Esercitazione 7 – Soluzione

Esercizio 1

1. Dalla proprietà di linearità della trasformate dal primo teorema di shift abbiamo:

$$F(s) = 5\,\mathcal{L}[e^{-2t}](s) - \mathcal{L}[\cos(4t)](s+1);$$

sfruttando infine le trasformate fondamentali $\mathcal{L}[e^{-2t}](s) = \dfrac{1}{s+2}$ e $\mathcal{L}[\cos(4t)](s) = \dfrac{s}{s^2+4^2}$, otteniamo:

$$F(s) = \frac{5}{s+2} - \frac{(s+1)}{(s+1)^2+4^2} = \frac{4s^2+7s+83}{s^3+4s^2+21s+34}.$$

2. Dal secondo teorema di shift abbiamo:

$$F(s) = e^{-\sqrt{5}s}\,\mathcal{L}[t^2](s) = \frac{2e^{-\sqrt{5}s}}{s^3},$$

sfruttando la trasformata fondamentale di $\mathcal{L}[t^2](s) = \dfrac{2}{s^3}$.

3. Dal primo teorema di shift, abbiamo:

$$F(s) = \mathcal{L}[\sin^2(t)](s+3).$$

Determiniamo dunque la trasformata di $\sin^2(t)$ a partire dalla definizione di trasformata di Laplace di $\mathcal{L}[\sin^2(t)](s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin^2(t)e^{-st}dt$. Utilizziamo l'integrale per parti:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\sin^2(t)](s) &= \int_0^{+\infty} \sin^2(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right)dt \\
&= \lim_{K\to+\infty}\left[\sin^2(t)\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right)\right]_0^K - \int_0^{+\infty}\frac{d}{dt}\left(\sin^2(t)\right)\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right)dt \\
&= 0 + \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} 2\sin(t)\cos(t)\,e^{-st}dt \\
&= \frac{1}{s}\int_0^{+\infty}\sin(2t)\,e^{-st}dt = \frac{1}{s}\,\mathcal{L}[\sin(2t)](s),
\end{aligned}$$

sfruttando il fatto che $\displaystyle\lim_{K\to+\infty}\left[\sin^2(t)\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right)\right]_0^K = -\frac{1}{s}\lim_{K\to+\infty}\sin^2(K)e^{-sK} + \frac{1}{s}0 = 0$ per ogni $s > 0$ e $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$. Utilizzando ora la trasformata fondamentale $\mathcal{L}[\sin(2t)](s) = \dfrac{2}{s^2+2^2}$, abbiamo $\mathcal{L}[\sin^2(t)](s) = \dfrac{2}{s(s^2+4)}$.

Alternativamente, e più velocemente, si sarebbe potuto sfruttare il fatto che $\mathcal{L}[\sin^2(t)](s) = \mathcal{L}\left[\dfrac{1-\cos(2t)}{2}\right](s) = \dfrac{1}{2s} - \dfrac{1}{2}\dfrac{s}{s^2+2^2} = \dfrac{2}{s(s^2+4)}$. Otteniamo dunque il risultato:

$$F(s) = \mathcal{L}[\sin^2(t)](s+3) = \frac{2}{(s+3)\ ((s+3)^2+4)} = \frac{2}{s^3+9s^2+31s+39}.$$

4. È necessario applicare la definizione di trasformata di Laplace alla funzione $f(t)$, ovvero:

$$F(s) = \int_0^a \left(1 - \frac{t}{a}\right) e^{-st} dt = \int_0^a e^{-st} dt - \int_0^a \frac{t}{a} e^{-st} dt.$$

Abbiamo $\int_0^a e^{-st} dt = \frac{1 - e^{-as}}{s}$; inoltre, tramite integrazione per parti, $\int_0^a \frac{t}{a} e^{-st} dt = \frac{1 - e^{-as}}{as^2} - \frac{e^{-as}}{s}$, da cui otteniamo il risultato:

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{e^{-as} - 1}{as^2}.$$

Alternativamente, e più velocemente, basta osservare che per $t \geq 0$ si ha

$$f(t) = \left(1 - \frac{t}{a}\right) [1 - \mathcal{H}(t-a)] = 1 - \frac{t}{a} + \frac{1}{a}(t-a)\mathcal{H}(t-a)$$

ed usare la linearità.

Esercizio 2

1. Cerchiamo di scrivere $F(s)$ come combinazione lineare di trasformate notevoli. Osserviamo che, per $A, B, C \in \mathbb{R}$, si ha:

$$F(s) = \frac{3s+1}{(s^2+1)(s-1)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s-1} = \frac{(A+C)s^2 + (-A+B)s + (-B+C)}{(s^2+1)(s-1)},$$

da cui le identità precedenti sono soddisfatte se:

$$\begin{cases} A + C &= 0, \\ -A + B &= 3, \\ -B + C &= 1, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} A &= -2, \\ B &= 1, \\ C &= 2. \end{cases}$$

Dunque abbiamo:

$$F(s) = -\frac{2s+1}{s^2+1} + \frac{2}{s-1} = -2\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} + 2\frac{1}{s-1}$$

ed osservando che $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right](t) = \cos(t)$, $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right](t) = \sin(t)$ e $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right](t) = e^t$, otteniamo tramite linearità della trasformata:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = -2\cos(t) + \sin(t) + 2e^t \qquad \text{per } t \geq 0.$$

2. Dal secondo teorema di shift deduciamo che:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-7s}\frac{s}{s^2+9}\right](t) = \mathcal{H}(t-7)\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}\right](t-7);$$

dobbiamo dunque determinare $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}\right](t)$, che corrisponde alla trasformata notevole $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}\right](t) = \cos(3t)$. Segue quindi il risultato:

$$f(t) = \mathcal{H}(t-7)\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}\right](t-7) = \mathcal{H}(t-7)\ \cos(3(t-7)) \qquad \text{per } t \geq 0.$$

3. Osserviamo che il denominatore di $F(s)$ si può riscrivere come $s^3+3s^2+49s+147=(s^2+49)(s+3)$, per cui cerchiamo di scrivere $F(s)$ come combinazione lineare di trasformate notevoli, per $A,B,C,D\in\mathbb{R}$:

$$F(s) \;=\; \frac{-5s^2+2s-239}{(s^2+49)(s+3)}=\frac{As+B}{s^2+49}+\frac{C}{s+3}=\frac{(A+C)s^2+(3A+B)s+(3B+49C)}{(s^2+49)(s+3)};$$

le identità precedenti sono soddisfatte se:

$$\begin{cases} A+\quad C &= -5,\\ 3A+\quad B &= 2,\\ 3B+49C &= -239, \end{cases} \qquad\Longrightarrow\qquad \begin{cases} A &= 0,\\ B &= 2,\\ C &= -5. \end{cases}$$

Dunque abbiamo:

$$F(s)=2\frac{1}{s^2+49}-5\frac{1}{s+3}=\frac{2}{7}\frac{7}{s^2+7^2}-5\frac{1}{s+3}$$

ed osservando che $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{7}{s^2+7^2}\right](t)=\sin(7t)$ e $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right](t)=e^{-3t}$, otteniamo tramite linearità della trasformata:

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right](t)=\frac{2}{7}\sin(7t)-5e^{-3t}\qquad\text{per } t\geq 0.$$

Esercizio 3

1. Abbiamo per la linearità della trasformata $\mathcal{L}[y'(t)](s)=-3\mathcal{L}[y(t)](s)+\mathcal{L}[e^{-3t}](s)$ da cui, essendo $\mathcal{L}[y(t)](s)=Y(s)$, $\mathcal{L}[y'(t)](s)=sY(s)-y(0)$ e $\mathcal{L}[e^{-2t}](s)=\dfrac{1}{s+2}$, otteniamo:

$$sY(s)-y(0)=-3Y(s)+\frac{1}{s+2}.$$

Essendo $y(0)=5$, abbiamo:

$$Y(s)=\frac{y(0)+\frac{1}{s+2}}{s+3}=\frac{5+\frac{1}{s+2}}{s+3}=\frac{5s+11}{(s+2)(s+3)}=\frac{5s+11}{s^2+5s+6},$$

che rappresenta la soluzione dell'EDO nel dominio della trasformata di Laplace.

Per trovare la soluzione nel dominio del tempo, $y(t)=\mathcal{L}^{-1}[y(t)](s)$, cerchiamo di scrivere $Y(s)$ come combinazione lineare di trasformate notevoli, per $A,B\in\mathbb{R}$:

$$Y(s)=\frac{5s+11}{(s+2)(s+3)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+3}=\frac{(A+B)s+(3A+2B)}{(s+2)(s+3)};$$

le identità precedenti sono soddisfatte se:

$$\begin{cases} A+\quad B &= 5,\\ 3A+2B &= 11, \end{cases} \qquad\Longrightarrow\qquad \begin{cases} A &= 1,\\ B &= 4. \end{cases}$$

Dunque abbiamo:

$$Y(s)=\frac{1}{s+2}+4\frac{1}{s+3}$$

ed osservando che $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right](t)=e^{-2t}$ e $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right](t)=e^{-3t}$, otteniamo tramite linearità della trasformata la soluzione dell'EDO:

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right](t)=e^{-2t}+4e^{-3t}\qquad\text{per } t\geq 0.$$

Osserviamo che la soluzione precedente rispetta la condizione iniziale dell'EDO $y(0)=5$.

2. Abbiamo per la linearità della trasformata $\mathcal{L}[y'(t)](s) = -2\mathcal{L}[y(t)](s) + 2\pi\mathcal{L}[\cos(\pi s/2)e^{-2t}](s) + 8\mathcal{L}[\mathcal{H}(t-4)](s)$ da cui, essendo $\mathcal{L}[y(t)](s) = Y(s)$, $\mathcal{L}[y'(t)](s) = sY(s) - y(0)$, $\mathcal{L}[\cos(\pi s/2)e^{-2t}](s) = \dfrac{s+2}{(s+2)^2 + (\pi/2)^2}$ (primo teorema di shift) e $\mathcal{L}[\mathcal{H}(t-4)](s) = \dfrac{e^{-4s}}{s}$, otteniamo:

$$sY(s) - y(0) = -2Y(s) + 2\pi\frac{s+2}{(s+2)^2 + (\pi/2)^2} + 8\frac{e^{-4s}}{s}.$$

Essendo $y(0) = 4$, abbiamo:

$$Y(s) = \frac{y(0) + 2\pi\frac{s+2}{(s+2)^2+(\pi/2)^2} + 8\frac{e^{-4s}}{s}}{s+2} = 4\frac{1}{s+2} + 2\pi\frac{1}{(s+2)^2 + (\pi/2)^2} + 8\frac{e^{-4s}}{s(s+2)},$$

che rappresenta la soluzione dell'EDO nel dominio della trasformata di Laplace.

Per trovare la soluzione nel dominio del tempo, $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[y(t)](s)$, osserviamo che:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)](t) = 4\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right](t) + 2\pi\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2 + (\pi/2)^2}\right](t) + 8\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-4s}}{s(s+2)}\right](t),$$

ovvero, introducendo $y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s+2}\right](t)$, $y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s+2)^2 + (\pi/2)^2}\right](t)$ e $y_3(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{e^{-4s}}{s(s+2)}\right](t)$:

$$y(t) = 4\,y_1(t) + 2\pi\,y_2(t) + 8\,y_3(t).$$

Risulta evidente che $y_1(t) = e^{-2t}$, $y_2(t) = \dfrac{2}{\pi}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)\,e^{-2t}$ (utilizzando il primo teorema di shift) e $y_3(t) = \dfrac{1}{2}\,\mathcal{H}(t-4)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+2}\right](t-4) = \dfrac{1}{2}\,\mathcal{H}(t-4)\,\left(1 - e^{-2(t-4)}\right)$ (utilizzando il secondo teorema di shift). Otteniamo dunque la soluzione dell'EDO

$$y(t) = 4e^{-2t} + 4\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)e^{-2t} + 4\mathcal{H}(t-4)\,\left(1 - e^{-2(t-4)}\right) \qquad \text{per } t \geq 0.$$

3. Abbiamo per la linearità della trasformata $\mathcal{L}[y'(t)](s) = 2\mathcal{L}[(y(t) * \cos(t))](s) + \mathcal{L}[e^{-t}](s) - \mathcal{L}[\sin(t)](s)$. Sfruttando le trasformate notevoli, della derivata prima e il teorema di convoluzione (per cui $\mathcal{L}[y(t) * \cos(t)](s) = Y(s)\,\dfrac{s}{s^2+1}$), si ottiene:

$$sY(s) - y(0) = 2\frac{sY(s)}{s^2+1} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s^2+1}.$$

Essendo $y(0) = 0$, abbiamo dunque la soluzione nel dominio della trasformata di Laplace:

$$Y(s) = \frac{s^2+1}{s(s^2-1)(s+1)} - \frac{1}{s(s^2-1)} = \frac{1}{(s+1)^2},$$

da cui riconsciamo la trasformata notevole che porta alla soluzione:

$$y(t) = t\,e^{-t} \qquad \text{per } t \geq 0.$$

Si deduce dunque che $(y(t) * \cos(t)) = \displaystyle\int_0^t (t-u)\,e^{-(t-u)}\cos(u)\,du = \frac{1}{2}\left(\sin(t) - te^{-t}\right)$. Infatti si ha: $\displaystyle\int_0^t (t-u)\,e^{-(t-u)}\cos(u)\,du = t\,e^{-t}\int_0^t e^u\cos(u)\,du - e^{-t}\int_0^t u\,e^u\cos(u)\,du$. Essendo $\displaystyle\int_0^t e^u\cos(u)\,du = \frac{1}{2}\left[e^u\left(\sin(u) + \cos(u)\right)\right]_0^t = \frac{1}{2}\left[e^t\left(\sin(t) + \cos(t)\right) - 1\right]$ e $\displaystyle\int_0^t u\,e^u\cos(u)\,du = \frac{1}{2}\left[e^u\left(u\sin(u) + u\cos(u) - \sin(u)\right)\right]_0^t = \frac{1}{2}\left[e^t\left(t\sin(t) + t\cos(t) - \sin(t)\right)\right]$, verifichiamo che $(y(t) * \cos(t)) = \dfrac{1}{2}\left[t\sin(t) + t\cos(t) - te^{-t}\right] - \dfrac{1}{2}\left[t\sin(t) + t\cos(t) - \sin(t)\right] = \dfrac{1}{2}\left(\sin(t) - te^{-t}\right)$.

4. Abbiamo un sistema di EDO del primo ordine. Indichiamo le trasformate di Laplace di $x(t)$ e $y(t)$ rispettivamente come $X(s) = \mathcal{L}[x(t)](s)$ e $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$; inoltre $\mathcal{L}[x'(t)](s) = sX(s) - x(0)$ e $\mathcal{L}[y'(t)](s) = sY(s) - y(0)$. Osservando che $\mathcal{L}\left[te^{-t}\right](s) = \dfrac{1}{(s+1)^2}$ (secondo teorema di shift) e tramite la proprietà di linearità della trasformata, si ottiene:

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) = -X(s) - 2Y(s) + \dfrac{1}{(s+1)^2}, \\ sY(s) - y(0) = -2X(s) - 4Y(s), \\ x(0) = 0 \quad \text{e} \quad y(0) = 1. \end{cases}$$

Applicando le condizioni iniziali, abbiamo:

$$\begin{cases} (s+1) \quad X(s) \quad + \quad 2 \quad Y(s) \quad = \quad \dfrac{1}{(s+1)^2}, \\ 2 \quad X(s) \quad + \quad (s+4) \quad Y(s) \quad = \quad 1, \end{cases}$$

da cui, risolvendo il sistema lineare precedente per ogni s, abbiamo:

$$X(s) = \frac{s+4}{s(s+1)^2(s+5)} - \frac{2}{s(s+5)} \qquad \text{e} \qquad Y(s) = \frac{s+1}{s(s+5)} - \frac{2}{s(s+1)^2(s+5)}.$$

Procedendo ora con le antitrasformate di Laplace è dunque possibile determinare le soluzioni $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)](t)$ e $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)](t)$ per $t \geq 0$.

5. Si tratta di un'EDO del secondo ordine per cui $\mathcal{L}[y''(t)](s) = -2\mathcal{L}[(y(t)](s) + \mathcal{L}[\mathcal{H}(t-3)](s) - \mathcal{L}[\mathcal{H}(t-4)](s)$. Dato che $\mathcal{L}[y''(t)](s) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$, abbiamo:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = -2Y(s) + \frac{e^{-3s}}{s} - \frac{e^{-4s}}{s};$$

essendo $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, otteniamo la soluzione dell'EDO nel dominio della trasformata di Laplace:

$$Y(s) = \frac{e^{-3s} - e^{-4s}}{s(s^2+2)}.$$

Cerchiamo ora la soluzione $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)](t)$ nel dominio del tempo. Dal secondo teorema di shift, abbiamo che $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{e^{-3s} - e^{-4s}}{s(s^2+2)}\right](t) = \mathcal{H}(t-3)\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s(s^2+2)}\right](t-3) - \mathcal{H}(t-4)\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s(s^2+2)}\right](t-4)$. Osserviamo che $\dfrac{1}{s(s^2+2)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{Bs+C}{s^2+2}$ con $A = \dfrac{1}{2}$, $B = -\dfrac{1}{2}$ e $C = 0$, da cui $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s(s^2+2)}\right](t) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(\sqrt{2}t)$. Otteniamo infine la seguente soluzione:

$$y(t) = \frac{1}{2}\mathcal{H}(t-3)\left[1 - \cos(\sqrt{2}(t-3))\right] - \frac{1}{2}\mathcal{H}(t-4)\left[1 - \cos(\sqrt{2}(t-4))\right] \qquad \text{per } t \geq 0.$$

6. Ricordando che $L[y''(t)](s) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$ ed essendo $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1$, otteniamo la soluzione dell'EDO nel dominio della trasformata di Laplace:

$$Y(s) = \frac{4s+1}{4s^2+4s+1}.$$

La corrispondente soluzione nel dominio del tempo vale

$$y(t) = e^{-t/2}\left(1 - \frac{t}{4}\right).$$

7. Come in precedenza, otteniamo $\mathcal{L}[y''(t)](s) = -\mathcal{L}[(y'(t)](s) - \mathcal{L}[(y(t)](s) + \mathcal{L}[e^{-t}\mathcal{H}(t-2)](s)$. Dato che $\mathcal{L}[y''(t)](s) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$, $\mathcal{L}[y'(t)](s) = sY(s) - y(0)$ e $\mathcal{L}[e^{-t}\mathcal{H}(t-2)](s) = e^{-2}\mathcal{L}[e^{-(t-2)}\mathcal{H}(t-2)](s)$, per il secondo teorema di shift, abbiamo:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = -\left(sY(s) - y(0)\right) - Y(s) + e^{-2}\frac{e^{-2s}}{s+1};$$

essendo $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$, otteniamo la soluzione dell'EDO nel dominio della trasformata di Laplace:

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1} + e^{-2}\frac{e^{-2s}}{(s+1)(s^2+s+1)}.$$

La soluzione nel dominio del tempo è:

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-t/2}\left[\cos(\sqrt{3}t/2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t/2)\right] \\ &\quad +\mathcal{H}(t-2)\left[e^{-t} - e^{-(t/2+1)}\left(\cos(\sqrt{3}(t-2)/2) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}(t-2)/2)\right)\right] \qquad \text{per } t \geq 0. \end{aligned}$$

8. Abbiamo un sistema di EDO del secondo ordine. Indichiamo le trasformate di Laplace di $x(t)$ e $y(t)$ rispettivamente come $X(s) = \mathcal{L}[x(t)](s)$ e $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$; inoltre $\mathcal{L}[x''(t)](s) = s^2X(s) - sx(0) - x'(0)$, $\mathcal{L}[y''(t)](s) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$ e $\mathcal{L}[x'(t)](s) = sX(s) - x(0)$. Tramite la proprietà di linearità della trasformata, si ottiene:

$$\begin{cases} s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = -(sX(s) - x(0)) - X(s) - Y(s), \\ s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = sX(s) - x(0), \\ x'(0) = 0 \quad \text{e} \quad y'(0) = 0, \\ x(0) = 0 \quad \text{e} \quad y(0) = 1. \end{cases}$$

Applicando le condizioni iniziali, abbiamo:

$$\begin{cases} (s^2+s+1) & X(s) & + & & Y(s) & = & 0, \\ & X(s) & - & s & Y(s) & = & -1, \end{cases}$$

da cui, risolvendo il sistema lineare precente per ogni s, abbiamo:

$$X(s) = -\frac{1}{s^3+s^2+s+1} \qquad \text{e} \qquad Y(s) = \frac{s^2+s+1}{s^3+s^2+s+1}.$$

Procedendo ora con le antitrasformate di Laplace è dunque possibile determinare le soluzioni $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)](t)$ e $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)](t)$ per $t \geq 0$:

$$x(t) = -\frac{1}{2}\left(e^{-t} + \sin(t) - \cos(t)\right) \qquad \text{e} \qquad y(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-t} + \sin(t) + \cos(t)\right).$$