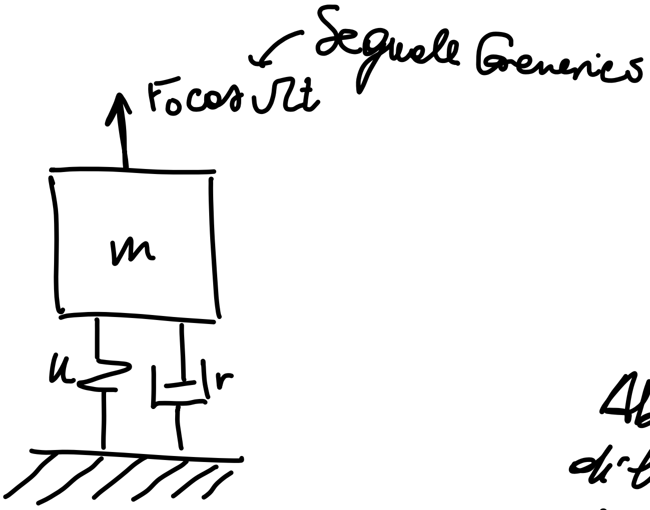
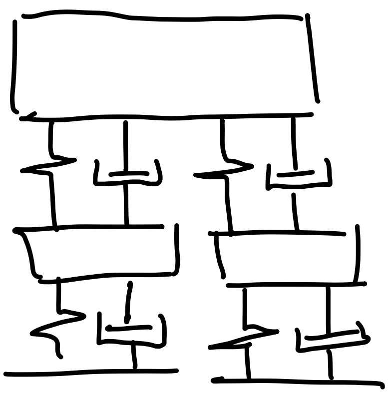
Esercitazione 21 - Vibrazioni



r → ~~Assorbe~~
↳ dissipa energia

Abbiamo 1 solo grado di libertà in realtà i meccanismi hanno tanti corpi e più gradi di libertà

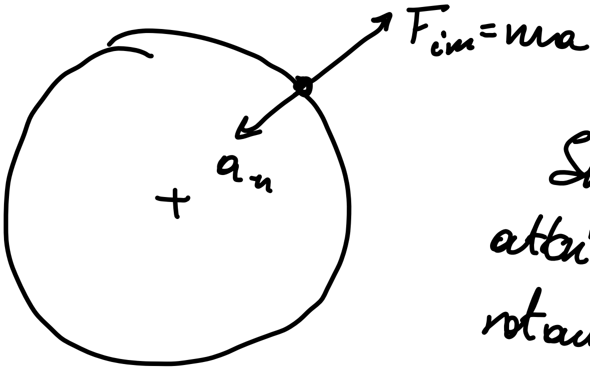
Meccanismo più reale



k di solito ha dell'r ma lo inglobiamo in r, per fare un modello più semplice

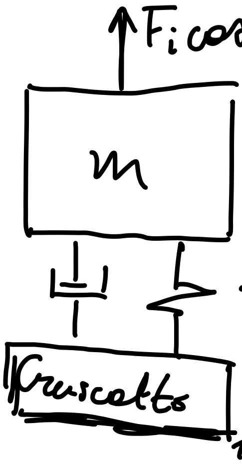
Per semplificare consideriamo sempre un sistema come lineare.
↳ Applichiamo r lineare che dissipa lo stesso dell'r reale.

Consideriamo $\cos \Omega t$ perchè per esempio un motore genera forze di vibrazione che occorrono periodicamente

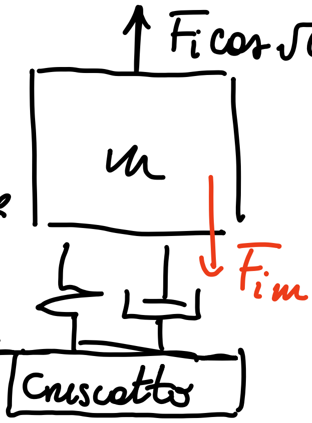


In generale $\cos \Omega t$ è attribuito a forze d'inerzia rotanti.

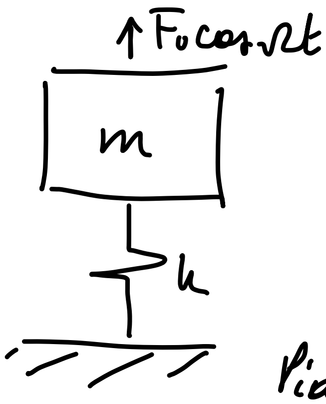
Un altro esempio è nei ponti i cavi sono investiti dal vento e periodicamente generano dei vortici.



Per minimizzare la forza al cruscotto facciamo in modo che l'inerzia la contrasti



Esercizio 1



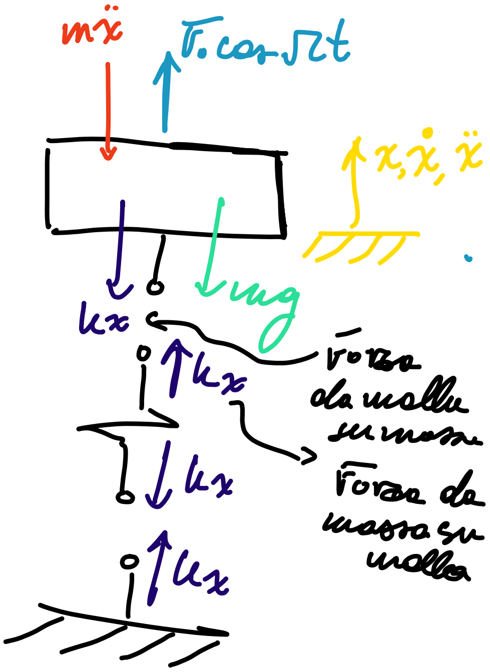
$k = 1000 \ N/m$

$m = 10 \ kg$

$\Omega = 5 \ \frac{rad}{s}$

$F_0 = 10 N$

Piano verticale



$\sum F_v = 0 \qquad m\ddot{x} + kx + mg - F_0 \cos \Omega t = 0$

Equazione differenziale lineare di secondo ordine $\rightarrow m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t - mg$

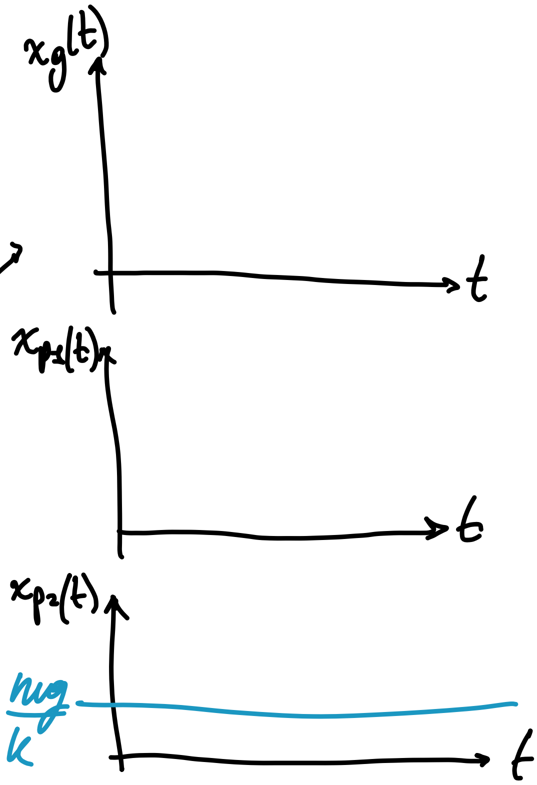
da risolvere.
per $x(t)$

$$m\ddot{x}+kx = F_0\cos\Omega t - mg$$

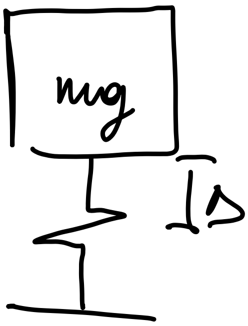
$$m\ddot{x}_g + kx_g = 0$$

$$m\ddot{x}_{p1} + kx_p = F_0\cos\Omega t$$

$$m\ddot{x}_{p2} + kx_p = -mg$$



$$x(t) = x_g(t) + x_{p1}(t) + x_{p2}(t)$$



$\Delta = \frac{mg}{k}$ si schiaccia di una delta costante e rimane così

$$m\ddot{x}_{p1} + kx_{p1} = F_0\cos\Omega t$$

$$x_{p1}(t) = C_1\cos\Omega t + C_2\sin\Omega t$$

$\Rightarrow$ che la forzante amplifica il ritmo della vibrazione

La forzante non ha sin solo cos. quindi rimanendo quelle

$$x_{p1}(t) = C_1\cos\Omega t$$

$$\dot{x}_{p1}(t) = -C_1\Omega\sin\Omega t$$

$$\ddot{x}_{p1}(t) = -C_1\Omega^2\cos\Omega t$$

$$-mC_1\Omega^2\cancel{\cos\Omega t}+kC_1\cancel{\cos\Omega t}=F_0\cancel{\cos\Omega t}$$

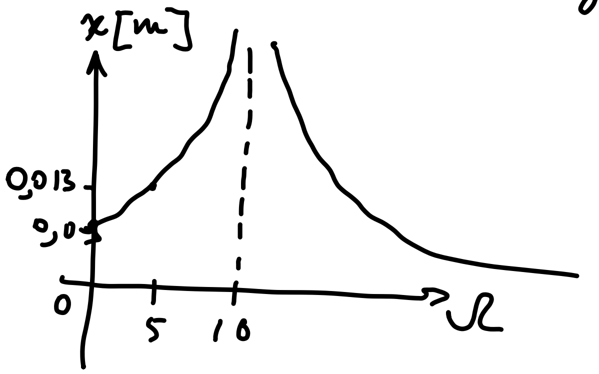
$$C_1(k-m\Omega^2)=F_0$$

$$C_1=\frac{F_0}{(k-m\Omega^2)}$$

Ampiezza di oscillazione $\rightarrow x$

$$\Rightarrow x_{ps}(t)=\left(\frac{F_0}{k-m\Omega^2}\right)\cos\Omega t=\frac{10}{1000-10\cdot5^2}=0{,}013\cos\Omega t=13\,mm\cos\Omega t$$

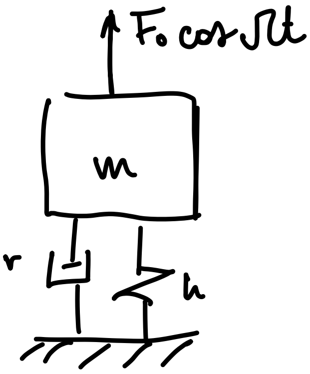
Gli potremmo dare più significato graficamente



Infatti

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}=10$$

Viene amplificata al più alla sua frequenza propria



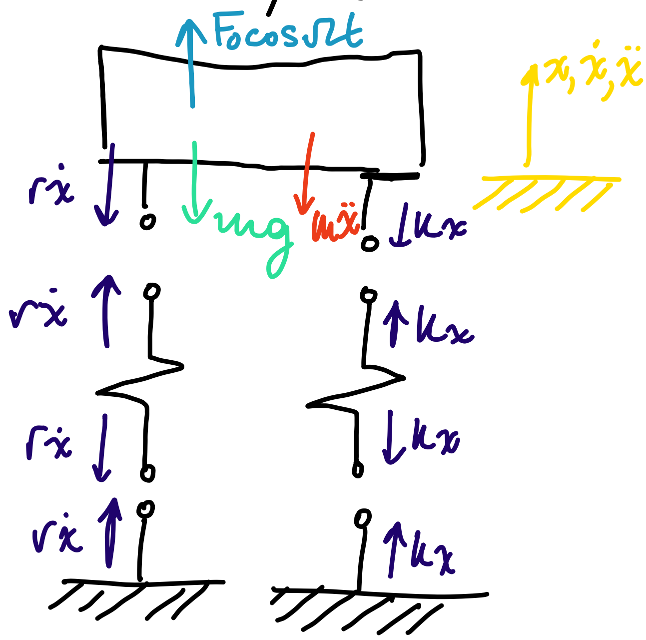
$k=1000\ N/m$

$m=10\,kg$

$\Omega=5\ rad/s$

$r=100\ \frac{Ns}{m}$

$F_0=10N$



$$\sum_i F_v = 0$$

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx + mg - F_0 \cos \Omega t = 0$$

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t - mg$$

$$x(t) = x_g(t) + x_{p1}(t) + x_{p2}(t)$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_g + r\dot{x}_g + kx = 0 \quad \text{Omogenea associata} \\ m\ddot{x}_{p1} + r\dot{x}_{p1} + kx_{p1} = F_0 \cos \Omega t \\ m\ddot{x}_{p2} + r\dot{x}_{p2} + kx_{p2} = -mg \end{cases}$$

$$m\ddot{x}_{p1} + r\dot{x}_{p1} + kx_{p1} = F_0 \cos \Omega t$$

$$x_{p1}(t) = C_1 \cos \Omega t$$

$$= X \cos(\Omega t - \varphi)$$

$$\dot{x}_{p1} = -X\Omega \sin(\Omega t - \varphi)$$

$$\ddot{x}_{p1} = -X\Omega^2 \cos(\Omega t - \varphi)$$

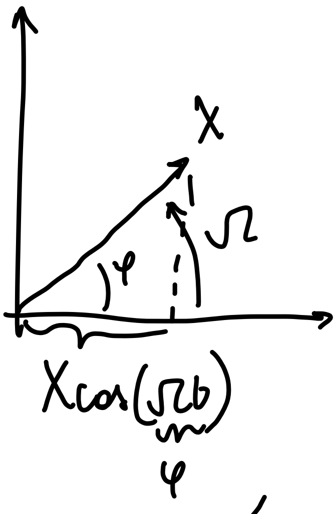
$$-mX\Omega^2 \cos(\Omega t - \varphi) - rX\Omega \sin(\Omega t - \varphi) + kX\cos(\Omega t - \varphi) - F_0 \cos \Omega t = 0$$

$$\Omega t - \varphi = \Omega \tau \qquad \Omega t = \Omega \tau + \varphi$$

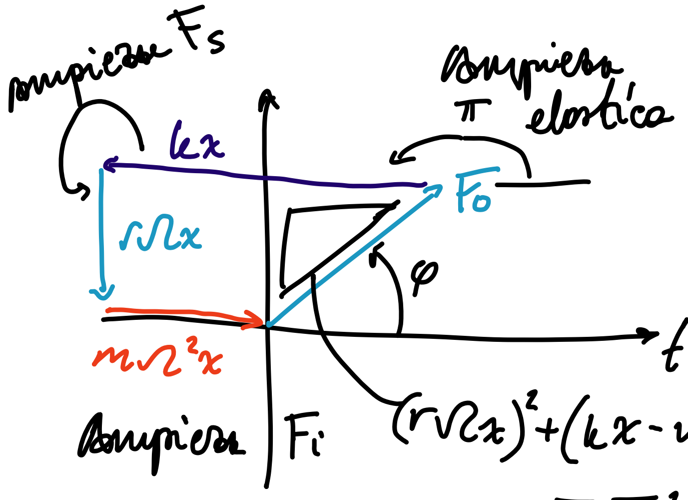
$$F_0 \cos(\Omega \tau + \varphi) - kX \cos \Omega t + rX\Omega \sin \Omega \tau + mx\Omega^2 \cos \Omega \tau = 0$$

$$F_0 \cos(\Omega \tau + \varphi) + kX \cos(\Omega \tau + \pi) + rX \cos(\Omega \tau + \tfrac{3}{2}\pi) + mx\Omega^2 \cos \Omega \tau = 0$$

$X \cos \Omega t$



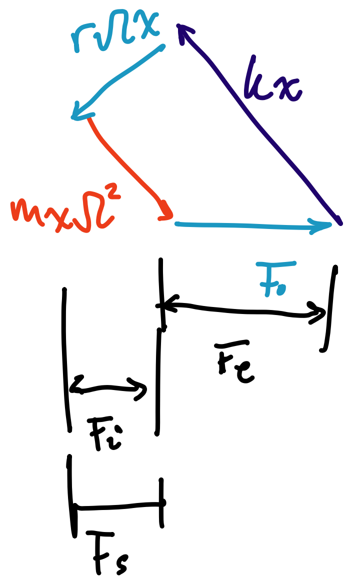
Come abbiamo visto i fasori



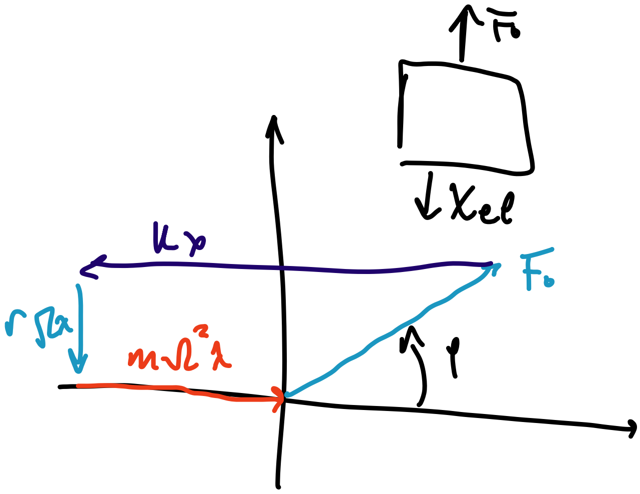
$$(r\Omega x)^2 + (kx - m\Omega^2 x)^2 = F_0^2$$

$$X^2\left[(k-m\Omega^2)^2+(r\Omega)^2\right] = F_0^2$$

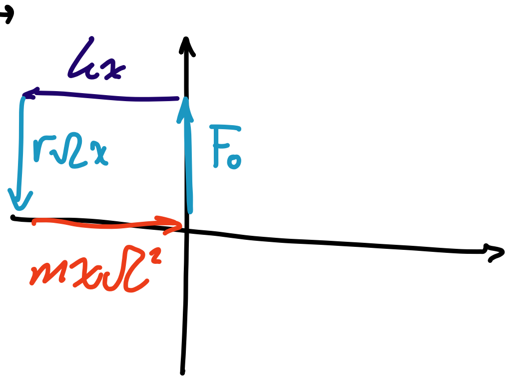
$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\Omega^2)^2+(r\Omega)^2}}$$



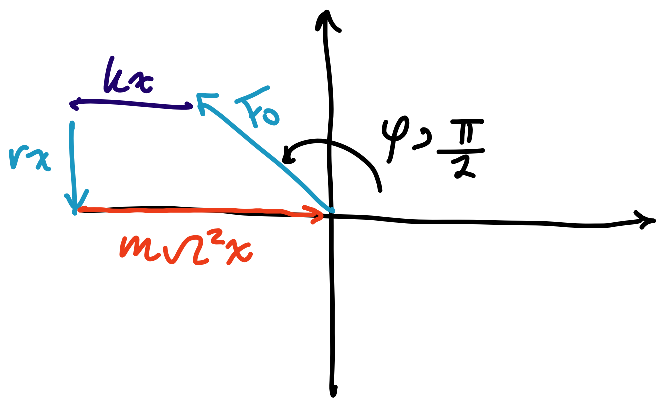
F_0 è un vettore che sta ruotando ed ha risposte diverse dipendendo da

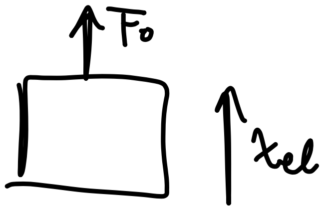


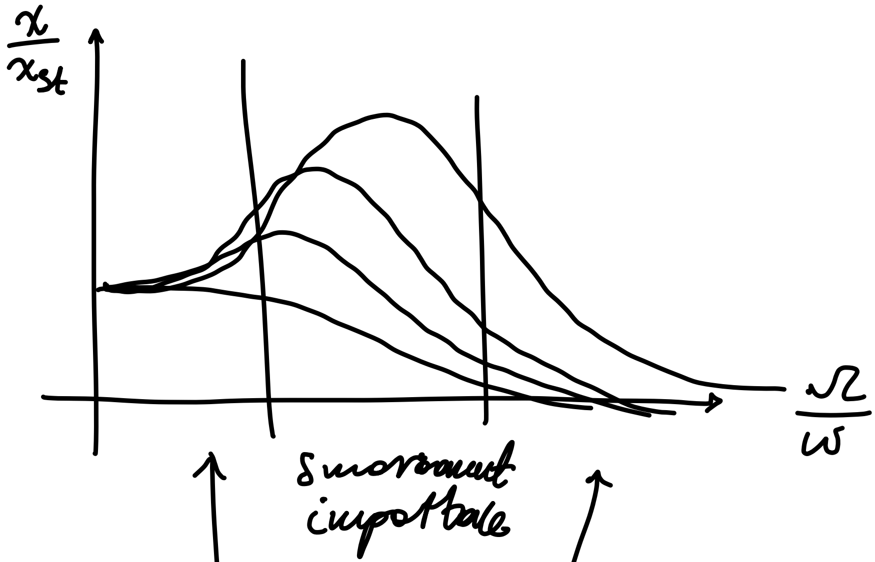
La condizione di risonanza è $\varphi = 90$



Superiamo la risonanza







Quasi-statica e sismica