Lezione 15 -

$f = f(t)$ $t \geq$ $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$

Abbiamo fattore la Trasformata di Laplace,
ODE $\Rightarrow$ Problem Algebrico $\rightarrow$ ODE

Proprietà delle Trasformata

Proprietà 1) Linearità $\rightarrow$ Fatta l'ultima volta

Proprietà 2) Formule di Shift
Esempi di Trasformata fatte:

$$\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s} \qquad \mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a}$$

Moltiplicando per e^{at}, si causa uno shift a destra di a,
Questa moltiplicazione causa uno shift nella variabile indipendente.

$$\left.\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{R} \quad \mathcal{L}\left[e^{at} \cdot f(t)\right](s) &= F(s-a) \\ \mathcal{L}^{-1}\left[F(s-a)\right](t) &= e^{at} \cdot f(t) \end{aligned}\right\} \text{Primo Teorema di Shift}$$

Esempi 2A:

$$\mathcal{L}[\cos(\alpha t)](s) = \frac{s}{s^2+\alpha^2} = F(s)$$

$$\mathcal{L}[e^{\beta t}\cos(\alpha t)](s) = F(s-\beta) = \frac{s-\beta}{(s-\beta)^2+\alpha^2}$$

Esempio 2B:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s^2+4s+20}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(s+2)\right](t) = e^{-2t}\sin(4t)$$

$$f(t) = \sin(\alpha t) \rightarrow F(s) = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$$

$$\frac{4}{s^2+4s+20} = \frac{4}{(s+2)^2+16} = F(s+2)$$

Proprietà 3) Trasformata del Prodotto di Convoluzione

$$f(t), g(t) \qquad t \geq 0$$

$$(f * g) = \int_0^t f(t-u)\, g(u)\, du \quad \left(= \int_0^t f(u)\, g(t-u)\, du \right), \; t \geq 0$$

Trasformata di Laplace, supponiamo che abbiamo

$$F(s), G(s) \qquad \mathcal{L}\big[(f * u)\big](s) = F(s) \cdot G(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\big[F(s) \cdot G(s)\big](t) = (f * g)(t)$$

Esempio 3A:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 (s+1)^2}\right](t)$$

$$f(t) = t^n \to F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \xrightarrow[n=1]{} \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right](t) = t \to g$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right] = t \cdot \underbrace{e^{-t}}_{\text{shift, dato dal } +1} \to f$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{(s+1)^2}\right)(t) = \int_0^t \underbrace{e^{-(t-u)} (t-u)}_{f(t-u)} \underbrace{u}_{g(u)}\, du =$$

$$= (t+2)e^{-t} + (t-2)$$

Proprietà 4) Trasformata della Derivata

$$\mathcal{L}[y'(t)](s) = \int_0^\infty y'(t)\,e^{-st}\,dt = y(t)\,e^{-st}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty y(t)(-s)\,e^{-st}\,dt$$

Integrazione per parti

$$= -y(0) + s\underbrace{\int_0^\infty y(t)\,e^{-st}\,dt}_{\mathcal{L}[y(t)](s)}$$

$$\mathcal{L}[y'(t)](s) = s\mathcal{L}[y(t)](s) - y(0)$$

$$\mathcal{L}[\underbrace{y''(t)}_{(y'(t))'}](s) = s\mathcal{L}[y'(t)](s) - y'(0) = s\left[s\mathcal{L}[y(t)](s) - y(0)\right] - y'(0)$$

$$= s^2\mathcal{L}[y(t)](s) - s\,y(0) - y'(0)$$

Esempio:

$$\begin{cases} y'(t) = 4y(t) + 1 & t \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{ODE}} \arrow[r, bend left, "\mathcal{L}"] & \boxed{\text{Problema Algebrico}} \arrow[l, bend left, "\mathcal{L}^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$$y'(t) - 4y(t) = 1$$

$$\mathcal{L}[y'(t) - 4y(t)](s) = \mathcal{L}[1](s)$$

$$\mathcal{L}[y'(t) - 4y(t)](s) \overset{P1}{=} \mathcal{L}[y'(t)](s) - 4\mathcal{L}[y(t)](s)$$

$$\overset{P4}{=} s\mathcal{L}[y(t)](s) - 1 - 4\mathcal{L}[y(t)](s)$$

$y(0)$

$$\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}$$

$$\rightarrow s\mathcal{L}[y(t)](s) - 4\mathcal{L}[y(t)](s) - 1 = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$$

$$sY(s) - 4Y(s) - 1 = \frac{1}{s}$$ → Problema Algebrico

$$Y(s)(s-4) = \frac{1}{s} + 1 \rightarrow Y(s) = \frac{1}{s-4}\left(1 + \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s-4} + \frac{1}{s(s-4)}$$

$$\mathcal{L}[y(t)](s) = \frac{1}{s-4} + \frac{1}{s(s-4)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-4} + \frac{1}{s(s-4)}\right](t)$$

$$\overset{P_1}{=} \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-4}\right]}_{e^{4t}} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s-4)}\right]}_{\frac{1}{4}(e^{4t}-1)}(t) = e^{4t} + \frac{1}{4}(e^{4t}-1) = \frac{1}{4}5e^{4t} - 1$$

$$e^{at} - e^{bt} \qquad \frac{a-b}{(s-a)(s-b)} \rightarrow -\frac{-4}{(s-0)(s-4)} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow \frac{-1}{4}(e^{0t} - e^{4t} = \frac{1}{4}(e^{4t}-1)$$

Fine Metodi Analitici per ODE

Inizio Metodi Numerici per ODE

<u>ODE soluzioni con metodi numerici</u>

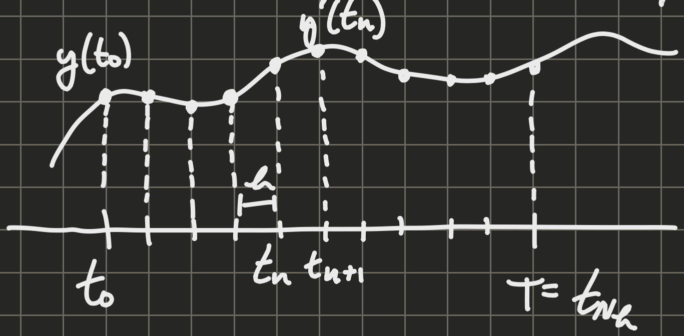
$$\exists! \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [t_0, T] = I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Laplace si può usare solo per ODE a valori costanti, ma c'è un mondo che non è quindi non può esser usato.

? $y(t)$ $\qquad y: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Andiamo a discretizzare t, e andiamo ad approssimare $y(t)$

$y(t)$ è un vettore dei risultati approssimati, se vogliamo la funzione possiamo interpolare.



$t_0 < t_1 < \ldots < t_{N_h} \equiv T$

$(N_h + 1)$ punti di campionamento

h - passo di discretizzazione

$h = \dfrac{T - t_0}{N_h}$

Metodi numerici

$u_n \simeq y(t_n) \quad \forall n = 0, \ldots, N_h$

↳ Approssima i valori di y a quegli istanti.

$$\underbrace{\{u_0, u_1, \ldots, u_{N_h}\}}_{\text{Approssimazione di tipo discreto}}$$

Chiediamo allo schema che

$u_0 = y_0$.

Ci fornisce una approssimazione sulla soluzione esatta della funzione.

Guardiamo 3 schemi

Metodo di Eulero in Avanti

$t = t_n$

$y'(t_n) = f(t_n, y(t_n))$ (collocazione)

Andiamo ad approssimare $y'(t_n)$

$$\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} \simeq f(t_n, y(t_n))$$ (approssimazione della derivata)

$u_n \to y(t_n) = y_n \to$ valore della funzione nell'istante n

Da valori veri a valori approssimati

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} \simeq f(t_n, y_n) \longrightarrow \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_n, u_n)$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h f(t_n, u_n) \\ u_0 = y_0 \end{cases}} \quad n = 0, 1, \dots,$$

Metodo in Eulero in Avanti (esplicito)
(one-step)

$u_0 = y_0$

$\hookrightarrow u_1 \simeq y_0 + h f(t_0, y_0) \simeq y(t_1) = y_1$

$\hookrightarrow u_2 \simeq y(t_2) = y_2$

$\vdots$

C'è un accumulo degli errori da un istante ad un'altro.

I metodi numerici sono one-step e multi-step. noi guardiamo i one-step.

Sono più facili da implementare ma i multi-step fanno meno errore però sono più difficili perché usano più passi prima non solo quello prima.

Metodo di Eulero all'Indietro

$t = t_{n+1}$ $\quad y'(t_{n+1}) = f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$ (collocazione)

$$\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} \simeq f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} \simeq f(t_{n+1}, y_{n+1}) \longrightarrow \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_{n+1}, u_{n+1})$$

$$\boxed{\begin{array}{l} n = 0, 1, \dots, N_h - 1 \\ u_{n+1} = u_n + h f(t_{n+1}, u_{n+1}) \\ u_0 = y_0 \end{array}} \quad \text{(one-step)}$$

Schema di Eulero all'indietro (implicito)

⟶ perché u_{n+1} dipende da se stesso.

se f è lineare è uguali all'avanti, se non è lineare no.

Esempio

$$y'(t) = \overbrace{C y(t) \left(t - \frac{y(t)}{B} \right)}^{f(t, y(t))} \quad y_0, B, C \in \mathbb{R}$$

$y(0) = y_0$

EE

Eulero Esplicito $\begin{cases} n=0,1,\dots,N_h-1 \\ u_{n+1} = u_n + hf(t_n,u_n) = u_n + hCu_n\left(t_n - \frac{u_n}{B}\right) \\ u_0 = y_0 \end{cases}$

EI

Eulero Implicito $\begin{cases} n=0,1,\dots,N_h-1 \\ u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1},u_{n+1}) = u_n + hCu_{n+1}\left(t_{n+1} - \frac{u_{n+1}}{B}\right) \end{cases}$

Gli schemi impliciti hanno pena che dobbiamo attivare uno solver non lineare per avere la soluzione

EE + EI

$$2u_{n+1} = 2u_n + h\left[f(t_n,u_n) + f(t_{n+1},u_{n+1})\right]$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n,u_n) + f(t_{n+1},u_{n+1})\right]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} n=0,1,\dots,N_h-1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n,u_n) + f(t_{n+1},u_{n+1})\right] \\ u_0 = y_0 \end{array}}$$

Schema di Crank-Nicolson (implicito)

one-step perché u_{n+1} dipende da u_n

Analisi di questi schemi

↳ Per vedere se c'è un vantaggio agli schemi impliciti

Quello che guardiamo {Convergenza, consistenza, stabilità

Convergenza → come abbiamo guardato vediamo per $h \to 0$

$$\forall\, n = 0, \ldots, N_h$$

$$|u_n - y_n| \leq C\, h^{p}$$ → Ordine di convergenza

Guardiamo per eulero esplicito, il resto diamo solo il risultato.

$$e_n = u_n - y_n = \underbrace{\overbrace{(u_n - u_n^*)}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\overbrace{(u_n^* - y_n)}^{\text{errore associato ad un passo}}}_{\mathrm{II}}$$

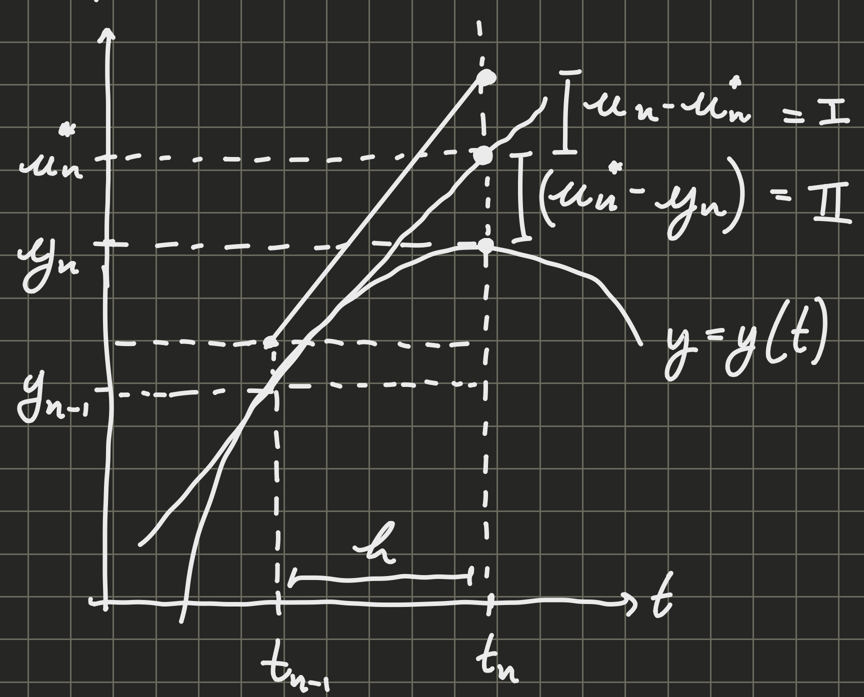
$$u_n^* = y_{n-1} + h\,\underbrace{f(t_{n-1}, y_{n-1})}_{y'_{n-1}}$$ → un passo di EE con (per u_n) y_{n-1} noto

Guardando alla convergenza vediamo anche la consistenza

→ Sono legato alla consistenza

↳ Errore accumulato

$$u_n = u_{n-1} + \underbrace{h\, f(t_{n-1}, u_{n-1})}_{\simeq y'(t_{n-1})}$$ → Passo vero, con dato non esatto



Se possiamo far vedere che I e II vanno a 0, convergono

Troveremo che II va a 0 con la sua velocità, mentre I non va da nessuna parte, ma I e II necessariamente vanno a 0.

$$(\mathrm{II}) \quad u_n^* - y_n = y_{n-1} - y_n + h \underbrace{f(t_{n-1}, y_{n-1})}_{y'(t_{n-1})}$$

Taylor $y \in C^2(I)$ centrata in t_{n-1}, valutando in t_n

$$y(t_n) = y(t_{n-1}) + h\, y'(t_{n-1}) + \frac{h^2}{2} y''(\alpha_n) \quad \text{con } \alpha_n \in (t_{n-1}, t_n)$$

$$y_n = y_{n-1} + h$$

$$u_n^* - y_n = -\frac{h^2}{2} y''(\alpha_n) \xrightarrow{h \to 0} 0$$

Definizione di consistenza di schema ad un passo

↳ Mettiamo in uno schema la risposta esatta.

$$\tau_n(h) = \frac{u_n^* - y_n}{h}$$ → Errore di Troncamento Locale

h → Rende adimensionale, liberandoci dalla scelta di h

$$\tau(h) = \max_{n=0,\dots,N_h} |\tau_n(h)|$$ → Errore di Troncamento Globale

Uno schema ad un passo si dice __consistente__

quando $\lim_{h\to 0} \tau(h) = 0$

Ordine di Consistenza: se $\tau(h) = O(h^q)$, lo schema ha ordine di consistenza pari a q

EE $\quad \tau_n(h) = -\frac{h}{2} \underbrace{y''(x_n)}_{}$

$$= f'(x_n, y(x_n))$$

↳ Ci riferiamo a f perché è noto, y no. Non saremmo neanche riusciti a prendere il massimo di y'' perché y non è noto.

$$\boxed{\tau(h) = \frac{h}{2} M} \quad \text{con} \quad M = \max_{t\in I} |f'(t, y(t))|$$

↳ ⇒ EE è consistente, e ha ordine di consistenza di ordine 1.

$$f'(t, y(t)) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'(t)$$