t_n, y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)) \\ y_2'(t) = f_2(t_n, y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)) \\ \vdots \\ y_m'(t) = f_m(t_n, y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)) \end{cases} \qquad \underbrace{\begin{cases} y_1(t_0) = y_{1,0} \\ y_2(t_0) = y_{2,0} \\ \vdots \\ y_m(t_0) = y_{m,0} \end{cases}}_{\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0}$$

Proviamo a riportare questo sistema a $y'(t) = f(t, y(t))$
$y(t_0) = y_0$

Usiamo un vettore di funzioni opportuno:

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \\ y_m(t) \end{bmatrix}$$

Definiamo anche il vettore di funzioni note:

$$\vec{F}(t, \vec{y}(t)) = \begin{bmatrix} f_1(t, \vec{y}(t)) \\ f_2(t, \vec{y}(t)) \\ \vdots \\ f_m(t, \vec{y}(t)) \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{y}'(t) = \vec{F}(t, \vec{y}(t))$$

Introduciamo il vettore delle condizioni iniziali

$$\underset{\in \mathbb{R}^m}{\vec{y}_0} = [y_{1,0}, \dots, y_{m,0}]^T$$

Siamo riusciti a scrivere come il sistema:

$$\begin{cases} \vec{y}'(t) = F(t, \vec{y}(t)) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

EE scalare

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n) \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

EE vettoriale

$$\begin{cases} \vec{u}_{n+1} = \vec{u}_n + h\vec{F}(t_n, \vec{u}_n) \\ \vec{u}_0 = \vec{y}_0 \end{cases}$$

$$\vec{u}_{n+1} \simeq \vec{y}(t_{n+1})$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{i-esimo elemento di } u_{n+1}}}{\vec{u}_{n+1,i}} \simeq y_i(t_{n+1}) \rightarrow \begin{cases} u_{n+1,1} = u_{n,1} + hf_1(t_n, u_{n,1}, u_{n,2}, \dots, u_{n,m}) \\ u_{n+1,2} = u_{n,2} + hf_2(t_n, u_{n,1}, u_{n,2}, \dots, u_{n,m}) \\ \vdots \qquad \vdots \\ u_{n+1,m} = u_{n,m} + hf_m(t_n, u_{n,1}, u_{n,2}, \dots, u_{n,m}) \end{cases}$$

$$u_{n+1,i} = u_{n,i} + hf_i(t_n, u_{n,1}, u_{n,2}, \dots, u_{n,m})$$

$$\begin{cases} u_{0,1} = y_{0,1} \\ u_{0,2} = y_{0,2} \\ \vdots \qquad \vdots \\ u_{0,m} = y_{0,m} \end{cases}$$

per i vari metodi visti (e più)

Generalizzando: $\rightarrow$ <u>θ-metodo</u>

$$\begin{cases} \vec{u}_{n+1} = u_n + h\left[\theta \vec{F}(t_{n+1}, \vec{u}_{n+1}) + (1-\theta)\vec{F}(t_n, \vec{u}_n)\right] \\ \vec{u}_0 = \vec{y}_0 \\ 0 \leq \theta \leq 1 \end{cases}$$

combinazione lineare convessa.

Per $\Theta = 0 \rightarrow EE$

Per $\Theta = 1 \rightarrow EI$

Per $\Theta = 1/2 \rightarrow CN$

F, G

$aF + bG \rightarrow$ combinazione lineare.

$a, b \in \mathbb{R}$

se $a+b=1 \rightarrow$ combinazione lineare convessa

$\Theta = \frac{1}{2}$ è il confine tra stabilità assolutamente incondizionata e condizionata, perciò di solito si va a $\Theta = \frac{2}{3}$ per avere stabilità assoluta.

Fine agli ODE

Inizio PDE

Equazione Differenziali a derivate parziali (PDE)

	ODE	PDE
Funzione incognita	$y = y(t)$	$u = u(t,x)$ o $u = u(x,y)$
	si parla di valori iniziali parlando del tempo	la realtà è $u = u(t, x, y, z)$
		nell'ambito spaziale si parla di problemi a valori al bordo.

+ condizione al bordo

se spazio-tempodipendente serve dare sia valore iniziale che valore al bordo.

$$F\Big(\vec{x}, t, y, \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d}}_{\text{ordine } 1}, \underbrace{}_{\text{derivate di ordine 2}}, \underbrace{\frac{\partial^{p_1+\dots+p_d+p_t} u}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_d^{p_d}\partial t^{p_t}}}, g\Big) = 0$$

$\vec{x} = [x_1, \dots, x_d]^T$

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $\quad d = 1, 2, 3$

↳ dominio

→ variabili dello spazio di dipendenza

Un modo per dire la derivata più alta sconosciuta, usata per descrivere il PDE di forma più generica possibile.

Dipendenza dai dati.

ordine delle PDE è:

$p = p_1 + \dots + p_d + p_t$

Classificazioni di PDE

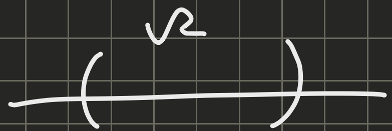
PDE → lineare $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f$ → Quelle che guardiamo generalmente

→ non-lineare $\frac{\partial u}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^2 = \tilde{f}$

Se derivate di u sono moltiplicate solo da costanti non si sono stranezze.

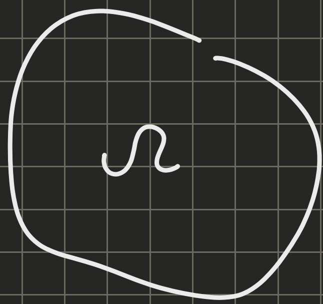
PDE → stazionarie
PDE → non-stazionarie (tempo variabili)

→ se $d=1$



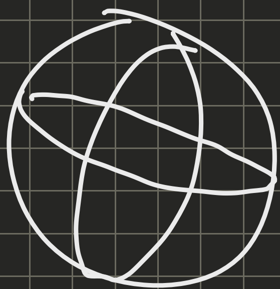
intervallo

se $d=2$



area

se $d=3$



volume