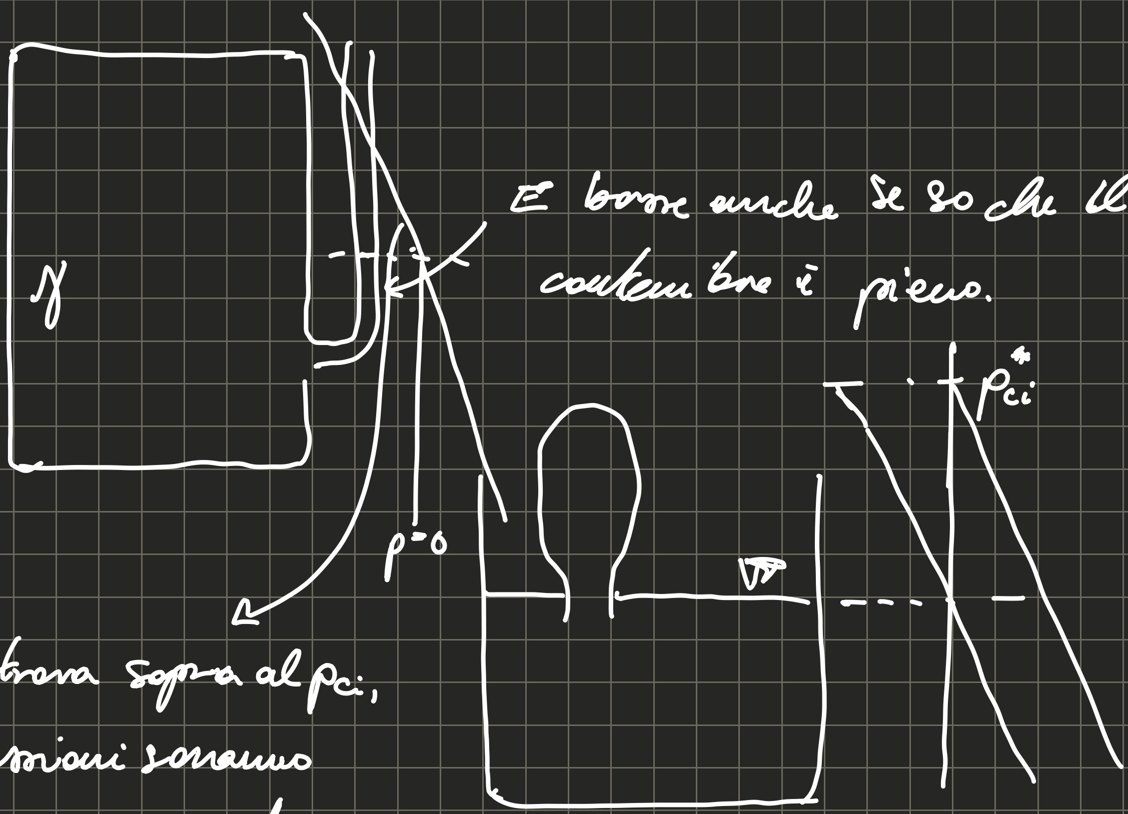
Lezione 03

Depressione relativa

↳ La possibilità dei fluidi di trovarsi a pressione minore di quella atmosferica

↳ Sarà sopra al suo p_{ci}



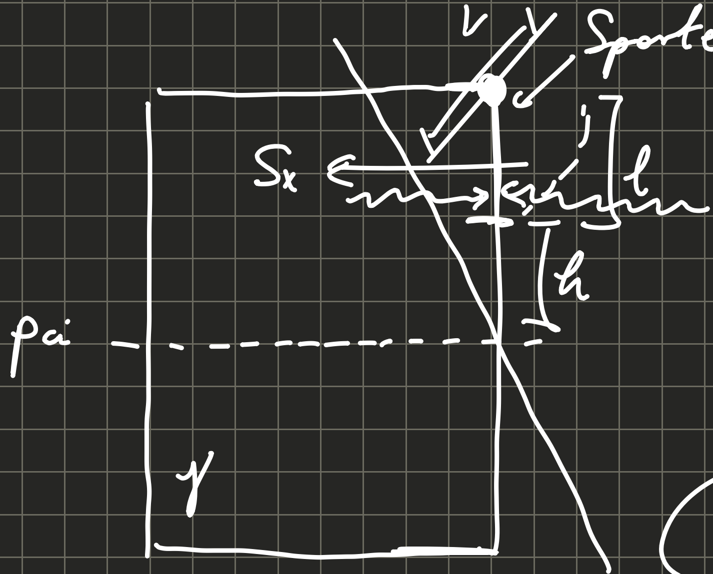
Se si trova sopra al p_{ci}, le pressioni saranno negative, ma cambiano linearmente

Relative → perché solo nelle pressioni relative

Nella pressione assoluta la pressione non può esser negativa, vicino a 0 vaporizza.

La pressione relativa negativa ha un limite, la soglia garantire che la assoluta rimanga negativa.

↳ Allora può esser sopra al p_{ci} relativo ma non a quello assoluto.



Spinta su sportellino

$$S_x = p_G A = -\gamma(h + l/2) \cdot lL$$

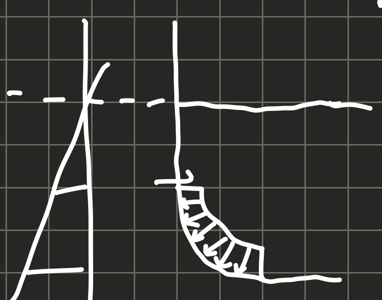
S_x è negativa quindi tira dentro invece spingere fuori

↳ Perché il fluido è in pressione negativa.

La spinta negativa è perché lavoriamo in pressioni relative in assolute

↳ Se usassimo la pressione assoluta (⇝), la pressione interna spinge fuori; ma anche l'atmosfera spinge e dato che siamo in depressione relativa ($\hat{p}^* < \hat{p}_{ATM}$) la spinta dell'atmosfera sarà maggiore e spinta lo stesso dentro.

Spinte su superfici curve

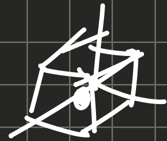


Il calcolo dell'integrale è strano e difficile, perché n non è costante quindi non possiamo scriverlo semplificando i calcoli

Vediamo se riusciamo a calcolare la spinta della superficie sul fluido.

Dobbiamo l'equazione di equilibrio del fluido

↳ $\rho \underline{f} = \text{grad}\, p$

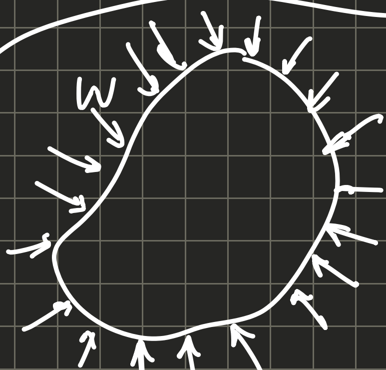


↳ Non è molto utile perché è indefinita, ma ci serve una forma definita.

→ Andiamo dalla equazione nella scala puntuale a guardare un volume finito.

detta anche integrale

↳ Serve trovare la forma globale dell'equilibrio statico



Integriamo la forma definita nel volume.

$$\int_W \rho \underline{f}\, dW = \int_W \text{grad}\, p \, dW$$

Teorema di Green

$$\underline{f} \int_W \rho \, dW = -\int_A p \, \underline{n} \, dA$$

→ Troviamo questo

poi torniamo alle spinte.

Azione di massa globale su volume, sono il peso, preso $\underline{f} = g \underline{k}$ ↘ $\underline{G} + \underline{\Pi} = 0$

Azione di superficie che agisce sul contorno

Anche se diverse non cambia il principio di funzionamento rispetto alla forma indefinita

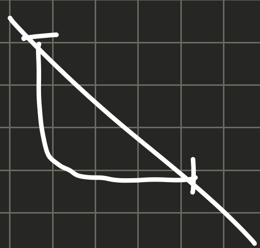
↳ Risultante delle azioni di superficie

Devo imporre un volume di controllo, imporre l'equilibrio e da lì posso trovare le spinte

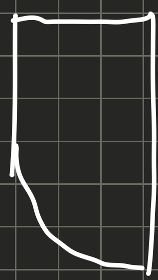
↳ Requisito per volume di controllo

1. Definire volume di controllo
2. Contorno deve esser fatto superfici piane
   ↳ Problema
3. Superficie d'interesse deve esser parte del contorno

Prima soluzione, introduce superficie piana

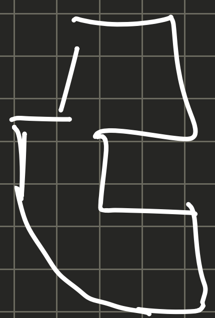


↳ O chiudere con 2



O così

o



O questo

Tutte tranne la superficie di interesse devono esser piane

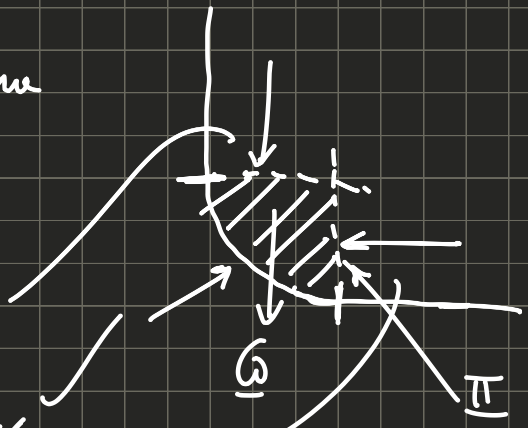
Sviluppo con il volume di forma

posso fare

perché

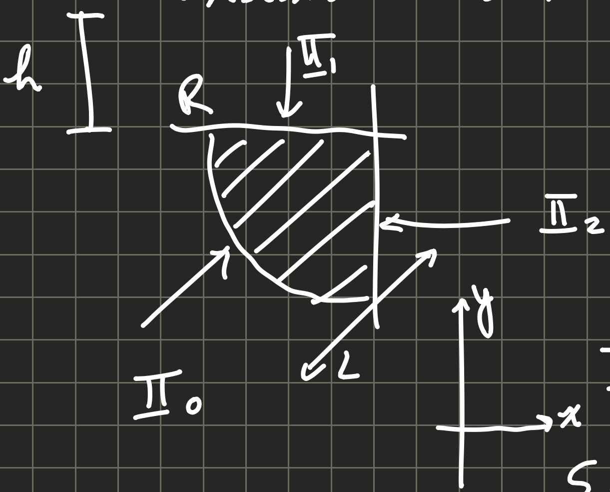
$$\underline{\Pi} = \int_A p\,\underline{n}\,dA = \int_{A_1} p\,\underline{n}\,dA + \int_{A_2} p\,\underline{n}\,dA + \int_{A_3} p\,\underline{n}\,dA$$

↳ Assumendo che $A = A_1 + A_2 + A_3$



Componenti di $\underline{\Pi}$

Forza di superficie che agisce su tutto il contorno



$$\underline{G} + \underline{\Pi} = 0$$

$$\underline{G} + \underline{\Pi}_1 + \underline{\Pi}_2 + \underline{\Pi}_0 = 0$$

$$\underline{\Pi}_0 = -\underline{G} - \underline{\Pi}_1 - \underline{\Pi}_2$$

$$\underline{S} = \underline{G} + \underline{\Pi}_1 + \underline{\Pi}_2$$

$-\underline{\Pi}_0$ è la forza che il fluido agisce sulla superficie

$$G_y = -\gamma W = -\gamma \frac{\pi R^2}{4} L$$

$$\Pi_{1y} = -p_1 A_1 = -\gamma h R L$$

$$\Pi_{2x} = -p_2 A_2 = -p_{G2} A_2 = -\gamma (h + R/2) R L$$

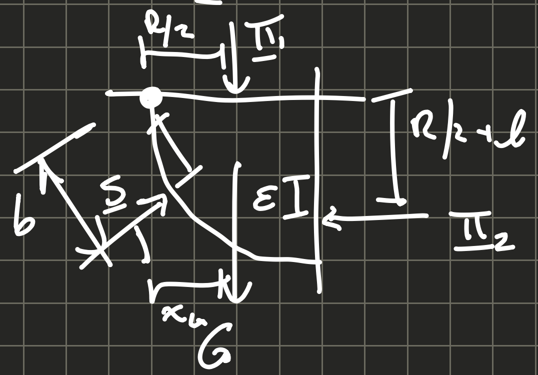
$$S_x = G_x + \Pi_{1x} + \Pi_{2x} = -\gamma \left(h + \frac{R}{2}\right) R L$$

$$S_y = G_y + \Pi_{1y} + \Pi_{2y} = -\gamma \frac{\pi R^2}{4} L - \gamma h R L$$

Metodo dell'equilibrio globale per le spinte.

Come determinare la retta d'azione

↳ Supponiamo che S generi lo stesso momento dei $\underline{\Pi}_i$ intorno ad un polo.
CG



Cinematica → Studio e rappresentazione di come si muove il fluido

↳ Caratterizzazione dei campi di moto

$\underline{v}$ → velocità (3 dimensionale)

$= u\underline{i} + v\underline{j} + w\underline{k}$

→ Accelerazione

$\underline{a} = \dfrac{d\underline{v}}{dt}$

↳ Difficile perché

Non funziona

$\cancel{\underline{v} = \underline{v}(t)}$ $\quad \cancel{\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, t)} \quad \underline{v} = \underline{v}(\underline{x}(t), t)$

dal solo tempo

↳ Dipendenza spazio temporale, dopo un istante il fluido non sarà nella stessa posizione

↳ Serve allora fare derivate parziali e quelle composte

$$d\underline{v} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} dt + \frac{\partial \underline{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \underline{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \underline{v}}{\partial z} dz$$

componenti della velocità

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{v}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \underline{v}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \underline{v}}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$= \underbrace{\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}}_{\text{Accelerazione locale}} + \underbrace{u\frac{\partial \underline{v}}{\partial x} + v\frac{\partial \underline{v}}{\partial y} + w\frac{\partial \underline{v}}{\partial z}}_{\text{Accelerazione Convettiva}}$$

→ La accelerazione quindi dipende dalla velocità stesse

↳ Trovato considerando $\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}(t), t)$

Accelerazione locale ↑ Non mi sto spostando nello spazio, proprietà dello spazio occupato

moto - vario → più complicato

- permanente / stazionario → niente varia nel tempo
  ↳ solo accelerazioni convettive
- uniforme → ne variazioni nel tempo o spazio.

↳ generalmente quello a cui guardiamo

Euleriano / Lagrangiano

↳ si sa le proprietà dell'oggetto

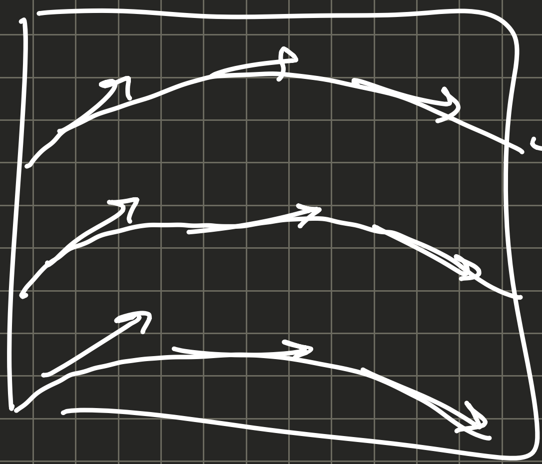
↳ si guarda nel punto, tutto è proprietà del punto.

↳ normalmente quello che guardiamo

Traiettorie → successioni di posizioni di una particella

↳ lagrangiano

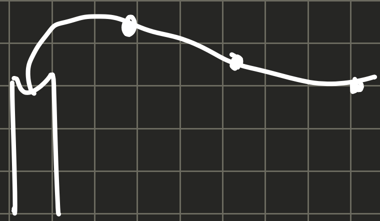
Linee di Corrente → rappresentazione euleriana



→ linea che segue le velocità nello spazio

Linee di Fumo / di Emissione → usate poco

↳ Linee che uniscono particelle che sono passate per lo stesso punto



Usiamo per rappresentare i campi di moto e rappresentare il sistema

↳ Se non è tempo variante allora sono uguali.

↳ Nel moto permanente (che usiamo) coincidono.

Cinematico, non dinamico, quando rientrano le forze.

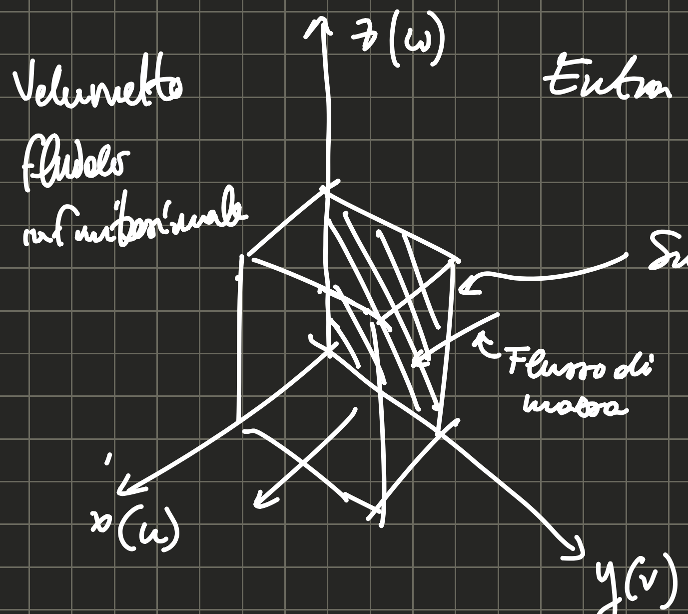
Il fluido non si muove per suo, deve muoversi obbedendo la conservazione di massa.

Anche con la conservazione della massa posso scrivere in forma indefinita e globale, e una intermedia.

Scale di Osservazione
- indefinita
- per correnti
- globale

Più equazioni, più modi possiamo risolvere i problemi.

Conservazione della massa in forma indefinita



Entra esce fluido ad ogni parte

Su questa superficie solo u sta lavorando

$$m_e - m_u = \underbrace{\rho u \, dy\, dz\, dt}_{\text{Flusso di massa per la superficie in } dt} - \underbrace{\Big(\rho u + \underbrace{\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}}_{\text{Sviluppo in serie di } \rho u} dx\Big)}_{\text{massa infinitesimale}} dy\, dz\, dt$$

Massa uscente

$+ \rho v \cancel{dx} dz\, dt - \left(\cancel{\rho v} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \partial y\right) dx\, dz\, dt +$

$+ \rho w \cancel{dx\, dy}\, dt - \left(\cancel{\rho w} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz\right) dx\, dy\, dt =$

Non a senso versori perché la massa non è vettoriale

Se è 0 va bene
se no bisogna compensare con un cambio di densità

$= \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dt\, dw}$

se comprime $\frac{\partial \rho}{\partial t} > 0$ se dilata $\frac{\partial \rho}{\partial t} < 0$

$= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{v}) = 0$

non meno perché abbiamo portato tutto alla destra.

→ Forma estesa della conservazione della massa di un fluido in moto

$\operatorname{div} \rho \underline{v} = \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = \begin{vmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \rho u \\ \rho v \\ \rho w \end{vmatrix} = \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}$

Se c'è differenza tra ciò che entra ed esce, il fluido deve cambiare densità

↳ Altre forme se il moto a certe proprietà

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \underline{v}) = 0}$$ → Se moto permanente: $div(\rho \underline{v}) = 0$

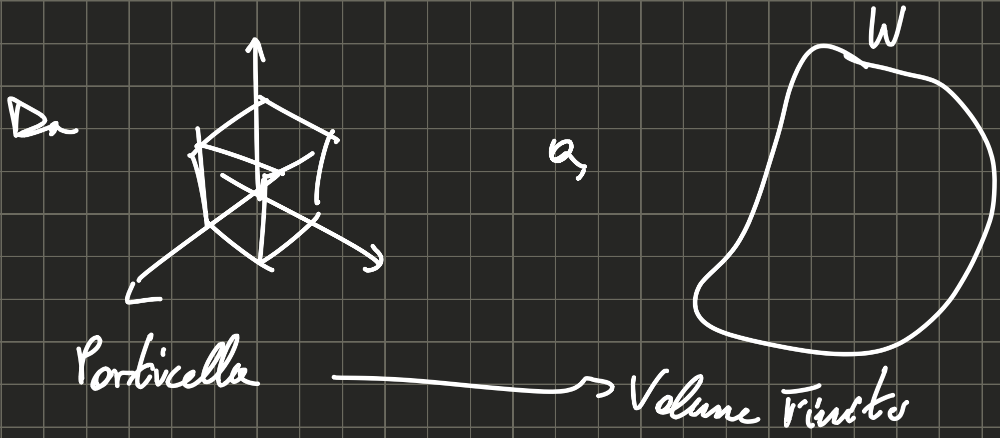
↳ non si può avere alcuna variazione nel tempo

Rappresentazione generale (senza ipotesi)

↳ se fluido incomprimibile $div\, \underline{v} = 0$

↳ no variazioni di densità

Forma Globale di Conservazione di Massa



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \underline{v}) = 0$$

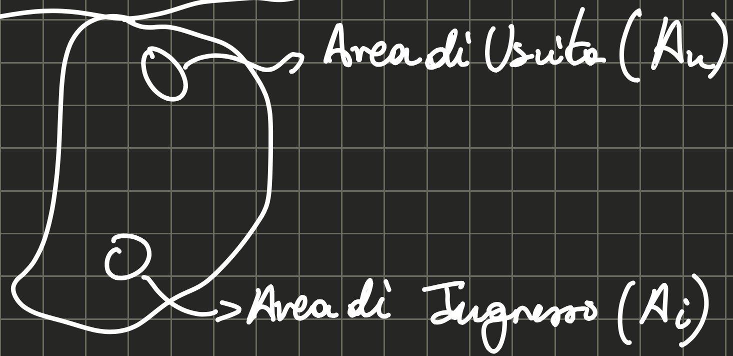
$$\underbrace{\int_W \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dW}_{\text{Se varia la densità, varia la massa}} + \underbrace{\int_W div(\rho \underline{v})\, dW}_{\text{Teorema della Divergenza}} = 0$$

Teorema della Divergenza → div → Flusso nel contorno

Massa fluido contenuto

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial t} - \int_A \rho\, \underline{v} \cdot \underline{n}\, dA = 0}$$

Definendo



$$\frac{\partial M}{\partial t} = \underbrace{\int_{A_i} \rho\, \underline{v}\, \underline{n}\, dA}_{(+)} + \underbrace{\int_{A_u} \rho\, \underline{v} \cdot \underline{n}\, dA}_{(-)} + \underbrace{\int_{A-A_i-A_u} \rho\, \underline{v}\, \underline{n}\, dA}_{=0}$$

Abbiamo preso come impermeabile (per esempio)

Quello che si accumula = Quello che entra − quello che esce

Definisce la grandezza portata massica che entra nel corpo

Noi guarderemo senza ρ per definire portata volumetrica