Lezione 20 -

Inizieremo alla base che ci porta agli elementi finiti.

Esempio 1

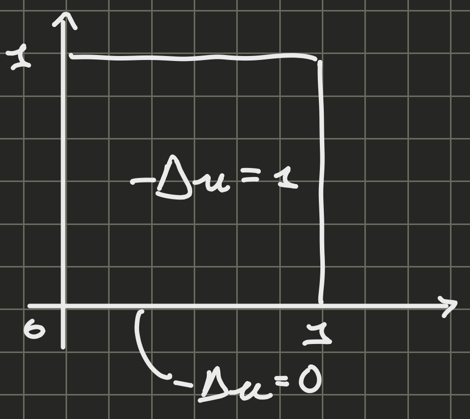
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \to \text{Poisson in più dimensioni } \Omega = (0,1)^2 \\ +\text{CB} \quad u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Perché sia possibile $u \in C^2(\bar{\Omega})$, è quello che ci aspettiamo.
Non è detto, dipenderà da f.

Il modello è giusto, dovremmo cambiare spazio.

se $f = 1 \Rightarrow f \in C^0(\bar{\Omega})$ dobbiamo aspettarci $u \in C^2(\bar{\Omega})$

ma non è vero



$$-\Delta u(0,0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,0) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,0)$$

$= 0$ ↳ per la CB

$= 1$ per $-\Delta u = 1$

Non è possibile se la equazione $\in C^2(\bar{\Omega})$ perché sarebbe continua anche al bordo.

Fin al bordo è 1, al bordo è 0, $-\Delta u$ allora non sarà $C^0(\bar{\Omega})$ quindi u non potrà essere $\in C^2(\bar{\Omega})$

Quello che possiamo dire è che sarà $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$

Non chiuso

Chiuso

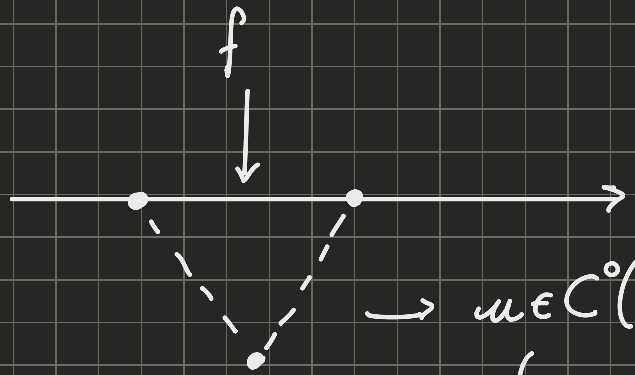
$\underbrace{\qquad\qquad}$

Chiediamo meno di $u \in C^2(\bar{\Omega})$

Esempio 2

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Prendiamo f cattiva, come piattaforme



$\longrightarrow u \in C^0([0,1])$

$\hookrightarrow$ Non si potrà trovare la soluzione alla formazione,

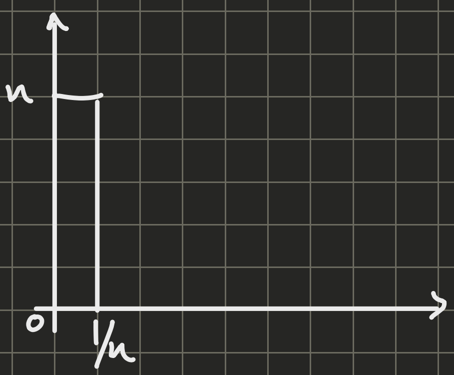
ma sappiamo che esiste.

C'è una differenza tra il modello che non trova soluzione e la soluzione che sappiamo esiste.

Dobbiamo cambiare come vediamo il modello per trovare la soluzione.

Rappresentazione matematica di carico puntiforme

↳ δ di Dirac in $(0,0)$



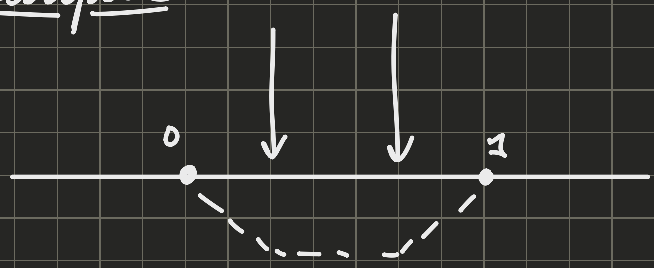
$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & x<0,\ x>1/n \\ 1 & 0 \le x \le \frac{1}{n} \end{cases}$$

Più aumenta n, più è alto e stretto

$$\delta_D(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$$

Abbiamo preso $f(x)$ cattiva ma anche se miglioriamo la soluzione non è garantita.

Esempio 3

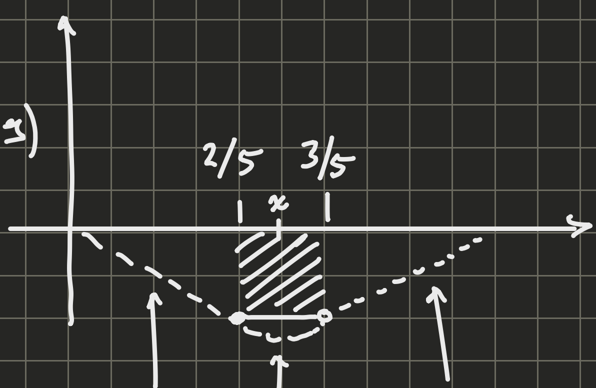


2 carichi puntiformi

$u \in C^0([0,1])$

Esempio 4

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (0, 2/5) \cup (3/5, 1] \\ -1 & x \in [2/5, 3/5] \end{cases}$$



Rettilineo | Paraboloide | Rettilineo

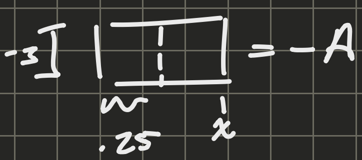
$$F(x) = \int_0^x f(y)\,dy$$

$$u'(x) = \int_0^x u''(y)\,dy + c = -\int_0^x f(y)\,dy + c = -F(x) + c$$

$$F(x) = \int_0^x f(y)\,dy = \begin{cases} 0 & x \in (0, 2/5) = I_1 \\ -x + 2/5 & x \in [2/5, 3/5) = I_2 \\ -1/5 & x \in [3/5, 1) = I_3 \end{cases}$$

Usa l'area per trovare

$-x + 2/5$



$$\Longrightarrow u'(x) = \begin{cases} c & x \in I_1 \\ \frac{2}{5} - x + c & x \in I_2 \\ 1/5 + c & x \in I_3 \end{cases}$$

Area prima di $x=1$, perché prendiamo l'integrale di 0.

$$u(x) = \int_0^x u'(y)\,dy + c^* \Rightarrow u(x) = \begin{cases} cx + D & x \in I_1 \\ \frac{x^2}{2} - 2/5\,x + cx + E, & x \in I_2 \\ 1/5\,x + cx + F, & x \in I_3 \end{cases}$$

Togliendo l'area prima di .25 per trovare l'area al valore di x.

$$CB \rightarrow \begin{cases} u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \\ u(2/5)^- = u(2/5)^+ \\ u(3/5)^- = u(3/5)^+ \end{cases}$$

Soluzione

$$u(x) = \begin{cases} \frac{-x}{10} & x \in I_1 \\ \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + 2/25, & x \in I_2 \\ \frac{x}{10} - 1/10, & x \in I_3 \end{cases}$$

Non solo $u \in C^0([0,1])$ ma anche $u \in C^1([0,1])$

↪ Vediamo guardando le derivate.

$x = 2/5 \qquad -\frac{1}{10} = u'\left(\frac{2}{5}\right)^- \qquad u'(2/5)^+ = x - \frac{1}{2} = \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{10}$

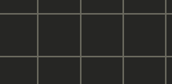
$x = 3/5 \qquad u'\left(\frac{3}{5}\right)^- = \frac{1}{10} \qquad u'(3/5)^+ = \frac{1}{10}$

Ma alla derivata seconda la derivata si scolla.

Dobbiamo allora estendere il nostro modello per permetterci di trovare le soluzioni che non troviamo ora,

Dobbiamo cambiare il scenario

Passiamo da una formulazione differenziale (forte) ad una detta debole (integrale)

Forte	Debole
formulazione differenziale	· formulazione debole
$-u'' = f$	· . . . .
Spazio di lavoro → · C^2	· Spazio di Sobolev
· ∄ configurazione ne  ne 	· Rientrano tutte le configurazioni fisiche.

Proviamo la formulazione debole sugli esempi:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Abbiamo troppo derivate, proviamo a ridurne il numero.

Prendiamo v, una funzione test (trial)

$u, v \in V \rightarrow$ spazio che tiene a conto delle condizioni di bordo, tale che:

$$-u''(x)\,v(x) = f(x)\,v(x)$$

$\underbrace{v(0) = v(1) = 0}_{\text{stesso di 1}}$

↳ Integriamo nel dominio

$$-\underbrace{\int_0^1 u''(x)\,v(x)\,dx}_{} = \int_0^1 f(x)\,v(x)\,dx$$

Per ridurre le derivate di u integriamo per parti

$$\int_0^1 u'(x)\,v'(x)\,dx - \underbrace{\overbrace{u'\,v(x)}^{\text{termini di bordo}}\Big|_0^1}_{} = \int_0^1 f(x)\,v(x)\,dx$$

Applichiamo le condizioni di bordo

$$\rightarrow -u'(1)\cancelto{0}{v(1)} + u'(0)\cancelto{0}{v(0)} = 0$$

Cerchiamo $u \in V$ tale che:

$$\boxed{\int_0^1 u'(x)\,v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,v(x)\,dx \qquad \forall v \in V}$$

↳ Forma debole del problema.

Abbiamo ridotto il peso dato dalle derivate.

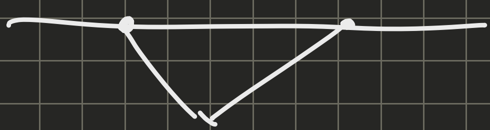
?V

$$V = C_0^1(0,1) = \{ v \in C^1(0,1) \text{ tale che } v(0)=v(1)=0 \}$$

↳ Proprietà

↳ Ha regolarità

↳ Rispetta CB



Non rispetta ancora questa

spazio
- Banach → spazio vettoriale, normato, completo (qualsiasi)
- Hilbert → la norma è indotta da un prodotto scalare.
  ↳ Banach*

completo ⇒ tutte le $\underbrace{\text{successioni di}}$ Cauchy sono convergenti.

$(a_n)_n \in \mathbb{N}$ se $\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$
tale che $|a_n - a_k| < \varepsilon$ $\quad \forall n, k \geq N$

V serve che sia uno spazio di Hilbert.

C_0^1 non è spazio di Hilbert.

<u>Definizione di</u> Spazi $L^p(\Omega)$ $\qquad 1 \leq p < \infty$

Integrale di Lebesgue

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tale che } \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}$$

↳ Lebesgue

Insieme di funzioni per cui esiste finito l'integrale della p-esima integrale di Lebesgue

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{1/p}$$

↳ Norma dello spazio di Lebesgue

Spazio di Lebesgue + Norma di Lebesgue è uno spazio di Banach.

Osservazione

Tra tutti gli spazi L^p di Banach, $p=2$ è uno spazio di Hilbert.

$$L^2(\Omega) = \left\{ f: \Omega \to \mathbb{R} : \int_\Omega |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$ Spazio delle funzioni quadrato sommabili.

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^2 dx\right]^{1/2}$$

$\boxed{16:08}$ → Incaso

$$(f,g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)\,dx$$

Induce la norma che è un prodotto scalare

se g è f allora f^2 che ci completa la definizione di norma.

$p=2 \Rightarrow$ spazio di Hilbert.

L^2 non sarà V ma sarà legato.

Spazi di Banach

- $L^1(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni integrali secondo Lebesgue.
- $L^\infty(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni limitate in Ω

$$\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tale per cui } |f(x)| \leq M < \infty \text{ quasi ovunque su } \Omega \}$$

L^p $\qquad L^q(\Omega) \subseteq L^p(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$ quando $1 \leq p \leq q$

Esempio:

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \begin{cases} \in L^2(0,1) & 0 < \alpha < 1/2 \quad (*) \\ \in L^1(0,1) & 0 < \alpha < 1 \quad (**) \end{cases}$$

$(*)$ $$\int_0^1 \left|\frac{1}{x^\alpha}\right|^2 dx = \int_0^1 x^{-2\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{1}{1-2\alpha} x^{1-2\alpha}\right]_\varepsilon^1 =$$

$$= \frac{1}{1-2\alpha} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[1 - \varepsilon^{1-2\alpha}\right] < \infty$$

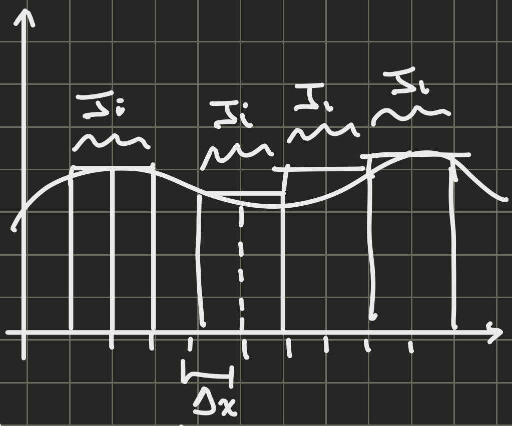
tale che non vada all'infinito

$1 - 2\alpha > 0 \qquad \alpha < \frac{1}{2}$

$(**)$ $$\int_0^1 \left|\frac{1}{x^\alpha}\right| dx = \int_0^1 x^{-\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\right]_\varepsilon^1 =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[1 - \varepsilon^{1-\alpha}\right] < \infty \Rightarrow 1 - \alpha > 0 \Rightarrow \alpha < 1$$

Riemann vs. Lebesgue



$P_x \to$ partizione di x

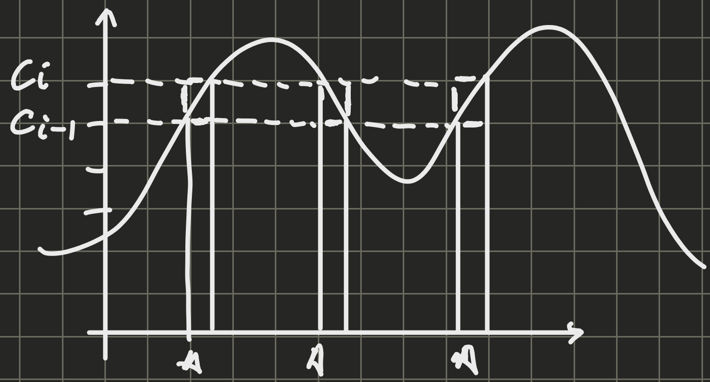
← Upper

$$U(P_x) = \sum \Delta x_i \cdot \left(\sup f\big|_{I_i}\right)$$

$$L(P_x) = \sum \Delta x_i \cdot \left(\inf f\big|_{I_i}\right)$$

→ Preso il punto più alto.

$$\underbrace{\int_R}_{\text{Integrale di Riemann}} = \lim_{n\to\infty} U(P_x) = \lim_{n\to\infty} L(P_x)$$



$P_y \to$ fa la partizione in y invece che x

Prende come in Riemann una area inferiore e superiore.

$$U(P_y) = \sum_i \mu(A) \cdot c_i$$

Per noi è la lunghezza ma generalmente è una misura.

$$L(P_y) = \sum_i \mu(A) \cdot c_{i-1}$$

$$\int_L = \lim_{n\to\infty} \begin{matrix} L(P_y) \\ U(P_y) \end{matrix}$$

Esempio: Funzione di Dirichlet

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

→ Numeri Razionali.

Con Riemann non si può integrare.

Con Lebesgue invece:

$$\int_0^1 \chi(x)\,dx = 0\,\underbrace{\mu(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})}_{1} + 1\,\underbrace{\mu(\mathbb{Q})}_{=0} = 0$$

sono i punti
isolati, la
misura dell'insieme
è nulla.

Qual'è lo spazio V?

? V ? $u \in V$ tale che $\int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx \quad \forall v \in V$

$\hookrightarrow v(0) = v(1) = 0$

da ora in poi
sono integrabili di
Lebesgue

Teorema

Date $\varphi, \psi : (0,1) \to \mathbb{R}$, se $\underbrace{\varphi^2 \text{ e } \psi^2 \text{ sono integrabili}}_{}$

$\Rightarrow \varphi, \psi \in L^2(\Omega)$

allora è integrabile $\psi \varphi$

$\Rightarrow \psi\varphi \in L^1(\Omega)$

Conseguenza: Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\boxed{\left| \int_0^1 \varphi(x)\, \psi(x)\, dx \right| \le \| \varphi \|_{L^2(\Omega)} \cdot \| \psi \|_{L^2(\Omega)}}$$

$$\underbrace{\int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx}_{1} = \underbrace{\int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx}_{2}$$

Per fare stare in piedi 1 $\to u' \in L^2(\Omega)$ e $v' \in L^2(\Omega)$

Per fare stare in piedi 2 $\to f \in L^2(\Omega)$ e $v \in L^2(\Omega)$

$\hookrightarrow$ Dato $\to$ stiamo estendendo le richieste anche sui dati

Per soddisfare le richieste:

$$V = \{ v \in (0,1) \to \mathbb{R} \text{ tale che } v \in L^2(0,1),\ v' \in L^2(0,1) \text{ e } v(0)=v(1)=0 \}$$

<u>Osservazione:</u>

$$H^1(0,1) = \{ v \in L^2(\Omega),\ v' \in L^2(\Omega) \}$$

$$\Rightarrow V = \{ v \in (0,1) \to \mathbb{R} \text{ tale che } v \in H^1(\Omega) \text{ e } v(0)=v(1)=0 \}$$