Lax-Milgram

$$\begin{cases} g(u) = f(\cdot, \cdot, \dots, \cdot) \\ CB + CI \end{cases}$$

1) Forma Debole

$$a(u, v) = F(v) \qquad \forall v \in V$$

- Si utilizza integrazione per parti

2) Definizione spazio V

$$H^1(\Omega) = \{ v \in L^2(\Omega) \text{ tale che } v' \in L^2(\Omega) \}$$

- Full-Dirichlet (Omogeneo)

$$V = H_0^1(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega) \text{ tale } v(a) = 0 \text{ e } v(b) = 0 \}$$

- Misto

$$V = H_s^1(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega) \text{ tale che } v(c) = 0 \} \qquad c = \begin{cases} 0 \text{ se } v(0) = 0 \\ L \text{ se } v(L) = 0 \end{cases}$$

- Full-Neumann

$$V = H^1(\Omega)$$

Identità:

0	$\lvert a+b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$
1	$H^1(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$
2	$\lVert v\rVert^2_{H^1(\Omega)} = \lVert v\rVert^2_{L^2(\Omega)} + \lVert v'\rVert^2_{L^2(\Omega)}$
2a	$\lVert v\rVert_{L^2(\Omega)} \leq \lVert v\rVert_{H^1(\Omega)}$
2b	$\lVert v'\rVert_{L^2(\Omega)} \leq \lVert v\rVert_{H^1(\Omega)}$
3	$f,g \in L^2(\Omega) \Rightarrow \left\lvert \int_\Omega f\cdot g \, d\Omega \right\rvert \leq \lVert f\rVert_{L^2(\Omega)} \cdot \lVert g\rVert_{L^2(\Omega)}$
4	$\lVert v\rVert_{L^2(\Omega)} \leq C_p \lVert v'\rVert_{L^2(\Omega)}$ solo se $v \in H^1_s(\Omega)$
4a	$\lVert v\rVert^2_{H^1} \leq \lVert v\rVert^2_{L^2(\Omega)} + \lVert v'\rVert^2_{L^2(\Omega)} \leq (C_p^2+1)\lVert v'\rVert^2_{L^2(\Omega)}$
5	$\lvert v(a)\rvert \leq C_T \lVert v\rVert_{H^1(\Omega)}$, $\lvert v(b)\rvert \leq C_T \lVert v\rVert_{H^1(\Omega)}$
6	$f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
"	$\Rightarrow \lVert f\cdot g\rVert_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega \lvert fg\rvert \, d\Omega \leq \lVert f\rVert_{L^p(\Omega)} \cdot \lVert g\rVert_{L^q(\Omega)}$

Condizioni:

V spazio di Hilbert
Bilinearità di $a(u,v)$
Continuità di $a(u,v) \Rightarrow \lvert a(u,v) \rvert \leq M \lVert u \rVert_V \lVert v \rVert_V$
Coercività di $a(u,v) \Rightarrow a(v,v) \geq \alpha \lVert v \rVert_V^2$
Linearità di $F(v)$
$F(v)$ limitato $\Rightarrow \lvert F(v) \rvert \leq C \cdot \lVert v \rVert_V$