Lezione 6

Formalizzazione dei Criteri d'Arresto

I due criteri che abbiamo visto il criterio delle iterazioni massime e quello della tolleranza.

Con questi due vogliamo trovare k_{min} tale che:

$$|e^{(k_{min})}| \leq cS \leq TOL$$

Il calcolo dell'errore non è implementabile perché ci servirebbe il valore giusto di x che non sappiamo, perciò riportiamo ad uno stimatore per fare questo calcolo. Il problema con lo stimare è che a volte può esser non affidabile, quindi aggiungiamo una costante di affidabilità, c.

Se questa costante ha valore intorno ad 1, allora diciamo che lo stimatore è affidabile, è se è molto più grande di 1, lo stimatore non lo è.

C per lo stimare con il residuo relativo

Vogliamo trovare K_{min} tale che

$$\frac{|r^{(K_{min})}|}{|b|} \leq TOL$$

Lo stimare è una stima dell'errore relativo all'iterazione e il valore vero cioè:

$$\frac{\overbrace{|e^{(K_{min})}|}^{x-x^{(K_{min})}}}{|x|} \leq \underbrace{\square}_{c} \frac{|r^{(K_{min})}|}{|b|}$$

Aggiungendo una perturbazione ad Ax=b ricaviamo:

$$(A+\delta A)(x+\delta x) = (b+\delta b)$$

Se $\delta A = 0 \implies A\underbrace{(x-\delta x)}_{\tilde{x}} = (b+\delta b)$

Sappiamo che gli errori relativi tra x e b hanno la relazione:
$\frac{|\delta x|}{|x|} \leq K(A)\frac{|\delta b|}{|b|} = K(A)\frac{|\tilde{r}|}{|b|}$

Da qui possiamo trarre che:

$$\frac{|x - \overbrace{\tilde{x}}^{x^{(K_{min})}}|}{|x|} \leq K(A)\frac{|\tilde{r}|}{|b|}$$

Sostituendo $\tilde{x}$ con $x^{(K_{min})}$,se facciamo un'ultima sostituzione, abbiamo la stessa espressione di prima:

$$\frac{|e^{(K_{min})}|}{|x|} \leq K(A)\frac{|r^{(K_{min})}|}{|b|}$$

Troviamo allora che c per il stimare dell'errore relativo è il coefficiente di condizionamento della matrice A.

Se K(A)≥ 1, non possiamo fare lavoro in più (come dovremmo fare se c$\ll 1$, che con K(A) non è possibile) ma non è un problema perché il nostro problema è ben condizionato ed affidabile.

Se il sistema invece non è ben condizionato sappiamo che non è affidabile.

C per lo stimare ad incremento

Per lo stimatore 2 vogliamo trovare K_{min} tale che $|e^{(K_{min})}| \leq c|x^{(K_{min}+1)} - x^{(K_{min})}| \leq TOL$

In questa condizione per fermarmi dobbiamo fare $(K_{min}) + 1$ iterazioni.
Prendiamo il caso dove B è sdp con $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$

L'errore sarà:

$$e^{(K_{min})} = x - x^{(K_{min})} = x - x^{(K_{min}+1)} + x^{(K_{min}+1)} - x^{(K_{min})}$$

Per semplicità diciamo che $S_2 = \delta x^{K_{min}}$, quindi:

$$|e^{(K_{min})}| = |x - x^{(K_{min}+1)} + \delta x^{(K_{min})}| \leq \underbrace{|x - x^{(K_{min}+1)}|}_{|e^{(K_{min}+1)}|} + \underbrace{|\delta x^{(K_{min})}|}_{S_2}$$

Per la relazione che abbiamo detto all'inizio degli schemi tierativi e il fatto che B è sdp, possiamo scrivere che:

$$\leq \rho(B)|e^{(K_{min})}| + |\delta x^{(K_{min})}|$$

Isolando l'errore possiamo scrivere:

$$(1-\rho(B))|e^{(K_{min})}| \leq |\delta x^{(K_{min})}|$$
$$|e^{(K_{min})}| \leq \underbrace{\frac{1}{1-\rho(B)}}_{c}|\delta x^{(K_{min})}|$$

Il c sarà sempre positivo perché $\rho(B) \leq 1$
c è vicino a 1 quando $\rho(B)$ è piccolo, più è convergente (più è piccolo $\rho(B)$), più affidabile è l'algoritmo.
Questo vale quando B non è sdp, ma ponendolo come sdp ci permette di trovare l'uguaglianza.

Equazioni non lineari

La maggior parte delle funzioni non sono lineari. Soli i polinomi di ordine sono lineari e il resto non lo sono.

Il problema che vogliamo risolvere è trovare gli 0 di queste funzioni, un problema equivalente a risolvere un problema lineare (cit. funzione quadratica).

Per risolvere questo problema dobbiamo sapere se c'è $\alpha \in [a,b]$ tale che $f(\alpha) = 0$

Metodi di Punto Fisso

I metodi del punto fisso sono metodi che sono utilizzano i punti fissi di funzioni per trovare le radici di altre funzioni.

Il punto fisso di coseno è raggiungibile iterando il coseno con il valore di se stesso, iniziando con un guess iniziale di un radiante, cioè:

$$
\begin{aligned}
x^{(0)} &= 1 \\
x^{(1)} &= \cos(x^{(0)}) \\
x^{(2)} &= \cos(x^{(1)}) \\
&\vdots \\
x^{(k+1)} &= \cos(x^{(k)})
\end{aligned}
$$

Definizione di Punto Fisso

Prendiamo la funzione $\phi : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $\phi \in C^0([a,b]) \implies \phi$ è continua.

$\alpha \in [a,b]$ è punto fisso di ϕ, se $\phi(\alpha) = \alpha$

Possiamo scrivere questo in modo diverso, come $y(x) = \phi(x)$ e $y(x) = x$, cioè il punto fisso sarà il punto dove la funzione ϕ fa intersezione con la bisettrice dei quadranti 1 e 3.

Graficamente si ha:

L'algoritmo per trovare il punto fisso è:

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$$

Legame tra punti fissi e trovare le radici

Per legare $\phi(\alpha) = \alpha$ e $f(\alpha) = 0$, serve scegliere opportunamente il legame tra i due.

A patto di legare opportunamente f e ϕ, la soluzione di $\phi(x) = x$ sarà soluzione di $f(x) = 0$.

Prendiamo $f(x) = 0$ e lo scriviamo come $\phi(x) = x$ risolvere e troviamo soluzione approssimata di $f(x)$.

Il modo più facile di scrivere $f(x)$ come $\phi(x)$ è:

$$
\begin{gathered}
f(x) + x - x = 0 \\
\underbrace{f(x) + x}_{\phi(x)} = x
\end{gathered}
$$

Dimostrando l'equivalenza

Per ipotesi $f(\alpha) = 0$, vogliamo trovare $\phi(\alpha) = \alpha$:

$$\phi(\alpha) = \alpha + f(\alpha)$$

Per la ipotesi questo è:

$$\phi(\alpha) = \alpha + \cancelto{0}{f(\alpha)} = \alpha$$

Per far veder l'inverso abbiamo $\phi(\alpha) = \alpha$, vogliamo trovare che $f(\alpha) = 0$:

$$\phi(\alpha) = 0$$

$$\cancel{\alpha} + f(\alpha) + \cancel{\alpha} = 0$$

Altri Legami possibili

Invece di usare x come la funzione di legame, possiamo usare 3x, o qualsiasi altro legame, possiamo scrivere come:

$$
\begin{gathered}
f(x)+3x-3x=0 \\
f(x)+3x=3x \\
\underbrace{\frac{f(x)+3x}{3}}_{\phi(x)}=x
\end{gathered}
$$

Cambiando il legame possiamo scrivere più funzioni ϕ che ci permettono di trovare punti fissi che forse non possiamo trovare con altre ϕ. Se una ϕ non ha punto fisso non significa che un'altra ϕ non ne avrà, la molteplicità di ϕ ci aiuta.

Convergenza di ϕ al punto fisso

Prendendo la funzione di prima, possiamo seguire le diverse iterazioni di ϕ

In questo caso le iterazioni si stanno stringendo su α.

Invece in un'altro caso di ϕ:

In questo caso vediamo che se ϕ non è buono, la successione diverge.

È possibile che ϕ non converga. Questo è perché aiuta avere più ϕ, alcune non funzionano è altre si.

La condizione principale per la convergenza è la derivata. La pendenza di ~1 aiuta la convergenza invece se è molto diversa non converge. Usiamo allora $\phi'(\alpha)$ come il criterio della convergenza.

Teorema di Ostrowski (locale)

Si considera un intorno $I_\alpha=(\alpha-\epsilon,\alpha+\epsilon)$. Suppongo $\exists!\alpha$ punto fisso di $\phi\in C^1(\overline{I}_\alpha)$.

Se $|\phi'(\alpha)|<1$ allora $\exists\delta>0$ tale che se prendo $x^{(0)}:|x^{(0)}-\alpha|<\delta$, le iterazioni del punto fisso $\{x^{(k)}\}$ convergono ad α e vale:

$$\lim_{k\to\infty}\underbrace{\frac{x^{(k+1)}-\alpha}{x^{(k)}-\alpha}}_{\text{Lineare}}=\phi'(\alpha)$$

Ordine di Convergenza

L'ordine della convergenza è l'ordine a cui la convergenza tende al valore esatto del punto fisso.

Una convergenza è detta di ordine p se:

$$\frac{|x^{(k+1)}-\alpha|}{|x^{(k)}-\alpha|^p}\leq c \quad \forall k\geq k_0$$

Prendiamo c come la tolleranza indipendentemente da k.
Diciamo che la relazione converge in ordine p se esiste c maggiore del rapporto, per ogni k dopo un certo k_0 (questo ci traduce il concetto di limite)

Questa relazione che stiamo calcolando è l'errore tra due iterazioni successive, con l'ordine p aggiunto alla iterazione precedente.

Quando p=1, la funzione è lineare, quando p=2 è quadratica, quando p=3 è cubica, eccetera.

La costante: c

Per ordini di convergenza p>1, il valore di c non importa questo è perché:

$$|x^{(k+1)}| \leq c|x^{(k)} - \alpha|^p$$

Per quanto c posse esser grande, quando p>1, l'errore migliora di volta in volta quando anche la grandezza di c può esser dominata date abbastanza iterazioni.

Per p = 1 invece c è critico. Per garantire convergenza il valore di c<1, perché è l'unica cosa che diminuirebbe l'errore. Questa è una condizione simile a $\rho(B) < 1$ che abbiamo visto nei sistemi lineari.

Convergenza di Ostrowsky

Se $|\phi'(\alpha)| < 1$ converge
Se $|\phi'(\alpha)| > 1$ diverge
Se $|\phi'(\alpha)| = 1$ non si può determinare.

Esempi

Esempio 1:

$$\phi(\alpha) = \cos(\alpha)$$
$$\phi'(\alpha) = -\sin(\alpha)$$
$$|\phi'(\alpha)| = |\sin(\alpha)| < 1 \forall \alpha \neq 0 \implies \text{converge}$$

Esempio 2:

$$\phi(x) = x^2 - 1$$
$$\phi'(x) = 2x$$
$$x = \phi(x) \to x^2 - x - 1 = 0$$
$$\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$
$$|\phi'(\alpha_{1,2})| = |1 \pm \sqrt{5}| > 1 \implies \text{non converge}$$

Esempio 3:

$$f(x) = \log(x) + 2$$

Prendiamo in omaggio il ϕ di Newton:

$$\phi_n(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Un'altro ϕ può esser quello normale:

$$\phi_1(x) = \log(x) + 2 + x$$

Ed un terzo ϕ:

$$\phi(x) = xf(x) = x\log(x) + 2x = 0$$

Il terzo ϕ e quello di Newton funzionano, invece la seconda no.
Questo dimostra che avere più $\phi(x)$ aiuta a identificare i punti fissi che un'altra funzione forse non riesce ad identificare.

Bisezione

Una parte problematica cdi Ostrowsky è che dobbiamo usare α, che è quello che dobbiamo identificare, per determinare se il guess iniziale è abbastanza vicino per garantire la convergenza.

Per risolvere questo problema possiamo usare il teorema della bisezione per stimare α. Usare il teorema della bisezione è utile perché converge sempre ed è facile da implementare.

L'uso della bisezione come aiuto ad metodo dei punti fissi identifica un tipo di schema chiamato predictor-corrector, in cui il 'predictor' è usato per avere una stima buona di un valore e il 'corrector' è usato per portare questa stima ad una buona tolleranza.

Nel teorema della bisezione si raccolgono intervalli successivi in cui sappiamo che il valore α rientra. Sappiamo che α rientra perché facciamo questa operazione su $f(x)$ di cui α è uno zero, e per il teorema degli zeri f(a)<0 e $f(b) > 0$.

Per l'algoritmo si inizia con $I^{(0)} : [a, b]$, con $a^{(0)} = a$ e $b^{(0)} = b$
Le media di questi due valori sarà:

$$x^{(0)} = \frac{a^{(0)} + b^{(0)}}{2}$$

Da qui facciamo $f(x^{(0)}) \cdot f(a^{(0)})$:

- se <0 allora: $a^{(1)} = a^{(0)}$ e $b^{(1)} = x^{(0)}$
- se >0 allora: $a^{(1)} = x^{(0)}$ e $b^{(1)} = b^{(0)}$
- se = 0, allora $x^{(0)}$ è α e non dobbiamo continuare.

Da cui si continua ad iterare.

I requisiti per la bisezione è sono che f sia continua e $f \in C^0([a, b])$

Verifico della convergenza

$$|e^{(k)}| = |x^{(k)} - \alpha| < \frac{1}{2}|I^{(k)}| = \frac{b-a}{2^{k+1}} = (b-a)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \underbrace{\rightarrow}_{k \rightarrow \infty} 0$$

Visto che per k che tende a infinito, l'errore va a 0, allora la bisezione converge.\

Possiamo usare questo calcolo come funzione di arresto dicendo che:

$$|e^{(k)}| \leq (b-a)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} < TOL$$

Da qui possiamo trovare K_{min} che sarà:

$$\frac{b-a}{TOL} < 2^{k+1}$$
$$K_{min} > \log_2\left(\frac{b-a}{TOL}\right) - 1$$