Lezione 25 - Equazione del Calore / PDE paraboliche

Abbiamo finito la parte discreta per i problemi ellittici.

Equazione di Calore (upgrade di Poisson) → PDE parabolica.

↳ aggiunta della variabile tempo dipendente.

Poisson è vista come la versione stazionaria della equazione del calore.

Temperatura

$$u = u(x,t)$$

↳ più complesso per due variabili anche al primo ordine di solo le derivate parziali

$\Omega = [0, L] \subset \mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \underbrace{\mu}_{\text{Conducibilità, preso } \mu>0 \text{ = cost}} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \qquad (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) \rightarrow \text{nota } x \in \Omega \\ + CB \end{array}\right.$$

$f(x,t)$ ↳ Può esser anche non tempo dipendente.

$u(x,0)=u_0(x)$ → Condizione iniziale

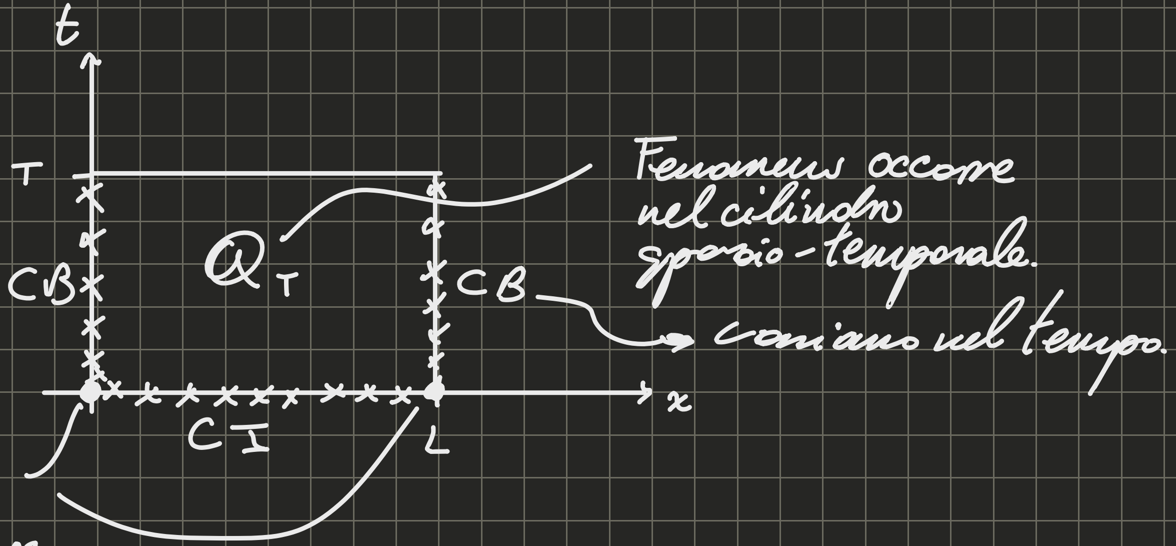
$L >> D$

↳ per poter fare monodimensionale e usare solo x.

$\mu > 0$

Prendiamo un materiale isotropo omogeneo per semplicità.

Supposto iniziare dalla condizione iniziale.



crucial perché serve che le CB siano compatibili con le CI

Condizioni al Bordo (più comuni):

- Dirichlet $\rightarrow u(0) = T_0$, $u(L) = T_L$ → temperatura
- Neumann (es. omogeneo ⇒ isolamento termico)
- Robin → modellano la presenza di uno scambio termico, es. se la sbarra è messa in un ambiente ad una certa temperatura.

Se riscriviamo la equazione come; ignorando f:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{Andamento}} = \mu \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{curvatura del profilo di temperatura}}$$

della temperatura nel tempo — rispetto allo spazio

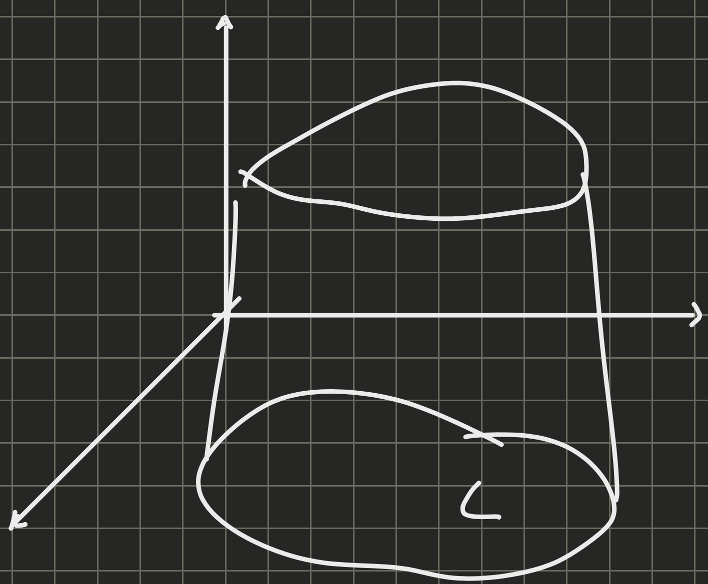
se $> 0 \implies > 0$

se $< 0 \implies < 0$

Si parlano la variazione della temperatura nel tempo e nello spazio.

Controparte multidimensionale:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,t) = \mu \Delta u(x,y,z,t) = f(x,y,z,t)$$



Metodi Analitici → separazione di variabili

→ Fourier

→ In Poisson

$$U(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

→ Qui:

$$U(x,t) = X(x)\,T(t)$$

+ principio di massimo

$$U_n = X_n(x)\, T_n(t)$$

$$U(x,t) = \sum_1^N A_n\, U_n(x)\, T_n(t)$$

$\Downarrow$

$U(x,t)$ è l'unica soluzione del nostro problema di Cauchy-Dirichlet.

perché tempo dipendente (Cauchy) e chiuso da Dirichlet

Inoltre $u_0 \in C^0(\bar{\Omega})$ allora

$$U \in C^{2,1}(Q_T) \cap \underbrace{C^0(\bar{Q}_T)}$$

$\Downarrow$

regolarità C^2 in spazio e C^1 in tempo (a dominio aperto)

$\Rightarrow U \in C^2(\Omega)$ e $\in C^1(0,T)$

coerente le condizioni iniziali e di bordo.

Metodi Numerici

↳ Usiamo molto della stessa roba, ma dobbiamo discretizzare sia lo spazio che il tempo.

Forma Debole (con il tempo in mezzo)

↳ c'è un trucco per fare il tempo

si congela il tempo $\forall t > 0$, rende tempo-indipendente

La funzione v è solo spazio dipendente.

Fissato t $\forall t>0$, $? \, u = u(t) \in V$ ← stesso spazio dato tempo congelato

tale che:

$$\int_\Omega \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} v(x) - \int_\Omega \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) v(x) = \int_\Omega f(x,t) v(x)$$

↳ Non ancora la forma debole, serve integrare per parti:

$$\int_\Omega \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} v(x)\, d\Omega + \mu \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) v'(x)\, d\Omega - \cancel{\mu \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) v(x) \Big|_0^L}_{0} = \int_\Omega f(x,t) v(x)\, d\Omega$$

+CB Dirichlet omogenee.

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad \forall t \end{cases}$$

↳ Il trattamento è lo stesso anche con Neumann

$\Rightarrow V = H^1_0(\Omega)$

$$a(u(t), v) = \int_\Omega \frac{\partial u(t)}{\partial t} v \, d\Omega + \mu \int_\Omega \frac{\partial u(t)}{\partial x} v' \, d\Omega$$

$$F(v) = \int_\Omega f(x,t) v(x)\, d\Omega$$

$\forall t>0 \quad ? \, u = u(t) \in V = H^1_0(\Omega)$ tale che

$$a(u(t), v) = F(v) \quad \forall v \in V$$

con $u(x,0) = u_0(x)$ in Ω

L'analisi si fa una generalizzazione di Lax-Milgram.

<u>Discretizzazione</u> / Formulazione di Galerkin

T_h di $(0,L)$ $\quad V_h \subset V$ $\dim(V_h) < \infty$

V_h come V solo spaziale.

V_h è come sempre con le basi a capanna e il resto che abbiamo visto.

$\forall t > 0$ $\quad ?\, u_h(t) \in V_h$ tale che $a(u_h(t), v_h) = F(v_h)$ $\quad \forall v_h \in V_h$

$u_h(x,0) = u_{0,h}(x)$ $\quad x \in \Omega$

$u_{0,h} \in V_h$

Approssimazione agli elementi finiti di u_0

Quando non c'era il tempo abbiamo creato una base e una forma matriciale.

$V_h \{\varphi_j\}$

Si possono fare due cose, dare la tempo dipendenza ai φ_j o darli agli u_j

Poisson $\begin{cases} v_h = \varphi_i \\ u_h(x) = \sum_{j=1}^{N_h} u_j \varphi_j(x) \end{cases}$

Calore $\begin{cases} v_h = \varphi_i \\ u_h(x,t) = \sum_{j=1}^{N_h} u_j(t) \varphi_j(x) \end{cases}$

Se si usa la stessa base, serve che gli u_j contribuiscano per mantenere la dipendenza

Con $v_h = \varphi_i$

$$a(u_h(t), \varphi_i) = F(\varphi_i) \qquad i = 1, \dots, N_h$$

$$a\left(\sum_{j=1}^{N_h} u_j(t)\varphi_j,\ \varphi_j\right) = F(\varphi_i) \qquad i = 1, \dots, N_h$$

↳ dipendenza da x non scritta.

↳ come Poisson ma con (t)

$$\underbrace{\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{N_h} \dot{u}_j(t)\,\varphi_j\right)}_{\frac{\partial u_h(t)}{\partial t}} \cdot \varphi_i \, d\Omega + \mu \int_\Omega \underbrace{\left(\sum_j u_j(t)\,\varphi_j'\right)}_{\frac{\partial u_h}{\partial x}} \varphi_i' \, d\Omega = \int_\Omega f \varphi_i \, d\Omega \qquad i = 1, \dots, N_h$$

↳ non possiamo ancora risolvere perché ci lascia con un vettore di incognite per ogni istante.

Definiamo dei vettori e matrici per scrivere in forma compatta:

$$\underbrace{\vec{u}(t)}_{\text{Vettore di Funzione}} = [u_1(t), \dots, u_{N_h}(t)]^T$$

Si vede che se non varia nel tempo, ci lascia solo con la seconda parte, che è Poisson

$$\sum_j \dot{u}_j(t) \underbrace{\int_\Omega \varphi_j \varphi_i \, d\Omega}_{\substack{\text{Matrice} \\ \text{di Massa } [M]_{ij}}} + \mu \sum_j u_j(t) \underbrace{\int_\Omega \varphi_j' \varphi_i' \, d\Omega}_{\substack{\text{Matrice di} \\ \text{Stiffness}}} = \underbrace{\int_\Omega f \varphi_i \, d\Omega}_{\vec{f}} \quad i=1,\dots,N_h$$

$$[A]_{ij} = \int_\Omega \mu \, \varphi_j' \varphi_i' \, d\Omega$$

$$[\vec{f}(t)]_i = \int_\Omega f(t) \varphi_i$$

$$M\dot{\vec{u}}(t) + A\vec{u}(t) = \vec{f}(t)$$

come abbiamo definito $\vec{u}(t)$ prima, possiamo definirlo.

$$\dot{\vec{u}}(t) = [\dot{u}_1(t), \dots, \dot{u}_{N_h}(t)]^T$$

$$[M]_{ij} = \int_\Omega \varphi_j \varphi_i \, d\Omega$$

Non un sistema lineare, ma invece è un sistema di ODE, che possiamo risolvere usando il θ-metodo

Iniziamo ora a fare la partizione di t

$$(0,T) \qquad \{t^k\} \qquad \Delta t_i = \text{cost}$$

$$\vec{u}^{k+1} = [u_1(t^{k+1}), \dots, u_{N_h}(t^{k+1})] \in \mathbb{R}^{N_h}$$

$\forall t^n \quad \vec{u}^n = [u_1(t^n), \dots, u_{N_h}(t^n)] \in \mathbb{R}^{N_h}$

↳ come fatto negli ODE, discretizziamo come facevamo con y.

$$u(x, t^n) \simeq \sum_{j=1}^{N_h} u_j(t^n)\varphi_j(x) = u_h(t^n)$$

θ-metodo

$$\forall k \rightarrow \quad M\frac{\vec{u}^{k+1} - \vec{u}^k}{\Delta t} + A(\theta \vec{u}^{k+1} + (1-\theta)\vec{u}^k) = \theta \vec{f}^{k+1} + (1-\theta)f^k$$

$$f^k = \vec{f}(t^k) \qquad \vec{f}^{k+1} = \vec{f}(t^{k+1})$$

→ sappiamo u^k, e stiamo cercando u^{k+1}, è diventato un sistema di equazioni lineari.

$\underbrace{M \text{ è sempre uguale, non dipende dal problema}}_{\text{se ho capito bene}}$, è sdp

Per $\theta = 0 \rightarrow$ Eulero Esplicito

$$M\frac{\vec{u}^{k+1} - u^k}{\Delta t} + A\vec{u}^k = \vec{f}^k$$

$$\forall k \quad \underbrace{\frac{M}{\Delta t}}_{\text{sdp}}\vec{u}^{k+1} = \vec{f}^k + \left(\frac{M}{\Delta t} - A\right)\vec{u}_k$$

→ non è un problema problematico

Se invece $\theta = 1$ (Eulero Implicito)

$$M\frac{\vec{u}^{k+1} - \vec{u}^{k}}{\Delta t} + A\vec{u}^{k+1} = \vec{f}^{k+1}$$

$$\underbrace{\left(\frac{M}{\Delta t} + A\right)}_{\text{Non è un}} \vec{u}^{k+1} = \vec{f}^{k+1} + \frac{M}{\Delta t}\vec{u}^{k}$$

problem perché A è coercivo, se è simmetrica, la somma è lo stesso sdp e non è un problema

se $\theta = \frac{1}{2}$ (Crank-Nicolson)

$$M\frac{\vec{u}^{k+1} - \vec{u}^{k}}{\Delta t} + \frac{1}{2}A\vec{u}^{k+1} + \frac{1}{2}A\vec{u}^{k} = \frac{1}{2}\vec{f}^{k+1} + \frac{1}{2}\vec{f}^{k}$$

$$\left(\frac{M}{\Delta t} + \frac{A}{2}\right)\vec{u}^{k+1} = \frac{1}{2}\left(\vec{f}^{k+1} + \vec{f}^{k}\right) + \frac{M\vec{u}^{k}}{\Delta t} - \frac{1}{2}A\vec{u}^{k}$$

→ stesso

La convergenza è un insieme dei due.

convergenza $\approx C\left(h^q + \Delta t^s\right)$

↳ costante

EI mette dei vincoli invece gli altri due no.