

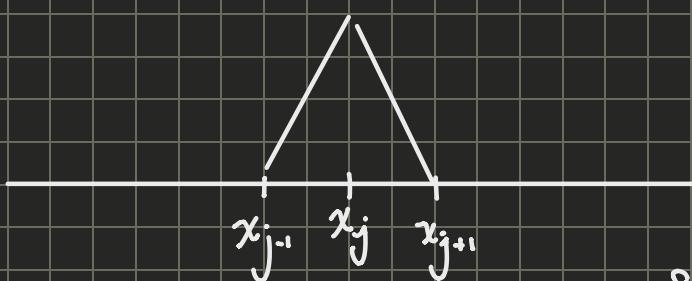
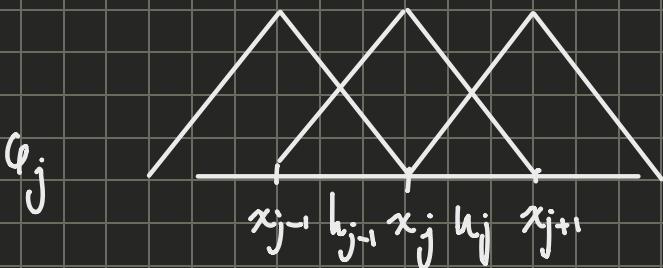
## Leczione 24 -

$X_h \rightarrow$  spazi elementi finiti finire  
 $\{ \varphi_j \} \rightarrow$  base, composta di funzioni a catena

Abbiamo scritto la matrice A per il problema:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \\ \text{full Dirichlet} \end{cases}$$

Finiamo le proprietà della base di  $X_h$

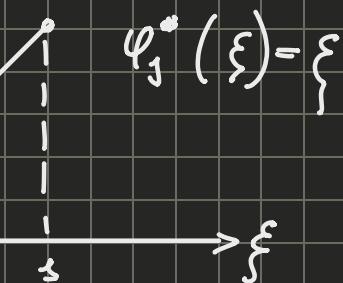
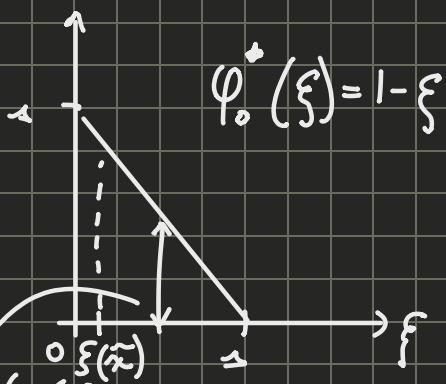


più piccola  
è la più sottile  
sottili le basi.

8:37  $\rightarrow$  dead-in

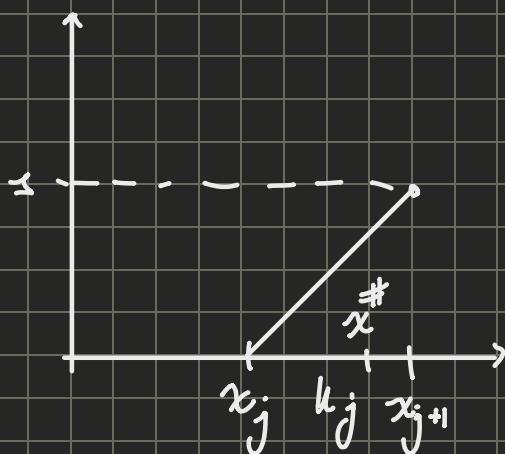
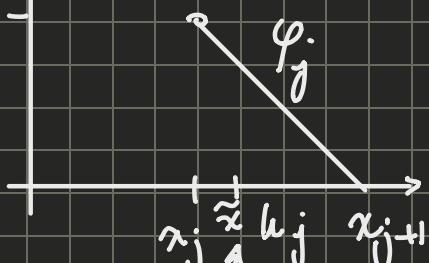
Per studiare questi andiamo a studiare geometrie concave e poi mappiamo alla geometria vera.

Studiamo i riferimenti:



Ogni  $\xi_j$  è comune a entrambi di queste due

Motivo Fisico:



→ ha area associata lo stesso valore.

→ Definiamo dei punti sul riferimento e con il resto giusto, si individuano:

$$y: \underbrace{[0, s]}_{\text{riferimento}} \rightarrow [x_j, x_{j+1}]$$

$$x = y(\xi) = x_j + \xi \underbrace{(x_{j+1} - x_j)}_{h_j}$$

$$\varphi_j(\tilde{x}) = \varphi_j^*(\xi(\tilde{x}))$$

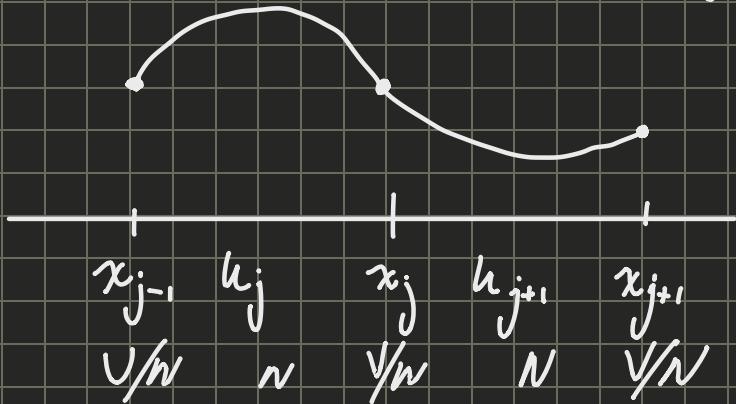
$$= \varphi_0^*\left(\frac{\tilde{x} - x_j}{x_{j+1} - x_j}\right)$$

$$\begin{aligned}\varphi_{j+1}(x^\#) &= \varphi_i^*(\xi(x^\#)) \\ &= \varphi_i^*\left(\frac{x^\# - x_j}{x_{j+1} - x_j}\right)\end{aligned}$$

## Elementi Finiti Quadratici

Spazio  $X_h^2$

$$X_h^2 = EF_2 = \left\{ v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_h|_{k_j} \in P^2 \quad \forall k_j \in T_h \right\}$$

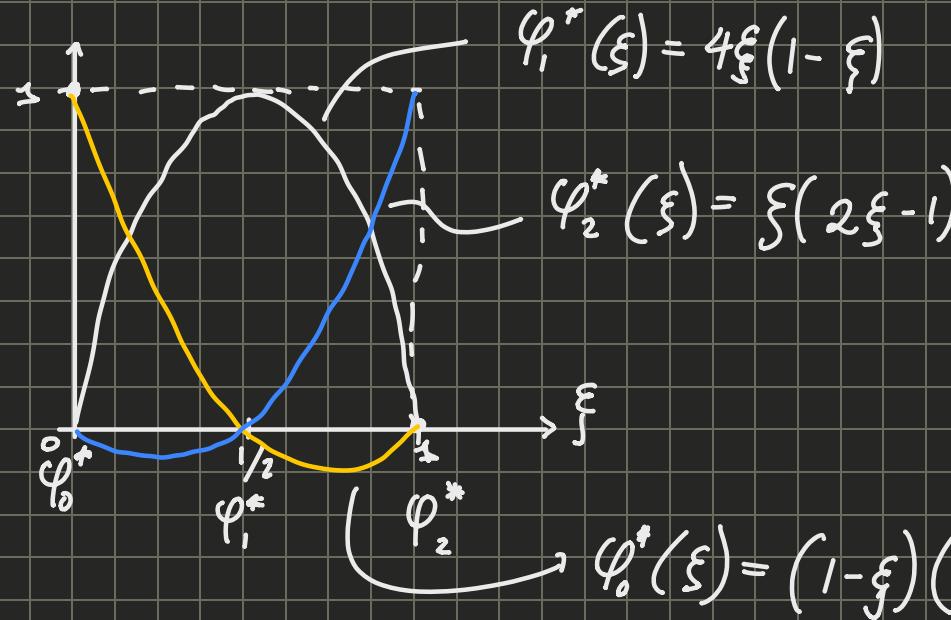


nodi > vertici

Serve assegnare 3 nodi, la curvatura ci impone 2 agli estremi, scegliamo il punto medio come il terzo punto per semplicità.

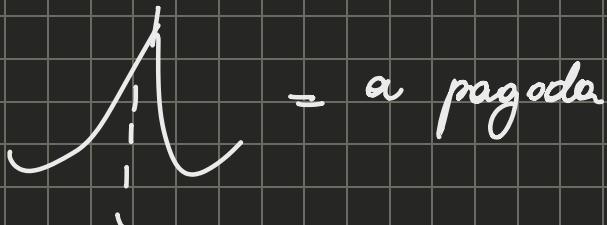
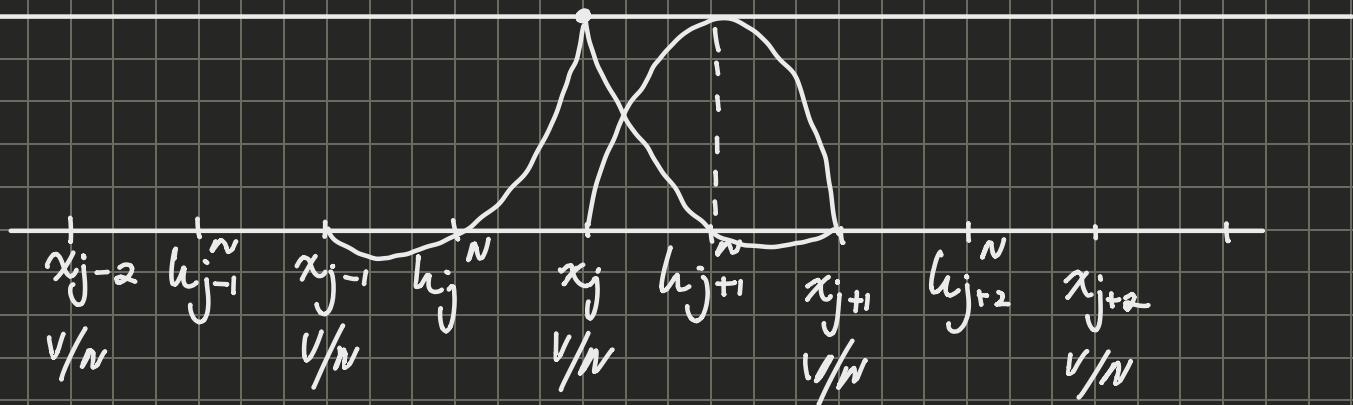
Le funzioni di base sono basate sui vertici e non sui nodi

Forma delle barre, come riferimento



Ci sono 2 forme di fusione di barre, quelle al centro a bolle e quella ai lati più acute.

Mondo Fisico



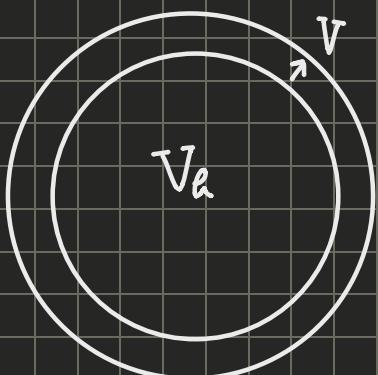
Per lo stesso problema dell'ultima lezione la matrice di stiffness è pentadiagonale.

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \|v'\|_{L^2(\Omega)} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \hookrightarrow \text{seminorma} \end{array} \right\} \text{Note per gli esercizi.}$$

↪ semi norma salta una proprietà della norma nulla per la sola matrice nulla.

### Stime di Convergenza

Abbiamo detto che, sotto ipotesi di densità  
dunque



Abbiamo fatto il lemma di Cea:

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$$

Per convergenza

$\rightarrow 0 \Rightarrow \forall h \text{ dove riempire } V$

Andiamo un passo indietro:

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|_V \quad \forall v_h \in V_h \rightarrow \text{Poi abbiamo fatto interiore}$$

Sintetizziamo l'arbitrarietà di  $v_h$  per studiare le velocità di convergenza

$$v_h \quad T_h : C^0(\bar{\Omega}) \rightarrow X_h$$

↪ Interpolazione agli elementi finiti

$$v \longrightarrow \Pi_h^r(v) \in X_h^r = \left\{ v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_h|_{u_j} \in P^r \quad \forall j \in T_h \right\}$$

$$\underbrace{\Pi_h^r(v)(x_j)}_{\text{Simbolo unico}} = v(x_j) \quad \text{Hanno } x_j$$

Interpolazione a tratti riportata agli elementi finiti.

$\rightarrow H^k \rightarrow$  insieme delle  $v \in L^2$ , con le k derivate in  $L^2$

Teorema: Sia  $v \in H^{r+1}(\Omega)$  con  $r \geq 1$ . Allora:

$$\|v - \Pi_h^r(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 h^{r+1} \|v^{(r+1)}\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\text{e } \|(v - \Pi_h^r(v))'\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 h^r \|v^{(r+1)}\|_{L^2(\Omega)}$$

$\hookrightarrow$  Norma  $L_2$  delle derivate dell'errore.

Per  $\mathcal{ET} \leq$

$$\Pi_h^r, r=2, v \in H^2(\Omega)$$

$$\|v - \Pi_h^r(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 h^2 \|v''\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\|(v - \Pi_h^r(v))'\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 h \|v''\|_{L^2(\Omega)}$$

9:33

Più aumentano l'ordine, più ↗

Studiamo la velocità

Si fa un tradeoff tra  
efficienza e accuratezza.

$$Scegliamo \mathbf{v}_h = \Pi_h^r(\mathbf{u})$$

Perché era che  $\mathbf{v}_h$   
quindi sfiduciamoci  
questa libera di scelta

allora, con  $\mathbf{u} \in H^{r+1}(\Omega)$ :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \|\mathbf{u} - \Pi_h^r(\mathbf{u})\|_V \leq \underbrace{\frac{M}{\alpha} C^* h^r}_{C} \|\mathbf{u}^{(r+1)}\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v'\|_{L^2(\Omega)}^2$$

↳ scomponete le due che abbiamo appena trovato  
⇒ le velocità sono dipendente da  $h^{r+1}$  e  $h^r$ ,  
quindi sono la "posta" è più lento

→ Per migliorare, leggiamo  $r$  alla regolarità di  $\mathbf{u}$ .

$$\mathbf{u} \in H^{p+1}(\Omega)$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V \leq C h^s \|\mathbf{u}^{(s)}\|_{L^2(\Omega)} \quad s = \min(r, p)$$

9:44 → Stima delle errori.

→ La forma debba non è stabile, se c'è più  
regolarità del aspetti.

Tavola di:

Ordine di Convergenza:

$\ u - u_h\ _V$	$p=0$ $u \in H^1(\Omega)$	$(p=1)$ $u \in H^2(\Omega)$	$(p=2)$ $u \in H^3(\Omega)$	$p=3$ $u \in H^4(\Omega)$
$X_h^1$ $r=1$ converges	$h$	$h$	$h$	$h'$
$X_h^2$ $r=2$ converges		$h$	$h^2$	$h^2$
$X_h^3$ $r=3$ converges		$h$	$h^2$	$h^3$
$X_h^4$ $r=4$ converges		$h$	$h^2$	$h^3$

↓

Aumento di  
grado di  
discretizzazione

Frighe

unire  $r=1$ ,  
perché non  
causa niente  
in termini di  
errore e riduce  
calcoli.

con  $H^1$  non si può fare le stime, sospettiamo che converga  
lo stesso.

$\ u - u_h\ _V$	$p=0$ $u \in H^1(\Omega)$	$(p=1)$ $u \in H^2(\Omega)$	$(p=2)$ $u \in H^3(\Omega)$	$p=3$ $u \in H^4(\Omega)$
$X_h^1$ $r=1$ converges	$h^2$	$h^2$	$h^2$	$h^2$
$X_h^2$ $r=2$ converges		$h^2$	$h^3$	$h^3$
$X_h^3$ $r=3$ converges		$h^2$	$h^3$	$h^4$
$X_h^4$ $r=4$ converges		$h^2$	$h^3$	$h^4$