Lezione 7 -

MDS

$\hat{F}$ e $\underline{Q}$ sono soluzioni uniche dell'equilibrio del sistema

↑

PLV come condizione sufficiente per l'equilibrio

se $\underline{\tilde{F}}^T \underline{\hat{U}} = \underline{Q}^T q$ vale $\forall \{\underline{\tilde{U}} = \underline{\underline{T}}\,\underline{\hat{U}},\ \hat{q} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\hat{U}}\} \Rightarrow \{\underline{\tilde{F}}^T, \underline{Q}\} \in C^*$

$$\tilde{F}\,\underline{\underline{T}}\,\underline{\hat{U}} = \underline{Q}^T \underline{\underline{B}}\,\underline{\hat{U}} \iff (\underline{\underline{T}}^T \underline{\tilde{F}})^T \underline{\hat{U}} = (\underline{\underline{B}}^T \underline{Q})^T \underline{\hat{U}}$$

$$\underline{Q} = \underline{\underline{D}}\,q = \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{U}$$

$$\iff (\underline{\underline{T}}^T \underline{\tilde{F}})^T \underline{\hat{U}} = (\underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{U})\,\underline{\hat{U}}$$

soluzione incognita

↳ l'unica soluzione anche equilibrata

generico vettore ↳ una qualsiasi

Definiamo allora:

Vettore delle Componenti lagrangiane delle forze attive → $\underline{F} = \underline{\underline{T}}^T \underline{\tilde{F}}$

Matrice di rigidezza

$$F_R = \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{U} = \underline{\underline{K}}\,\underline{U} \Rightarrow (\underline{F} - F_R)\,\underline{\hat{U}} = 0\ \forall \underline{\hat{U}} \iff F_R = \underline{F}$$

Componenti lagrangiane delle forze di richiamo elastico

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\underline{K}}\,\underline{U} = \underline{F}}$$

(Metodo degli Spostamenti)

Troviamo l'unica configurazione di equilibrio che ci permette di trovare l'unica configurazione congruente del sistema.

→ Ricavarlo è molto più semplice

→ Generalizzazione della legge di Hooke.

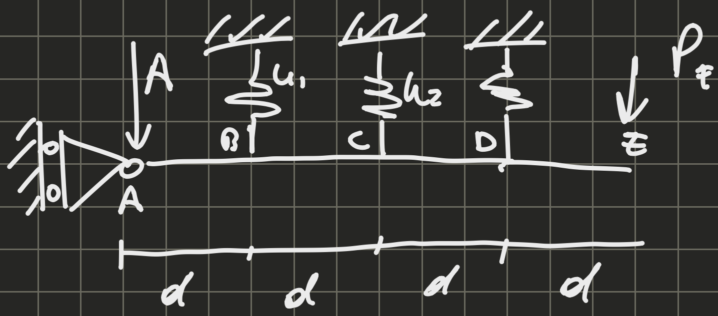
$\underline{F}$ - vettore delle componenti delle forze che compiono lavoro diretto per le coordinate lagrangiane del sistema → come se stessimo proiettando dallo spazio fisico allo spazio delle lagrangiane del sistema.

Imposto $\underline{F}$ troviamo la cinematica consentita, imposto $\underline{U}$ troviamo la statica consentita.

? $\exists \underline{\underline{k}}^{-1}$

Proprietà di $\underline{\underline{k}}$, come abbiamo fatto come $\underline{\underline{\eta}}$

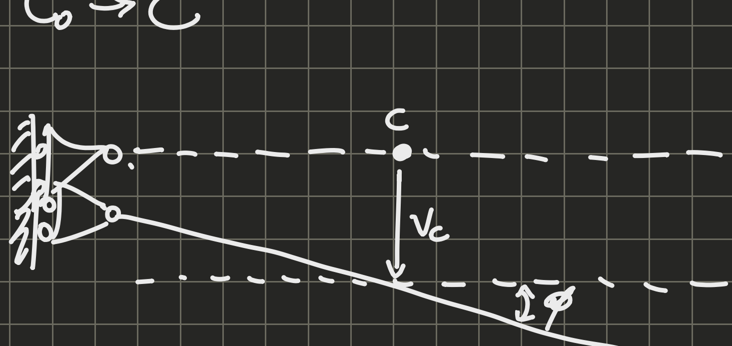
<u>Esempio prima</u>



$l = 4d$

Descrizione della cinematica

$C_0 \rightarrow C^*$



$\underline{U} = (v_C, \phi)^T$

↳ coordinate lagrangiane

$\tilde{\underline{U}} = (v_C, \phi)^T$ → spostamenti e rotazione dei baricentri delle aste

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Deformazioni generalizzate

$$\begin{cases} q_1 = v_c - d\phi \\ q_2 = v_c \\ q_3 = v_c + d\phi \end{cases}$$

non è detto che coincidano in questo caso lo fanno

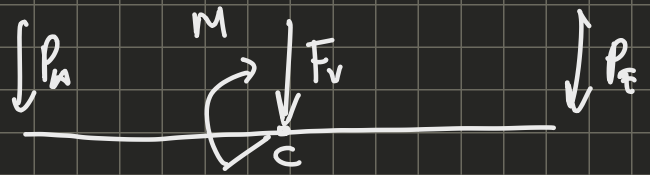
$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -d \\ 1 & 0 \\ 1 & d \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}$$

Statica

↳ Dobbiamo definire $\tilde{F}$

$$\underline{\tilde{F}} = (\underbrace{F_v}_{\text{Forza verticale agente sull'asta}}, \underbrace{\underset{\sim}{M}}_{\text{momento agente sull'asta}})^T$$



$$F_v = P_A + P_E$$
$$M = (P_E - P_A)\,2d$$

$$\underline{F} = \underline{\underline{T}}^T \underline{\tilde{F}} = \begin{pmatrix} P_A + P_E \\ (P_E - P_A)2d \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} k_1+k_2+k_3 & (k_3-k_1)d \\ (k_3-k_1)d & (k_1+k_3)d^2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{k}}$$

Troviamo $\underline{U}$ come abbiamo trovato con l'approccio diretto qualche lezione fa, ma in modo molto più veloce.

Proprietà di $\underline{\underline{k}}$ (come per $\underline{q}$)

↳ Simmetrica definita positiva

Dalla legge di Hooke

↳ calcoliamo la energia che la molla occupa per ritornare allo stato di scarico.

Per una molla la energia di deformazione elastica è $\Omega = \frac{1}{2} k U^2$. Possiamo scrivere questo per il sistema intero in funzione di $\underline{\underline{k}}$ e $\underline{U}$:

Immaginiamo una deformazione:

$C_0 \to C$

Configurazione generica

$$\underline{q}(t) : \underline{0} \to \bar{\underline{q}} \qquad \underline{q}(t) = \alpha(t)\, \bar{\underline{q}}$$

Azioni interne corrispondenti

↓

$$\underline{Q}(t) = \underline{\underline{D}}\, \underline{q}(t) = \underline{\underline{D}}\, \bar{\underline{q}}\, \alpha(t)$$

Condizioni di α

$\alpha(t=0) = 0$

$\alpha(t=1) = 1$

$$\Omega(\underset{\sim}{q}) = \int_{C_0}^{C} \underline{\underline{Q}}^T d\underset{\sim}{q} = (\underline{\underline{D}}\, \bar{\underset{\sim}{q}})^T \bar{\underset{\sim}{q}} \underbrace{\int_0^1 \alpha(t)\, d\alpha}_{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} \bar{\underset{\sim}{q}}^T \underline{\underline{D}}\, \underset{\sim}{q}$$

In modo generale:

$$\Omega(\underset{\sim}{q}) = \frac{1}{2} \underset{\sim}{q}^T \underline{\underline{D}}\, \underset{\sim}{q} > 0 \quad \forall \underset{\sim}{q} \neq 0 \Rightarrow \text{definità positiva}$$

↳ Matrice diagonale, con tutti valori > 0

Sappiamo che:

$$\underset{\sim}{q} = \underline{\underline{B}}\, \underline{U}$$

Bisogna immagazzinare energia, deformando
↓
$> 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Omega(\underline{U}) = \frac{1}{2} \underline{U}^T \underbrace{\underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{B}}}_{\underline{\underline{k}}}\, \underline{U} = \frac{1}{2} \underline{U}^T \underline{\underline{k}}\, \underline{U}, \quad \forall\, \underline{U} \neq 0$$

$\underline{k} \Rightarrow$ definita positiva
↳ ci permette di seguire le leggi della fisica.

$\underline{\underline{k}}$
↳ Simmetrica
↳ Diagonale tutta positiva
↳ Det > 0

$\underline{\underline{B}}$ è rettangolare, quindi è possibile che il numero di deformazioni e le coordinate lagrangiane non siano le stesse, se non lo sono $\underline{\underline{B}}$ non è invertibile.

$\hat{\underline{U}}$ spostamenti generalizzati di corpi rigidi pensati privi di vincoli

$\underline{\underline{T}}$ le lega

↳ $\underline{U}$ vettore coordinate lagrangiane

Se i carichi sono non conservati, definiamo:

$$V_p(\underline{U}) = -\underline{\tilde{F}}^T \underline{\tilde{U}} = -\tilde{F}^T \underline{\underline{T}}\,\underline{U} = -(\underline{\underline{T}}^T \underline{\tilde{F}})\,\underline{U} =$$

$$= -\underline{F}^T \underline{U}$$

Equazione potenziale dei carichi

Energia Potenziale Totale, immagazzinata nel sistema (EPT)

$$\Pi(\underline{U}) = \Omega(\underline{U}) + V_p(\underline{U})$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\underline{U}^T \underline{\underline{k}}\,\underline{U}}_{\text{Energia elastica}} \underbrace{- \underline{F}^T \underline{U}}_{\text{Potenziale dei carichi}}$$

<u>Teorema Stazionarietà dell'EPT</u>

Π è stazionaria in corrispondenza delle configurazioni equilibrate del sistema

Ad un punto di stazionarietà dell'EPT corrisponde una configurazione non solo cinematicamente ammissibile ma anche equilibrata.

↳ Lo proviamo trovando la condizione di stazionarietà di Π

L'EPT è stazionario solo nelle configurazioni equilibrate della nostra struttura.

↳ Quando ho EPT che non varia ho un punto dove le forze reattive equilibrano le forze attive del sistema.

Se scrivo la condizione di stazionarietà troverò la condizione di equilibrio dell'MDS

Deriviamo per tutte le variabili

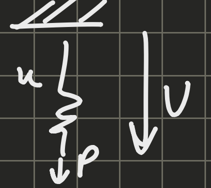
$$\delta\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{U}} \cdot \delta \underline{U} = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\delta\underline{U}^T \underline{\underline{K}}\,\underline{U} + \underline{U}^T \underline{\underline{K}}\,\delta\underline{U}} - 2\underline{F}^T\delta\underline{U} \Big] =$$

$\underline{\underline{K}}$ simmetrica $\rightarrow 2(\underline{\underline{K}}\,\underline{U})\,\delta\underline{U}^T$

$\delta\underline{U}\,\underline{\underline{K}}\,\underline{U} = \underline{U}^T\underline{\underline{K}}\,\delta\underline{U} \rightarrow$ Vale solo perché

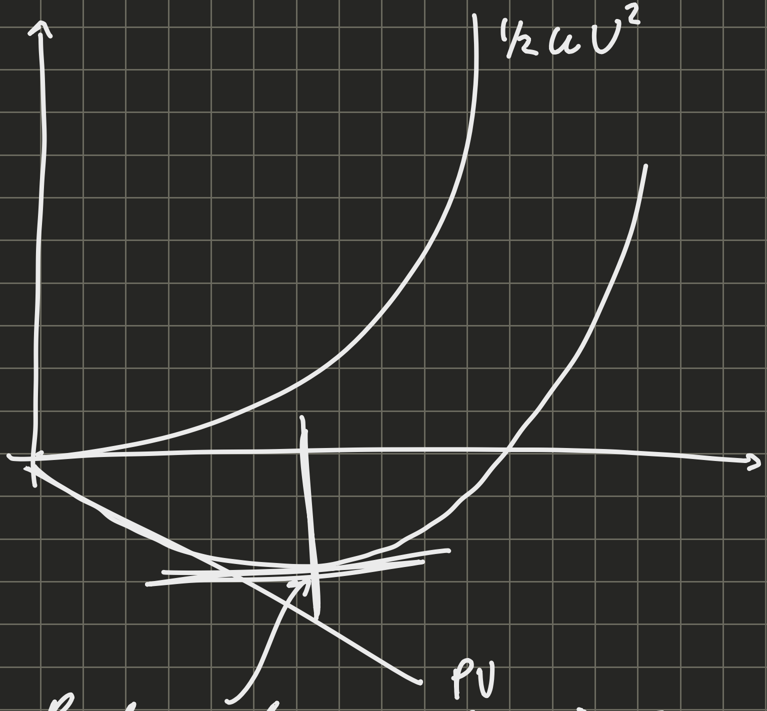
$$= \delta\underline{U}^T\left(\underline{\underline{K}}\,\underline{U} - \underline{F}\right) \underset{\text{Per stazionarietà}}{=} 0 \iff \underbrace{\underline{\underline{K}}\,\underline{U} = \underline{F}}_{\text{MDS}}$$

$\delta\Pi$ è stazionario se e solo se siamo in equilibrio



$$\Pi = \frac{1}{2} k \underline{U}^2 - PU$$

In base quello che abbiamo fatto per trovare il minimo



Punto di stazionarietà di Π

$\underline{U} = \frac{P}{k} \rightarrow$ in forma matriciale $\underline{F}\,\underline{\underline{k}}^{-1}$

→ Π lo abbiamo visto come funzione di più variabili.

→ È anche punto di minimo e il sistema sono stabile.

$$\delta^{(2)}\Pi = \underbrace{\delta \underline{U}^T}_{\approx 1} \underbrace{\underline{K}}_{\text{sdp}} \underbrace{\delta \underline{U}}_{\approx 1} > 0 \rightarrow \text{È un minimo}$$

Teoria delle trave

- Oggi: Cinematica delle trave
- Fin'ora la deformazione era data dai vincoli; ora consideriamo anche la deformazione dell'asta.

Modellazione delle strutture.

- Dobbiamo definire matematicamente una trave
- Vogliamo definire lo spostamento ad un qualsiasi punto nella trave.
- ACM abbiamo visto la tra attraverso i casi di De San Venant.
  - Volevamo risolvere, risolvendo le equazioni delle continuo solido 3Dimensionale, per cui abbiamo posto molte ipotesi visto che è difficile.
    - Per altre forme come la piastra e guscio non è lo stesso, si risolve in modo simile a come abbiamo visto fin'ora

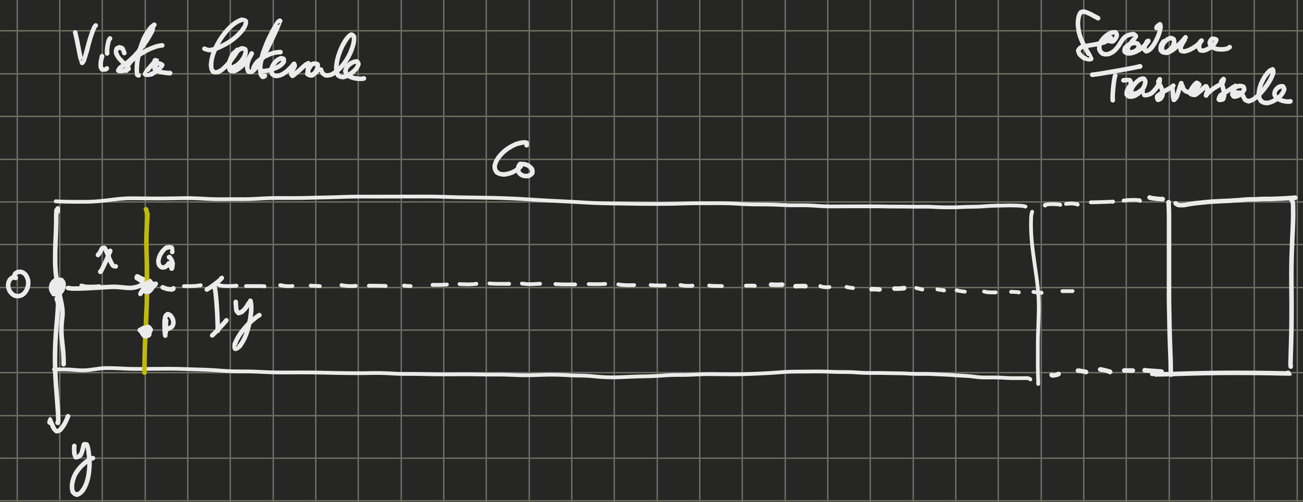
Diamo la definizione delle trave non come DSV ma come l'approccio degli spostamenti, con sistema

Vincoli ad elasticità concentrata

Consideriamo il problema della flessione come la soluzione di un generico problema elastico.

↳ Vediamo le stesse cose ma in un modo diverso

Consideriamo una trave



Generico punto $P(x, y)$

La generica x individua una sezione trasversale della trave.

Vogliamo risolvere un problema nel sistema O, x, y,
quindi per ora ignoriamo problemi che ci portano la linea fuori dalla pagina

Cinematica della trave

$C_0 \to \hat{C}$

↳ Come lo descrivo?

Congruente (senza vincoli) - deformazione continua senza strappi o compenetrazioni di materiale.

$P(x,y) \longrightarrow \hat{P}$

Cambia attraverso uno spostamento

$\underline{S}(x,y) = \begin{pmatrix} S_x(x,y) \\ S_y(x,y) \end{pmatrix}$

Spostamento

→ per descrivere lo spostamento deve descrivere 2 funzioni scalari, dipendenti da x e y.

↳ portarci queste due significherebbe avere una risposta esatta.

Vogliamo ipotesi del modello

↳ Possiamo approssimare una soluzione al problema?

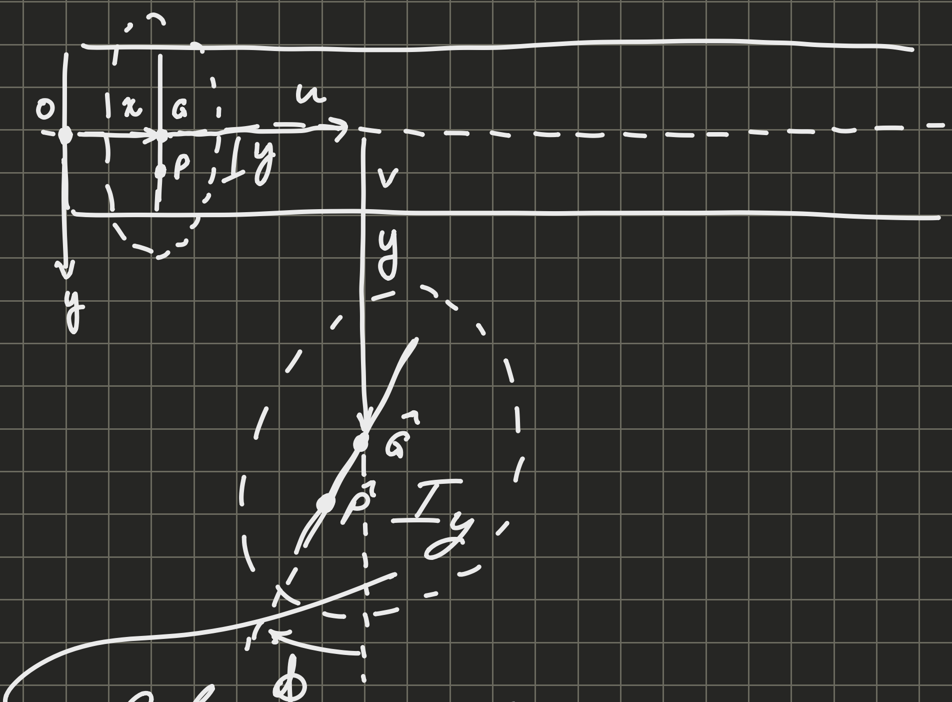
La approssimazione è che la sezione trasversale della trave sia rigida

↳ Cioè che durante la deformazione le sez. trasversale sia piana, non è corretto e non segue De Saint Venant, ma ci darebbe fare un risultato giusto da un punto di vista tecnico.

↳ Semplifichiamo perchè non dobbiamo più descrivere S_x e S_y.

↳ Come. (Facciamo zoom sulla sezione)

$\hat{C}$



In questo momento non ci importa come va da C_0 a $\hat{C}$, stiamo guardando come cambiano

$\hat{G}$ e $\hat{P}$ sono le nuove posizioni di P e G di C_0

↳ Lo stesso perché la sezione è rigida.

Per descrivere lo spostamento di G_0, mi servono v, u e ϕ

Per descrivere la configurazione dell'intera trave, servirà una terna per ogni sezione.

Sotto l'ipotesi delle sezione piana

$C_0 \rightarrow \hat{C}$

$$\underbrace{U = U(x)\,,\ v = v(x)\,,\ \phi = \phi(x)}$$

Servono descrivere 3 funzioni di x

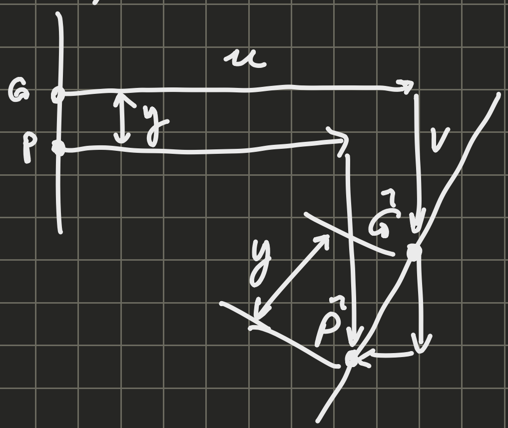
↳ Possiamo raccogliere in $\underline{U}(x) = (U, v, \phi)^T$

↳ Invece di descrivere S_x e S_y, serve solo descrivere il vettore degli spostamenti generalizzati, che sarà funzione di x

Con la trave rigida avevamo un $\underline{U}$ che descriveva la trave intera, con la trave qui essendo una famiglia di segmenti $\underline{U}$ è funzione di x, ma rispetto modello continuo dove lo spostamento era dipendente da x e y, abbiamo ridotto di una variabile indipendente.

↳ L'irrigidimento delle sezione di semplifica il modello togliendo una coordinata.

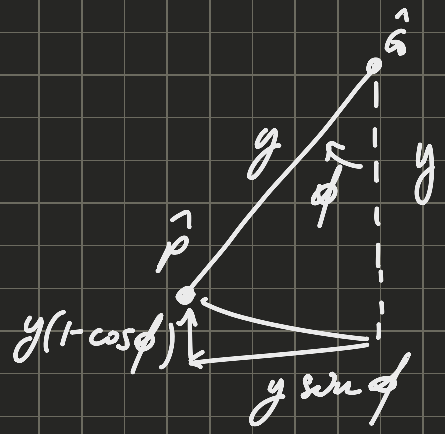
↳ Dobbiamo lo stesso esser capaci di descrivere lo spostamento di ogni punto che non è G, quanto è lo spostamento di P?



Lo spostamento ha due componenti

Sviluppando in serie

Spostamento di P
$$\begin{cases} S_x = U - y\sin\phi = U - y\phi + o(\phi^2) \\ S_y = v - \underbrace{y(1-\cos\phi)}_{\text{Spostamenti relativi}} = v + o(\phi^2) \end{cases}$$



In forma matriciale $\underline{s} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(x) \\ V(x) \\ \phi(x) \end{pmatrix} = \overset{\text{Nota}}{\underline{\underline{A}}(y)} \cdot \overset{\text{Incognita}}{\underline{U}(x)}$

Matrice A dipende da y, ci permette in base alla sezione x e la posizione nella sezione, di trovare uno spostamento $\underline{s}$.

Ci permette di esprimere come funzione lineare degli spostamenti generalizzati di una sezione (U, v e ϕ), lo spostamento di qualsiasi punto del sistema.