Lista - Penso

- Metodo degli Spostamenti
- Metodo delle Forze
- Teorema di Clapeyron e EPT
- Legame Costitutivo
- PLV su trave isostatica
- Effetto gradiente di temperatura su trave
- Metodo agli elementi Finiti
- Teoria della Piastra.

Teorema di Clapeyron e EPT

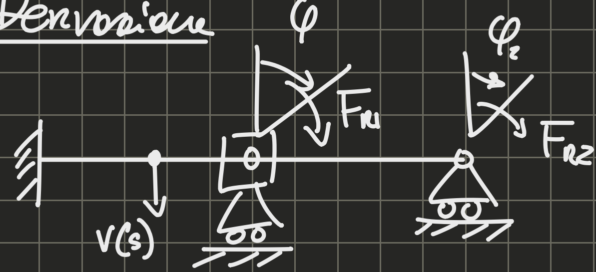
Il teorema di Clapeyron è un teorema che ci permette trovare il lavoro occupato dalle forze interne alla trave.

Il teorema applicato al problema discreto ci dice che:

$$W_{FR} = \frac{1}{2} \underline{F}_R^T \underline{U} = \frac{1}{2} \underline{U}^T \underline{\underline{k}} \, \underline{U} > 0$$

$= \Omega \rightarrow$ energia tenuta dal sistema a causa della sua deformazione.

Derivazione



$$\chi(s) = \sum_{i=1}^{N} \chi_i(s)\, U_i$$

$$M = -EI\chi$$

$$\Omega = \frac{1}{2}\int_s M \chi \, ds = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int_s \underbrace{EI\chi_i}_{M}\overbrace{\chi_j}^{\chi} ds\, U_i U_j$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int_s \underbrace{\frac{M_i M_j}{EI}}_{k_{ij}} ds\, U_i U_j$$

Ritroviamo allora che $\Omega = \frac{1}{2}\underline{U}^T \underline{\underline{K}}\, \underline{U} > 0$

(EPT)

Considerando i carichi esterni come conservativi, possiamo trovare l'energia potenziale occupata da loro.

$$V_p = -\int_s p \underbrace{\sum_{i=1}^{N} v_i U_i}_{v(s)} ds = -\sum_{i=1}^{N} \underbrace{\int_s p\, v_i(s)\, ds}_{P_i} U_i = \underline{P}^T \underline{U}$$

Definendo $\Pi = \Omega(s) + V_p = \frac{1}{2}\underline{U}^T \underline{\underline{K}}\, \underline{U} + \underline{P}^T \underline{U}$

$$\delta\Pi = 0 \;\; \forall \delta\underline{U} \Rightarrow \delta\underline{U}^T\left[\underline{\underline{K}}\,\underline{U} + \underline{P}\right] = 0 \;\; \forall\delta\underline{U} \Longleftrightarrow \underline{\underline{K}}\,\underline{U} + \underline{P} = \underline{0}$$

Legame Costitutivo

Per lo studio della cinematica, possiamo dividere lo spostamento di una sezione considerata indeformabile della trave, in due direzioni.

$$\begin{cases} S_x = u(x) - y\,\varphi(x) \\ S_y = v(x) \end{cases}$$

Da cui possiamo definire la deformazione locale del sistema come:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial S_x}{\partial x} = u' - y\varphi' \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial S_y}{\partial y} = 0 \to \text{Coerente con ipotesi di sezione rigida.} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial S_x}{\partial y} + \dfrac{\partial S_y}{\partial x} = v' - \varphi \end{cases}$$

Modello Timoshenko $\gamma_{xy} = v' - \varphi$

Modello Eulero-Bernoulli $\to \gamma_{xy} = 0 \Rightarrow v' = \varphi$

Definendo: $\eta(x) = u'$ e $-\varphi' = \chi(x)$, e $\gamma_{xy} = \tau$

Possiamo definire un vettore delle deformazioni generalizzate dipendente da x:

$$q(x) = [\eta, \chi, \tau]^T$$

Tramite una derivazione troviamo che:

$$\underline{Q} = \int_A \underline{\underline{B}}^T \underline{\sigma}\, dA = \int_A \begin{bmatrix} \sigma_x \\ y\,\sigma_x \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dA = [N, M, T]^T \overset{E.B}{=\!=} [N, M]^T$$

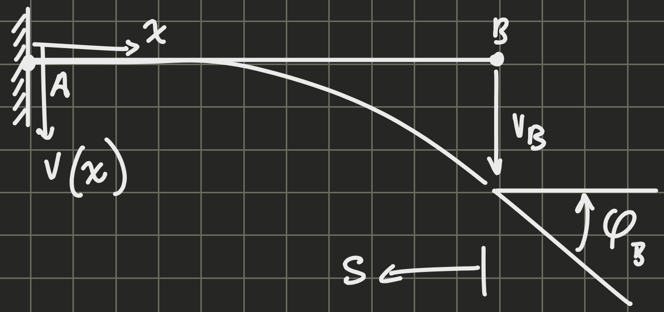
$$= \int_A \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{B}}\, dA \cdot \underline{q} = \underline{\underline{k}}_{sez}\, \underline{q}$$

Tramite due bilanci ed un'applicazione del PLV, troviamo che:

$$\begin{cases} M' - T = 0 \\ T' + p = 0 \end{cases}$$

e sappiamo che $M = EI\chi$

PLV su trave isostatica



Supponiamo di voler trovare V_B.

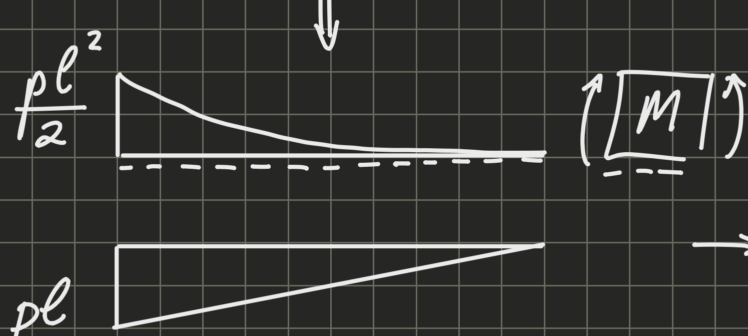
$v_A = v(0) = 0$ $\qquad M_B = M(\ell) = 0$

$\varphi_A = \varphi(0) = 0$ $\qquad T_B = T(\ell) = 0$

Invece di usare la equazione della linea elastica e dover risolvere un'ODE di quarto grado, ci serve risolvere una semplice integrale.

Struttura Reale

$\Rightarrow \quad M = \frac{ps^2}{2} \rightarrow \chi(s) = \frac{M(s)}{EI}$



$\rightarrow T = ps \rightarrow t(s) = \frac{T(s)}{GA^*}$

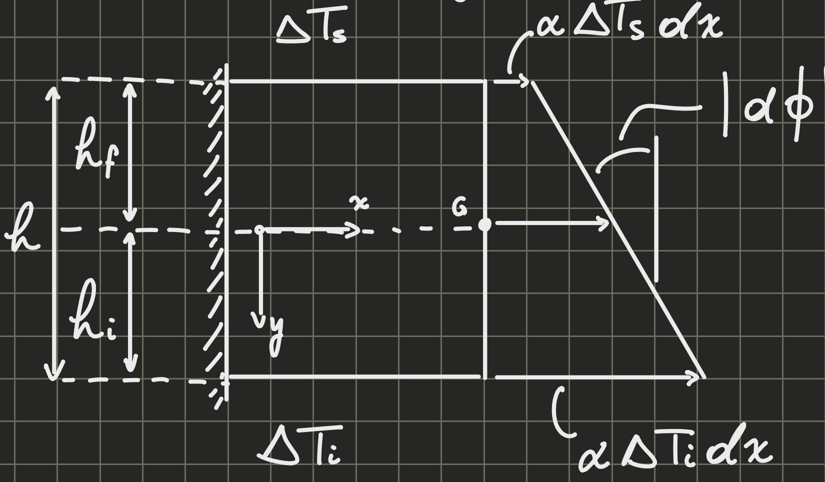
Struttura Fittizia

$$L_{ext} = 1 \cdot v_B = \int_0^l \left(M^* \chi + T^* t \right) ds = \int_0^l \left(\frac{M^* M}{EI} + \frac{T^* T}{GA^*} \right) ds$$

Fittizio   Reale

Il carico fittizio che applichiamo per ricavare lo spostamento vero cambia in base a se interessa trovare v_B (caso a sinistra) o φ_B (caso a destra)
Abbiamo quindi ridotto il problema alla soluzione di due strutture e un semplice integrale.

Effetto di un gradiente di temperatura su una trave



$$d\phi = \frac{\alpha \left(\Delta T_s - \Delta T_i \right)}{h} dx$$

Sapendo che per definizione $\chi = -\varphi'$

$$\Rightarrow \quad \chi_T = -\varphi_T = \frac{\alpha \Delta T_s - \Delta T_i}{h}$$

L'effetto genera anche un'allungamento (du_T) tale che:

$$du_T = \alpha \Delta T_G dx \rightarrow \eta_T = u' = \alpha \Delta T_G$$

$$\Rightarrow \quad q_T = (\eta_T, \chi_T, 0)^T$$

Questi effetti sono anelastici, quindi dobbiamo considerarli separati dagli effetti elastici:

$$q = q_{ELAST} + q_T = \underbrace{\underline{\underline{k}}^{-1}_{SEZ} \underline{Q}}_{q_{ELAST}} + q_T$$

<u>Metodo delle Forze</u>

Corollario del PLV

$\hookrightarrow$ Se $L_{ext} = \underline{\tilde{F}}^{*T} \underline{\tilde{U}} = \underline{Q}^{*T} q = L_{INT}$

è vero $\forall \{\underline{\tilde{F}}^*, \underline{Q}^*\} \in C^* \Longleftrightarrow \{\underline{\tilde{U}}, q\} \in \hat{C}$

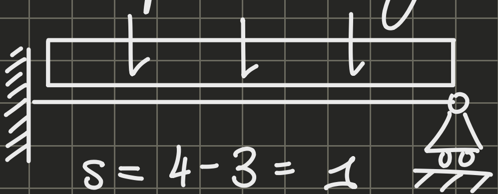
Nel metodo delle forze svincoliamo la struttura per uno numero di vincoli pari al grado di iperstaticità.

Per ogni grado che svincoliamo imponiamo un momento incognito. Il metodo delle forze punta alla soluzione di un sistema di equazioni di congruenza, tale che il sistema ai nodi dove svincoliamo abbiamo la stessa forma della struttura locale, cioè tutti gli angoli relativi sono mantenuti.

Come conseguenza dello svincolamento, possiamo risolvere solo sistemi iperstatici con il metodo delle forze.

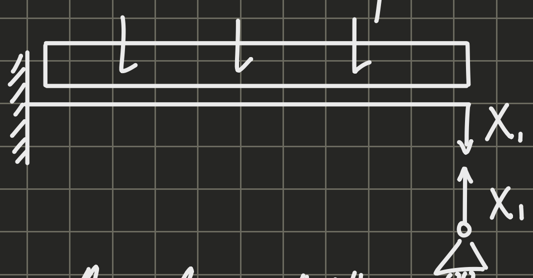
Usiamo la sovrapposizione degli effetti per suddividere il problema, risolvendo prima la struttura principale (la struttura svincolata) sotto effetto dei carichi esterni. Poi si risolve la struttura ad uno ad uno caricata con carichi iperstatici unitari, per ricavare la cedevolezza del sistema (questi casi di carichi e le associate cedevolezze sono ricavati con il PLV). L'effetto ad ogni grado di iperstaticità causato ad ogni incognita è reso in forma matriciale per risolvere il problema e ricavare le forze equilibrate tale per cui la cinematica è congruente.

Esempio ad 1 gdl

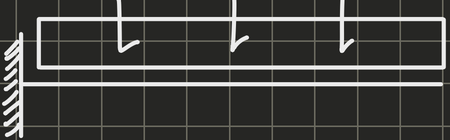


$s = 4 - 3 = 1$

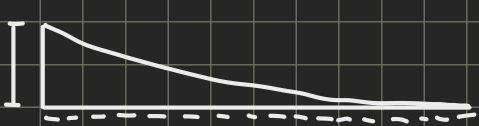
Struttura Principale



Ausiliare "0"



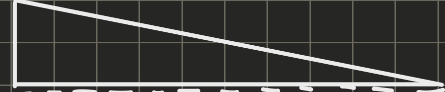
$\frac{pl^2}{2}$



$M_0 = \frac{1}{2} p s^2$

Ausiliare "1"

1



$M_1(s) = -s$

Sovrapposizione Effetti: $M(s) = M_0 + X_1 M_1$

$$\Rightarrow \chi = \frac{M_0 + X_1 M_1}{EI}$$

Statica → Fittizia Cinematica → Reale

$$L_{EXT} = 1 \cdot v_B = 0 \rightarrow \text{perchè } v_B = 0$$

$$L_{INT} = \int M_1(s)\, \chi(s)\, ds$$

$$= \int_0^l M_1(s) \cdot \frac{M_0(s) + X_1 M_1(s)}{EI}$$

$$= \int_0^l \frac{M_1^2(s)}{EI} ds\, X + \int \frac{M_0(s) M_1(s)}{EI} ds = \eta_{11} X_1 + \eta_{01}$$

→ Sapendo M_0 e M_1, si può ricavere, ricavando X_1.

Metodo degli Spostamenti

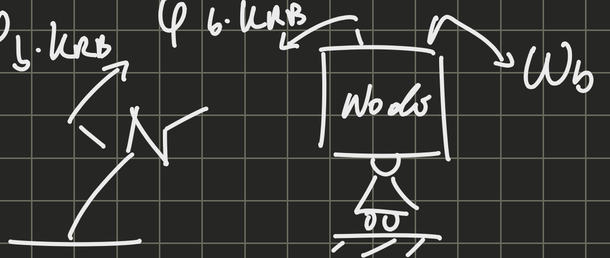
Corollario al PLV

Se $L_{EXT} = \underline{\tilde{F}}^T \underline{\hat{U}} = \underline{Q}^T \underline{\hat{q}} = L_{INT}$

è vero $\forall \{\underline{\hat{U}}, \underline{\hat{q}}\} \in \hat{C} \iff \forall \{\underline{\tilde{F}}, \underline{Q}\} \in C^*$

Il metodo degli spostamenti è analogo al metodo delle forze. In questo metodo si svincola lo spostamento o rotazione in tutti i punti di interesse, e poi si vincolano tutti questi applicando un "blocco". Da qui applichiamo spostamenti uno ad uno ad ogni punto di interesse o "nodo". Da questi spostamenti unitari possiamo

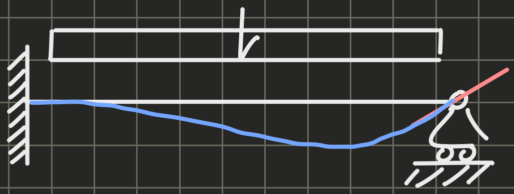
ricavare le forze interne generate (questo ci permette di vedere che la trave agisce come una molla, resistente le forze che la deformano con forze opposte interne).
Per il principio della sovrapposizione degli effetti possiamo sommare gli effetti di ogni spostamento ad ogni nodo.
Facendo l'equivalenza di queste forze interne / spostamento unitario agli effetti generati dalle forze interne, ci permette di trovare gli spostamenti ai nodi che generano forze equilibrate alle forze esterne. In più possiamo ricavare le forze in ogni punto sommando gli effetti unitari ai punti per gli associati spostamenti ricavati. Per tutto questo consideriamo i nodi come sezioni infinitesimali solide che non possono deformarsi.



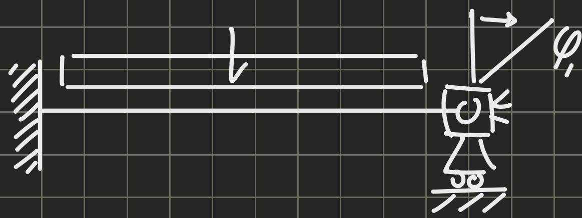
$$W_b = \varphi_b k_{RB}$$

In molti casi per trovare k_{RB}, cerchiamo $\tilde{W}$ equivalente tramite la linea elastica, che poi possiamo tabulare e risolvere, visto che $\tilde{W}$ non è solo unico al nodo ma al carico che viene applicato alla trave.

Esempio:

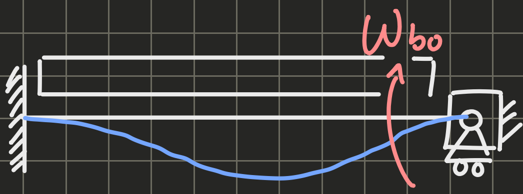


Struttura Reale

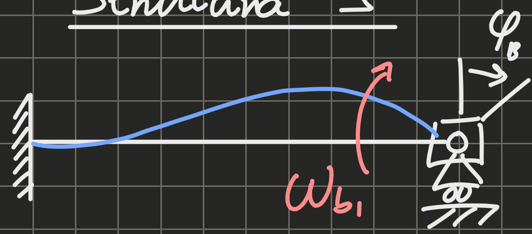


Struttura Principale

Struttura "0"



Struttura "1"

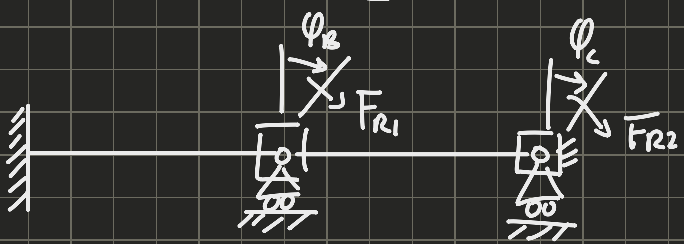


Da qui ricaviamo $P_{B0} - \varphi_B W_{b1} = 0$

$$k_{01} = P_{b0} \qquad k_{11} = W_{b1} \longrightarrow \underline{\underline{k}}\,\underline{U} + \underline{P} = \underline{0}$$

Teorema di Clapeyron e metodo degli spostamenti e EPT

$$W_{FR} = \frac{1}{2}\,\underline{U}^T \underline{\underline{k}}\,\underline{U} > 0$$



$$v(s) = \sum_{i=1}^{N} v_i(s)\, U_i$$

$$\chi(s) = \sum_{i=1}^{N} \chi_i(s)\, U_i$$

$$M = -EI\chi \qquad \chi = \sum_{i=1}^{N} \chi_j\, U_j$$

$$\Omega = \frac{1}{2}\int_s M\chi\, ds = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int_s EI\,\chi_i \chi_j\, ds\, U_i U_j$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int_s \frac{M_i M_j}{EI}\, ds\, U_i U_j \longrightarrow \Omega = \frac{1}{2}\,\underline{U}^T \underline{\underline{k}}\,\underline{U} > 0$$

$$k_{ij}$$

$$V_p = -\int_s \rho \underbrace{\sum_{i=1}^{N} v_i U_i}_{v(s)} \, ds = -\sum_{i=1}^{N} \underbrace{\int_s \rho \, v_i(s) \, ds}_{P_i} \, U_i = \underline{P}^T \underline{U}$$

$$\Pi = \Omega + V_p = \frac{1}{2} \underline{U}^T \underline{\underline{k}} \, \underline{U} + \underline{P}^T \underline{U}$$

$$\delta \Pi = 0 \Rightarrow \delta \underline{U}^T \left[\underline{\underline{k}} \, \underline{U} + \underline{P} \right] = \underline{0} \quad \forall \delta \underline{U} \Longleftrightarrow \underline{\underline{k}} \, \underline{U} + \underline{P} = \underline{0}$$