Laboratorio 8 - Metodi Numerici per ODE

Penultimo laboratorio su matlab !! :(

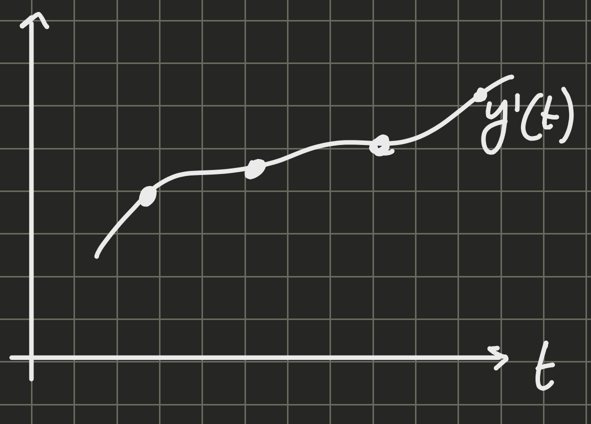
Abbiamo visto i metodi analitici per risolvere gli ODE.

Preso l'ODE

$$(*) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

E lo risolviamo in maniera numerica.

La soluzione del problema è una funzione, non un numero.



Approssimiamo questa funzione a dati istanti

$y(t_n) \simeq u_n$

$\{(t_n, u_n)\}_{n=0}^{N_h-1}$

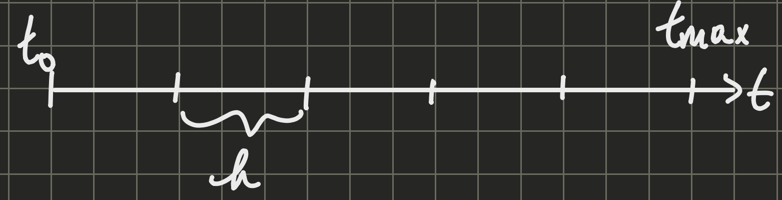
Non vogliamo la definizione continua, ma una discreta che riusciamo a ricavare con matlab.

$$y: \cancel{\mathbb{R} \to \mathbb{R}} \longrightarrow \{(t_n, u_n)\}_{n=0}^{N_h-1}$$

Ultime lezi

Oggi

Per prima discretizziamo t:



$$t_h = t_0 : h : t_{max}$$

Metodi Numerici

Eulero in Avanti

$$y'(t_n) \simeq \frac{u_{n+1}-u_n}{\underbrace{t_{n+1}-t_n}_{h}} = \frac{u_{n+1}-u_n}{h} \overset{\circledast}{=} f(t_n, \underbrace{y(t_n)}_{u_n})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_{n+1} = u_n + h\, f(t_n, u_n) \\ u_0 = y_0 \end{cases} \qquad \circlearrowleft\ n = 0, \dots, N_h - 1$$

Esplicito e one-step

↳ Si può calcolare direttamente u_{n+1}

Convergenza di primo ordine

Eulero all'indietro

$$y'(t_{n+1}) \simeq \frac{u_{n+1}-u_n}{h} \overset{\circledast}{=} f(t_{n+1}, u_{n+1})$$

$$\Longrightarrow \underbrace{u_{n+1}}_{?} = u_n + h f(t_{n+1}, \overbrace{u_{n+1}}^{?})$$

$\Longrightarrow$ Implicito

Rende la soluzione difficile da risolvere.

Come si fa a risolverlo?

- Newton
- Punto Fisso

se si scrive tutto a sinistra:

$$\underbrace{u_{n+1}}_{X} - u_n - h f(t_{n+1}, \underbrace{u_{n+1}}_{X}) = 0$$

È un problema della cerca degli zeri.

$$\Longrightarrow g(X) = 0 = X - u_n - h f(t_{n+1}, X)$$

$$\frac{\partial g}{\partial X} = 1 - h \frac{\partial f}{\partial y}(t_{n+1}, X)$$

derivata parziale di f rispetto alla seconda variabile.

Tutti i parametri della funzione

$$\text{Newton}\left(\begin{matrix} g(X) = 0 \\ X = u_{n+1} \end{matrix}, \text{toll}, \frac{\partial f}{\partial y}, X_0 \right)$$

Cos'è X_0?, scegliamo u_n

$$X = \underbrace{u_n + h f(t_{n+1}, X)}_{\phi(X)}$$

$$\underline{\text{Punto Fisso}} \begin{cases} \phi(x) = X, \text{toll}, X_0 = u_n \\ X = u_{n+1} \end{cases}$$

Ordine di convergenza 1,
ha delle proprietà migliori ma la convergenza è uguale.

Crank-Nicolson - di ordine 2, ma lo stesso implicito.

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, \underbrace{u_{n+1}}_{\text{Implicito}}) \right]$$

Anche qui possiamo usare Newton o Punto Fisso.

Newton $\quad g(X) = X - u_n - \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, X) \right]$

Punto Fisso $\quad \phi(X) = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, X) \right]$

Heun $\rightarrow$ Predictor-Corrector

$u^*_{n+1} = u_n + h f(t_n, u_n) \quad$ "predictor" $\rightarrow$ Eulero Avanti

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u^*_{n+1}) \right]$$

"corrector"

$f = @(t, y)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = @(t, y)$

Implementazione eulero indietro