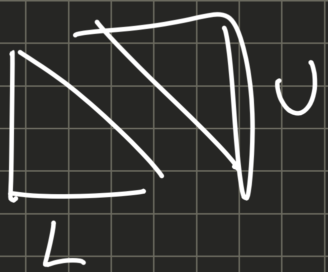
MANI-L02

Approssimazione di sistemi di equazioni lineari

$Ax=b$

- → Metodi Diretti
- → Metodi Iterativi

→ Base dei Diretti: Fattorizzazione LU



A non singolare
⟺ LU non singolare

$$Ax=b \rightarrow L\underbrace{Ux}_{y}=b$$

$Ly=b$ → Per risolvere abbiamo visto l'algoritmo veloce per triangolari in avanti

$Ux=y$

→ Algoritmo in avanti:

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$$

$$y_i = \frac{1}{l_{ii}}\left[b_i - \sum_{j}^{i-1} l_{ii}\, y_j\right] \quad i = 2, \dots, n$$

Costo di questo algoritmo:

↳ Calcolare il numero di operazioni

Iniziamo calcolando le operazioni per y_i

y_i 1 divisione; $(i-1)$ sottrazioni $(i-1)$ moltiplicazioni

$i=1,\dots,n$ per $i=1$ solo una divisione

$$\sum_{i=1}^{n} 1 + 2\sum_{i=1}^{n}(i-1) = n + \cancel{2}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} i}_{\frac{n(n+1)}{\cancel{2}}} - 2n =$$

sottrazione e moltiplicazioni

$$= \cancel{n} + n^2 + \cancel{n} - \cancel{2n} = n^2$$

↳ Normale

Soluzione

$Ux = y$

Esempio 3x3

Gli algoritmi di LU sfruttano la loro sparsità

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$u_{33} x_3 = y_3 \longrightarrow x_3 = \frac{y_3}{u_{33}}$$

$$u_{22} x_2 + u_{23} x_3 = y_2 \longrightarrow x_2 = \frac{1}{u_{22}} \left[y_2 - u_{23} x_3 \right]$$

$$u_{11} x_1 + u_{12} x_2 + u_{13} x_3 = y_1 \longrightarrow x_1 = \frac{1}{u_{11}} \left[y_1 - u_{12} x_2 - u_{13} x_3 \right]$$

Algoritmo delle Sostituzioni all'indietro

$$\boxed{\begin{aligned} x_n &= \frac{y_n}{u_{nn}} \\ x_i &= \frac{1}{u_{ii}} \left[y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j \right] \qquad i = n-1, \dots, 1 \end{aligned}}$$

Il costo è lo stesso di quello in avanti.

Come troviamo le matrice LU per fare la fattorizzazione.

$A = LU$ → Implica uguaglianza elemento per elemento

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{\text{Nota}} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}$$

Incognito

$$= \begin{cases} a_{11} = l_{11} u_{11} & a_{12} = l_{11} u_{12} \\ a_{21} = l_{21} u_{11} & a_{22} = l_{21} u_{12} + l_{22} u_{22} \end{cases}$$

$\underbrace{\text{4 equazioni} \quad \text{6 incognite}}$

È sotto determinato

→ Possiamo o togliere 2 incognite o aggiungere 2 equazioni

→ Scegliamo (la comunità scientifica) di definire l_{11} e l_{22} come 1, perciò:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} = u_{11} \\ a_{12} = u_{12} \end{array}\right\} \text{Danno l'identità alla prima riga di } U \ (R_1(U))$$

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} a_{11} = u_{11} \\ a_{12} = u_{12} \end{array}\right\} R_1(U) \\ a_{21} = l_{21} u_{11} \ \} \ C_1(L) \\ a_{22} = l_{21} u_{12} + u_{22} \ \} \ R_2(U) \end{cases}$$

Questo è un esempio in 2×2 ma vale per $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$n\begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ L & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddots & & U \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$

n

n^2 equazioni $\qquad \underbrace{\dfrac{n(n+1)}{2} \text{ incognite} + \dfrac{n(n+1)}{2} \text{ incognite}}$

$n^2 + n$ incognite,

togliamo n incognite definendole come $\underline{1}$

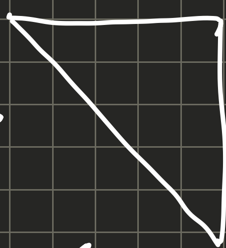
↳ ponendo la diagonale di L come $\underline{1}$

↳ Quando parliamo di fattorizzazione LU, faremo l'ipotesi che la diagonale di L è $\underline{1}$

Metodo di Eliminazione Gaussiana (MEG)

Esempi 3x3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \boxed{a_{31}} & \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{bmatrix} \longrightarrow$$



Tutti i passi sono combinazioni lineari delle righe di A.

↳ Primo passo

Secondo passo

↳ $n-1$ passi

↳ dimensione della matrice

$X \quad Y$

$a, b \in \mathbb{R} \qquad aX + bY$

Ad ogni elemento aggiungiamo un'apice per indicare quali sono le entrate originali

$$A = A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{bmatrix}$$

<u>Passo 1</u>

$$\ell_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \qquad \ell_{31} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$$

Serve che : $a_{11}^{(1)} \neq 0$

↳ $a_{11}^{(1)}$ è detto pivot

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Nuova seconda riga

" $R_{2new} = R_{2old} - \ell_{21} R_{1old}$ "

↳ Sarà $a_{21}^{(2)} = a_{21}^{(1)} - \ell_{21} a_{11}^{(1)}$

$$= a_{21}^{(1)} - \frac{a_{21}^{(1)}}{\cancel{a_{11}^{(1)}}} \cdot \cancel{a_{11}^{(1)}} = 0$$

↳ $a_{22}^{(2)} = a_{22}^{(1)} - \ell_{21} a_{12}^{(1)}$

↳ $a_{23}^{(2)} = a_{23}^{(1)} - \ell_{21} - a_{13}^{(1)}$

" $R_{3new} = R_{3old} - \ell_{31} R_{1old}$ "

↳ $a_{31}^{(2)} = a_{31}^{(1)} - \ell_{31} \cancel{a_{11}^{(1)}} = 0$ $\qquad \dfrac{a_{31}^{(1)}}{\cancel{a_{11}^{(1)}}}$

↳ $a_{32}^{(2)} = a_{32}^{(1)} - \ell_{31} a_{12}^{(1)}$

↳ $a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - \ell_{31} a_{13}^{(1)}$

Passo 2

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} \end{bmatrix} = U \qquad l_{32} = \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$$

se $a_{22}^{(2)} \neq 0$ anche questo lo chiamiamo pivot

"$R_{3new} = R_{3old} - l_{32} R_{2old}$"

$$a_{32}^{(3)} = a_{32}^{(2)} - \underbrace{l_{32}}_{= \frac{a_{32}^{(2)}}{\cancel{a_{22}^{(2)}}}} \cancel{a_{22}^{(2)}} = 0$$

$$a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} - l_{32} a_{32}^{(2)}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

I moltiplicatori sono gli elementi di L

↳ Si può dimostrare ma non lo facciamo

Esempio Numerico

$$A = A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_{21} = 2 \\ l_{31} = -1}]{} A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$2-2\cdot1 \quad 0-2\cdot2 \quad -1-2\cdot\underline{1}$

$-1+1 \quad 1+1\cdot2 \quad 5+1$

$$\xrightarrow[l_{32}=\frac{-3}{4}]{} A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 15/4 \end{bmatrix}$$

$3+\frac{3}{4}(-4) \qquad 6+\frac{3}{4}(-3)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \overset{?}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{-3}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{15}{4} \end{bmatrix}$$

Elenco comandi che fanno fattorizzazione LU:

[L,U] = lu(A)

inv(A) → inversa

\ → solver che funziona su matrici sparse se le definiamo

x = A\b

det(A)

tril → estraggono porzione triangolare inferiore
triu → " " " superiore

Costo del MEG

↳ $\frac{2}{3}n^3$

$Ax = b$

MEG
+
$Ly = b$
+
$Ux = y$
=
$2/3 n^3 + 2n^2$

$[A|b]$

MEG

$b_1^{(1)}$
$b_2^{(1)}$ $\xrightarrow[1]{\text{Passo}}$
$b_3^{(1)}$
$\vdots$

$b_1^{(1)}$
$b_2^{(2)} = b_2^{(1)} - l_{21} \cdot b_1^{(1)}$
$b_3^{(2)}$
$\vdots$

↳ Passo 2 $b^{(1)}$
$b_2^{(2)}$
$b_3^{(3)} = b_3^{(2)} - l_{32}\, b_2^{(2)}$

↳ etc.

↳ Creiamo $\tilde{b}$

si ha $[U|\tilde{b}]$ $Ux = \tilde{b}$

costo → $\frac{2}{3}n^3 + n^2$

$x = A^{-1}b$

Non va bene perchè costa tantissimo

$\cancel{\frac{8}{3}n^3 + n^2}$

↳ No

$Ax = c_1$
$Ax = c_2$
$\vdots$
$Ax = c_q$

Strada 1

$\frac{2}{3}n^3 + q(2n^2)$

$A|c_1$
$A c_2$
$\vdots$
$A|c_q$

$q\left(\frac{2}{3}n^3 + n^2\right)$

↳ Se dobbiamo risolvere il sistema q volte, costa molto meno la strada 1, che quella 2.

→ Questo caso è come si fa per trovare la matrice inversa, è la ragione per cui il metodo che la usa non è scelta, perché costa molto di più.

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} v_1, v_2, \dots, v_n \end{bmatrix}}^{A^{-1}} = \begin{bmatrix} I \end{bmatrix}$$

↳ Dobbiamo verificare colonna per colonna

→ la ragione perché inv(A) usa LU

<u>Esempio</u>

$$A = A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_{21}=2 \\ l_{31}=3}]{} A^{2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_{32} = \frac{3}{0}]{} A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \\ & & \end{bmatrix}$$

↳ Ci sono altri casi dove LU non posso calcolarla.

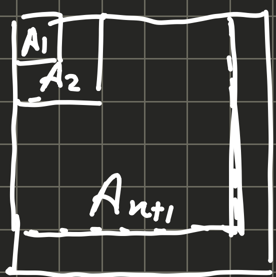
Sono da ricordare per il parziale e appello ← possono chiedere.

Ci sono 3 condizioni necessarie e sufficienti per determinare se sia fattorizzabile.

Condizioni Necessarie & Sufficienti

Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Allora $\exists! LU$ A $\iff$ tutte le sottomatrici principali di A di ordine j con $j = 1, \dots, n-1$ sono non singolari.

$\exists! LU$



A_n prime n righe e colonne
intersezione di

Osservazioni: A può avere LU se tutte le sottomatrici sono non singolari.

Per $Ax=b$ serve che A sia non singolare, se è singolare può esser fattorizzata ma non avrà soluzione

Condizioni Sufficienti

3 condizioni; serve che sia verificata 1

Se la matrice fa parte di 3 classi, $\exists! LU$ per la matrice

1) Se A ha dominanza diagonale <u>stretta</u> per righe $\Rightarrow \exists! LU$ di A

2) Se A è a dominanza diagonale <u>stretta</u> per colonne $\Rightarrow \exists! LU$ di A

3) Se A è una matrice simmetrica e definita positiva $\Rightarrow \exists! LU$ di A

Esempi 1: Dopo NS, è singolare ma può esser fattorizzata

$$A_1 = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}}_{\substack{\text{Singolare}\\ \det = 0}} \qquad \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}}_{\text{Singolare}}$$

Esempio 2

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$ Singolare

$\Rightarrow$ Si perde o esistenza o unicità di LU

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & \gamma \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \rightarrow \beta = 0 \quad \gamma = 1$$

$\alpha\beta = 1$

$\Downarrow$

α non esiste

$\Longrightarrow$ Non esiste LU

Esempio 3

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$ Singolare, non è verificato NS

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & \gamma \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \quad \beta = 0 \quad \gamma = 1$$

$\alpha\beta = 0 \quad \forall \alpha$

$\rightarrow$ LU esiste ma perde l'unicità

$\alpha\gamma + \delta = 2 \qquad \gamma + \delta = 2 \rightarrow \delta = 2 - \alpha$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2-\alpha \end{bmatrix}$$ Indipendentemente da α

Vogliamo lavorare con matrici che esistono e sono uniche.

Casi Sufficienti: (Spiegazioni)

① Dominanza diagonale

↳ L'elemento sulla diagonale è maggiore (>) in valore assoluto della somma di tutti gli altri elementi sulla riga.

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \text{per } i = 1, \dots, n$$

↳ Esempio

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & -7 & 2 \\ -2 & 1 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} 4 > 1 \\ 7 > 5 \\ 9 > 3 \end{matrix}$$

② $$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| \quad j = 1, \dots, n$$

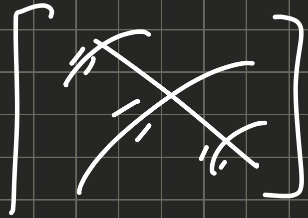
$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & -7 & 2 \\ -2 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$4 \not> 5 \quad 7 > 1 \quad 9 > 3$

③ Simmetrica è ovvia, forma formale è che $A = A^T$

o $a_{ij} = a_{ji}$

forma informale



Matlab $A == A'$

Operazione di trasposizione

Matrice è definita positiva

$$\underset{(1\times n)}{x^T}\underset{(n\times n)}{A}\underset{(n\times 1)}{x} > 0 \qquad \underbrace{\forall x \in \mathbb{R}^n \text{ con } x \neq \underline{0}}_{\text{Non è controllabile dai computer}}$$

$$A \quad (\underset{\mathbb{R}}{\lambda}, \underset{\mathbb{R}^n}{v}) \qquad Av = \lambda v$$

Se la matrice è simmetrica, gli autovalori sono tutti reali, se tutti gli autovalori sono positivi, allora è positiva.

Danche