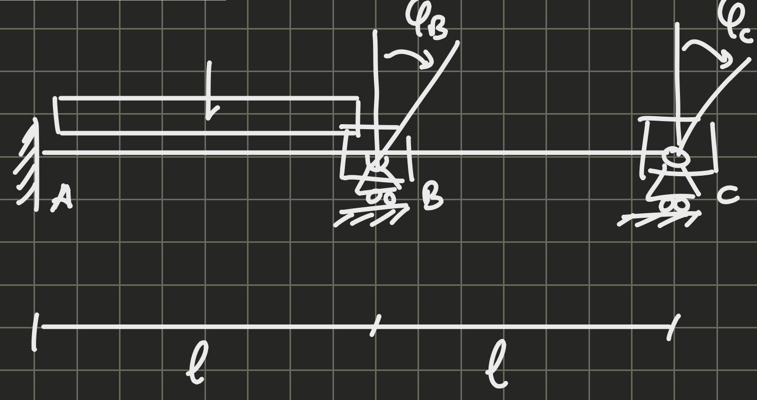
Lezione 13 – MDS come soluzione di sistemi di travi



H_p = Cost → ∞

Identifichiamo i nodi, verifichiamo le loro libertà di spostamenti

Coordinate Lagrangiane $\qquad N = 2$

$$\underline{U} = (\varphi_B, \varphi_C)^T = (U_1, U_2)^T$$

Sistema Equazioni Risolventi → Carichi "Generalizzati"

$$\underline{R}_{FIT} = \underline{\underline{K}}\,\underline{U} + \underline{\tilde{P}} = \underline{0}$$

reazioni vincolari corrispondenti ai vincoli fittizi

$$\underline{F}_R = \underline{\underline{K}}\,\underline{U} \rightsquigarrow \text{Forze di Richiamo elastico}$$

Nel caso in esame:

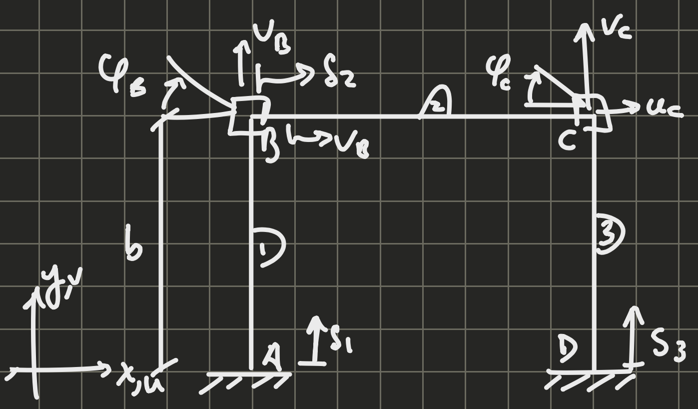
$$\underline{\underline{K}} = \frac{EI}{L}\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

↳ Tutto calcolato

$$\underline{P} = \frac{pl^2}{12}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Carichi nodali generalizzati}$$

$$\Rightarrow \underline{U} = -\underline{\underline{K}}^{-1}\underline{P} = \frac{pl^2}{2EI}\begin{pmatrix} -1/7 \\ 1/14 \end{pmatrix}$$

↳ Forze di richiamo elastico, ricavate imponendo $\varphi = 1$



Per fare i calcoli individuiamo 3 elementi di trave

$$S_1, S_3 \in [0, b]$$

$S_2 \in [0, a]$ Non molto stavo, prendiamo un incastro bilanciato che non è perfetto

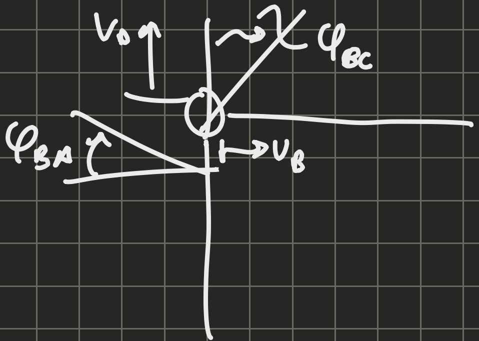
Quello di cui ho parlato dopo questo

$N = 6$

$$\underline{U} = (\varphi_B, U_B, V_B, \varphi_C, V_C, U_C)^T$$

Mettendo un nodo in B cosa succede?

Preso B come nodo disgiunto introduciamo due rotazioni:



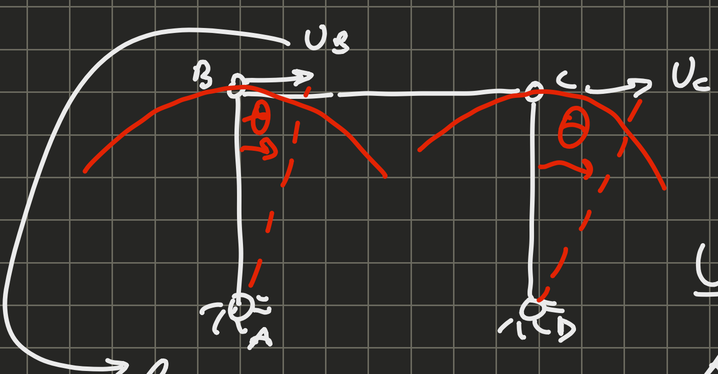
In questo caso specifico:

$$\underline{U} = (\varphi_B^{BA}, \varphi_B^{BC}, V_B, U_B, \varphi_C, V_C, U_C)^T$$

Per fare i conti a mano $EA \to \infty \Rightarrow N = 0$

Introduce un vincolo interno, cambiando N, cambia il numero di spostamenti nodali indipendenti tra loro.

Vogliamo vedere cosa succede, declassiamo la struttura per risolvere il caso assiale:



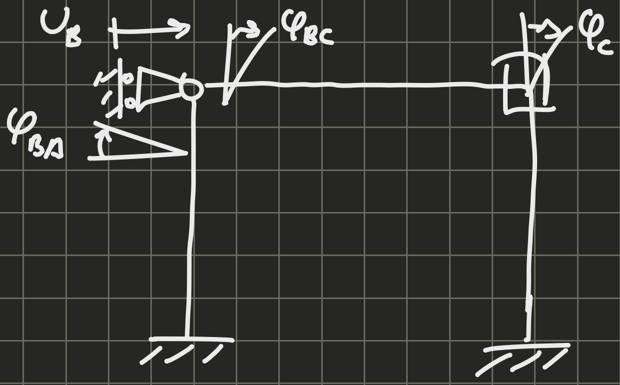
B, C è indeformabile assialmente quindi $U_B = U_C$

$$\underline{U} = (\varphi_B^{BA}, \varphi_B^{BC}, \cancel{V_B}, U_B, \varphi_C, \cancel{V_C}, U_C)^T$$

Allora:

$$\underline{U} = (\varphi_B^{BA}, \varphi_B^{BC}, \varphi_C, U_B)$$

Lo spostamento di B rispetto a A



11:05 → Definizione telaio a nodi mobili.

Se non applichiamo $EA \to \infty$ non abbiamo declassato lo schema.

Definiamo $N+1$ strutture ausiliarie

Struttura Ausiliaria "0" $\quad p \neq \underline{0} \quad \underline{U} = \underline{0}$

Qualsiasi variabile calcolata in questa struttura ha pedice 0

$v_0(s), u_0(s), \varphi_0(s)$

$\eta_0(s), \chi_0(s)$

$N_0(s), T_0(s), M_0(s)$

Struttura Ausiliaria "i" $\quad (i = 1, \dots, N)$

$p = 0 \quad \underline{U}_i = 1 \quad \underline{U}_{j \neq i} = 0$

$\Rightarrow v_i(s), u_i(s), \dots$

Struttura Reale

$$v(s) = v_0(s) + \sum_{i=1}^{N} v_i(s) U_i$$

$$M(s) = M_0(s) + \sum_{i=1}^{N} M_i(s) U_i$$

La struttura reale è equilibrata e cinematicamente ammissibile

La struttura "i" è cinematicamente ammissibile

Proviamo fare il PLV con la statica della reale e la cinematica della struttura "i"

Come avevamo fatto nell'MDF ma scambiando da dove prendiamo.

$$L_{int} = \int_s \overbrace{M(s)}^{M_0(s) + \sum_{j=1}^{N} M_j(s) U_j} \cdot \chi_i \, ds = \qquad \chi_i(s) = \frac{M_i(s)}{EI}$$

$$L_{ext} = \int_s p(s) \cdot v_i(s) \, ds$$

$$= \int_s \frac{M_0 M_i}{EI} ds + \sum_{j=1}^{N} \int_s \frac{M_j M_i}{EI} ds \, U_j$$

$\mathcal{L}_{ext} = \mathcal{L}_{int}$

$$\hookrightarrow \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \int_s \frac{M_i M_j}{EI} ds}_{k_{ij}}\, U_i + \underbrace{\left[\int_s \frac{M_0 M_i}{EI} - \int_s p\, v_i\, ds \right]}_{P_i} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$$

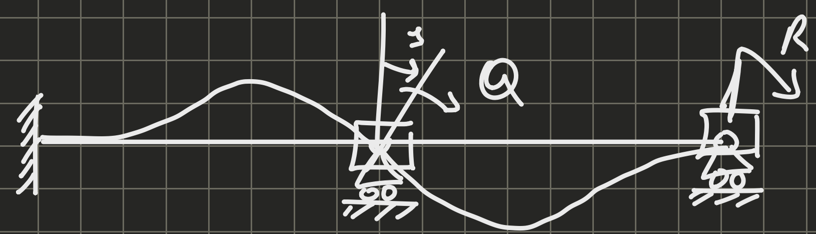
Sistema con incognite U_i

→ Come abbiamo visto all'MDF solo che si ha un sistema diverso

In forma matriciale si può scrivere:

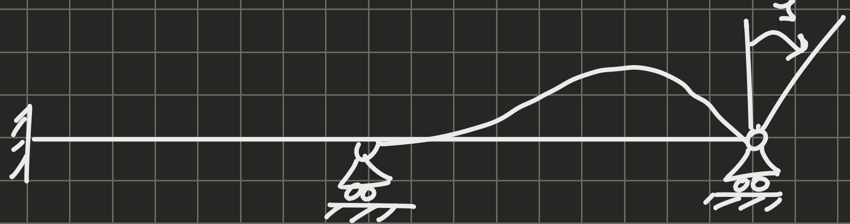
$$\underline{\underline{K}}\;\underline{U} + \underline{P} = \underline{0}$$

"1"



k_{12}
↳ M in C quando $\varphi_B = 1$

"2"



statica equilibrata da "1"

Cinematica equilibrata di "2"

$$\mathcal{L}_{int} = \int_s M_1 \cdot \chi_2 = \underbrace{\int_s \frac{M_1 M_2}{EI}}_{k_{12}} = 1 \cdot R \qquad = \mathcal{L}_{ext}$$

$$\Rightarrow k_{12} = R$$

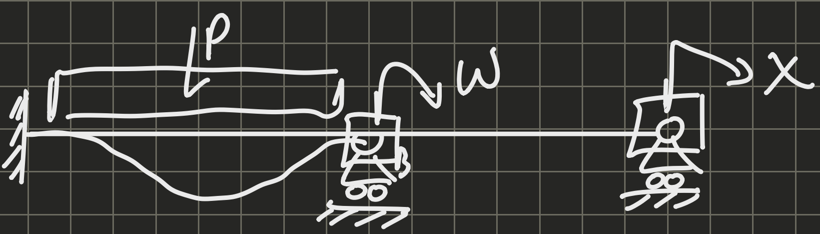
Facendo quello che pensavamo trovare le abbiamo trovato effettivamente k

le reazione vincolare nel nodo per effetto della attivazione della rotazione in B.

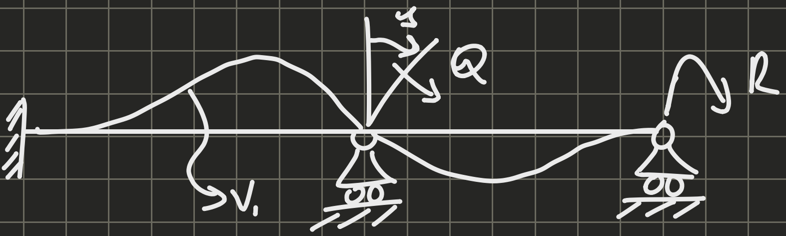
Su termine con $M_0 M_j$ non è mai apposto prima. facciamo vedere che è strettamente 0:

Calcoliamo P_1 (per esempio),

"0"



"1"



$$\underbrace{\mathcal{L}_{int} = \int_s M_0 \chi_1 = \int_s \frac{M_0 M_1}{EI} = \int_s p\, v_1\, ds + W \cdot 1 = \mathcal{L}_{int}}$$

Possiamo risolvere per W

$$W = \underbrace{\int_s \frac{M_0 M_1}{EI} - \int_s p\, v_1\, ds}_{P_1}$$

↳ i P_i sono le reazioni vincolari per effetto di p.

prendiamo la statica in 1 e la cinematica in 0
↳ Scambiato

$$L_{int} = \int_S M_1 \chi_0 = \underbrace{\int_S \frac{M_0 M_1}{EI} ds}_{=0} = \underbrace{0}_{\text{né Q né R fanno lavoro perché in "0" non ci sono spostamenti}} = L_{ext}$$

$= 0$, per ogni struttura che guardiamo.

Proprietà di $\underline{\underline{k}}$

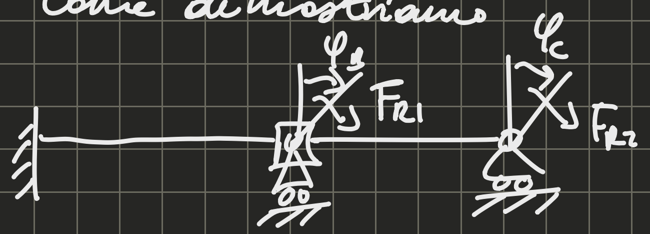
$$\underbrace{k_{ij} = k_{ji}}_{\text{Simmetrica}} \qquad \forall i,j = 1, \dots, N$$

Simmetrica ⤳ Dimostrato per $\int \frac{M_i M_j}{EI}$

$k_{ii} > 0$

$\underline{\underline{k}}$ è sdp

Come dimostriamo



Applicando φ_B e φ_C abbiamo delle reazioni

$$F_{R1} = k_{11} U_1 + k_{12} U_2$$
$$F_{R2} = k_{21} U_1 + k_{22} U_2$$
$$\rightarrow \underline{F}_R = \underline{\underline{k}}\, \underline{U}$$

Utilizziamo il teorema di Clapeyron

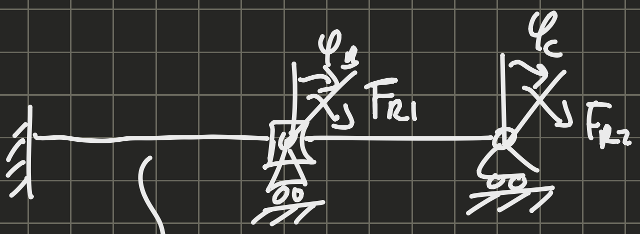
$$W_{F_R} = \frac{1}{2} \underline{F}_R^T \underline{U} = \frac{1}{2} \underline{U}^T \underline{\underline{k}}\, \underline{U} > 0$$

$\underline{\underline{k}}$ definita positiva $= \Omega$

↳ Energia delle deformazioni elastica

$\underline{\underline{?}}$

Possiamo farne vedere che la energia immagazzinata è quella che usiamo per fare il lavoro.



$$v(s) = \sum_{i=1}^{N} v_i(s)\, U_i$$

↳ Senza i carichi esterni

$$\chi(s) = \sum_{i=1}^{N} \chi_i(s)\, U_i$$

$$M = -EI\chi \qquad \chi = \sum_{j=1}^{N} \chi_j U_j$$

Energia della deformazione elastica

$$\Omega = \frac{1}{2}\int_S M\chi\, ds = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int_S EI\, \chi_i \chi_j\, ds\, U_i U_j$$

$$M = -EI\sum_{i=1}^{N} \chi_i U_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int_S \underbrace{\frac{M_i M_j}{EI}}_{k_{ij}}\, ds\, U_i U_j$$

Ritroviamo allora $\Omega = \frac{1}{2} \underline{U}^T \underline{\underline{k}} \, \underline{U} > 0$

Se i carichi esterni sono conservativi

$$V_p = -\int_S p \underbrace{\sum_{i=1}^{\tilde{N}} v_i U_i}_{v(s)} ds =$$

$$= -\sum_{i=1}^{\tilde{N}} \underbrace{\int_S p \, v_i(s) \, ds}_{P_i} U_i = \underline{P}^T \underline{U}$$

→ Potenziale dei carichi esterni

$$\Pi = \Omega + V_p = \frac{1}{2} \underline{U}^T \underline{\underline{k}} \, \underline{U} + \underline{P}^T \underline{U}$$

↳ Energia Potenziale Totale

$$\delta \Pi = \delta \underline{U}^T \left[\underline{\underline{k}} \, \underline{U} + \underline{P} \right] = 0 \quad \forall \delta \underline{U} \iff \underline{\underline{k}} \, \underline{U} + \underline{P} = \underline{0}$$

La linea elastica ci permette di descrivere la cinematica della trave, da lì possiamo trovare tutto quello che vogliamo.

Domani: Piastra