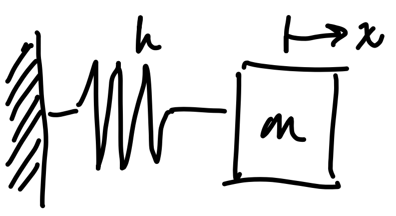
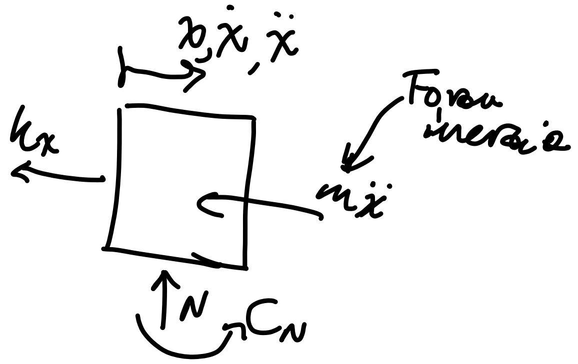
Lezione 18 -

Lagrange o Equilibrio Dinamico per risolvere sistemi di vibrazione

Esposizione di Oscillatore Armonico





$m\ddot{x} + kx = 0$ → $\underbrace{\text{Lineare Tempo Invariato}}_{\text{Parametri non cambiano}}$

$x(t) = Ce^{\lambda t}$ $\qquad$ C e λ sono costanti (generalmente)

$\ddot{x}(t) = \lambda^2 C e^{\lambda t}$

$$\underbrace{(m\lambda^2 + k)}Ce^{\lambda t} = 0$$

Dato che le soluzioni sono indipendenti dal tempo

equazione caratteristica $\quad m\lambda^2 + k = 0 \quad \lambda^2 = -\frac{k}{m} \rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm j\sqrt{\frac{k}{m}}$

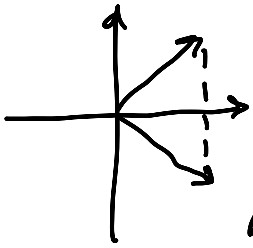
$= \pm j\omega_0$

$\omega_0 \rightarrow$ pulsazione propria $\left[\frac{rad}{s}\right] = 2\pi f_0$

$f_0 \rightarrow [Hz]$

$$x(t) = C_1 e^{j\omega_0 t} + C_2 e^{-j\omega_0 t}$$

~~2 perchè è di secondo grado quindi ci sono 2~~



per avere x abbiamo fatto il negativo per cancellare y

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$x(t) = C_1 \cos\omega_0 t + jC_1 \sin\omega_0 t + C_2 \cos(-\omega_0 t) + jC_2 \sin(-\omega_0 t)$$

$$= \underbrace{(C_1 + C_2)} \cos\omega_0 t + j\underbrace{(C_1 - C_2)} \sin\omega_0 t$$

$C_1 = a + jb$ $\qquad$ $C_1 + C_2 = a + jb + a - jb = 2a = A$

$C_2 = a - jb$ $\qquad$ $j(C_1 - C_2) = [a + jb - a - (-jb)] = -2b = B$

$$\Rightarrow x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

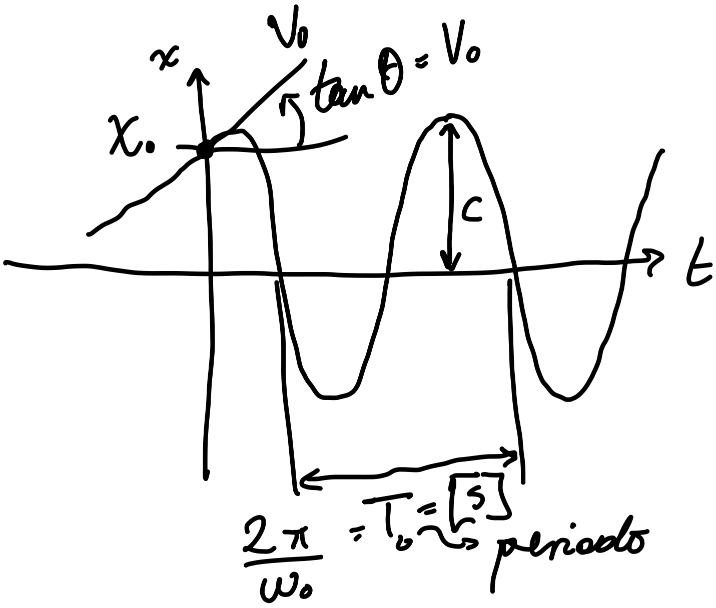
λ è caratteristica del sistema perchè è data da m e k

A e B dipendono dalla aplitudine

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 A\sin\omega_0 t + \omega_0 B\cos\omega_0 t$$

Spostamento iniziale $\rightarrow$ $\boxed{X_0 = A}$ $\Rightarrow x(t) = X_0 \cos\omega_0 t + \frac{V_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$

Velocità iniziale dato impulso → $\boxed{V_0 = \omega_0 B}$ Condizioni iniziali



C = ampiezza della vibrazione

psi non phi

$$x(t) = C\cos(\omega_0 t+\varphi) = \underbrace{C\cos\varphi}\cos\omega_0 t - \underbrace{C\sin\varphi}\sin\omega_0 t$$
$$= A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

$A = C\cos\varphi$

$B = -C\sin\varphi$

$A^2+B^2 = C^2\cos^2\varphi + C^2\sin^2\varphi$

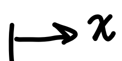
$A^2+B^2 = C^2 \rightarrow \boxed{C = \sqrt{A^2+B^2}}$

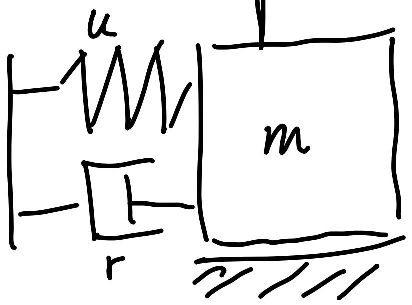
$$\boxed{\frac{B}{A} = -\tan\varphi}$$

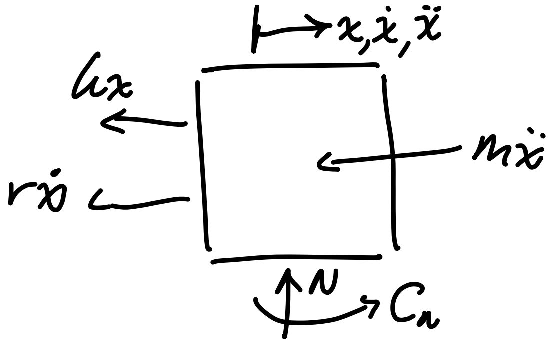
Dato $m\lambda^2+k=0$
→ l'unica possibilità di vibrabilità a moto libero è a ω_0, non può esistere libero non a ω_0

Iniziamo di complicare un pò

Moto Libero smorzato







$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$$

↳ Differenziale di secondo ordine

$$x(t) = Ce^{\lambda t} \qquad \dot{x}(t) = \lambda Ce^{\lambda t} \qquad \ddot{x}(t) = \lambda^2 Ce^{\lambda t}$$

$$\underbrace{(m\lambda^2 + r\lambda + k)}\, Ce^{\lambda t} = 0$$

$$m\lambda^2 + r\lambda + k = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-r}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

equazione caratteristica

Dove $\Delta = 0$? $\left(\frac{r}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \frac{r}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\boxed{r_c = 2m\omega_0}$$

Smorzamento critico

↳ è confine di due comportamenti diverso

h = fattore di smorzamento (smorzamento adimensionale)

$$h = \frac{r}{r_c}$$

↳ Ci dice la distanza dal r_c di r, la differenza fra un sistema oscilla o non-oscilla.

$$\frac{r}{2m}\frac{\omega_0}{\omega_0} = \frac{r\omega_0}{r_c} = h\omega_0$$

$$\boxed{\lambda_{1,2}} = -h\omega_0 \pm \sqrt{h^2\omega_0^2 - \omega_0^2}$$

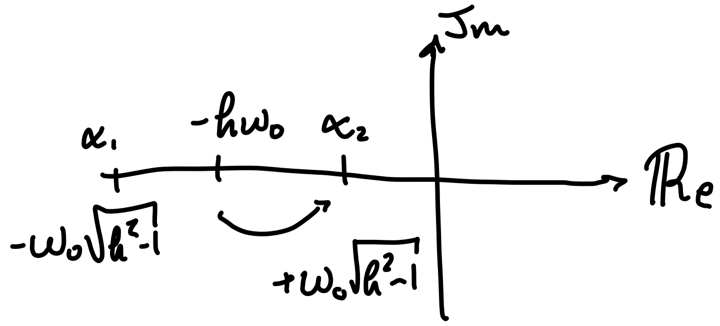
$$\boxed{= h\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{h^2-1}}$$

↳ Soluzione generale degli autovalori

? $h \gtreqless 1$

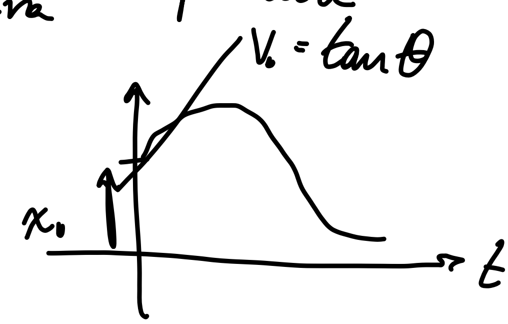
↳ $h > 1$ $\quad \lambda_{1,2} = -h\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{h^2-1}$

↳ È uguale $-\alpha_1$, $-\alpha_2$ I risultati sono 2 reali negativi



↳ rimane negativa → importante

$$x(t) = Ae^{-\alpha_1 t} + Be^{-\alpha_2 t}$$

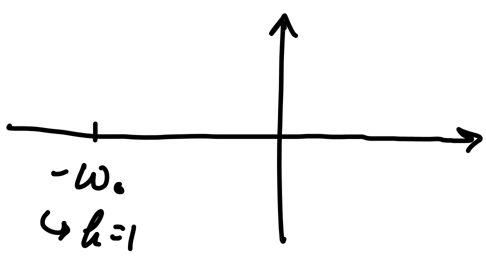


L'energia è dissipata totalmente

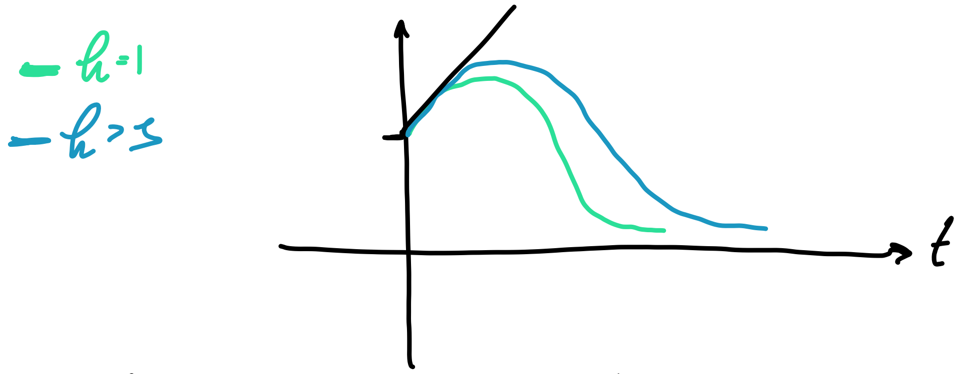
↳ ii) $h = 1$

$$\lambda_{1,2} = -h\omega_0 = -\alpha$$

↳ soluzione doppia



$$x(t) = Ate^{-\alpha t} + Be^{-\alpha t}$$



h=1 ritorna allo stato di minimo nel tempo minore

↳ movimento che non oscilla ($h \geq 1$)

iii) $0 < h < 1$ → per noi non può esser negativa

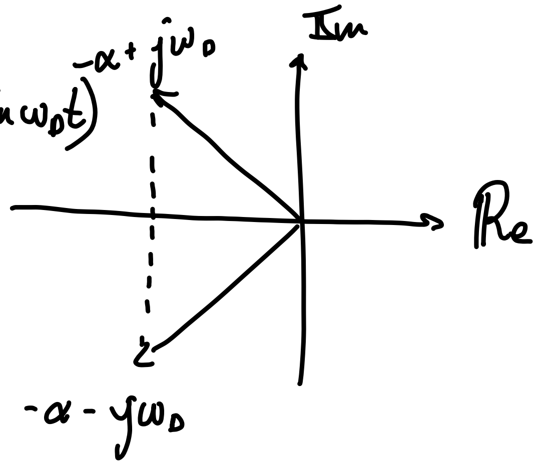
$$\lambda_{1,2} = -h\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{h^2-1} = -h\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-h^2}$$

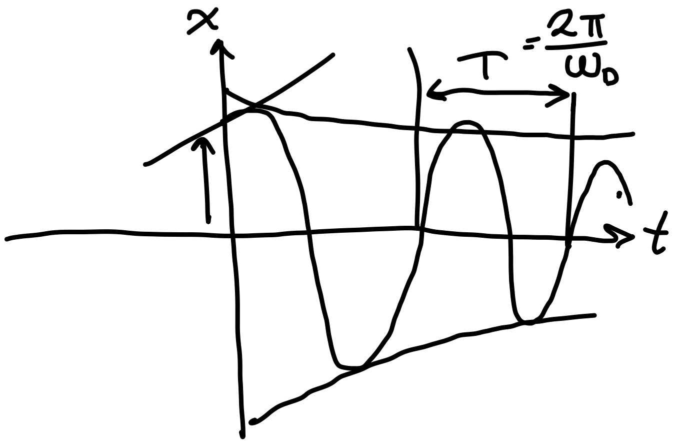
$$= -\alpha \pm j\omega_D$$ → Damped

↳ $= \omega_0\sqrt{1-h^2}$

$$x(t) = C_1 e^{-\alpha t} e^{j\omega_D t} + C_2 e^{-\alpha t} e^{-j\omega_D t} = e^{-\alpha t}\left(C_1 e^{j\omega_D t} + C_2 e^{-j\omega_D t}\right)$$

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left(A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_D t\right)$$

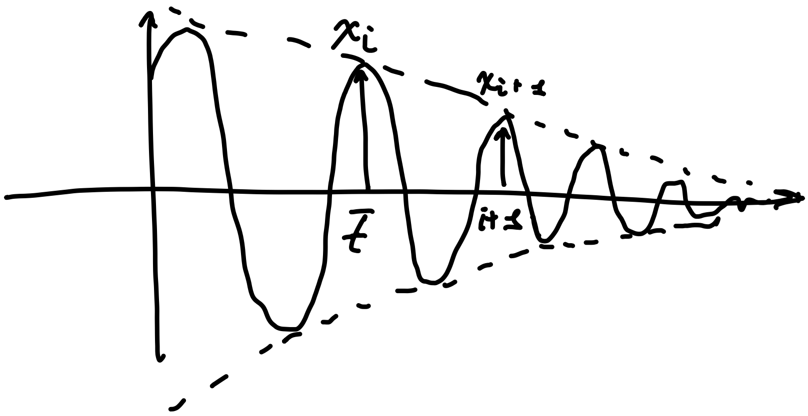




$$x(t) = C e^{-h\omega_0 t}\cos(\omega_D t + \varphi)$$

Determinazione sperimentale dello smorzamento

Immaginiamo $x(t)$ misurato



Prendiamo 2 valori massimi successivi:

$$\underbrace{\delta = \ln\frac{x_i}{x_{i+1}}}_{\text{noto}} = \ln\frac{\cancel{C} e^{-h\omega_0\bar{t}}\,\cancel{\cos(\omega_D\bar{t}+\varphi)}}{\cancel{C} e^{-h\omega_0(\bar{t}+T)}\,\cancel{\cos(\omega_D(\bar{t}+T)+\varphi)}}$$

uguali ma la stessa cosa

$$= \ln\frac{e^{-h\omega_0\bar{t}}}{e^{-h\omega_0(\bar{t}+T)}}$$

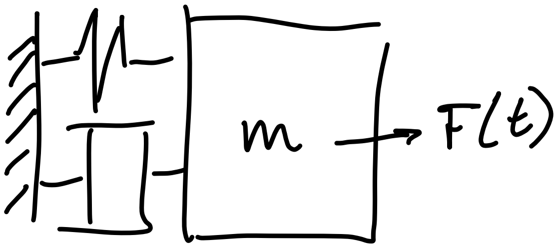
$$\delta = \cancel{\ln}\,\cancel{e}^{h\omega_0 T} = h\omega_0 T = h\cancel{\omega_0}\frac{2\pi}{\cancel{\omega_0}\sqrt{(1-h^2)}}$$

$$\delta = h \frac{2\pi}{\sqrt{1-h^2}} \simeq 2\pi h \rightarrow h = \frac{\delta}{2\pi}$$

Di solito si prendono più periodi allora: $h = \frac{\delta}{n 2\pi}$

Moto Forzato

↳ Si ha una forzante applicata



Caso che guardiamo

↓

Forzante Armonica

↓

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F(t) = F_0 \cos \Omega t$$

↳ Soluzione non è più quella omogenea

Ω = pulsazione della forzante $\left[\frac{rad}{s}\right]$

$$x(t) = x_{GO}(t) + \overbrace{x_p(t)}^{\text{quello su cui ci focalizzeremo}}$$

$x_{GO}(t)$: transitorio

$x_p(t)$: condizione di regime

↳ driving frequency