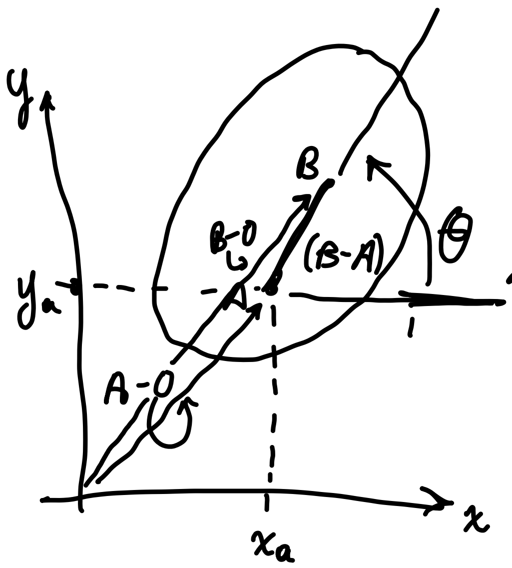
Lezione 3 - Cinematica dei corpi rigidi

Corpo rigido è una rappresentazione dei corpi nei nostri sistemi



A e B ∈ corpo

se |B- A| = invariabile nel tempo = corpo rigido

rigido nel tempo: per noi se non varia molto può esser approssimata.

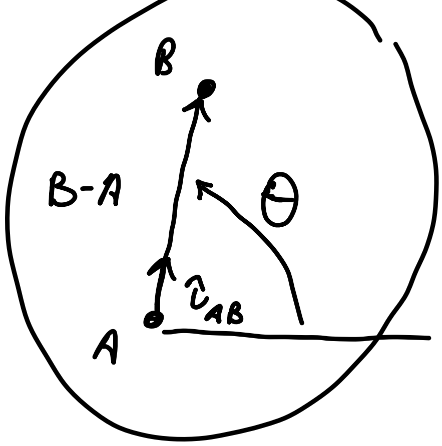
Con y, x e θ possiamo trovare dov'è il corpo e ogni suo punto

$$(B-O) = \underbrace{(A-O) + (B-A)}$$

Descrizione diretta di B

Descrizione indiretta di B

$$\ell = (A-O) + \overline{AB}\,\hat{\imath}_{AB}$$



Velocità

nel caso CORPO RIGIDO ⇒ = 0

$$\vec{V}_B = \frac{d}{dt}\left((A-O) + \overline{AB}\,\hat{\imath}_{AB}\right) = \vec{V}_A + \cancel{\frac{d}{dt}\overline{AB}}\cdot\hat{\imath}_{AB} + \overline{AB}\,\frac{d\hat{\imath}_{AB}}{dt}$$

$$= \vec{V}_A + \overline{AB}\,\vec{\omega}\times\hat{\imath}_{AB}$$

con $\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{k}$ = velocità angolare del corpo rigido

↪ non cambia dipendendo da quale angolo prendo

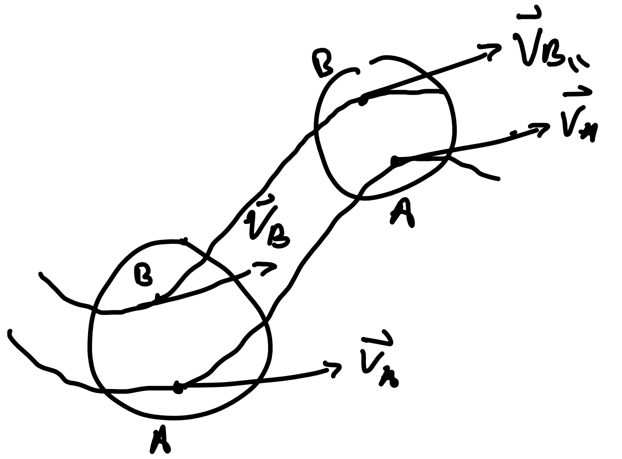
$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega}\times(\overline{AB}\,\hat{\imath}_{AB})$$

$$\boxed{\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{W}\times(B-A)}$$

Casi osservatori:

$\vec{V}_B = \vec{V}_A$ (con $\vec{\omega} = 0 \cdot \forall t$)

$\Rightarrow \vec{V}_B = \vec{V}_A$



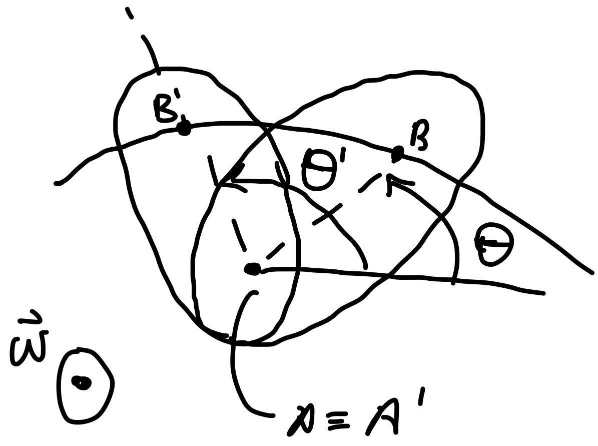
Moto traslatorio

$\vec{V}_B = \vec{V}_A$

stesso modulo, direzione, verso

Caso con $\vec{V}_A = 0 \ \forall t$

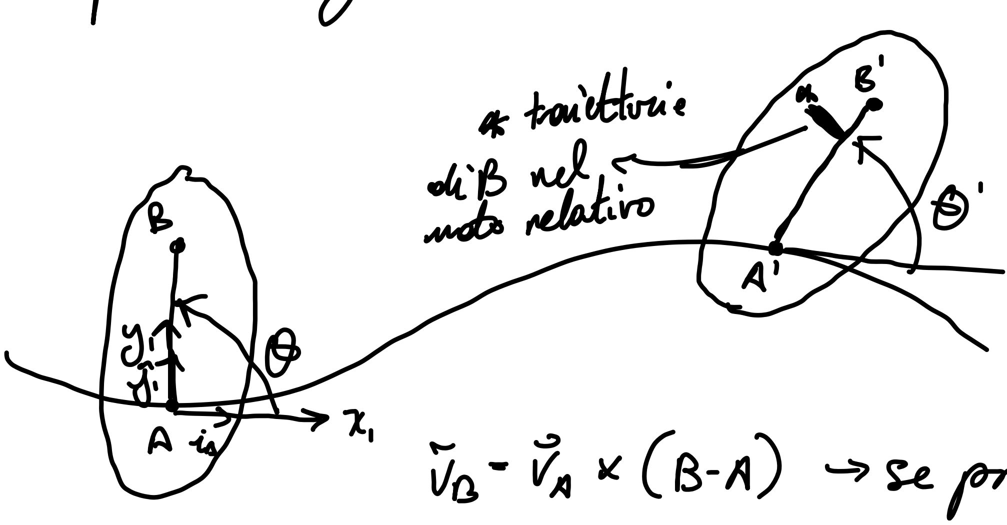
$$\vec{V}_B = \cancel{\vec{V}_A} + \vec{\omega} \times (B-A)$$



Moto rotatorio

Caso $\vec{V}_A \neq 0$ e $\vec{\omega} \neq 0$

⇒ Espressione generale $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times (B-A)$



$\vec{V}_B = \vec{V}_A \times (B-A)$ → se prendiamo angolo rispetto a x-y

Moto roto traslatorio

Con riferimento mobile x_1, y_1

$O_1 \equiv A$

e Si mantiene // a se stesso ⇒ il riferimento può muovere non girare

⇒ $x_1 - y_1$ riferimento mobile

⇒ Moto traslante

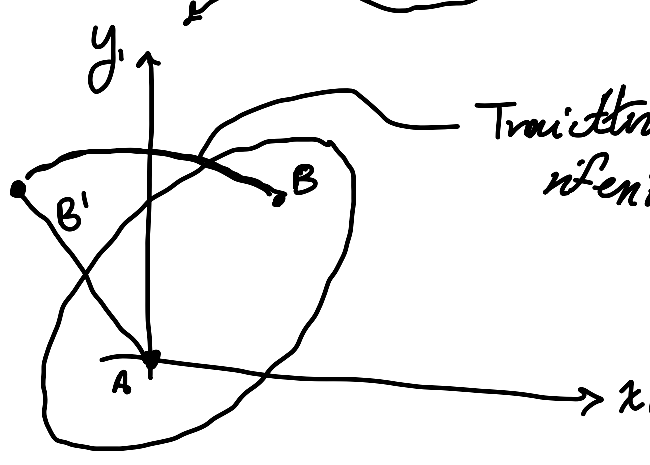
$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{w} \times (B-A)$ CORPO RIGIDO

Mediante riferimento mobile:

$\vec{V}_B^{AS} = \vec{V}_B^{TR} + \vec{V}_B^{REL}$ MOTI RELATIVI

$\vec{V}_A \qquad \vec{w} \times (B-A)$

↳ Traiettoria Circolare



Traiettoria del moto di B nel riferimento mobile

x_1, y_1 traslate

La traiettoria di B rispetto al riferimento fisso è la combinazione di 2 moti

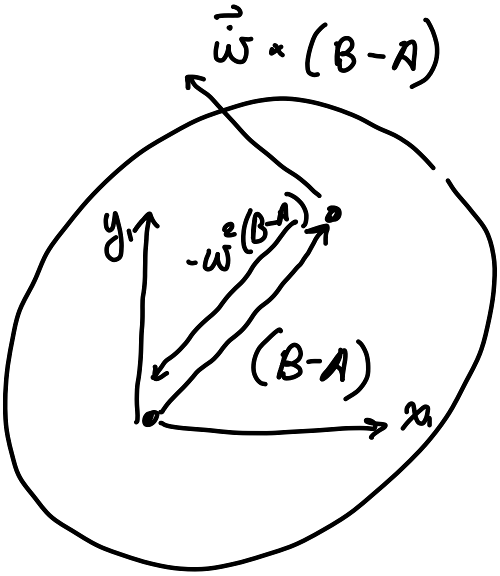
<u>Accelerazione</u> con $\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{k}$

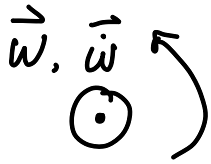
con $\dot{\vec{\omega}} = \ddot{\theta}\hat{k}$

$$\vec{a}_B = \frac{d}{dt}\left(\vec{V}_A + \vec{\omega} \times (B-A)\right) = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times (B-A) + \vec{\omega} \times \left(\frac{d}{dt}(B-A)\right)$$

$$= \underbrace{\vec{a}_A}_{\vec{a}_B^{TR}} + \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \times (B-A) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (B-A))}_{\vec{a}_B^{REL}}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times (B-A) - \omega^2 (B-A)$$





$$\vec{a}_B = \vec{a}_{TR}^B + \vec{a}_B^{REL}$$

Non c'è $\vec{a}_{co}$ perché il riferimento non ruota è solamente traslante

Tutto per punti del <u>medesimo</u> corpo

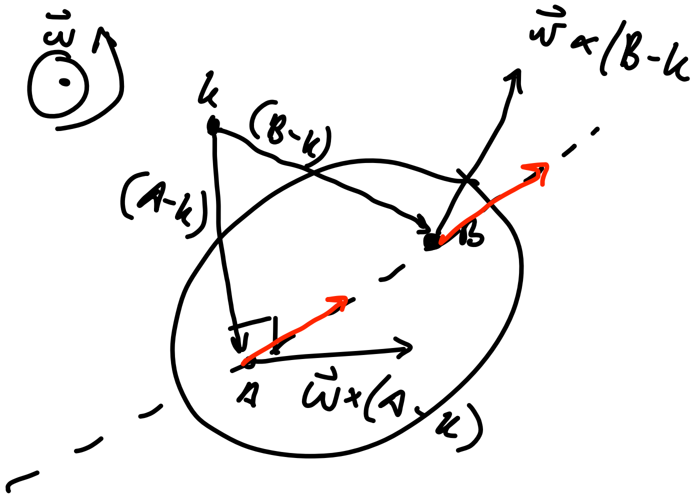
CIR → prima (costruzione) non lo volevamo
ora è utile

Centro di Istantanea Rotazione

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times (B-A)$$

$$\begin{cases} \vec{V}_A = \vec{V}_K + \vec{\omega} \times (A-K) \\ \vec{V}_B = \vec{V}_K + \vec{\omega} \times (B-K) \end{cases}$$

Scelgo $K : \vec{V}_K = 0$ all'istante considerato



$$\Rightarrow \vec{V}_A = \vec{\omega} \wedge (A-K)$$

$$\Rightarrow \vec{V}_B = \vec{\omega} \times (B-K)$$

$$\vec{V}_B - \vec{V}_A = \vec{\omega} \times ((B-K)-(A-K))$$

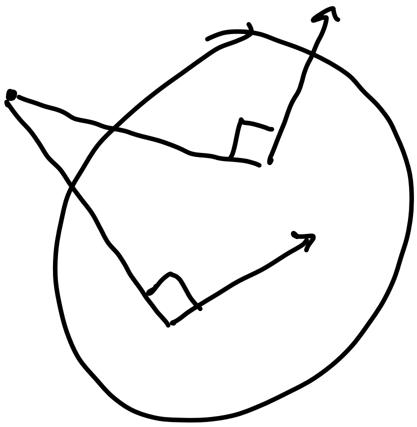
$$\vec{V}_B - \vec{V}_A = \vec{\omega} \times (B-A)$$

Le proiezioni nella congiungente devono esser uguali

Il CIR si trova sulla intersezione delle perpendicolari condotte da A e B rispetto alle loro velocità

Atto di moto

Rotatorio



K ∃ "al finito"

basta che esista

Traslatorio

K ∃ all'infinito

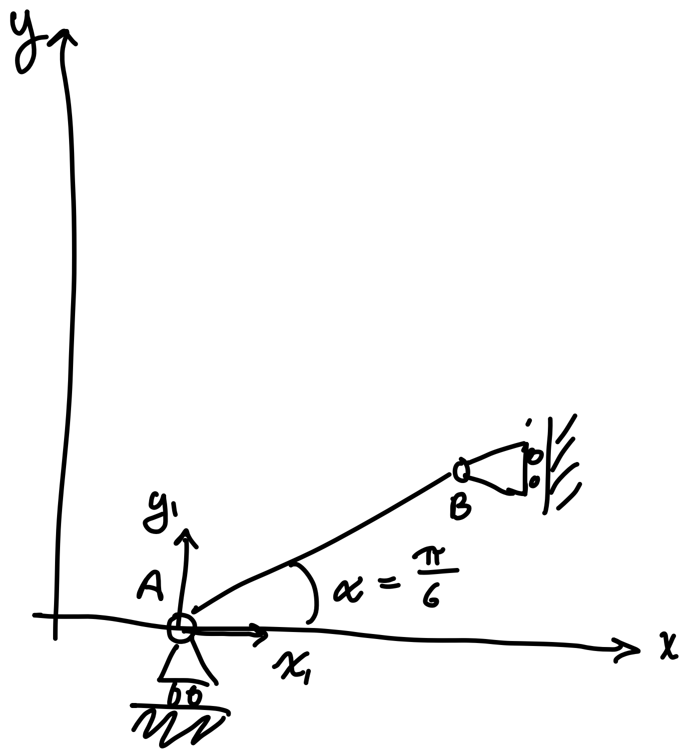
Tutti le velocità sono parallele

La combinazione di queste due permette moti

CIR <u>solo</u> per velocità

Esempio

Asta su guide rettilinee ortogonali



gdl = 3 - 2 = 1 gdl

v_A = costante = 3 m/s $\qquad \theta = \frac{\pi}{6}$

v_B, a_B?

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times (B - A)$$

$$\dot{V}_B \hat{j} = V_A \hat{i} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ L\cos\theta & L\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$(B-A) = L\cos\theta\, \hat{i} + L\sin\theta\, \hat{j}$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A \hat{i} + \hat{i}\left(-\dot{\theta} L \sin\theta\right) - \hat{j}\left(-\dot{\theta} L \cos\theta\right)$$

$$V_B \hat{j} = \underline{\vec{V}_A \hat{i}} - \underline{\dot{\theta} L \sin\theta\, \hat{i}} + \dot{\theta} L \cos\theta\, \hat{j}$$

$\hat{i}$ $\quad 0 = V_A - L\dot{\theta}\sin\theta \qquad \dot{\theta} = \dfrac{V_A}{L\sin\theta} = \dfrac{3\,m/s}{0{,}6 \cdot \frac{1}{2}} = 10 \; \frac{rad}{s}$

$\hat{j}$ $\quad V_B = L\dot{\theta}\cos\theta \qquad \vec{V}_B = L\dfrac{V_A}{L\sin\theta}\cos\theta = \dfrac{V_A}{\tan\theta}$

$$= \frac{3\,m/s}{.577} = 5{,}19\ m/s$$

$$V_B = \frac{V_A}{\tan\theta}$$

È facile creare sistemi lineari ma è anche facile con molti pezzi articolati creare moti non lineari.

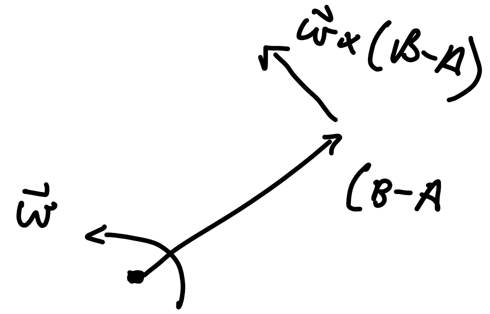
La relazioni dipende dalla configurazione

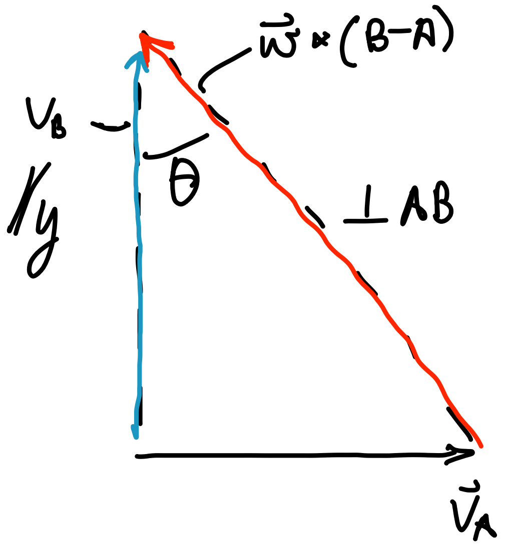
Approccio Grafico

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times (B - A)$$

Modulo $\to$ M $\quad ? \quad V_A \quad \dot{\theta} L$

Direzione $\rightarrow D$ $\quad // y \quad // x \quad \perp AB$





$$V_A = V_B \tan\theta \Rightarrow V_B = \frac{V_A}{\tan\theta}$$