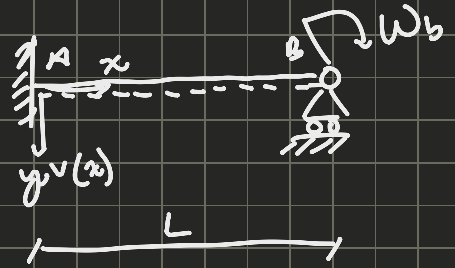
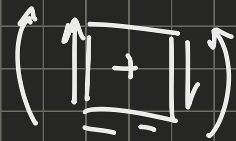
Lezione 12 – Metodo degli spostamenti



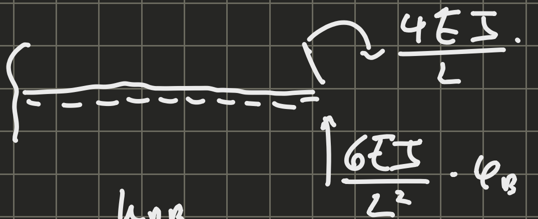
$k_{tp} = GA \to \infty$

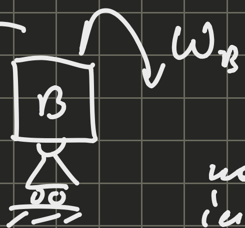


Possiamo risolvere perfettamente questo con la linea elastica.

Ma non è così facile senza risolvere una ODE

Equilibrio al nodo B





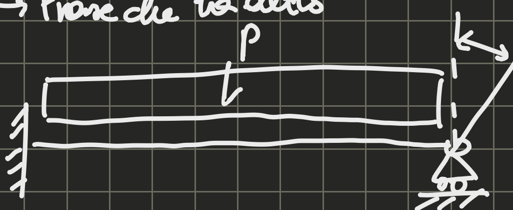
Vediamo il nodo, infinitesimo in dimensione che non si deforma.

Effetto di condizioni di vincolo.

$$W_B = \frac{\overbrace{4EI}^{k_{AB}}}{L}\varphi_b$$

$\boxed{10:40}$ → Frase che ha detto

→ Al nodo c'è equilibrio tra il momento generato dalla trave e il momento concentrato



Trattiamo la trave come una molla. È lo stesso coi corpi rigidi con i nodi essendo i corpi rigidi.

Equazione della linea elastica

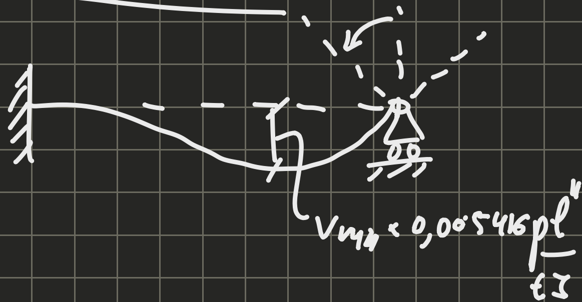
$$EIv'''' = p$$

Condizioni di contorno

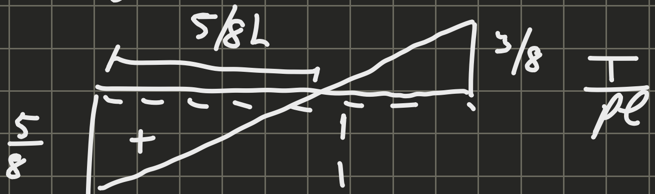
$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v(L) = 0 \\ v'(0) = 0 \\ v''(L) = 0 \end{cases}$$

Deformata

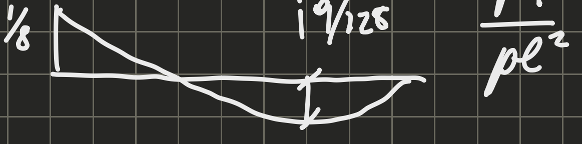
$\varphi_B = \frac{-1}{48}\frac{pl^3}{EI}$



Taglio



Momento



Il problema della semplificazione che abbiamo fatto con l'equilibrio alla rotazione del nodo B. L'equilibrio è già dato dal sistema.

φ_B è effetto del carico p distribuito sulla trave.

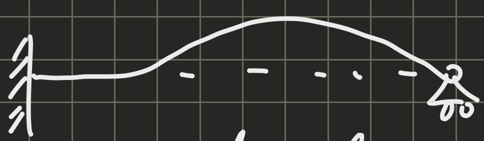
Vogliamo trovare W_0 equivalente che ha senso di effetto resistivo della trave a p, causando φ_B.

<u>I° metodo</u> → Equivalenza energetica.

Cinematica ammissibile qualunque

$\hat{v} = v_\varphi \cdot \hat{\varphi}_B$

→ Una possibile deformata del sistema



Cinematica Ammissibile

Possiamo descrivere la trave in base a φ_B

$$L^a_{ext} = \int_0^l p\,\hat{v}\,dx = p\,\hat{\varphi}_B \int_0^l v_\varphi(x)\,dx = -\frac{p\,l^2}{12}\,\hat{\varphi}_B$$

$$L^b_{ext} = W_0 \cdot \hat{\varphi}_B$$

$$L^b_{ext} = L^b_{ext} \iff W_0 = -\frac{p\,l^2}{12}$$

Per vedere se questa è corretta si può trovare l'equazione della trave come nodo:

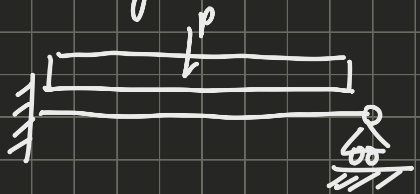
$$k_{BB} \cdot \varphi_B = W_0$$

$$\frac{4EI}{L}\cdot\varphi_B = -\frac{pl^2}{12} \Rightarrow \varphi_B = \frac{-1}{48}\,\frac{pl^3}{EI}$$

È utile come metodo ma non è standardizzabile.

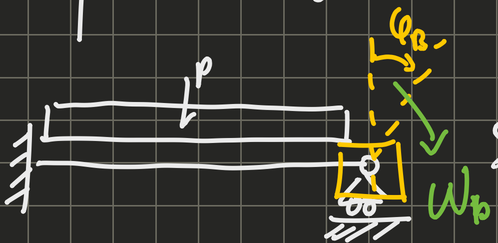
2° metodo:

↳ Vogliamo arrivare lo stesso a scrivere $k_{BB}\cdot\varphi_B = W_0$



Struttura Reale

Vincoliamo tutte le possibilità di spostamento generalizzato in questo caso la rotazione in B



Struttura Cinematicamente Determinata

Per essere uguale alla struttura originale bisogna avere congruenza in questo caso $W_B = 0$

Reazione vincolare in B.

→ Nell'MDF imponevamo che $\Delta\varphi = 0$

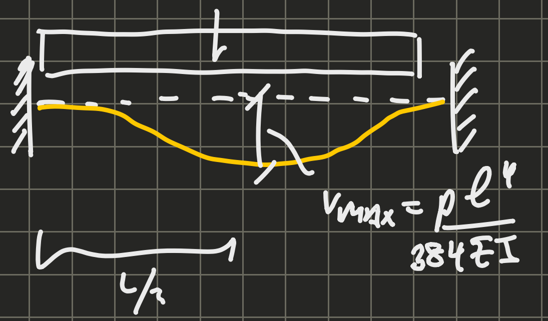
→ L'equazione che vogliamo scrivere per poter trovare φ_B.

Per principio della sovrapposizione sommiamo gli effetti della struttura ausiliaria "0" dove ($p\neq 0$, $\varphi_B=0$) e la struttura ausiliaria "1" dove ($p=0$, $\varphi_B=1$)

φ_B è la nostra incognita iperstatica in effetti!

Struttura Ausiliaria "0" → sarà sempre un sistema incastro incastro, che possiamo tabellare per diversi effetti. Nell'MDF tutte le strutture erano isostatiche, qui sono tutte iperstatiche.

$p \neq 0,\ \varphi_B = 0$



$$v_0(x) = \frac{p\ell^4}{24EI}\left[\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right]$$

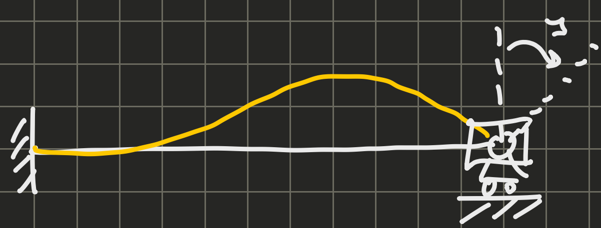
$$\varphi_0(x) = v_0'(x) = \ldots$$

$$M_0(x) = -EI\,\varphi_0'(x) = \ldots$$

$$T_0(x) = M_0'(x) = \ldots$$

Tutto questo è in tabelle.

Struttura Ausiliaria "1" $\quad p = 0,\ \varphi_B = 1$



→ Come imponevamo $X_1 = 1$ nell'MDF.

Questo problema lo abbiamo già risolto.
Questa è la v_{eq} che abbiamo usato per il PLV.

$$v_1(x) = 1 \cdot L\left[\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - \left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right]$$

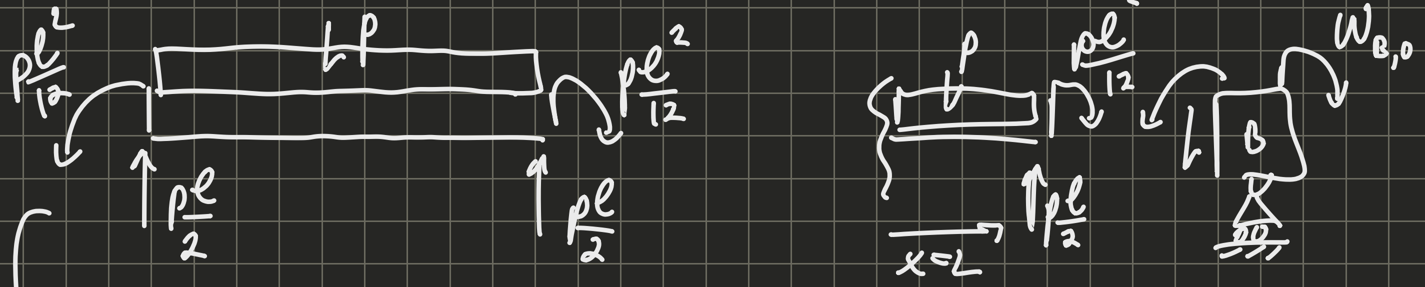
$$\varphi_1(x) = v_1'(x) = \ldots$$

$$M_1(x) = -EI\,\varphi_1'(x) = \ldots$$

$$T_1(x) = M_1'(x) = \ldots$$

Possiamo trovare la reazione al punto B.

Quello che troviamo nelle tabelle sono le diverse strutture con diversi carichi, e le azioni interne agli estremi.

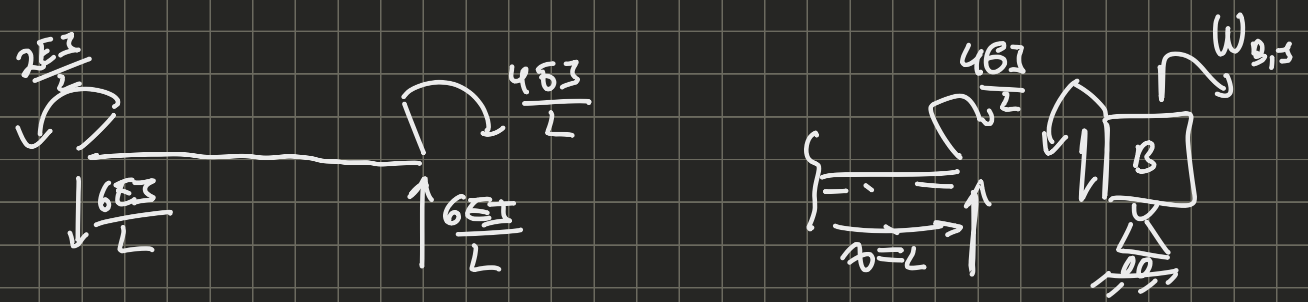


$$W_{B,0} = \frac{pl^2}{12}$$

Sapendo le azioni in B si può fare l'equilibrio al nodo B, quindi troviamo W_B associato

Vediamo che bloccando tutto W bilancia p.

Struttura "1"



$$W_{B,1} = \frac{4EJ}{L} = \underline{\underline{k_{RB}}}$$

$$W_B = 0 \Rightarrow W_B = \varphi_B W_{B,1} + W_{B0} = 0$$

$$\varphi_B \cdot k_{RB} + p\frac{l^2}{12} = 0$$

$$\Rightarrow \varphi_B = \frac{-1}{48} \frac{pl^2}{EJ}$$

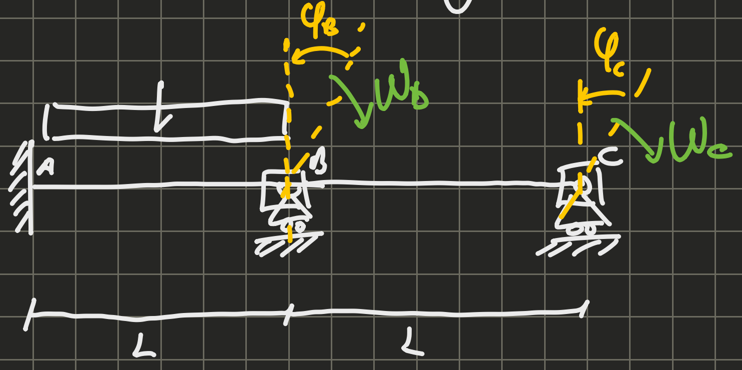
Individuiamo i nodi.
Vincoliamo tutti gli spostamenti
Imponiamo $\omega_B = 0$
Ed studiamo $n+1$ strutture
→ numero di vincoli

con le strutture "1" si trovano i k_{ij}
e con "0" si trova lo sforzo generato da p spostata al vincolo, riportiamo distribuiti sulle travi dai carichi distribuiti ai nodi.

$W_{B,0}$ è positivo perché lo stiamo trovando a sinistra non a destra.

Questo il duale dell'MDF.

Struttura a due gradi di spostamento



$M_p : GA \to \infty$

Abbiamo 2 campi di trave e 3 vincoli.

Serve un solo φ_B in B perché non è interrotta quindi saranno uguali a sinistra e destra.

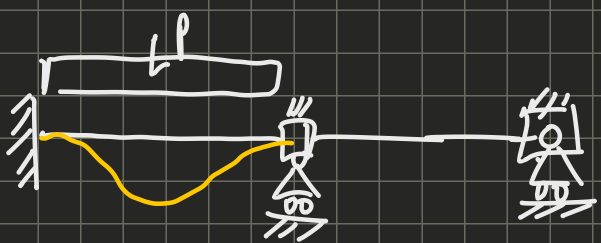
$N=2 \rightarrow \underline{U} = (\varphi_B, \varphi_C)^T$

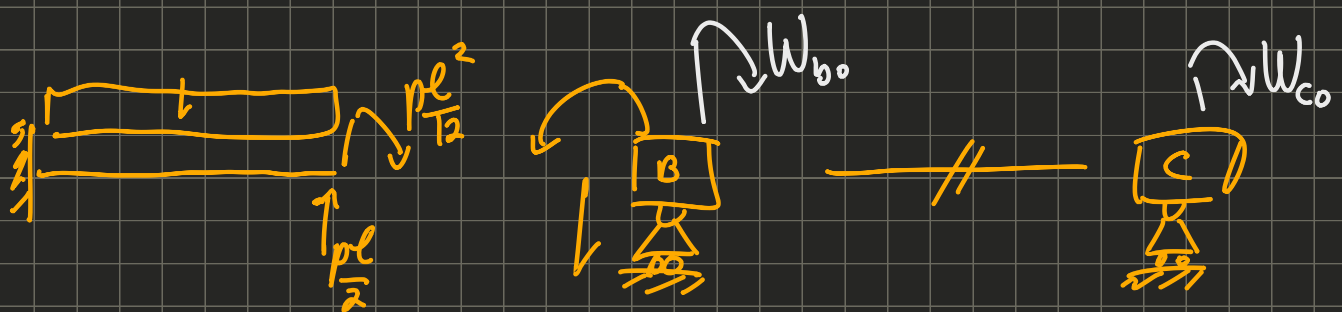
$:= (U_1, U_2)^T \rightarrow$ Stessa forma dei sistemi rigidi.

Strutture Ausiliare : $N+1$

$\rightsquigarrow$ Equazioni Risolventi $\rightsquigarrow \begin{cases} W_b = W_{b1} U_1 + W_{b2} U_2 + W_{b0} = 0 \\ W_c = W_{c1} U_1 + W_{c2} U_2 + W_{c0} = 0 \end{cases}$

Struttura Ausiliare "0" $\quad p \neq 0 \mid U_1 = U_2 = 0$

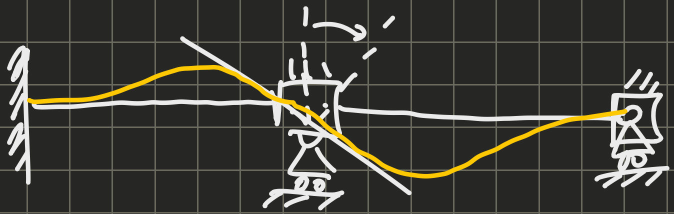


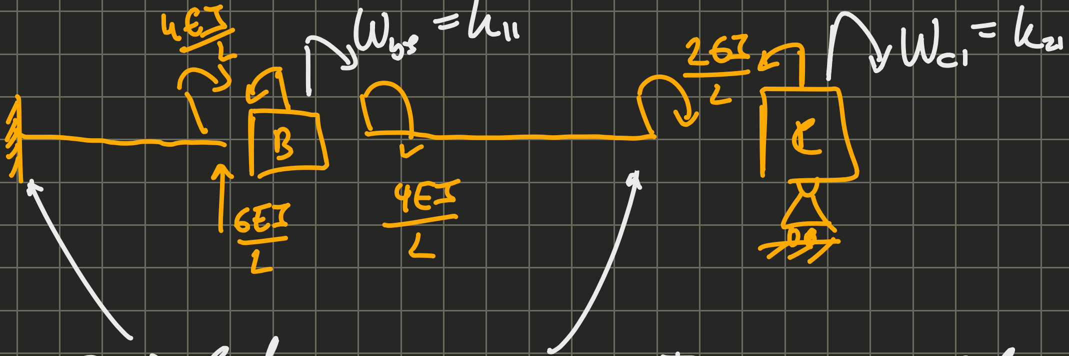


$W_{b0} = p\frac{l^2}{12}$

$W_{c0} = 0$

Struttura "1" $\quad p=0, \; U_1 = 1, \; U_2 = 0$





sono costanti, dove $\frac{4EI}{L}$ è ad un lato, $\frac{2EI}{L}$ sarà all'alto.

Perché il nodo deve resistere sia la trave alla sinistra che la trave alla destra.

$$\begin{cases} W_{bs} = (4+4)\frac{EI}{L} = \frac{8EI}{L} = k_{RBs} \\ W_{c1} = 2\frac{EI}{L} = k_{RC1} \end{cases}$$

Nei corpi rigidi facevamo $\underline{F_R} = \underline{\underline{k}}\,\underline{U}$

Questa è un parente di questa.

$\underline{\underline{k}}\,\underline{U} + \underline{P} = 0$

vettore dei carichi generalizzati nodali

↳ applicati ai nodi

Di solito si scrive

$W_b = k_{11}U_1 + k_{12}U_2 + P_1 = 0$

↳ 1, 1

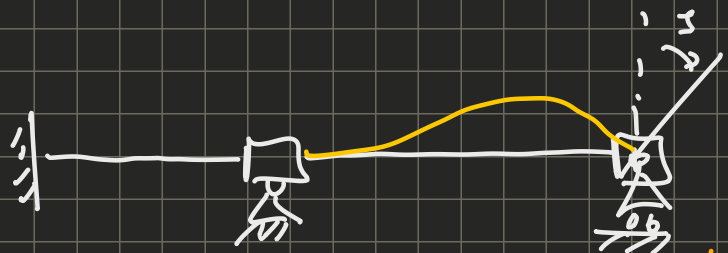
dove viene attivato

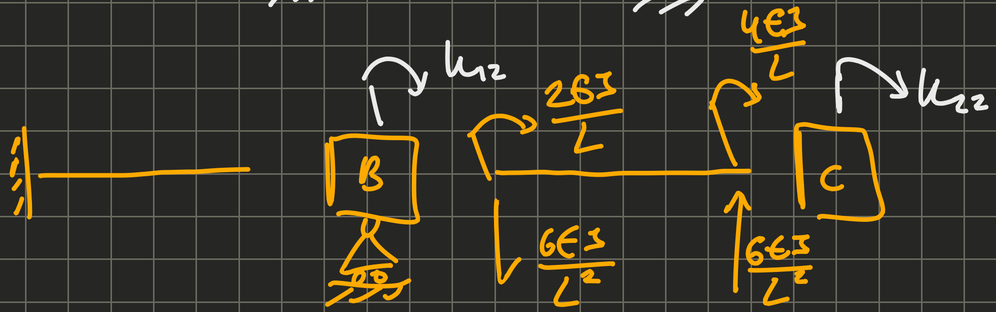
↳ chi la attiva

$W_c = k_{21}U_1 + k_{22}U_2 + P_2 = 0$

$k_{21} = k_{12}$; $\underline{\underline{k}}$ è simm.

Struttura "2" $p = 0,\ U_1 = 0,\ U_2 = 1$





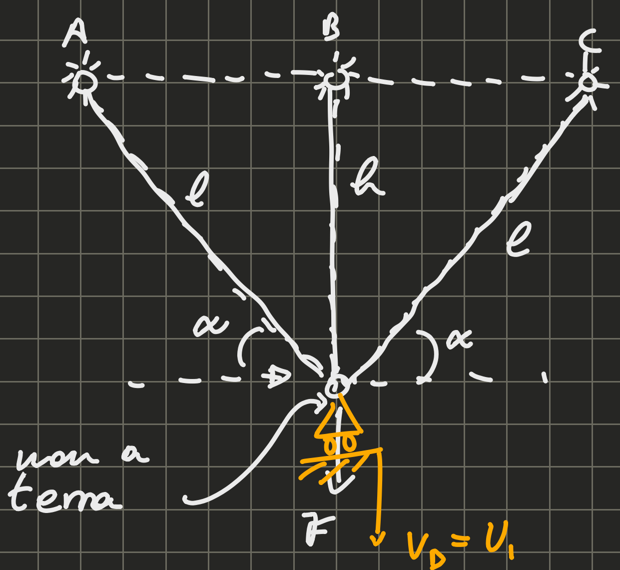
$$k_{12} = \frac{2EJ}{L} \quad \left(= k_{21} \ \text{OK} \right)$$

$$k_{22} = \frac{4EJ}{L}$$

Tutti i termini di k sono > 0

$$\underline{\underline{k}}\,\underline{U} + \underline{p} = \underline{0} \implies \underline{U} = -\underline{\underline{k}}^{-1}\underline{p} = \frac{pl^3}{12EJ}\begin{pmatrix} -1/7 \\ 1/14 \end{pmatrix}$$

Esempio di strutture a bielle



Hp: EA tutti uguali

$l \sin\alpha = h$

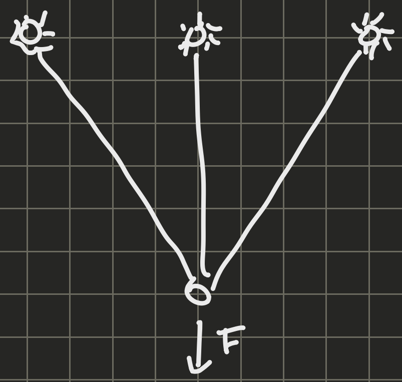
$h = \frac{l}{\sin\alpha}$

3 travi

4 aste.

In questo caso M è 0, quindi non possiamo ignorare le deformazioni assiali.

<u>Struttura "0"</u> $\neq 0$, $U_1 = 0$



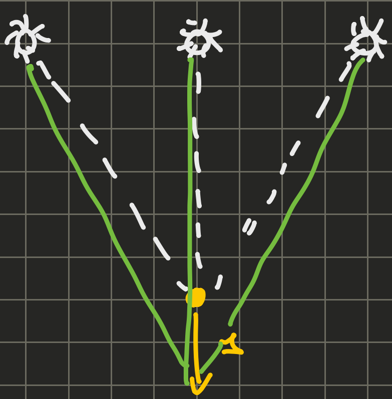
B

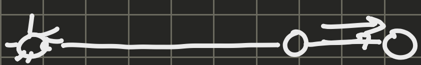
$\downarrow P_1$

componente 1 di P, cioè F

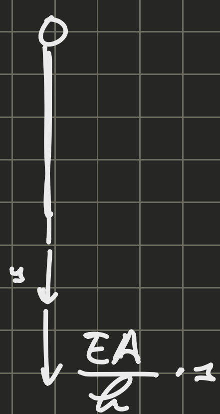
$P_1 = -F$

Struttura "1" $F = 0$, $U_1 = 1$

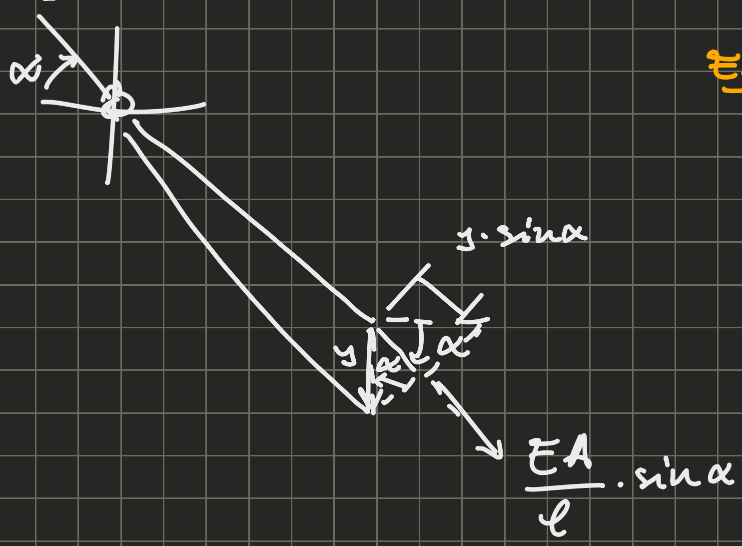




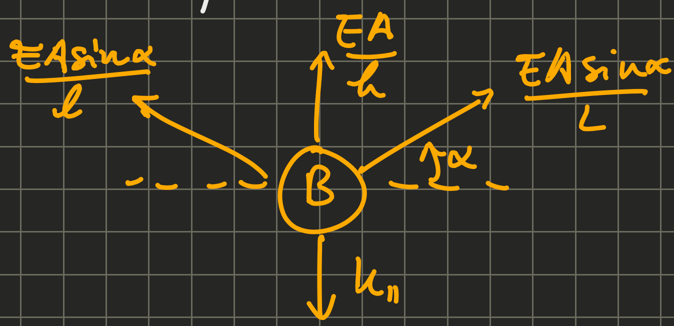
Asta BD



Asta AD



Equilibrio nodo B



$$k_{11} = \frac{EA}{h} + 2\frac{EA}{l}\sin^2\alpha = \frac{EA}{h}\left(1+2\sin^3(\alpha)\right)$$

$$k_{11}U_1 + P_1 = 0$$

$$\frac{EA}{h}\left(1+2\sin^3\alpha\right)U_1 - F = 0$$

$$U_1 = \frac{Fh}{EA}\cdot\frac{1}{(1+2\sin^3(\alpha))} > 0$$

fa senso perché stiamo tirando giù quindi B si deve spostare in giù.