Lezione 7-

Equazione Globale dell'equilibrio Dinamico

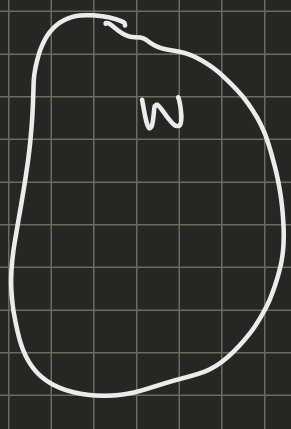
Finora ero nella scala indefinita nei fluidi reali.

$$\rho(\underline{f}-\underline{a}) = \mathrm{div}\,\underline{\Phi} \rightarrow \text{Generale Indefinita}$$

$$= \mathrm{grad}\,p \rightarrow \text{Fluido Perfetto}$$

$$= \mathrm{grad}\,p - \mu \Delta \underline{v} \rightarrow \text{Navier Stokes (Incompressibile)}$$

Per trovare globale, come abbiamo sempre fatto, integriamo nello spazio.



Volume di controllo di fluido W.

L'aumento della scala implica una diminuzione del dettaglio.

$$\underbrace{\int_W \rho \underline{f}\, dW}_{\underline{G}}$$

Lo abbiamo già visto nella statica

↳ Azione di massa globale

↳ se $\underline{f} = \underline{g}$, $\underline{G}$ = però

$$- \int_W \rho \frac{d\underline{v}}{dt} \, dW = - \int_W \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \underline{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \underline{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \right) dW$$

$$\frac{\partial (AB)}{\partial x} = A \frac{\partial B}{\partial x} + B \frac{\partial A}{\partial x}$$

$$\Rightarrow A \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial AB}{\partial x} - B \frac{\partial A}{\partial x}$$

Applicando questo alle derivate

$$\frac{\partial (\rho \underline{v})}{\partial t} - \cancel{\underline{v} \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \frac{\partial (\rho u \underline{v})}{\partial x} - \cancel{\underline{v} \frac{\partial (\rho u)}{\partial x}} + \frac{\partial (\rho v \underline{v})}{\partial y} - \cancel{\underline{v} \frac{\partial (\rho v)}{\partial y}} + \frac{\partial (\rho w \underline{v})}{\partial z} - \cancel{\underline{v} \frac{\partial (\rho w)}{\partial z}}$$

$$- \underline{v} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \underline{v}) \right] = 0$$

↳ per la equazione di continuità

Individualmente non sono 0 ma tutti insieme

$$- \int_W \frac{\partial (\rho \underline{v})}{\partial t} dW = \underline{I}$$

↳ Termine delle inerzie locali

$$- \int_W \left(\frac{\partial (\rho u \underline{v})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v \underline{v})}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w \underline{v})}{\partial z} \right) dW$$

↳ $$- \int_W \left[\frac{\partial (\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho u v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w u)}{\partial z} \right] dW = - \int_W \text{div} (\rho u \underline{v}) \, dW =$$

Divergenza

$$= \int_A \rho u \underline{v} \cdot \underline{n} \cdot dA$$

$\hookrightarrow$ - - - - - - - - - - $= \int_A \rho\, v \underline{v} \cdot \underline{n} \cdot dA$

$\hookrightarrow$ - - - - - - - - - - $= \int_A \rho w \underline{v} \cdot \underline{n} \cdot dA$

$$= \int_A \rho \underline{v} \cdot \underline{v} \cdot \underline{n} \cdot dA = \underline{M}$$

↳ Flusso di quantità di moto

↳ Spinta dinamica

$$\underbrace{\rho(\underline{f} - \underline{a})}_{\text{Indefinita}} = \underbrace{\underline{G} + \underline{I} + \underline{M}}_{\text{Globale}}$$

$$\underline{G} = \int_W \rho \underline{f}\, dW$$

$$\underline{I} = \int_W - \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t}\, dW$$

$$\underline{M} = \int_A \rho\, \underline{v} \cdot \underline{v} \cdot \underline{n}\, dA$$

In statica c'era solo $\underline{G}$, perché non c'era $\underline{a}$, da cui abbiamo ricavato $\underline{I}$ e $\underline{M}$ integrando.

Questo è valido per il generale, perfetto e navier-stokes perché la parte a sinistra è sempre uguale.

Guardiamo ora altro con di quello alla sinistra

Globale

$$\underbrace{-\int_W \operatorname{div} \underline{\Phi}\, dW}_{} = \int_A \underline{\Phi} \cdot \underline{n}\, dA = \int_A \underbrace{\underline{\phi}}_{} \cdot dA = \underline{\Pi}$$

↳ (−) perché l'ho tirato dall'altra parte

Risultante degli

(+) perché teorema della divergenza cambia

sforzi su contorno, risultante delle azioni di superficie

più complesso di quello della statica

perché contiene contributo della viscosità.

$$\rho(\underline{f}-\underline{a}) = \operatorname{div}\underline{\Phi} \rightarrow \underline{G}+\underline{I}+\underline{M}+\underline{\Pi} \doteq 0$$

$$\underline{\Pi} = \int_A \underline{\Phi}\, dA$$

Fluido Perfetto

(−) perché portato a sinistra

$$-\int_W \operatorname{grad} p\, dW = \int_A p\cdot\underline{n}\cdot dA = \underline{\Pi}_p$$

Teorema di Green

L'abbiamo già fatto nella statica

più semplice di prima perché manca l'effetto della viscosità.

$$\rho(\underline{f}-\underline{a}) = \operatorname{grad} p \rightarrow \underline{G}+\underline{I}+\underline{M}+\underline{\Pi}_p = 0$$

Navier-Stokes

La prima parte è già fatta.

$$\int_W \mu\, \Delta\underline{v}\, dW = \int_W \mu \cdot \operatorname{div}(\operatorname{grad}(\underline{v}))\, dW =$$

(+) perché portato a sinistra

integrando e tramite l'ipotesi di Newton

$$= - \int_A \mu \, \text{grad}\, \underline{v} \cdot \underline{n} \, dA = - \int_A \mu \frac{\partial v}{\partial n} dA = \underline{I}$$

(-) perché

Teorema della Divergenza

→ Effetto della viscosità

$$\rho(\underline{f} - \underline{a}) = \text{grad}\, p - \mu \Delta \underline{v} \rightarrow \underbrace{\underline{G}}_{\text{Azione di massa}} + \underbrace{\underline{I} + \underline{M}}_{\text{Accelerazione}} + \underbrace{\underline{\Pi}_p + \underline{I}}_{\text{Azioni di Superficie}} = 0$$

$\underline{F} = m \underline{a}$

$\boxed{11:12}$

Stokesiano perbellezza qualcos'altro

Legame lineare tra sforzi e velocità

Si vedono tracce delle ipotesi in ogni formula.

$$\Phi_\mu = -\mu \frac{\partial v}{\partial n} \rightarrow \text{Scrittura matematica semplice della ipotesi che fece Newton}$$

→ Legge di Newton fluido dinamica

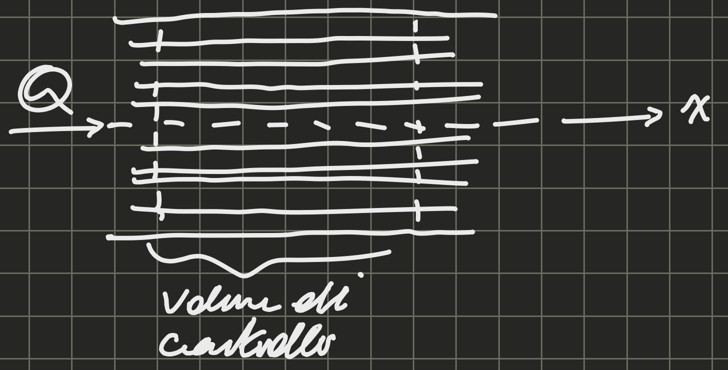
Statica → Cinematica → Dinamica

Equazioni Indefinite ed Equazioni Globali.

Usiamo queste equazioni e vediamo cosa ne ricaviamo

Caso: Flusso di Poiseuille in condotta cilindrica

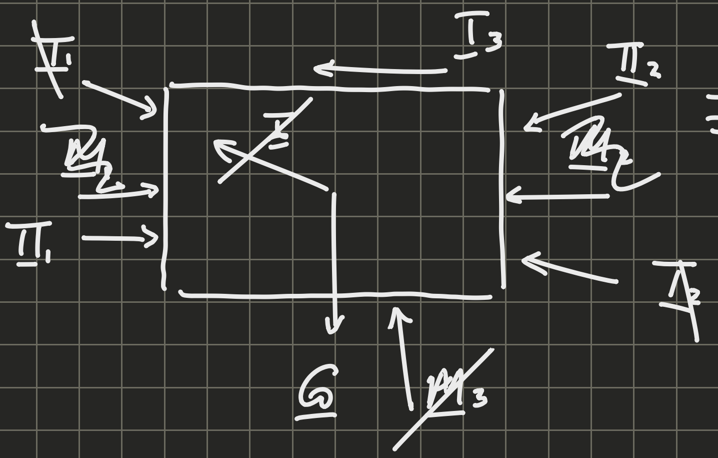
Diagramma è lo stesso ma è cilindrico non piano



Guardiamo in 2 modi:

- Volume di controllo tutto tubo
- Volume di controllo linea di flusso

Volume di controllo



$\underline{G} + \underline{I} + \underline{M} + \underline{\Pi}_p + \underline{I} = 0$

$\underline{I}$ non sappiamo com'è diretto

Sappiamo che le $\underline{\Pi}$ sono di sola pressione quindi abbiamo lasciato stare il p.

Considerazioni semplificative:

$\underline{I}$ lo togliamo perché vogliamo moto permanente (niente varia nel tempo)

$\underline{M} = \int_A \rho \cdot \underline{v} \cdot \underline{v} \cdot \underline{n} \; dA \rightarrow \underline{v}$ dà la direzione, visto che Poiseuille ha correnti lineari, $\underline{v}$ ha direzione uguale a Q

$\Delta G = 5$

È un moto uniforme che significa che ogni sezione è uguale alla sua prima

Visto che è uguale, la somma degli $\underline{M}$ è 0, se stessi non sono 0 come $\underline{I}$.

$\underline{M}_3$ è 0 perchè al contorno si ha la condizione di aderenza quindi $\underline{v}$ è 0 quindi $\underline{M}$ è 0.

$\underline{\Pi}_1$ e $\underline{\Pi}_2$ sono eccentriche

$\underline{I} = -\int_A \mu \frac{\partial \underline{v}}{\partial n} dA \Rightarrow \underline{I}_1 = \underline{I}_2 = 0$, perchè $\underline{n}$ è $\longrightarrow$,

e visto da sezione per sezione non varia allora $\underline{V}$ non varia con n quindi $\underline{I}_1$ e $\underline{I}_2$ sono 0. $(\circledast_1)$

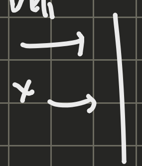
In più implica che $\underline{I}_3$ ha direzione $\xleftarrow[\text{così}]{}$

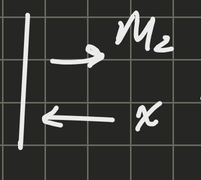
Quello che rimane è un'equilibrio verticale di $\underline{G}$ e $\underline{\Pi}_3$ e un'equilibrio orizzontale di $\underline{I}_3$, $\underline{\Pi}_1$ e $\underline{\Pi}_2$

$$\circledast_1 = \underline{M}_1 = \int_A \rho \underbrace{u}_{\underline{v}} \underbrace{u}_{\underline{v}\cdot\underline{n}} dA$$

$$M_2 = \int_A \rho \underbrace{u}_{\underline{v}} \underbrace{(-u)}_{\underline{v}\cdot\underline{n}} dA$$

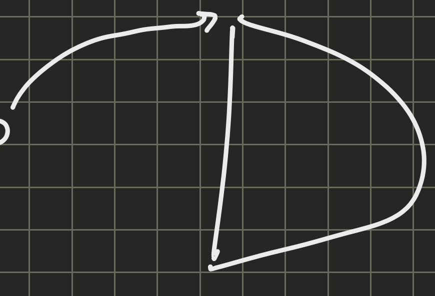
Quindi sono opposti e la somma è 0.





Profilo di Velocità

$$\circledast_2 = u\big|_{parete} = 0$$



ma $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{parete} \neq 0$, perché anche se $u=0$, ci deve esser una derivata che lo porta a 0.

questa derivata e derivazione ⟵
perché la derivata sarà ↖ ma tutti i componenti lungo y si cancellano lasciamo solo l'attrito che agisce lungo y si cancella lasciando solo i termini lungo x che costituiscono l'attrito. La derivata alla parete ⟵
delle velocità.

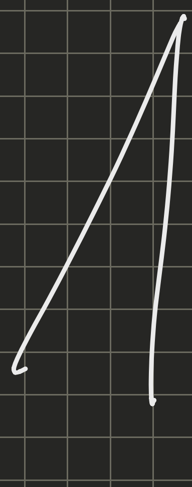
La derivata tende ad andare così ⟵ quindi
l'attrito va anche lui così

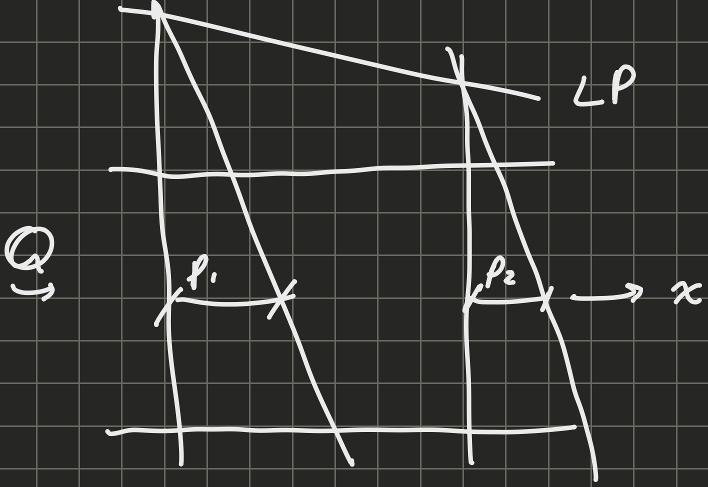
Volume di controllo con tutte le forze, semplifico e otteniamo degli equilibri

L'equilibrio verticale non lo guardiamo, guardiamo quello orizzontale.

$\Pi_{1x} + \Pi_{2x} + T_{3x} = 0$

La distribuzione delle pressioni è garantito dal fatto che il flusso è CGV





$$p_1 A - p_2 A - \tau\, p_w L$$

A: Area sezione trasversale

τ: Sforzo di Trazione

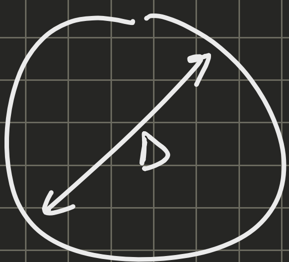
p_w: Perimetro bagnato

L: lunghezza di volume di controllo

$$p_1 - p_2 = -\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{<0} \cdot L$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} A L = \tau\, p_w$$

$$\tau = -\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{A}{p_w} = -\frac{\partial p}{\partial x} R$$



$$R = \frac{D}{4}$$

$$\boxed{\tau = -\frac{\partial p}{\partial x} R} \rightarrow \text{Equazioni di Bilancio.}$$

Π_1 e Π_2

sono come la statica ⇒ spinte idrostatiche sul volume di controllo

Visto che la distribuzione delle pressioni rispetto alla statica non cambia quindi agisco come se fosse veramente statica.

Semplificazioni

verso di T lo sappiamo

↳ lo abbiamo visto anche nella ultima lezione al livello indefinito

T_3 è uniforme perché il sistema è assial assimmetrico

A - sezione trasversale

p_w - perimetro bagnato / contorno bagnato

R - raggio idraulico

↳ non è il raggio, solo una grandezza scala

↳ Importante per l'interpretazione fenomenologica per il comportamento in un tubo

$-\frac{\partial p}{\partial x}$ → forza motrice

se non sono equilibrate o accelera o decelera.

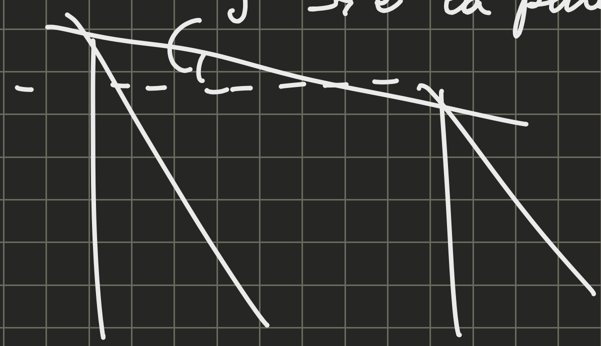
τ → forza resistente che equilibra $\frac{\partial p}{\partial x}$

Per moto uniforme queste due devono esser uguali

Uscendo dall'ambito generale e andando nell'ambito di condotte si aggiunge anche:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(z+\frac{p}{\gamma}\right)=J \rightarrow \text{caduta piezometrica}$$

J → è la pendenza dell'LP



→ Per tubi inclinati z e $\frac{p}{\gamma}$ si scambiano in modo diverso quindi può esser più conveniente

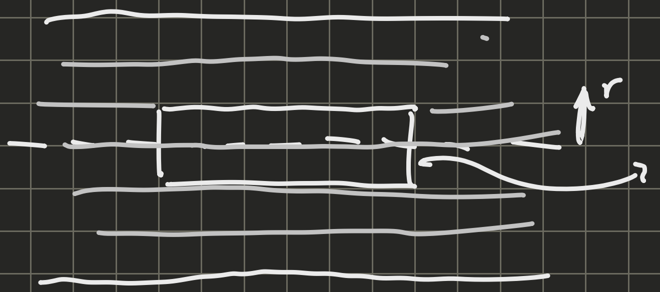
$$\boxed{\tau=\gamma R J}$$

↳ Vediamo allora che è l'attrito che fa pendere la linea LP.

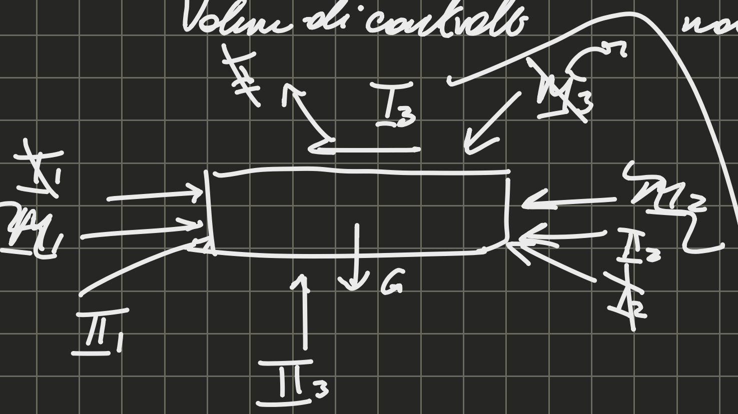
$\boxed{12:19}$ → Seconda cosa che dice

Non siamo ancora riusciti a ricavare il profilo di velocità → non si può fare mai al livello globale

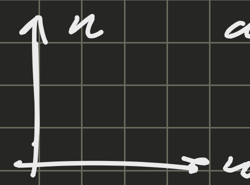
Per trovarla si può fare la forma indefinita o l'approccio intermedio applicando l'equazione di dinamica globale al singolo tubo di corrente



→ Applichiamo questo volume di controllo



non per motivo di prima, ma perché prendiamo flusso uniforme dove linee di corrente non penetrano quindi M_3 non perché ci sono pareti

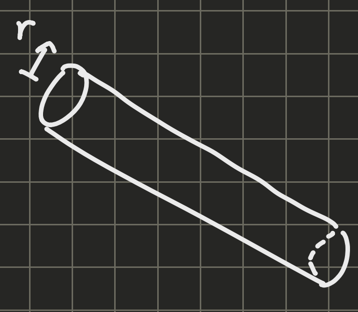


→ Orizzontale perché velocità a pareti del tubo di corrente è ←

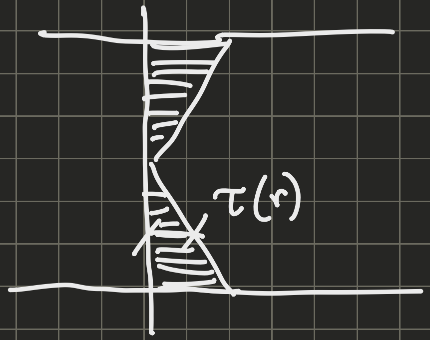
$$\Pi_{1x} + \Pi_{2x} + T_{3x} = 0$$

$$\tau = -\frac{\partial p}{\partial x}\frac{A}{P_w} = \gamma \frac{A}{P_w} J$$

$$= \gamma \frac{\pi r^2}{2\pi r} J = \gamma \frac{r}{2} J =$$



Dice che τ è funzione lineare della coordinata radiale, ed ha profilo, il profilo ha la stessa forma.



Mettiamo questo insieme alla legge di Newton $\phi = -\mu \frac{\partial v}{\partial n}$

In questo caso $\underline{v} = u$ e $n = r \rightarrow$ coordinata radiale

$= -\mu \frac{\partial u}{\partial r}$

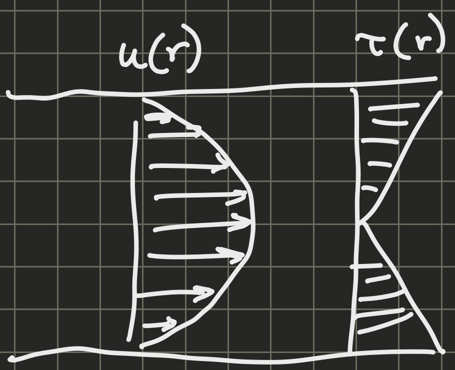
Per trovare il profilo di velocità

$$\int \frac{\partial u}{\partial r} = \int -\frac{\gamma J}{2\mu} r \rightarrow u(r) = -\frac{\gamma J}{4\mu} r^2 + k$$

$$u(r = R) = -\frac{\gamma J}{4\mu} R^2 + k = 0 \rightarrow \text{condizione di aderenza}$$

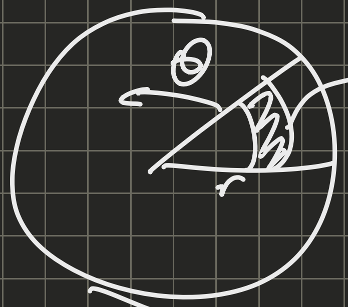
$R \downarrow$ Raggio tubo, non idraulico

$$\underbrace{u(r) = \frac{\gamma J}{4\mu}(R^2 - r^2)}_{\text{Equazione del profilo di velocità}}$$



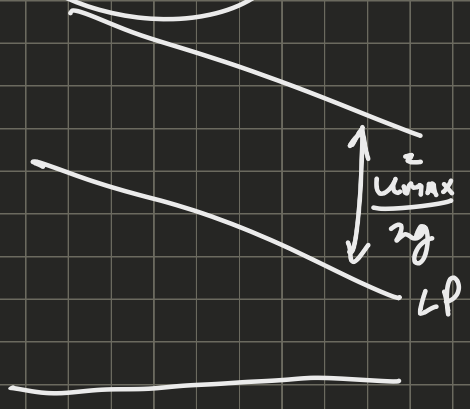
$$u(r=0) = u_{MAX} = \frac{\gamma J}{4\mu} R^2$$

$$\underbrace{U}_{\text{velocità media}} = \frac{Q}{A} = \frac{1}{A}\underbrace{\int_A u\,dA}_{\text{conviene risolvere in coordinate polari}} = \frac{1}{A}\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\left[\frac{\gamma J}{4\mu}(R^2 - r^2)\right] r\,dr\,d\theta$$



$dA = r\,dr\,d\theta$

$= \frac{u_{max}}{2}$



$\left.\frac{u_{max}^2}{2g}\right\}$ Ogni particella avrà LCT tra le due

↳ non ci piace, ne definiamo una per la corrente

Bernoulli si poteva interpretare energeticamente perché il carico si può vedere come $\frac{\text{energia}}{\text{peso}}$

Aggiungi alla spiegazione in quegli appunti

$$\overset{\nearrow \text{Potenza}}{dP} = \gamma H\, dQ$$

Quindi: fluido si porta con potenza

$$\frac{\text{peso}}{\text{volume}} \cdot \underbrace{\frac{\text{energia}}{\text{peso}}}_{H} \cdot \frac{\text{volume}}{\text{tempo}}$$

La potenza della corrente è $\int dP$

$$\hookrightarrow P = \int_A \gamma H u\, dA = \int_A \gamma \underbrace{\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}\right)}_{\substack{\text{Trinomio} \\ \text{di Bernoulli} \\ \text{Esplicitato}}} u\, dA$$

Carico $= \frac{\text{Energia}}{\text{Peso}}$

$$= \underbrace{\gamma}_{\text{costante}} \underbrace{\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)}_{\text{costante}} \int_A u\, dA + \int_A \frac{u^3\, dA}{2g}.$$

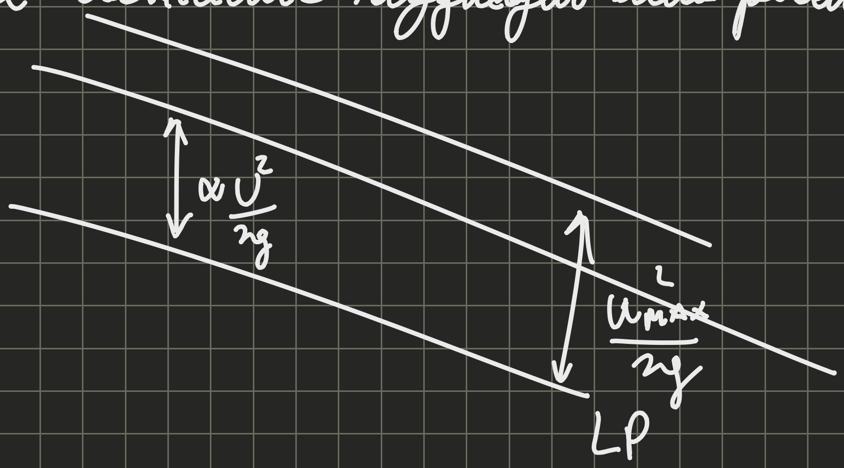
$$L = \gamma\left(z+\frac{p}{\gamma}\right)Q + \frac{\int_A u^3\,dA}{2g}\cdot\left(\frac{\overbrace{U^3A}^{=U^2Q}}{U^3A}\right) = \gamma\left(z+\frac{p}{\gamma}\right)Q + \frac{U^2}{2g}Q\,\frac{\int_A u^3\,dA}{U^3A}$$

$$= \gamma\left(z+\frac{p}{\gamma}+\underbrace{\frac{\int_A u^3\,dA}{U^3A}}_{\alpha}\cdot\frac{U^2}{2g}\right)Q$$

$\Rightarrow$ La potenza è $\gamma \cdot Q \cdot$ Carico Totale Opportunamente Definito

↳ Questo è il carico totale che vogliamo usare definire l'LCT del flusso

α = coefficiente ragguaglio della potenza cinetica



Per questo flusso $\alpha = 2$