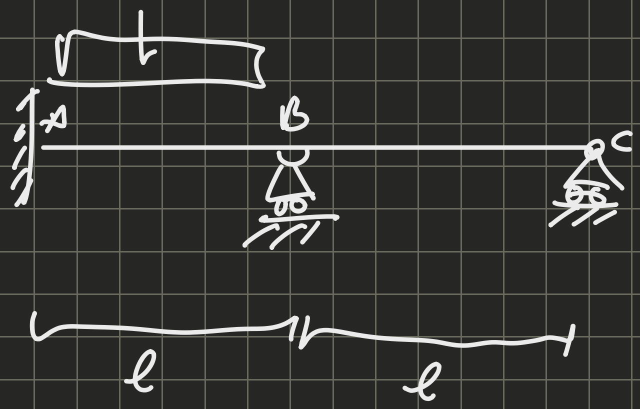
Lezione 14 –

Richiamo



Hp: $GA^* \to \infty$

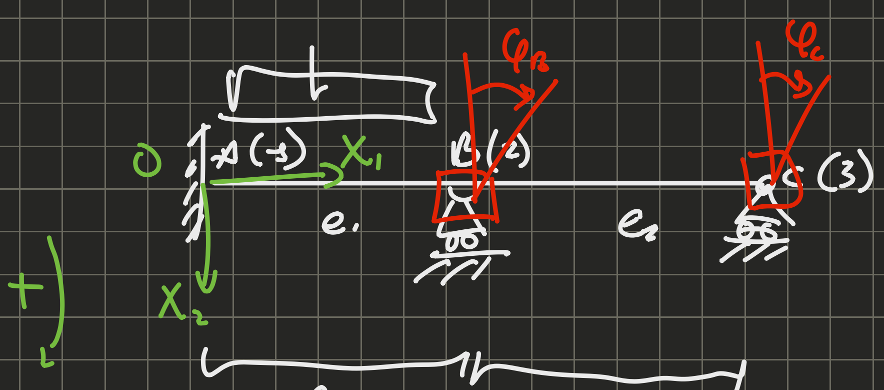
Abbiamo generalizzato questo esempio per dimostrare le proprietà di $\underline{\underline{K}}$ e che esiste una sola soluzione che è $\underline{\underline{K}}\,\underline{V} + \underline{P} = \underline{0}$

→ Ricavato con la stazionarietà dell'energia potenziale totale

Implementazione digitale dell'MDS

→ Nel caso delle travi è il metodo degli elementi finiti.

→ Metodo di elementi finiti per elementi di travi



A, B, C sono i nodi 1, 2 e 3

e_1 e e_2 sono i campi di trave.

L'impostazione del sistema di riferimento è arbitrario

→ definiamo anche una direzione

per le rotazioni:

Sistema di Riferimento Inerziale (Globale)

$$\{O, x_1, x_2\}$$

Tabella Coordinate Nodali

Numero nodo	X_1	X_2
1	0	0
2	ℓ	0
3	2ℓ	0

Tabella delle Incidenze

Numero Identificativo Elemento	Nodo "1" Ingresso	Nodo "2" "Uscita"
e_1	1	2
e_2	2	3

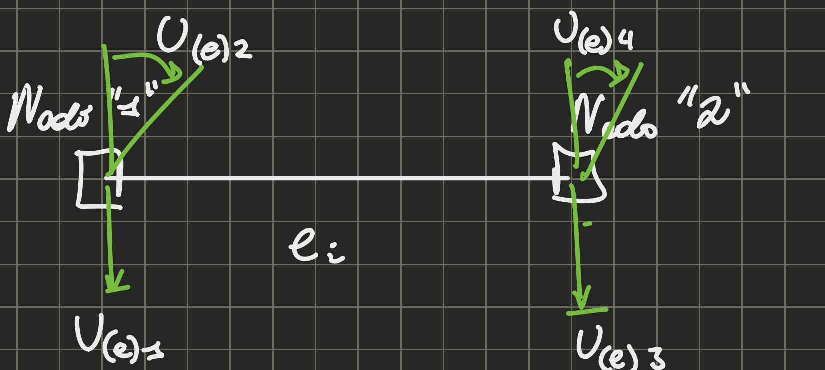
possono essere scambiati

Definisce la topologia del sistema

Discretizzare significa identificare l'effetto dei vincoli sui nostri nodi.

$$\underline{U} = (\varphi_B, \varphi_C)^T := (U_1, U_2)^T \rightarrow N = 2$$

Ci descrive la deformata nel riferimento globale



— = possibilità di spostamento senza quelli assiali

$$\underline{U}_{(e)} = (U_{(e)1}, \dots, U_{(e)4})^T \leftarrow$$

$N_{loc} = 4$
↳ locale

$\boxed{10:52}$ → Quello che dice

Facciamo una corrispondenza tra elementi

Matrice dei GDL (delle corrispondenze globale-locale) → (U_1, U_2)

Indice Elemento	$U_{(e)1}$	$U_{(e)2}$	$U_{(e)3}$	$U_{(e)4}$
e_1	0	0	0	1
e_2	0	1	0	2

Incastro

Vincolato

$1 \to U_1$

$1 \to U_1$

$2 \to U_2$

$1 \Rightarrow$ corrisponde a U_1

$2 \Rightarrow$ corrisponde a U_2

Formulisco questa tabella

Matrice Booleana

$$\underline{U}_{(e_i)} = \underline{\underline{L}}_{(e_i)} \, \underline{U}$$

$4\times1 \qquad 4\times2 \qquad 2\times1$

↳ $N_{loc} \times N$

locale ↲ ↳ globale

$$\underline{\underline{L}}_{(e_1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1^a riga

$$U_{(e_1)1} = 0U_1 + 0U_2$$

$$U_{(e_1)2} = 0U_1 + 0U_2$$

$$U_{(e_1)3} = 0U_1 + 0U_2$$

$$U_{(e_1)4} = 1U_1 + 0U_2$$

Quello che abbiamo visto qui, e anche era evidente prima

$$\underline{\underline{L}}_{(e_2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Possiamo applicare l'equazione della energia elastica immagazzinata per il singolo elemento

$$\Omega_{(ei)} = \frac{1}{2}\, \underline{U}^T_{(ei)}\, \underline{\underline{k}}_{(ei)}\, \underline{U}_{(ei)} \qquad \underline{U}_{(ei)} = \underline{\underline{L}}_{(ei)}\underline{U}$$

$$\longrightarrow \underline{\underline{k}}_{(ei)} = \begin{bmatrix} \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ & \frac{4EJ}{l} & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l^2} \\ \text{Simmetrica} & & \frac{12EJ}{l} & -\frac{6EI}{l^2} \\ & & & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}$$

stessi coefficienti di sempre, se si cambiano le coordinate, cambiano solo i segni

$$V_{p(ei)} = \underline{P}^T_{(ei)}\, \underline{U}_{(ei)} = \underline{U}^T_{(ei)}\, \underline{P}_{(ei)} \longrightarrow \underline{P}_{(ei)} = \begin{bmatrix} -\frac{p_{(i)} l}{2} \\ -\frac{p_{(i)} l^2}{12} \\ -\frac{p_{(i)} l}{2} \\ \frac{p_{(i)} l^2}{12} \end{bmatrix}$$

Assemblaggio di $\underline{\underline{k}}$

Globalmente

$$\longrightarrow \Omega = \sum_{ei=1}^{2(N_{elementi})} \Omega_{(ei)} = \frac{1}{2}\, \underline{U}^T \underbrace{\left[\sum_{ei=1}^{N_{elementi}} \underline{\underline{L}}^T_{(ei)}\, \underline{\underline{k}}_{(ei)}\, \underline{\underline{L}}_{(ei)} \right]}_{\underline{\underline{k}}} \underline{U}$$

Stessa di sempre ricavata in un modo che un software può capire.

$$V_p = \sum_{ei=1}^{N_{elementi}} V_{p(ei)} = \underline{U}^T \underbrace{\sum_{ei=1}^{N_{elementi}} \underline{\underline{L}}^T_{(ei)}\, \underline{P}_{(ei)}}_{P}$$

Teorema stazionarietà energia potenziale totale

$$\delta\Pi = \ldots \overset{!}{=} \underline{\underline{K}}\underline{U} + \underline{P} = \underline{0}$$

<u>Esempio</u>

$$\underline{\underline{K}}_{(1)} = \underline{\underline{L}}^T_{(e1)}\, \underline{\underline{K}}_{(e1)}\, \underline{\underline{L}}_{(e1)}$$

$$\underline{\underline{K}}_{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ \cdot & - & \cdot & - - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{44} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EJ}{l} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}}_{(2)} = \underline{\underline{L}}^T_{(e2)}\, \underline{\underline{K}}_{(e2)}\, \underline{\underline{L}}_{(e2)}$$

$$\underline{\underline{K}}_{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ \cdot & - & \cdot & - - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{43} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{24} \\ k_{42} & k_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EJ}{l} & \frac{2EJ}{l} \\ \frac{2EJ}{l} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}$$

La somma di $\underline{\underline{K}}_{(1)}$ e $\underline{\underline{K}}_{(2)}$ ci da la stessa matrice che abbiamo trovato per la stessa struttura.

Avendo elementi in versi diversi significa che dobbiamo spiegare che l'azione assiale in se azione flessionale in un'altro.

Non consideriamo vincoli di irrigidimento.

In generale per ogni elemento definiamo sia i nodi che l'orientamento dell'elemento come angolo; si può calcolare con le coordinate dei nodi

Usiamo un sistema di riferimento ruotato per α.

$\underline{U}_{loc} \rightarrow$ considerò anche lo spostamento assiale.

Usiamo una matrice T di rotazione per legare i $\underline{U}_{loc}$ e $\underline{U}$

$$\underline{V}_{(e)} = T_{(e)} \underline{U}_{(e)} = T_{(e)} \underline{\underline{L}}_{(e)} \underline{U}$$

$\underline{\underline{L}}$ è 6×6. diventano distinguibili i termini assiali e flessionali per il sistema che è isotropo.

Tutto questo non si fa, lo fa il computer.

Si può usare un codice e le tabelle di incidenza per generare la matrice $\underline{\underline{L}}$ e così le altre matrici.