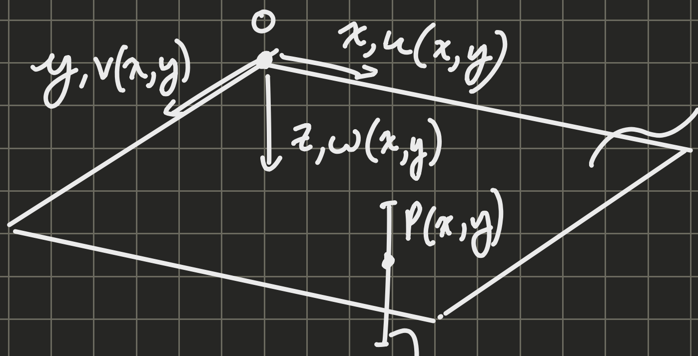
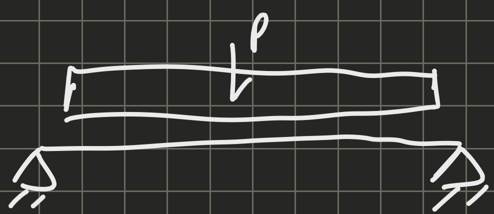
Lezione 15 - Piastra / Sistemi Bidimensionali

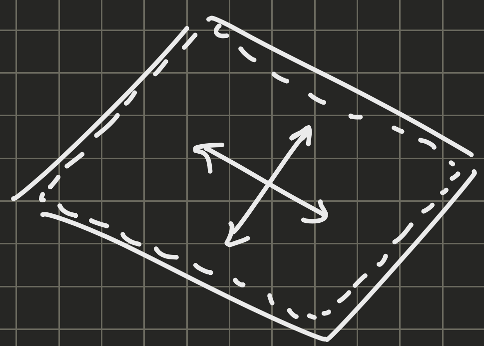


$h = h(x,y)$ → spessore, è piccolo rispetto alle dimensioni.

u, v, w spostamenti nel piano medio rispetto a x, y, z

Le piastre ci servono quando dobbiamo scaricare carichi esterni lungo due dimensioni.

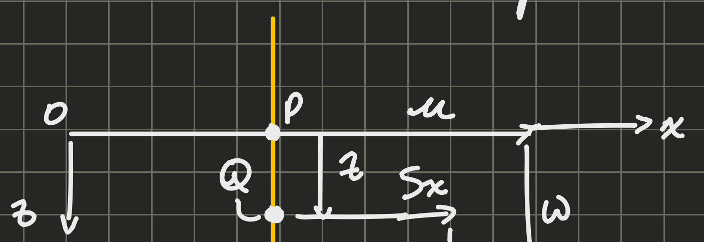




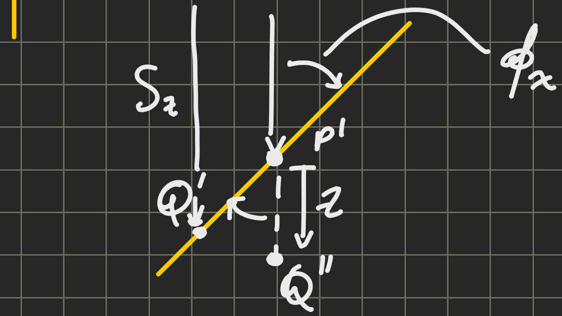
Modello Cinematico della piastra

Ipotesi : Un segmento rettilineo inizialmente ortogonale al piano medio, si conservi rettilineo (stessa lunghezza), durante il processo deformativo.

↪ Simile alla trave dove ipotizzavamo una sezione della trave come rigida.



Guardiamo allo spostamento



di un generico punto Q nel piano x,z e poi nel piano y,z

$$S_x = u(x,y) - z\,\phi_x(x,y)$$

$$S_z = \omega(x,y)$$

Lo spostamento di Q allora sarà:

$$\begin{cases} S_x = u(x,y) - z\,\phi_x(x,y) \\ S_y = v(x,y) - z\,\phi_y(x,y) \\ S_z = \omega(x,y) \end{cases}$$

In y,z si ha invece:

$$S_y = v(x,y) - z\,\phi_y(x,y)$$

S_z è lo stesso $= \omega(x,y)$

<u>Troviamo le deformazione del sistema:</u> → Mettendo gli spostamenti nel tensore delle piccole deformazioni del continuo.

Gli spostamenti sono funzione di u, v, ω, ϕ_x e ϕ_y.

Deformazioni Unitarie

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \overset{\partial/\partial x}{\partial_x} S_x = \partial_x u - z\,\partial_x \phi_x = \eta_x + z\,\chi_x \\ \varepsilon_y = \partial_y S_y = \partial_y v - z\,\partial_y \phi_y = \eta_y + z\,\chi_y \\ \varepsilon_z = \partial_z S_z = 0 \end{cases}$$

Le piastre ha un tensione in più resistenti alla torsione delle piastre

Deformazioni Angolari

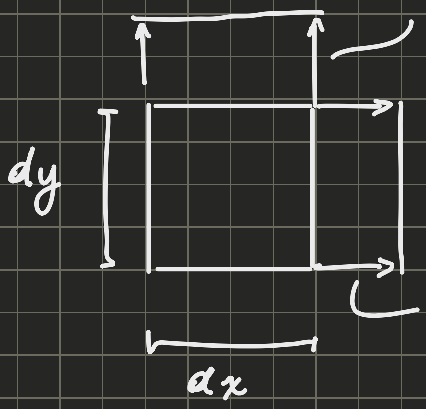
$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \partial_y S_x + \partial_x S_y = \underbrace{\partial_y u(x,y) + \partial_x v(x,y)}_{\eta_{xy}} - z\,\overbrace{\underbrace{(\partial_y \phi_x + \partial_x \phi_y)}_{\chi_{xy}}} \\ \gamma_{xz} = \partial_x S_z + \partial_z S_x = \partial_x \omega - \phi_x = t_x \\ \gamma_{yz} = \partial_y S_z + \partial_z S_y = \partial_y \omega - \phi_y = t_y \end{cases}$$

χ_{xy} → Curvatura torsionale

t_x, t_y → Lo stesso della trave, ma in due direzioni.

Interpretazione di

$\partial_x u$ e $\partial_y v$



$\partial_y v \cdot dy \to$ Allungamento unitario in direzione y. (η_y)

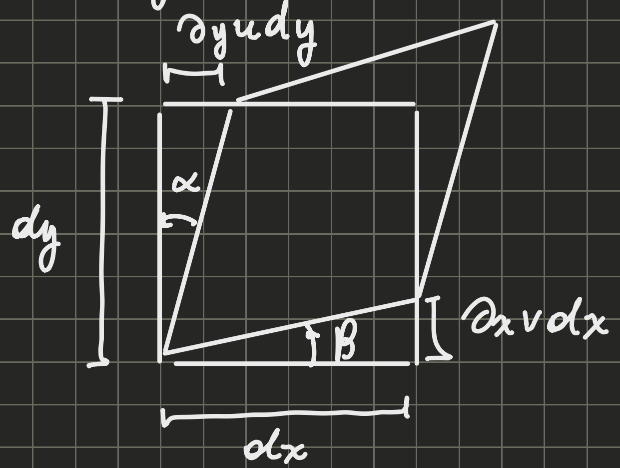
$\to$ Sono parenti stretti della deformazione assiale in 1D

$\partial_x u \cdot dx$

$\to$ Allungamento unitario in direzione x (η_x)

Interpretazione di

$\partial_y u + \partial_x v$



$$\alpha + \beta = \partial_x v + \partial_y u = \eta_{xy}$$

$\to$ Scorrimento angolare del piano medio

Come nella trave η descrivere il problema assiale, queste 3 per la piastra descrivono il problema membranale, cioè quando il nostro oggetto si tratta come una membrana.

η_x, η_y, η_x, sono come η nella trave e descrivono la risposta nel piano medio

A noi importa la risposta a carichi flessionali.

i termini che corrispondono alla flessione sono ω, ϕ_x e ϕ_y.

$$\chi_x = -\partial_x \phi_x$$
$$\chi_y = -\partial_y \phi_y$$

$\to$ Curvatura flessionale

Termine aggiuntivo della piastra

Curvatura torsionale. $\to$ $\chi_{xy} = -(\partial_x \phi_y + \partial_y \phi_x)$

Variabili generalizzate per il problema flessionale.

$$t_x = \partial_x w - \phi_x$$
$$t_y = \partial_y w - \phi_y$$

$\to$ Scorrimento angolare medio.

Questo funziona anche per piastre spesse, è il caso generale.
(Modello Mindlin-Reissner)

Come nelle travi possiamo semplificare per piastre poco spesse scrivendo: $t_x = 0$ e $t_y = 0$ (Modello Kirchhoff)

$\Rightarrow \phi_x = \partial_x w$ e $\phi_y = \partial_y w$

$\Rightarrow$ possiamo scrivere : $\chi_x = -\partial_x^2 w$ e $\chi_y = -\partial_y^2 w$

$$\chi_{xy} = -2\,\partial_{xy}^2 w$$

Risposta flessionale di piastra sottile (Modello di Kirchoff)

$\underset{1\times 1}{\underline{U}}(x,y) = \big(w(x,y)\big) \rightarrow$ Un solo spostamento generalizzato, per solo la risposta flessionale.

Deformazioni Generalizzate $\vec{q}\,(x,y) = \left(\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}\right)^T \rightarrow$ 3 deformazioni generalizzate
↳ come visto possono essere scritte in termini di w.

$w\,(x,y) =$ superficie deformata della piastra.

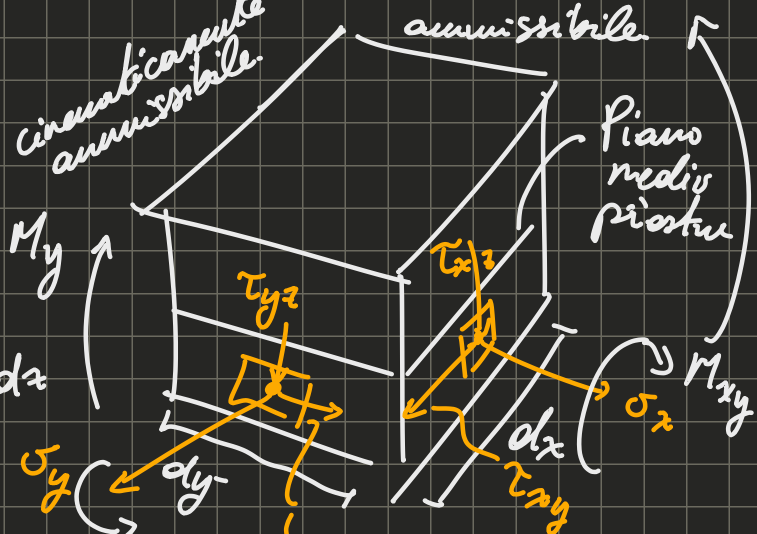
<u>Definizione degli sforzi generalizzati</u>: → Li definiamo ad una base di equivalenza energetica, prova una configurazione cinematicamente ammissibile

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$

Mettendoci ad un generico punto:

Generica configurazione cinematicamente ammissibile

$$\frac{dL_{int}}{dA} = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\sigma_x \hat{\varepsilon}_x + \sigma_y \hat{\varepsilon}_y + \tau_{xy} \hat{\gamma}_{xy}\right) dz$$



Per Kirchhoff γ_{xz} e $\gamma_{yz} = 0$ → quindi si τ_{xz} e τ_{yz} non contribuiscono

M_{xy} — $\tau_{yx} (= \tau_{xy})$

Questa espressione deve esser uguale a

$$\frac{dL_{int}}{dA} = \underline{Q}^T \hat{\underline{q}}$$

→ Come abbiamo fatto per la trave

Azioni interne

$$\frac{dL_{int}}{dA} = \int_{-\frac{h}{2}}^{h/2} (\sigma_x \cdot z \hat{\chi}_x + \sigma_y \cdot z \hat{\chi}_y + \tau_{xy} z \hat{\chi}_{xy}) dz$$

→ sostituendo con le definizione delle deformazioni

$$= \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot z \cdot \hat{\chi}_x \, dz}_{M_x} + \underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{h/2} \sigma_y z \, dz \, \hat{\chi}_y}_{M_y} + \underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{h/2} z \tau_{xy} \, dz \, \hat{\chi}_{xy}}_{M_{xy}}$$

→ Momento flettente lungo x

→ Momento Torcente

Momenti * per unità di lunghezza

$$\Rightarrow \underline{Q} = (M_x, M_y, M_{xy})^T$$

$z \cdot \sigma_x$ genera M_x

$z \cdot \sigma_y$ genera M_y

$z \cdot \tau_{xy}$ genera M_{xy}

→ Si materializza quando nella trave non c'è.

Possiamo per equilibrio calcolare anche:

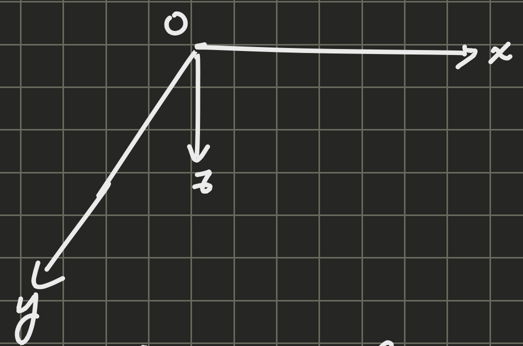
$$T_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \, dz$$

$$T_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} \, dz$$

Come in EB per le azioni il taglio esiste ma si può calcolare solo per equilibrio.

Condizioni di Equilibrio

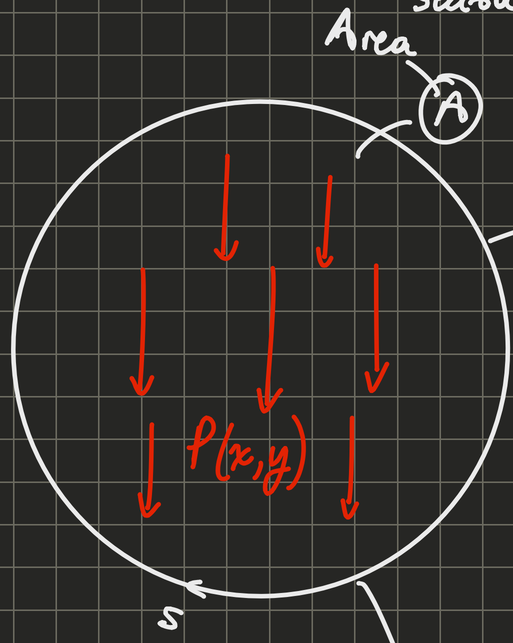
Bordo è regolare, senza spigoli.



→ Ascissa curvilinea

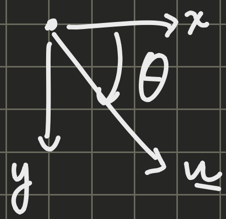
$s \in [0, L_\Gamma)$

↓ Lunghezza di Γ



↳ vettore normale

$P(x,y)$: carico esterno normale al piano medio della piastra



$$\underline{n} = (\alpha_x, \alpha_y) = (\cos\theta, \sin\theta)^T$$

$\boxed{\sim 11{:}25}$

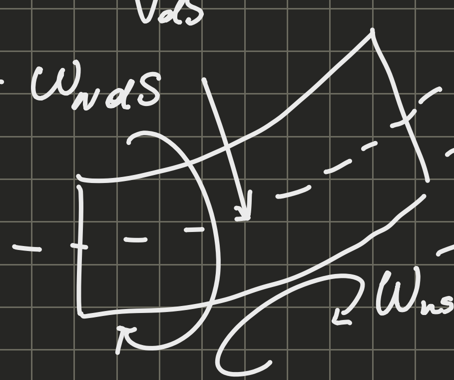
$$\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_f$$

Γ_u: → Parte del bordo dove andiamo a definire gli spostamenti

Γ_f: ↳ Bordo dove andiamo ad applicare le forze

Prendiamo un pezzetto di bordo della piastra:

Vogliamo definire le equazioni di equilibrio per un pezzo di A, cioè le equazioni di equilibrio indefinite e le condizioni al bordo, dato un set di carichi generici definiti così:



$V\,dS$ → carichi verticali

$\omega_n\,dS$ → Momento flettente ↳ ⊥ a S, agisce sul piano $\underline{n}, z$

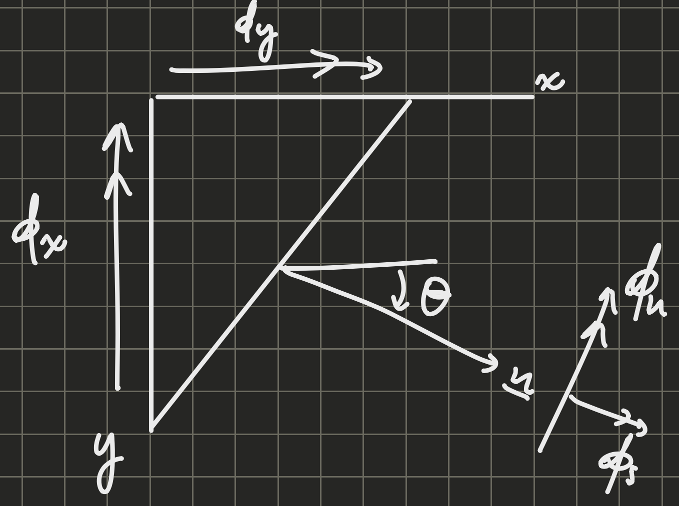
~ Pezzo del bordo

$W_{ns}\,dS$ → momento torcente ↳ ⊥ $\underline{n}$

$\boxed{\text{Riguardo da qua}}$

Le uniche quantità che possiamo imporre è lo spostamento trasversale e la rotazione normale. → sono solo 2, e vedremo alla fine matematicamente perché solo queste due.

<u>Definizione rotazioni normali e torsionali sul bordo</u>



$\phi_n = \partial_n \omega$

$\phi_s = \partial_s \omega$

$$\begin{cases} \phi_x = \partial_x \omega = \phi_n \alpha_x - \phi_s \alpha_y \\ \phi_y = \partial_y \omega = \phi_n \alpha_y + \phi_s \alpha_x \end{cases}$$

<u>Applichiamo il PLV come condizione sufficiente di equilibrio:</u>

$$L_{ext} = \int_A p \hat{\omega} \, dA + \int_{\Gamma_f} \left(V \hat{\omega} + \mathcal{W}_n \hat{\phi}_n + \mathcal{W}_{ns} \hat{\phi}_s \right) dA$$

Γ_f → sulla parte del bordo caricata

$$= \int_A p \hat{\omega} \, dA + \int_{\Gamma_f} \left(v \hat{\omega} + \mathcal{W}_n \partial_n \hat{\omega} + \mathcal{W}_{ns} \partial_s \hat{\omega} \right) dS$$

$$L_{int} = \int_A \left(M_x \hat{\chi}_x + M_y \hat{\chi}_y + M_{xy} \hat{\chi}_{xy} \right) dA =$$

$$= -\int \left(M_x \partial_x^2 \hat{\omega} + M_y \partial_y^2 \hat{\omega} + 2 M_{xy} \partial_{xy}^2 \hat{\omega} \right) dA$$

A

Abbiamo ricavato tutte e due in termini di solo $\hat{\omega}$

Vogliamo eguagliare $\forall \hat{\omega}$ per trovare la soluzione

↳ Ma la forma per L_{int} ha derivate del secondo ordine, quindi vogliamo abbassare l'ordine per trovare un'oggetto che come pē moltiplicato per solo $\hat{\omega}$, per poter aver equilibrio, facendo questo usciranno anche termini di bordo che bilanceranno i termini di bordo in L_{ext}, come nelle travi.

Identità

$$\partial_x (M_x \partial_x \hat{\omega} - \hat{\omega} \partial_x M_x) = \cancel{\partial_x M_x \partial_x \hat{\omega}} + M_x \partial_x^2 \hat{\omega} - \cancel{\partial_x \hat{\omega} \partial_x M_x} - \underline{\hat{\omega} \partial_x^2 M_x}$$

↳ Utili nell'abbasso di grado

$$\Rightarrow M_x \partial_x^2 \hat{\omega} = \partial_x (M_x \partial_x \hat{\omega} - \hat{\omega} \partial_x M_x) + \underline{\hat{\omega} \partial_x^2 M_x}$$

Analogamente:

$$M_y \partial_y^2 \hat{\omega} = \partial_y (M_y \partial_y \hat{\omega} - \hat{\omega} \partial_y M_y) + \hat{\omega} \partial_y^2 M_y$$

$$M_{xy} = \partial_{xy} \hat{\omega} = -\partial_y (M_{xy} \partial_x \hat{\omega}) - \partial_x (\hat{\omega} \partial_y M_{xy}) + \underline{\hat{\omega} \partial_{xy}^2 M_{xy}}$$

$$= \partial_x (M_{xy} \partial_y \hat{\omega} - \partial_y \hat{\omega} \partial_y M_{xy}) + \underline{\hat{\omega} \partial_{xy} M_{xy}}$$

* Teorema della divergenza

$$g = (g_x, g_y)^T$$

$$\int_A \mathrm{div}(g)\, dA = \int_\Gamma g^T \underline{n}\, dS$$

↳ Analogo dell'integrazione per parti in 2D

— = Sono già nella forma $\hat{\omega} \cdot$ (derivata della quantità statica associata) → ci piace

Ci piacciono anche dei termini perché possiamo usare *

Riscrivendo L_{int} usando le identità:

$$L_{int} = -\int_A (\partial_x^2 M_x + 2 \partial_{xy} M_{xy} + \partial_y^2 M_y)\, \hat{\omega}\, dA$$

Applicando il teorema della divergenza su questi termini

$$\begin{cases} -\int_A \partial_x\left[M_x \partial_x\hat{w} + M_{xy}\partial_y\hat{w}\right] + \partial_y\left[M_{xy}\partial_y\hat{w} + M_y\partial_y\hat{w}\right] dA \\ +\int_A \partial_x\left[\hat{w}\left(\partial_x M_x + \partial_y M_{xy}\right) + \partial_y\left(\hat{w}\left(\partial_x M_{xy} + \partial_y M_y\right)\right)\right] dA \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_{ext} = \mathcal{L}_{int} \iff \int_A \left(\partial_x^2 M_x + 2\partial_{xy}^2 M_{xy} + \partial_y^2 M_y + p\right)\hat{w}\, dA +$$

$$\begin{cases} +\int_\Gamma (V - T_n)\hat{w}\, dS + \int_\Gamma \left(W_{ns} + M_{sn}\right)\partial_s\hat{w}\, dS + \quad (*) \\ +\int_\Gamma (W_n + M_n)\,\partial_n\hat{w}\, dS \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_n = \left(\partial_x M_y + \partial_y M_{xy}\right)\alpha_x + \left(\partial_x M_{xy} + \partial_y M_{xy}\right)\alpha_y \\ M_n = \ldots \\ M_{sn} = \ldots \end{cases}$$

$\to$ Azioni interne sul bordo.

Equazione di equilibrio in definito:

$$\partial_x^2 M_x + 2\partial_{xy} M_{xy} + \partial_y^2 M_y + p = 0$$

Integrando per parti

se bordo regolare (cioè no spigoli)

$$(*) = \left[\left(W_{ns} + M_{sn}\right)\hat{w}\right]_0^{L_\Gamma} - \int_\Gamma \partial_s\left(W_{ns} + M_{ns}\right)\hat{w}\, dS$$

Sostituendo questo allora nei termini di bordo

$$\hookrightarrow \int_\Gamma \Big[\underbrace{(V-\partial_s W_{ns})}_{V^k} - \underbrace{(T_n + \partial_s M_{ns})}_{T_n^k}\Big]\hat{w}\, dS + \int_\Gamma (W_n + M_n)\partial_n \hat{w}\, dS$$

Condizioni di equilibrio:

- $V^k - T_n^k = 0$ oppure $\hat{w}$ noto
- $\underbrace{W_n + P_n = 0 \text{ oppure } \partial_n \hat{w} \text{ è noto}}$

Dobbiamo imporre uno dei due

Dobbiamo imporre uno dei due.

Taglio di Kirchhoff

Ci servono imporre solo 2 cose per aver equilibrio (come detto prima)

Le condizioni al contorno da imporre sono due e questo è ricavabile solo con il PLV.