Lezione 9

Cinematica → descrizione del generico atto di moto congruente

$\ulcorner$→ Spostamento Generalizzato

Timoshenko → $\underline{U}(x) = (u(x), v(x), \varphi(x))^T$

$$q(x) = (\underbrace{\eta(x)}_{\substack{\text{Allungamento} \\ = u'}}, \underbrace{\chi(x)}_{\substack{\text{Curvatura Flessionale} \\ = -\varphi'}}, \underbrace{t(x)}_{\substack{\text{Scorrimento Angolare Medio} \\ = v' - \varphi}})^T$$

Ricavate dal legame tra spostamenti generalizzati e deformazioni

Deformazioni Generalizzate

↳ Parente dello scorrimento angolare, che è la variazione d'angolo tra due fibre disposte perpendicolarmente dopo una deformazione
↳ Per noi è un unico valore medio

Eulero-Bernoulli → $\underline{U}_{EB}(x) = (u(x), v(x))^T$

↳ $q_{EB}(x) = (\eta(x), \chi(x))^T$

↳ Vincolo "Interno":

$$t = v' - \varphi = 0 \Rightarrow v' = \varphi \Rightarrow \chi = -v''$$

↳ ⇒ La rotazione φ è sempre uguale alla derivata dello spostamento verticale della linea d'asse v'

Lo scorrimento angolare è qualcosa che occorre alla scala indefinita, quello medio lo prendiamo per la scala della sezione.

Statica

(1) Definizione delle azioni interne

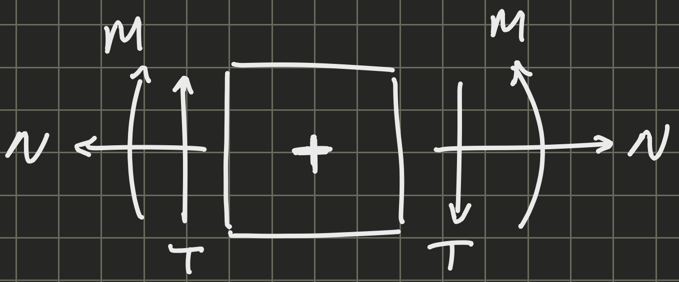
Imponendo l'uguaglianza del lavoro interno compiuto dagli sforzi locali per le deformazioni del mezzo continuo congruenti con il nostro modello cinematico con il lavoro che avremmo compiuto da un vettore delle azioni interne per le deformazioni generalizzate, possiamo definire $\underline{Q}$:

Timoshenko: $\underline{Q}(x) = (N(x), M(x), T(x))^T$

Eulero-Bernoulli: → $\underline{Q}_{EB}(x) = (N(x), M(x))^T$

↳ equazione di ricavo di T: $T = \frac{dM}{dx}$

Direzione positiva delle azioni:



↳ Questa equazione del taglio è la reazione al vincolo cinematico interno che abbiamo imposto.

② Equazioni di equilibrio

- → Equazioni indefinite

$$\begin{cases} N' + n = 0 \\ M' - T = 0 \\ T' + p = 0 \end{cases}$$

$N' + n = 0$ } Problema Assiale

$M' - T = 0$, $T' + p = 0$ } Problema Flessionale

↳ Equilibrio alla traslazione verticale e alla rotazione del concio di trave.

- → + C.C. su $N(x)$, $T(x)$, $M(x)$
- → Ricavati dirittamente o energeticamente con il PLV come condizione sufficiente per l'equilibrio statico della nostra struttura.

Legame Costitutivo

- → Lega uno sforzo generalizzato alla deformazione generalizzata.
- → Usiamo le proprietà del materiale come i costanti per le molle.
- → Creano legame tra la statica e la cinematica tenendo conto le proprietà del materiale.
- → Considerando il materiale con cui stiamo lavorando, possiamo formulizzare il legame tra azioni interne e legame generalizzato.

Ipotesi: Per semplificare (oggi), poi generalizzeremo

↳ Materiale elastico lineare, omogeneo e isotropo

↳ Le proprietà non variano senso il punto della sezione o della trave.

↳ $\Rightarrow$ E, G sono le due variabili che definiscono il nostro materiale

E → Modulo di Young

G → Modulo di rigidezza al taglio $= \dfrac{E}{2(1+\nu)}$

Coefficiente di contrazione trasversale di Poisson

Approccio Rigoroso

Abbiamo definito prima che:

$$\underline{Q}(x) = \int_A \underline{\underline{B}}^T \underline{\sigma} \, dA \qquad \text{con } \underline{\sigma} = (\sigma_x, \tau_{xy})^T$$

$$= \begin{bmatrix} N \\ M \\ T \end{bmatrix}$$

Vogliamo descrivere $\underline{\sigma}$ in funzione di E e G

I nostri sforzi sono σ_x, σ_y, τ_{xy}, σ_y esiste ma è quello che viene annullato.

Problema Piano negli Sforzi

↳ Je tipi di problemi come questo dove gli sforzi sono nel piano con la trave.

Troviamo che:

dai libri

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{E}{(1-\nu)^2} \cdot \varepsilon_x \\ \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \end{cases}$$

Prendiamo come un stato dello sforzo per la singola fibra.

Possiamo definire una relazione:

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \underline{\underline{D}}\, \underline{\varepsilon} = \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{B}}\, \underline{q}$$

associate alla fibra del materiale

Matrice di rigidezza del materiale, come il $\underline{\underline{D}}$ che erano le rigidezze delle molle nei problemi di corpi rigidi.

Legame tra sforzi e deformazioni generalizzate.

Possiamo rimetterlo nella definizione di azioni interne:

$$\underline{Q}(x) = \int_A \underline{\underline{B}}^T \underline{\sigma}\, dA = \int_A \underbrace{\underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{B}}}_{\underline{\underline{K}}}\, dA \cdot \underline{q}(x) =$$

$$= \underline{\underline{K}}_{sez} \cdot \underline{q}(x)$$

Non dipende dal punto sulla sezione, solo dalla sezione stessa, quindi solo da x non y.

Prima $\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{D}}$ e $\underline{\underline{K}}$ descrivevano il sistema intero, in questo caso sono in riferimento alla singola sezione della trave.

Abbiamo ricavato un legame costitutivo, partendo da un legame per le singole fibre.

Il legame è lo stesso dei corpi rigidi perché sempre un legame tra una cinematica lineare e una relazione elastica lineare

↝ legame di spostamenti ($\underline{\underline{B}}$) → matrice di congruenza interna

↳ legame di storzi alle deformazioni · ($\underline{\underline{D}}$)

Sono sempre $\underline{\underline{B}}$ e $\underline{\underline{D}}$.

Calcolo di $\underline{\underline{K}}$

$$\underline{\underline{K}}_{sez} = \int_A \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} y & 0 \\ & \frac{E}{1-\nu^2} y^2 & 0 \\ \text{simm.} & & G \end{bmatrix} dA$$

Fattore di accoppiamento, tra deformazione assiale e curvatura flessionale.

Il nostro sistema di assi è baricentrico e principale d'inerzia.

Ha saltato i calcoli

$$= \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} A & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{1-\nu^2} I & 0 \\ 0 & 0 & GA \end{bmatrix}$$

Baricentrico ⇒ $\int_A y \, dA = 0$

$\int_A y^2 \, dA = I$

Facendo i calcoli con questa matrice e poi andando in laboratorio per trovare le risposte vere, troviamo che questo modello sovrastima la rigidezza delle trave.

↳ Predice sistematicamente spostamenti minori di quelli attuali.

↳ Fa senso perché abbiamo preso una sezione trasversale rigida quando in verità non lo sarà.

Da un punto di teorica, quando andiamo a calcolare l'energia di deformazione elastica del solido di DSV, e troviamo $\underline{\underline{k}}$ associata sarà:

$$\underline{\underline{k}}^{DSV}_{SEZ} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EJ & 0 \\ 0 & 0 & GA^* \end{bmatrix}$$

A^* - area ridotta di taglio di una sezione

$A^* = \frac{5}{6} A$ per un rettangolo.

Ogni termine in $\underline{\underline{k}}^{DSV}_{SEZ}$ è minore dell'associato termine in $\underline{\underline{k}}_{SEZ}$, quindi $\underline{\underline{k}}^{DSV}_{SEZ}$ è globalmente più flessibile di quella ricavata con il nostro approccio rigoroso.

Da un punto di vista pratico si usa $\underline{\underline{k}}^{DSV}_{SEZ}$ nel caso di una trave, omogenea e isotropa.

Se invece la nostra trave non è omogenea, elastico lineare o isotropa, l'unico strumento con cui possiamo ricostruire $\underline{\underline{k}}$ è di passare attraverso $\underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{B}}$, usando la definizione di azioni interne.

Applicazioni di U

Estensione della linea elastica delle travi

Abbiamo statica, cinematica e legame costitutivo. Pensando nello spirito del MDS, possiamo formulare il problema per avere solo le variabili di spostamento generalizzato come incognite.

La soluzione non sono un insieme di equazioni algebriche ma equazioni differenziali ordinarie.

Legame Costitutivo + Congruenza

$$N = EA \cdot \eta = EA \cdot u'$$

$$M = EI \cdot \chi = -EI \cdot \varphi'$$

$$T = GA^* \cdot t = GA(v' - \varphi)$$

Equilibrio

se il materiale è omogeneo sulla trave intera non solo la sezione di può tirare fuori EA

$$N' + n = 0 \qquad (EAu')' + n = 0$$

$$M' - T = 0 \qquad -(EI\varphi')' - GA^*(v' - \varphi) = 0$$

$$T' + p = 0 \qquad [GA^*(v' - \varphi)]' + p = 0$$

Problema Assiale è totalmente disaccoppiato

$\Downarrow$

+ Condizioni al contorno scritte in base a v, φ e U.

Si può trovare U indipendentemente da v e φ e viceversa

Non è sempre vero, se a $\underline{u}$ il fattore di eccoppiamento non si fosse annullato, cioè se il nostro sistema di assi non fosse baricentrico non sarebbe non sarebbero indipendenti.
Il termine che lega la deformazione assiale all'effetto della curvatura flessionale.

↳ Nel caso in cui il materiale non è omogeneo / non è simmetrico intorno all'asse della trave, allora si inflette per il solo allungamento, non sono più indipendenti.

Il problema flessionale di questo caso è la generalizzazione delle equazioni della linea elastica → l'anno scorso abbiamo usato il modello di eulero bernoulli.

$$-(EI\varphi')' - GA^*(v'-\varphi) = 0 \quad \swarrow dx$$

$$\left[GA^*(v'-\varphi)\right]' + p = 0$$

↳ Possiamo isolare per trovare la derivata.

$$-(EI\varphi')'' + p = 0 \rightarrow (EI\varphi')'' = p$$

calcolo rotazione (φ) dato il carico (p)

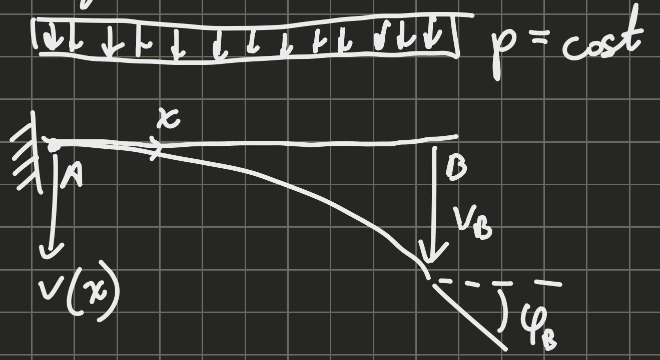
$$GA^*v' - GA\varphi = -(EI\varphi')' \rightarrow v' = \varphi - \frac{1}{GA^*}(EI\varphi')'$$

↳ Calcolo di v da φ

2 passi per risolvere:

1. Calcolo φ da p
2. Calcolo v da φ

Esempio di calcolo:



$$EI\,\varphi''' = p \rightarrow \varphi''' = \frac{p}{EI}$$

Condizioni

$$\varphi'' = \frac{p}{EI}x + a_2$$

$$\varphi' = \frac{p}{2EI}x^2 + a_2 x + a_1 = 0$$

$$\varphi = \frac{1}{6}\frac{p}{EI}x^3 + \frac{a_2}{2}x^2 + a_1 x + a_0$$

$\hookrightarrow \varphi(0) \Leftrightarrow \varphi_0 = 0$

$$\left.\begin{aligned} v_A &= v(0) = 0 \\ \varphi_A &= \varphi(0) = 0 \end{aligned}\right\} \text{Dirichlet}$$

$$\left.\begin{aligned} M_B &= M(\ell) = 0 \\ T_B &= T(\ell) = 0 \end{aligned}\right\} \text{Neumann}$$

Ad estremi liberi, T e M sono nulli.

M e T non ci piacciono perché non li abbiamo direttamente, quindi le riscriverlo in funzione di φ

$\hookrightarrow$ Usiamo la congruenza interna e del legame.

$$M = EI\chi = -EI\varphi'$$

se $M(\ell) = 0 \Rightarrow -EI\varphi'(\ell) = 0 \rightarrow \varphi'(\ell) = 0 \longleftrightarrow M_B = 0$

$$T = M'$$

$T_B = 0 \Longleftrightarrow \varphi''(\ell) = 0 \quad \frac{p\ell}{EI} + a_2 = 0 \rightarrow a_2 = \frac{-p\ell}{EI}$

$$\frac{1}{2}\frac{p\ell^2}{EI} - \frac{p\ell^2}{EI} + a_1 = 0 \rightarrow a_1 = \frac{p\ell^2}{EI}$$

Step 1 $\varphi(x) = \frac{pl^3}{EI}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{x}{l}\right]$

Step 2 → Calcolo div con φ

$$v(x) = \underbrace{\frac{pl^4}{EI}\left[\frac{1}{24}\left(\frac{x}{l}\right)^4 - \left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]}_{\int \varphi} - \frac{pl^2}{GA^*}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{x}{l}\right] + \overset{0}{\cancel{C}}$$

$$\underbrace{-\frac{1}{GA^*}(EI\varphi')'}_{\text{seconda parte di eq. div'}} = -\frac{EI}{GA^*}\varphi'' = \left(\frac{pl}{\cancel{EI}}x\left(\frac{x}{l}\right) - \underbrace{1\,\frac{pl^2}{\cancel{EI}}}_{a_1}\right)\cdot\frac{-\cancel{EI}}{GA^*}$$

termine da integrare $\longrightarrow$ $= \left[\left(\frac{x}{l}\right) - 1\right]\cdot\underbrace{\frac{-pl}{GA^*}}_{cost}$

$$\left[\frac{pl^4}{EI}\right] = \frac{\frac{F}{L}\cdot L^4}{\frac{F}{L^2}\cdot L^4} = [L]$$

$$\left[\frac{pl^3}{GA}\right] = \frac{\frac{F}{L}\cdot L^2}{\frac{F}{L^2}\cdot L^2} = L$$

$$V_A = v(0) = 0 \iff C = 0$$

Sono caricati dello stesso conico p, quindi non ci può essere meno.

$$V_B = v(x=l) = \underbrace{\frac{pl^4}{EI}\cdot\frac{1}{8}}_{\substack{\text{Da } \frac{1}{EI}\text{, la}\\ \text{deformabilità}\\ \text{flessionale}\\ V_B^{(M)}}} + \underbrace{\frac{pl^2}{GA^*}\cdot\frac{1}{2}}_{\substack{\text{Da } 1/GA^*\text{,}\\ \text{contributo della}\\ \text{deformabilità}\\ \text{tagliante allo}\\ \text{spostamento di B}\\ V_B^{(T)}}}$$

due meccanismi di deformazione che agiscono in parallelo sulla trave.

Possiamo confrontare l'effetto dei due contributi

$$= \frac{1}{8} \, p \frac{l^4}{EJ} \left(1 + \underbrace{\frac{EJ}{GA^t l^2} \cdot 4}_{\frac{V_B^{(T)}}{V_B^{(M)}}} \right)$$

↳ È indipendente dal carico, è effetto del materiale e della forma della trave.

Esempio sezione rettangolare:

$$\frac{E}{G} = 2(1+\nu) \qquad I = \frac{1}{12} b h^3 \qquad A^t = \frac{5}{6} b h$$

$$\frac{V_B^{(T)}}{V_B^{(M)}} = \frac{2(1+\nu) \cdot \frac{1}{12} b h^3}{\frac{5}{6} b h \cdot l^2} \cdot 4 = \underbrace{\frac{4(1+\nu)}{5}}_{\sim 1} \cdot \left(\frac{h}{l}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

per $\nu \sim 1{,}25$ → vicino al valore dell'acciaio

L'ordine di grandezza è controllato da $\frac{h}{l}$

$\lambda = \frac{l}{h}$ → snellezza.

Per travi di snellezza ordinaria $V_B^{(T)}$ è fondamentalmente trascurabile.

$$\varphi_B = \varphi(l) = p \frac{l^3}{EJ} \cdot \frac{1}{6}$$

Nel caso di V avevamo l'influenza della deformabilità per taglio, in questo caso non entra

⇒ per le travi snelle se ignoriamo il taglio non ha effetto sulla rotazione.

$$(EI\varphi')' = p \rightarrow \boxed{EIv'' = p}$$

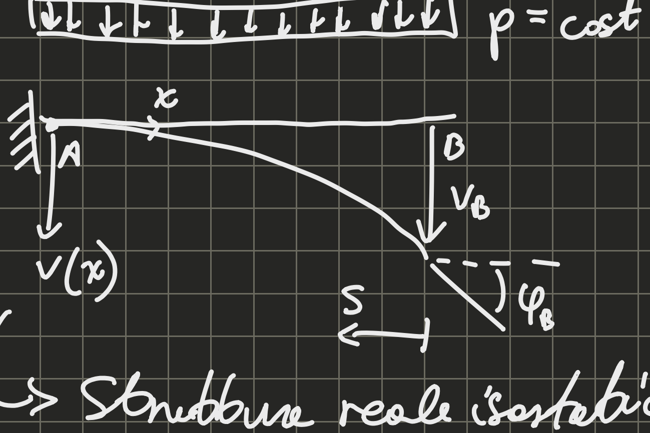
Equazione della linea elastica per la trave di Eulero-Bernoulli.

se $t=0 \rightarrow \varphi = v'$ $\quad \varphi' = v''$

Sistemi Discreti

↳ Quello che abbiamo fatto ci da una espressione per ogni punto della trave, che è superfluo. Usiamo il PLV e il metodo delle forze per ricavare solo l'informazione che vogliamo, lo possiamo fare poiché sappiamo ora l'espressione del L_{INT} per la trave.

Esempio di calcolo:



$$\left.\begin{aligned} v_A &= v(0) = 0 \\ \varphi_A &= \varphi(0) = 0 \end{aligned}\right\} \text{Dirichlet}$$

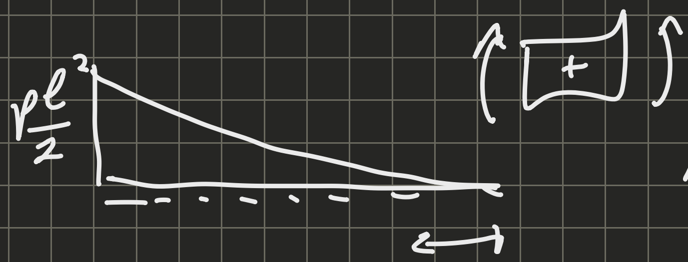
$$\left.\begin{aligned} M_B &= M(\ell) = 0 \\ T_B &= T(\ell) = 0 \end{aligned}\right\} \text{Neumann}$$

↳ Struttura reale isostatica

↳ Possiamo facilmente calcolare le azioni interne

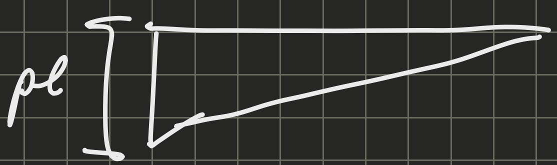
PLV

Azioni interne struttura reale

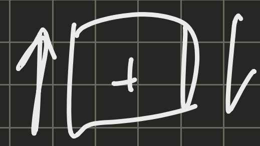


$M(s) = \frac{1}{2} p s^2$

$\rightarrow \chi(s) = \frac{M(s)}{EI}$



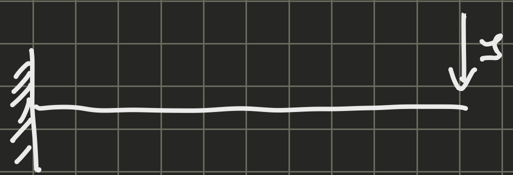
$T(s) = p \cdot s$

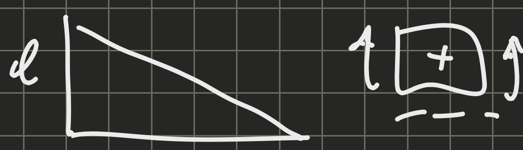


$t(s) = \frac{T(s)}{GA^*}$

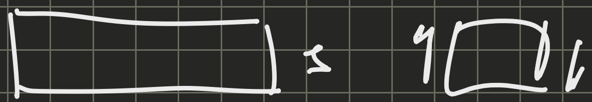
Struttura Fittizia C^*

Per avere v_B, carico $F_{ext}=1$ in v_B come v_B





M^*



T^*

PLV Statica → Fittizio
Cinematica → Reale

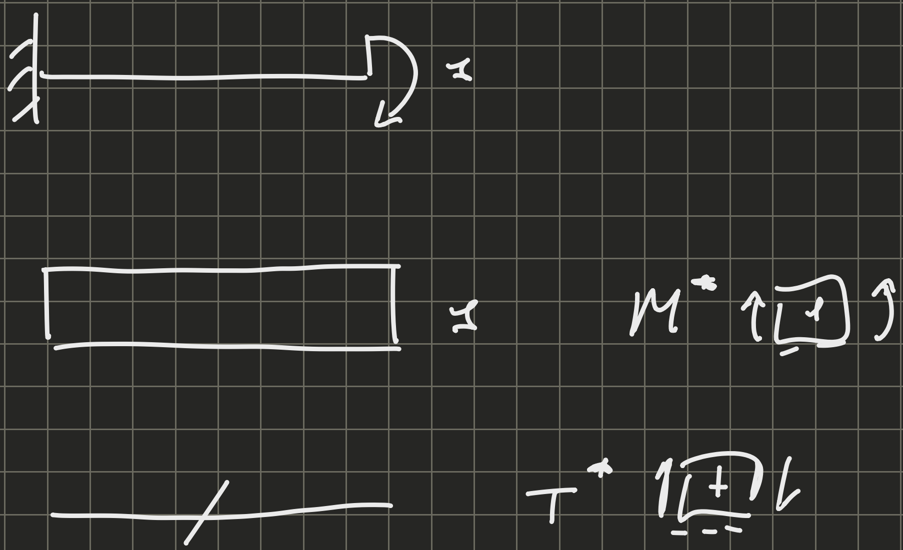
$$L_{ext} = 1 \cdot v_B = \int_0^l (M^* \chi + T^* t)\, ds = \int_0^l \left(\frac{M^* M}{EI} + \frac{T^* T}{GA^*} \right) ds$$

Da fittizio

Da reale

$= v_B^{(M)} + v_B^{(T)}$

Per calcolare il carico test è



↳ Il fatto che è 0 significa che sparisce il termine della deformazione tagliante, come abbiamo visto con l'approccio diretto.

Vantaggio di questo approccio è che non abbiamo dovuto integrare equazioni differenziali e abbiamo ottenuto lo stesso risultato direttamente solo la quantità di spostamento che cercavamo.