Lezione 13 -

Lineare (Ordine 0) $\quad q_o = k q_i$

Primo Ordine: $\quad q_o + \tau \frac{dq_o}{dt} = k q_i$

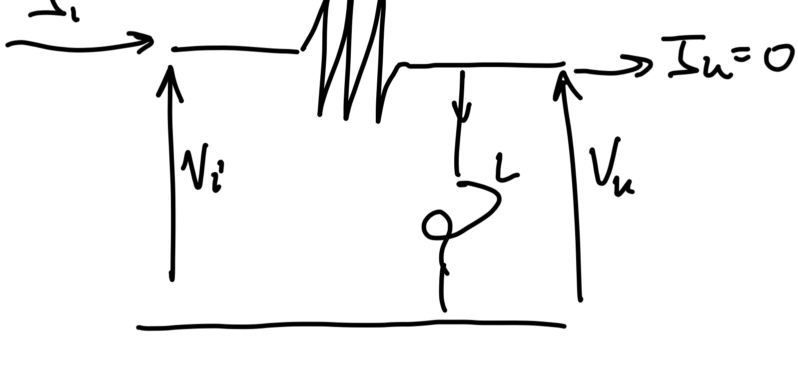
$$\Rightarrow (\tau \underbrace{D}_{\frac{d}{dt}} + 1) q_o = k q_i$$

Esempio termometro

pg. 16, 17 e 18 e 19

Troviamo $\quad \frac{q_o}{q_i} = \frac{k}{\tau D + 1}$

Esempio circuito RL:



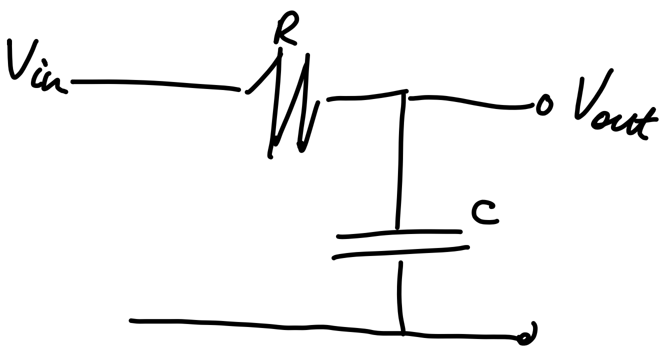
$$L \frac{dI_i(t)}{dt} + R I_i(t) = V_i(t)$$

$$(LD + R)\, I_i(t) = V_i(t)$$

$$\Rightarrow \frac{I_i}{V_i} = \frac{1}{LD+R}$$

Se la frequenza è molto alta $V_i \to V_0$ perché la resistenza diventa molto piccola rispetto alla L.

Circuito RC



$$V_i(t) = R \cdot i + \frac{Q}{C}$$

$$i = \frac{dQ}{dt} \qquad V_c = \frac{Q}{C}$$

$$V_i = R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \left(DRQ + \frac{Q}{C}\right) = \left(\frac{DRC+1}{C}\right) Q$$

$$V_i = (DRC+1)\, V_c$$

La funzione di trasferimento allora è :

$$\frac{V_c}{V_i} = \frac{1}{DRC+1}$$

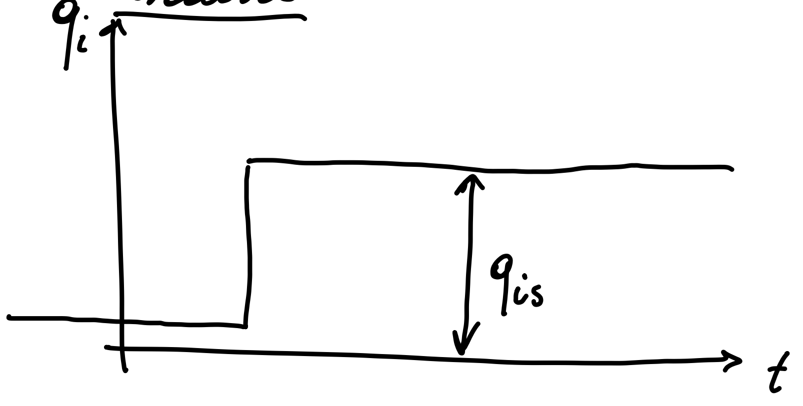
$D \rightarrow j\omega$ se armonico

RL e RC sono filtri

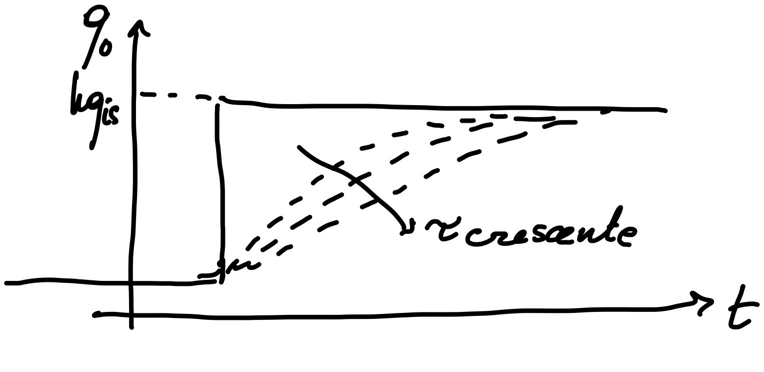
RC è un filtro ad alta e bassa frequenza

Risposta dinamica di circuiti a primo ordine

Gradino



Ingresso a gradino



Risposta in uscita

La costante τ è il parametro fondamentale degli strumenti del primo ordine

$q_0 = 0$ a $t = 0^+$

Sappiamo: $q_0 = k q_{is} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

Risposta al gradino

$$\frac{q_0}{k q_{is}} = \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Data una certa discrepanza si dice che la risposta è arrivata a quello finale.

Uno strumento pronto ha τ basso.
↳ perché è più adatto a rispondere allo scostamento nell'ingresso.

Risposta in frequenza:

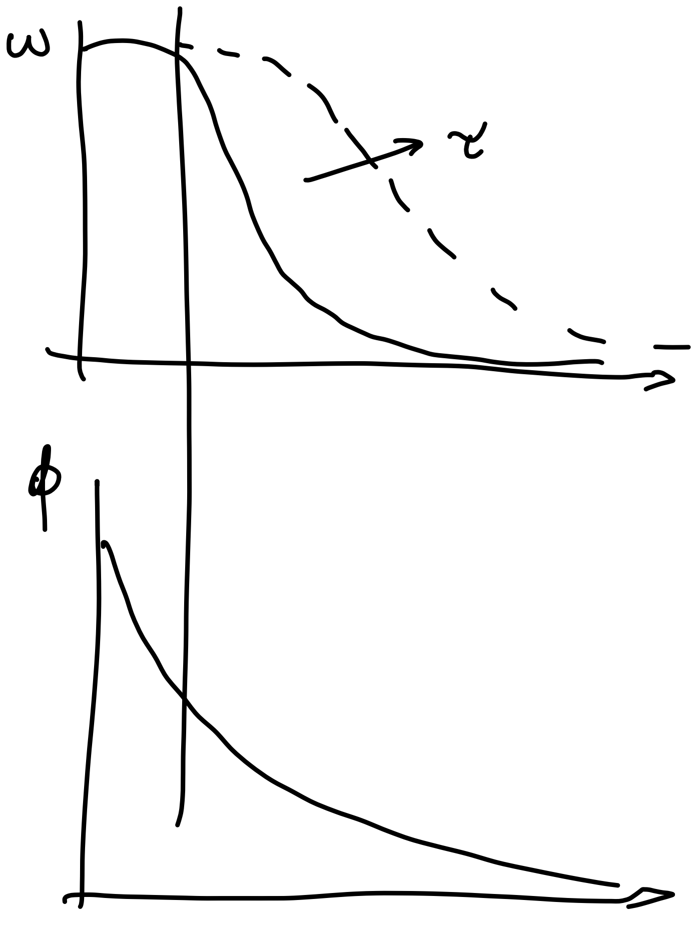
$$\frac{q_0}{q_i}(i\omega) = \frac{k}{i\omega\tau + 1} = \frac{k}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}} \angle \arctan(-\omega t)$$

pg. 29

↳ Possiamo vedere ω e ϕ dove il segnale non si distorce

↳ guardando il trasferimento vediamo il campo dove il sistema è pronto

Risposta tipica



Più τ è grande, per più frequenze è pronto il sistema

pg. 31 e pg. 32

↓

La armonica a ω alta è abbattuta molto come visto in pg. 31 nel 0,24 k

Invece a pg. 33

↳ con τ molto più piccolo anche a ω grandi è pronto a rispondere

pg. 33

↳ Con τ piccolo il sistema è più pronto e per più ω è pronto. ϕ cambia anche meno

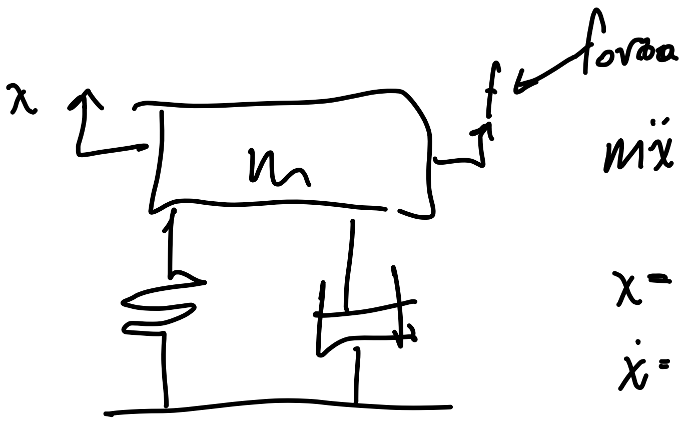
⇒ τ è il volume principale per determinare la prontezza di un sistema di primo ordine

Per il termometro $\tau = \frac{mc}{kA}$

allora vogliamo $m \downarrow c \downarrow$ $k \uparrow A \uparrow$

Sistema del secondo ordine

↳ descrive la maggior parte dei sistemi, specialmente quelli vibranti



$$m\ddot{x} + r\dot{x} + k = f$$

$$x = X_0 e^{i\omega t}$$

$$\dot{x} = i\omega X_0 e^{i\omega t} = i\omega x$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 \cdot X_0 e^{i\omega t} = -\omega^2 x$$

$$x\left(-m\omega^2 + j\omega r + k\right) = f$$

$$\hookrightarrow \frac{x}{f} = \frac{1}{\left(-m\omega^2 + j\omega r + k\right)}$$

Equazione dei sistemi 2°:

$$a_2 \frac{d^2 q_0}{dt^2} + a_1 \frac{dq_0}{dt} + a_0 q_0 = b_0 q_i$$

Parametri fondamentali

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$$ Frequenza propria

$$h = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}$$ → Parametro di smorzamento

$$\omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$$

La risposta è descritta da f u e h

Se sottoposto a ingresso impulsivo il sistema risponde con moto oscillante di pulsazione propria ω_0:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Con macchine grandi mettiamo degli smorzatori in sospensione sismica perché la macchina non abbia risonanza con l'impulso per poi passarlo

Tutte le frequenze alte vengono tagliate quindi avendo massa alta si può togliere le frequenze proprie della macchina.

Possiamo aggiungere gomme che fanno da filtro meccanico tagliando tutte le frequenze più alte della frequenza propria di qualsiasi cosa sia attaccato.