Lezione 15 - Trasmissione di Calore

Trasmissione
↳ quando ∂T in un sistema o tra sistemi ↳ quando T varia nello spazio

Metodi di Trasmissione Termica

- Conduzione → tipico dei solidi
- Convezione
- Radiazione (Irraggiamento

→ Nei fluidi invece c'è anche flusso di massa

Postulato

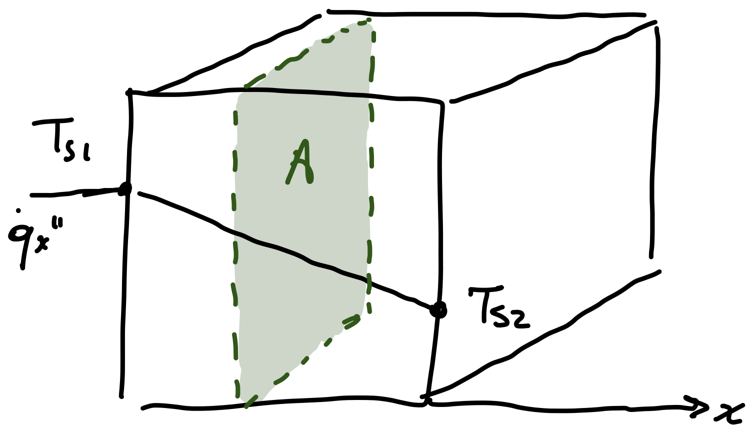
Conduzione (~~Legge~~ di Fourier)

$$\dot{q}_x'' = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad \left[\frac{W}{m^2}\right] = \left[\frac{J}{m^2 s}\right]$$

$\dot{q}$ = portata di calore

→ diretto nella direzione x

→ Per unità di superficie



$$\dot q_x = -kA\frac{\partial T}{\partial x} \quad [W]$$

→ A è area su cui strasmettiamo la temperatura

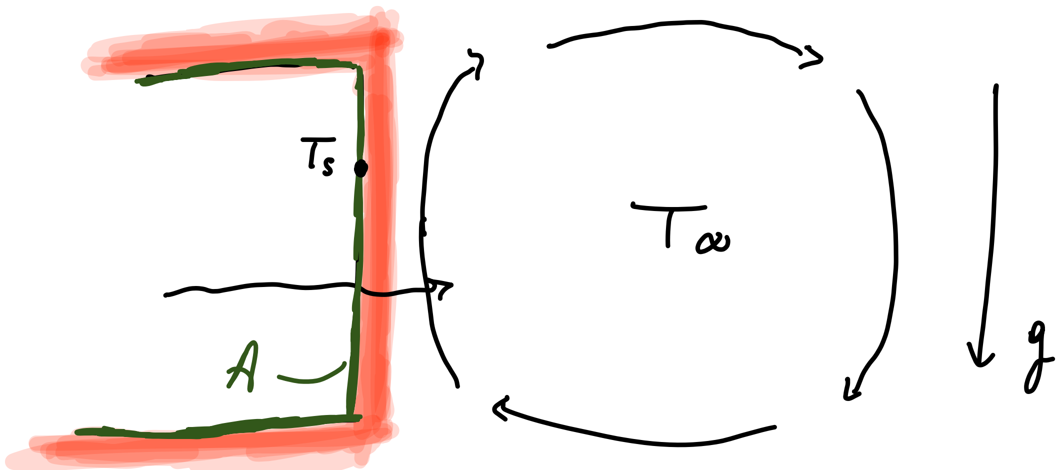
→ k è conducibilità termica $\left[\frac{W}{mK}\right]$

Convezione Termica

→ Da latino "convehere" → portare insieme

→ calore (trasporto diffusivo)

→ massa



Riscaldando ρ diminuisce, per Archimede l'aria si alza e circola

$$\dot q'' = h(T_s - T_\infty) \quad \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

$$\dot{q} = h\,A\,(T_s - T_\infty)\ [W]$$

↳ Superficie di contatto

→ h è coefficiente liminare o di scambio termico convettivo $\quad h = \left[\frac{W}{m^2 \cdot K}\right]$

In assenza di gravità non c'è convezione

Radiazione → occorre in assenza di massa

↳ corpi con $T > 0K$ erogano energia termica in forma di onde elettromagnetiche o fotoni

Basato su: Leggi di Stephan-Boltzmann
e sul potere emissivo di un corpo nero

$$E''_{C.N} = \sigma\, T_{CN}^4 \left[\frac{W}{m^2}\right] \qquad E_{C.N} = A\,\sigma\, T_{CN}^4\, [W]$$

$$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \left[\frac{W}{m^2 K^4}\right]$$ costante di Boltzmann

↳ Emmette la più energia

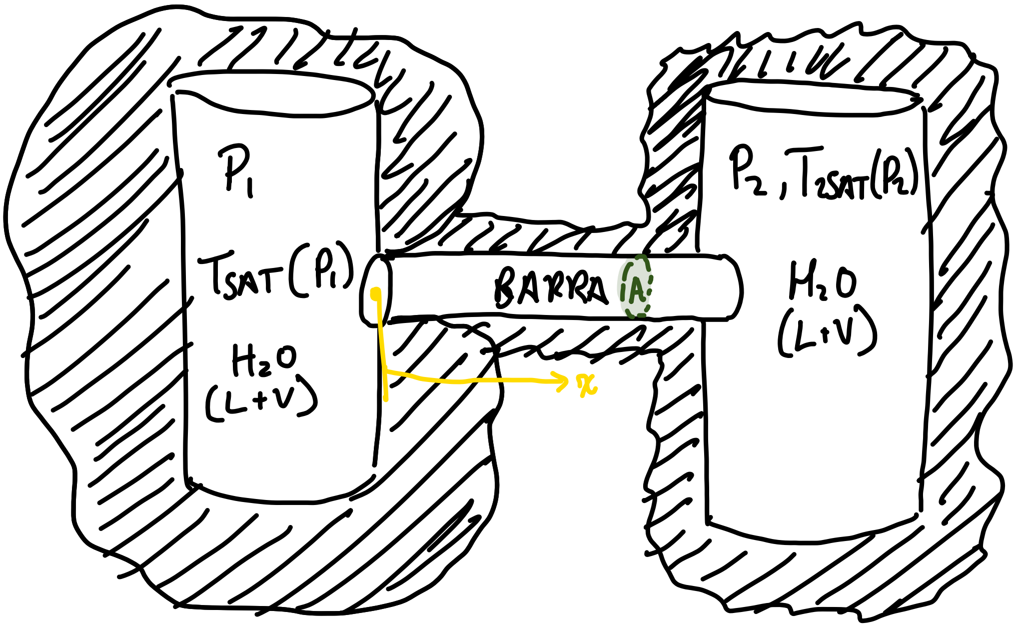
Corpi grigi

$$E_{CG} = \varepsilon\, \sigma\, T^4 \qquad 0 \leq \varepsilon \leq 1$$

↳ Emmissività

Irraggiamento funziona in assenza di g e m.

Derivazione di Conduzione (Postulato di Fourier)

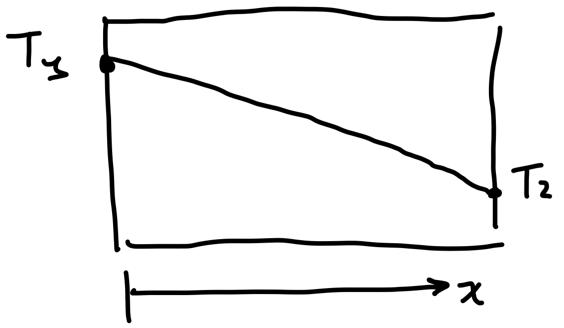


← Come tensione su cavo in elettrotecnica.

BARRA DI MATERIALE NOTO
CON AREA DELLA SEZIONE PARI AD A
LUNGHEZZA Δx

se $P_1 > P_2 \rightarrow T_1 > T_2$

$$\dot{q} \propto \frac{\Delta T}{\Delta x} \cdot A \qquad \dot{q} = -kA\frac{\Delta T}{\Delta x}$$



x cresce
T diminuisce

se (-) perché $\frac{\Delta T}{\Delta x}$ sia positivo

$\longrightarrow \dot{q}$

$$\lim_{\Delta x \to 0} -k\frac{\Delta T}{\Delta x}A = \boxed{-kA\frac{dT}{dx} = \dot{q}_x}$$ Postulato di Fourier

$$\underbrace{\dot q''_x = \frac{\dot q_x}{A} = -k\,\frac{dT}{dx}\left[\frac{W}{m^2}\right]}_{\text{Trasmissione monodimensionale}}$$

$$\underbrace{\vec{\dot q} = -k\cdot\vec\nabla T = -k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat i + \frac{\partial T}{\partial y}\hat j + \frac{\partial T}{\partial z}\hat k\right)}_{\text{Solo per materiali omogenei ed isotropi}}$$

omogenei → stessa k in tutti i punti

isotropi → k uguale

Materiali laminati sono isotropi

k - Conducibilità termica

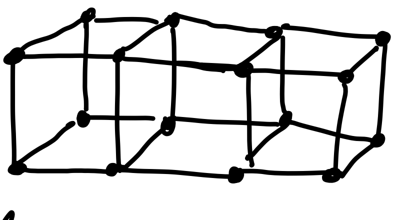
↳ Connesso alla conducibilità elettrica dati gli elettroni

$$k = k_{e^-} + \underbrace{k_{F_o}}_{\text{Legato all'ordine della energia}}$$

F_o → Fononi ↳ Quanto di Trasferimento di Energia Termica

→ Fotoni → " " " " " luminosa

→ Dati dalla struttura del materiale



Diffusività termica: α

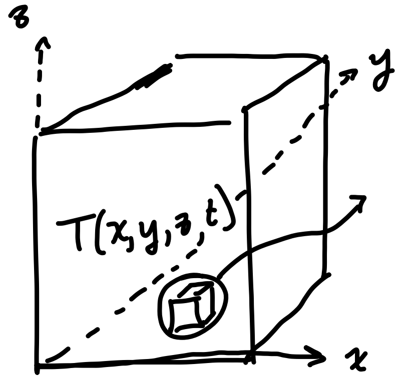
$$\alpha = \frac{k}{\rho\, c_p}\left[\frac{m^2}{s}\right]$$

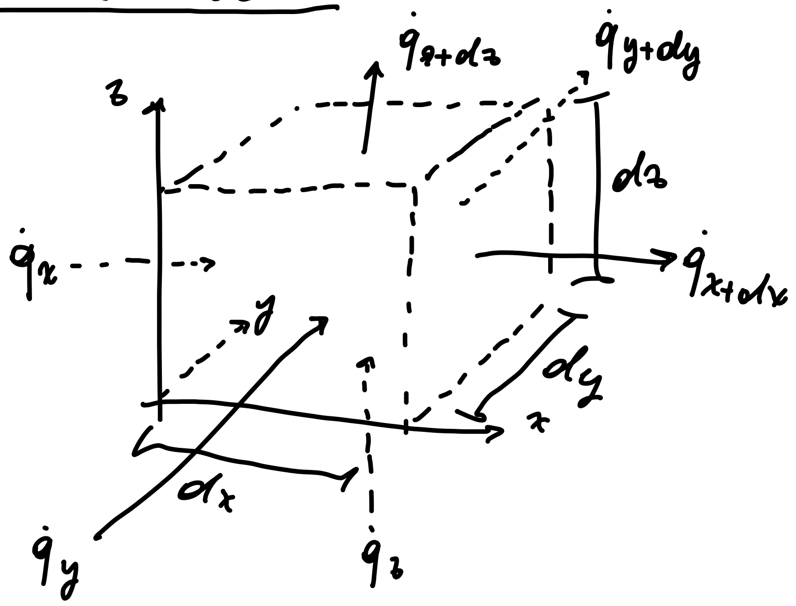
ρ ↳ Densità

c_p ↳ Calore specifico

$$= \frac{\text{CAPACITÀ DI CONDUZIONE DI CALORE DI MATERIALE}}{\text{CAPACITÀ DI ACCUMULARE}}$$

Equazione generale della Conduzione





$$\underbrace{\dot{E}_{IN} - \dot{E}_{OUT}}_{\text{Quello abbiamo considerato fino ad ora}} + \underbrace{\dot{E}_{GEN}}_{\text{Generata internamente al cubo (e.g. corrente che scorre)}} = \underbrace{\dot{E}_{ACC}}_{\text{Potere accumulato}}$$

Quello abbiamo considerato fino ad ora

$\dot{E}_{IN} - \dot{E}_{OUT} \Rightarrow \dot{E}_{IN} = \dot{E}_{OUT}$

Generata internamente al cubo (e.g. corrente che scorre)

$$\dot{E}_{IN} = \dot{q}_x + \dot{q}_y + \dot{q}_z$$

$$\dot{E}_{OUT} = \dot{q}_{x+dx} + \dot{q}_{y+dy} + \dot{q}_{z+dz}$$

$$\dot{E}_{GEN} = \dot{q}'' \, dV = \dot{q}''' \, dx\,dy\,dz$$

$$\left[\frac{W}{m^3}\right]$$

$$\dot{E}_{ACC} = \frac{dU}{dT} = \rho c^* \frac{dT}{dt} \cdot dx\,dy\,dz$$

$$\dot{q}_{x+dx} \overset{\text{SERIE DI TAYLOR}}{=\!=} \dot{q}_x + \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x}dx$$

$$\dot{q}_{y+dy} \overset{\text{TAYLOR}}{=\!=} \dot{q}_y + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y}dy$$

$$\dot{q}_{z+dz} = \dot{q}_z + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z}dz$$

$$\underbrace{\cancel{\dot{q}_x} + \cancel{\dot{q}_y} + \cancel{\dot{q}_z}}_{\dot{E}_{IN}} - \underbrace{\left[\cancel{\dot{q}_x} + \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x}dx + \cancel{\dot{q}_y} + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y}dx + \cancel{\dot{q}_z} + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z}dz\right]}_{\dot{E}_{OUT}}$$

$$\underbrace{+\dot{q}''' dx\,dy\,dz}_{\dot{E}_{GEN}} = \underbrace{\rho c^* \frac{dT}{dt}dx\,dy\,dz}_{\dot{E}_{ACC}}$$

<u>Ricordiamo Postulato di Fourier</u>

$$\left.\dot{q}_x = -k A \frac{dT}{dx}\right] \Leftarrow \text{postulato}$$

$$\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x}dx = -kA\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}dx = -k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}dx\,dy\,dz$$

veramente $dA_x = dy\,dz$

$$\frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y}dy = -k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}dx\,dy\,dz$$

$$\frac{\partial \dot q_z}{\partial z}\,dz = -k\,\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\,dx\,dy\,dz$$

$$-k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right]\cancel{dx\,dy\,dz} + \dot q'''\,\cancel{dx\,dy\,dz} = \rho c^*\,\frac{\partial T}{\partial t}\,\cancel{dx\,dy\,dz}$$

$$-k\nabla^2 T + \dot q''' = \rho c^*\,\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$+\overbrace{\frac{k}{\rho c^*}}^{\alpha}\nabla^2 T + \frac{\dot q'''}{\rho c^*} = \frac{\partial T}{\partial t} \rightarrow \boxed{\alpha\nabla^2 T + \frac{\dot q'''}{\rho c^*} = \frac{\partial T}{\partial t}}$$

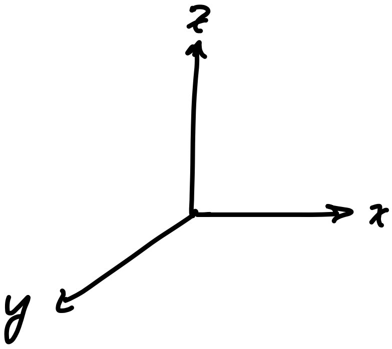
laplaciano di T

Equazione Diffusiva

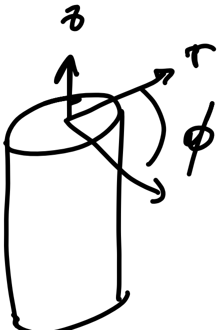
di Variazione di T nel tempo nelle 3 dimensioni

$$T = T(x,y,z,t)$$

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$



Coordinate Cilindriche



$$\frac{\partial T}{\partial r} \neq 0 \qquad \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

Laplaciano in coordinate cilindriche

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

Coordinate Sferiche

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

$$\boxed{\alpha\nabla^2 T + \frac{\dot{q}'''}{\rho c^*} = \frac{\partial T}{\partial t}}$$

Così:

Le differenze in T sono costanti cioè $T_{\infty 1} = cost$ e $T_{\infty 2} = cost$, il calore è istantaneo

- Regime Stazionario Senza Generazione

Non c'è calore generato internamente

Equazione di Laplace $\boxed{\nabla^2 T = 0}$

- Regime Variabile senza generazione

$\boxed{\alpha\nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t}}$ equazione di Fourier

- Regime Stazionario con Generazione

Equazione di Poisson

$$\boxed{k\nabla^2 T + \dot{q}''' = 0}$$

Condizioni:

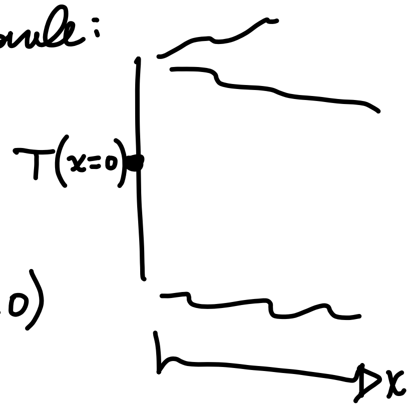
$$\alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{q}'''}{\rho c^*} = \frac{\partial T}{\partial t} \qquad T(x,y,z,t=0) = f_{nota}$$

Condizione di Contorno:

1° Tipo di Dirichlet

Per monodimensionale:

Fissare $T = T(x=0)$



Per bidimensionale:

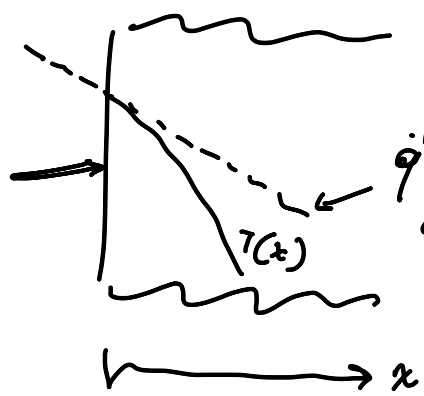
Fissare $T = T(x=0, y=0)$

⋮

2° Tipo Neumann

Fissiamo

$$\dot{q}''_x \Big|_{x=0} = -k \frac{\partial T}{\partial x}$$

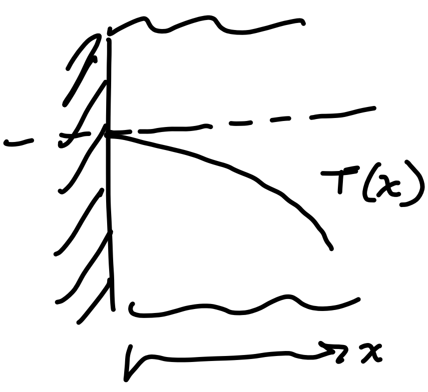


$\dot{q}''$ è la tangente del flusso di T

per una superfice adiabatica in $x=0$

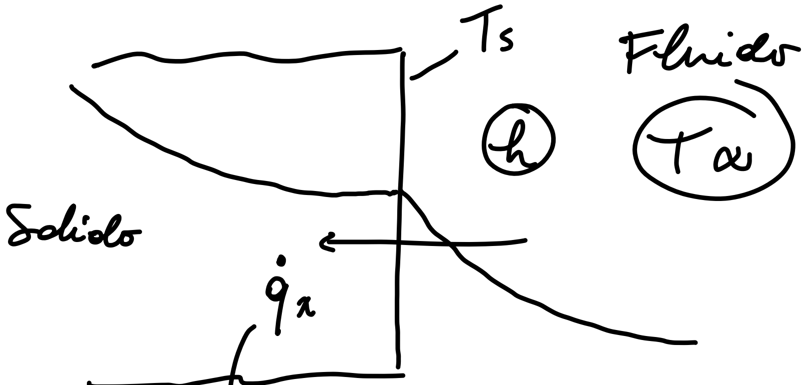
$$\dot{q}''_x = 0 = -k \frac{\partial T}{\partial x} \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

$$\dot{q}''_x = 0 = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \left[W\right]$$



- 3° Tipo

$$\dot{q}_x = -kA\,\frac{\partial T}{\partial x} = h(T_s - T_\infty)$$

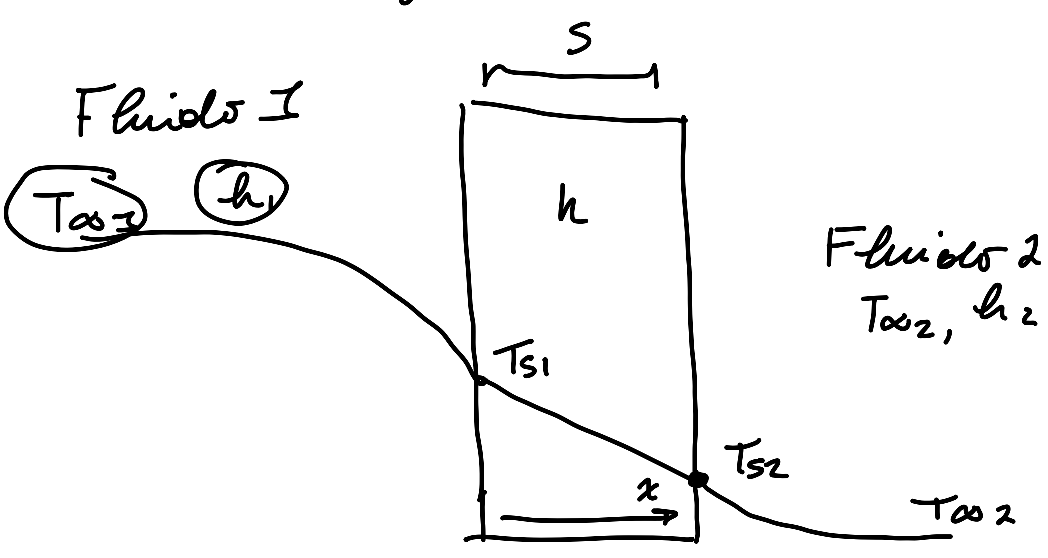


$\dot{q}_x$ è imposta da quello espressione

Modi di imporre condizioni al contorno

- 1° temperatura
- 2° imponendo portata di calore
- 3° tipo di scambio termico (convettivo

<u>Studiamo regime stazionario</u> $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$



Suppaniamo flusso monodimensionale lungo x

la parete ad ogni x ha la stessa temperatura

$\nabla^2 T = 0$ REGIME STAZIONARIO e senza generazione

$\nabla^2 T = 0$ lungo solo x

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \qquad T(x) = c_1 x + c_2 = \dfrac{T_{S2} - T_{S1}}{s} x + T_{S1} \\ \text{Condizioni al contorno: di } 1^\circ \text{ Tipo} \\ - T(x=0) = T_{S1} \rightarrow T_{S1} = c_2 \rightarrow \boxed{c_2 = T_{S1}} \\ - T(x=s) = T_{S2} \rightarrow T_{S2} = c_1 \cdot s + T_{S1} \rightarrow c_1 = \dfrac{T_{S2} - T_{S1}}{s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T(x) = T_{S1} - \frac{T_{S1} - T_{S2}}{s} \cdot x$$

<u>Postulato di Fourier:</u>

$$\dot{q}''_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} = -k \left[- \frac{T_{S1} - T_{S2}}{s} \right] = \frac{T_{S1} - T_{S2}}{\frac{s}{k}} \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

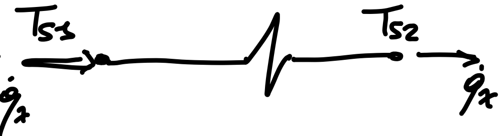
Nel caso di superfice indefinita

Nel caso di superfice nota:

$$\dot{q}_x = -kA \frac{\partial T}{\partial x} = -kA \left[- \frac{T_{S1} - T_{S2}}{s} \right] = \frac{T_{S1} - T_{S2}}{\frac{s}{kA}} \left[W \right]$$

come scrivere $\underset{(\dot{q})}{I} = \dfrac{\Delta V}{R_E} \dfrac{(\Delta T)}{(R_T)}$

$R_T \rightarrow$ resistenza termica per conduzione

$\Longrightarrow$ può schematizzata usando 

$$\dot{q} = \frac{T_{S1} - T_{S2}}{R_{CD}} \qquad R_{CD} = \frac{S}{kA} \left[\frac{K}{W}\right]$$

$$R_E = \rho \frac{L}{S}$$

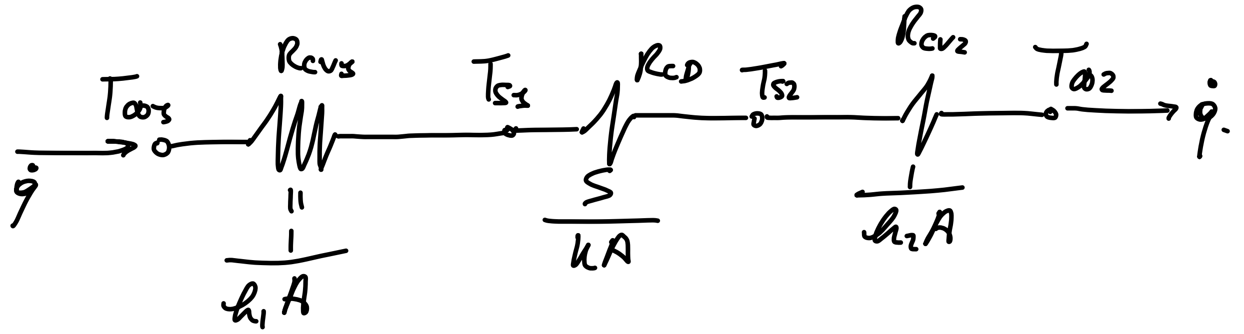
Analoghi (Analogia Elettrotecnica)

$\rightarrow$ Resistenza alla conduzzione

$$\dot{q}_{CV1} = h_1 A (T_{\infty 1} - T_{S1}) \rightarrow \frac{T_{\infty 1} - T_{S1}}{\frac{1}{h_1 \cdot A}} \qquad \frac{1}{h_1 \cdot A} \rightarrow R_{CV1} \quad \left[\frac{K}{W}\right]$$

convettivo

$$\dot{q}_{CV2} = h_2 A (T_{S2} - T_{\infty 2}) \longrightarrow \frac{T_{S2} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{h_2 A}} \qquad \frac{1}{h_2 A} \rightarrow R_{CV2} \quad \left[\frac{K}{W}\right]$$



se h_1 più alto $T_{\infty 1}$ e T_{S1} si allontanano (e opposto)
se k aumenta T_{S1} e T_{S2} si avvicinano

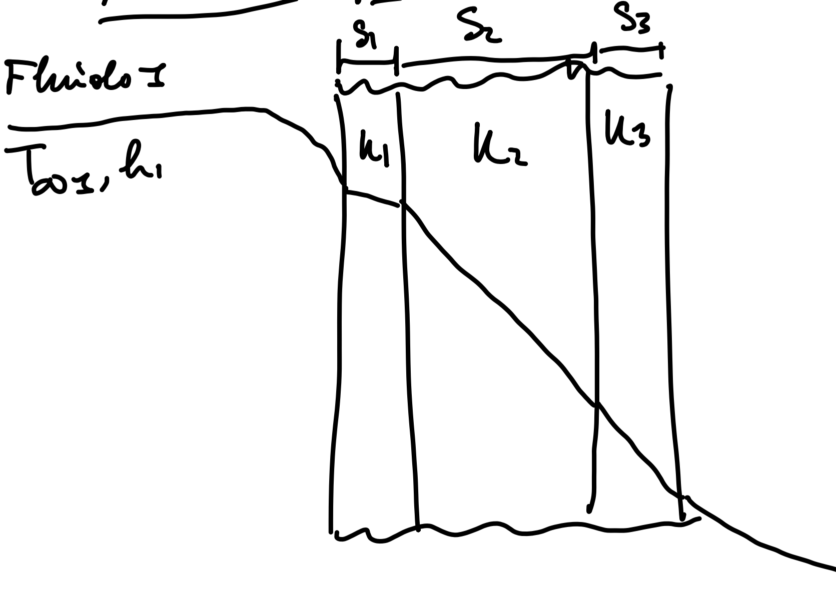
$$\dot{q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{h_1 A} + \frac{S}{kA} + \frac{1}{h_2 A}} \; [W]$$

Se A non è nota: $$\dot{q}'' = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{h_1} + \frac{S}{k} + \frac{1}{h_2}} \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

$$R''_{CV1} = \frac{1}{h_1} \left[\frac{m^2 K}{W}\right] \qquad R''_{CV2} = \frac{1}{h_2} \left[\frac{m^2 K}{W}\right]$$

$$R''_{CD} = \frac{s}{k} \left[\frac{m^2 K}{W}\right]$$

Altro Esempio - Parete Multistrato



$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{\Sigma R} \left[W\right]$$

$$\dot{q}'' = \frac{\Delta T}{\Sigma R''} \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

Fluido 2

$T_{\infty 2}, h_2$