Esercitazione 10 – Soluzione

Esercizio 1

1. Si tratta di un'equazione differenziale del secondo ordine con condizioni al contorno di Dirichlet omogenee. Scegliamo dunque lo spazio funzionale $V = H^1_0(\Omega)$, con $\Omega = (0, L)$, in cui cercare la soluzione debole u e scegliere le funzioni test v in modo di dare significato agli integrali che compariranno nella formulazione debole e garantire che $u(0) = u(L) = 0$. Ricordiamo appunto che $H^1_0(\Omega) := \{w \in H^1(\Omega) \,:\, w(0) = w(L) = 0\}$ è uno spazio di Hilbert ed è dotato della norma $H^1(\Omega)$, ovvero $\|w\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|w\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w'\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}$.

   Presa l'equazione differenziale, moltiplicando a sinistra e a destra dell'uguale per la funzione test $v \in V$ e integrando, abbiamo:

   $$-\int_0^L \mu_0\, u''\, v\, dx + \int_0^L \beta_0\, u'\, v\, dx + \int_0^L \sigma_0\, u\, v\, dx = \int_0^L f\, v\, dx,$$

   da cui, applicando l'integrale per parti al primo termine a sinistra dell'uguale, otteniamo:

   $$\int_0^L \mu_0\, u'\, v'\, dx - \big[\mu_0\, u'(x)\, v(x)\big]_{x=0}^L + \int_0^L \beta_0\, u'\, v\, dx + \int_0^L \sigma_0\, u\, v\, dx = \int_0^L f\, v\, dx,$$

   che deve valere per ogni $v \in V$. Ricordando che $V = H^1_0(\Omega)$, abbiamo dunque che $v(0) = v(L) = 0$ e quindi la precedente diventa:

   $$\int_0^L \mu_0\, u'\, v'\, dx + \int_0^L \beta_0\, u'\, v\, dx + \int_0^L \sigma_0\, u\, v\, dx = \int_0^L f\, v\, dx.$$

   Il problema in formulazione debole si scrive quindi come:

   $$\text{trovare } u \in V \,:\, a(u, v) = F(v) \qquad \text{per ogni } v \in V,$$

   dove:

   - $V = H^1_0(\Omega)$;
   - $a \,:\, V \times V \to \mathbb{R}$ è la forma espressa come $a(u, v) = \mu_0 \int_0^L u'\, v'\, dx + \beta_0 \int_0^L u'\, v\, dx + \sigma_0 \int_0^L u\, v\, dx$, dato che μ_0, β_0 e σ_0 sono costanti;
   - $F \,:\, V \to \mathbb{R}$ è il funzionale espresso come $F(v) = \int_0^L f\, v\, dx$.

   Mostriamo, usando il Teorema di Lax-Milgram, che la soluzione $u \in V$ del problema debole esiste ed è unica. Ricordiamo che la prima ipotesi, ovvero che $V = H^1_0(\Omega)$ sia uno spazio di Hilbert, è già soddisfatta per definizione di tale spazio. Procediamo ora verificando che le ipotesi i)–v) sono soddisfatte.

i) ($a : V \times V \to \mathbb{R}$ è bilineare). Mostriamo che $a(\beta\, v + \gamma\, w, z) = \beta\, a(v, z) + \gamma\, a(w, z)$ per ogni $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ e per ogni $v, w, z \in V$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} a(\beta\, v + \gamma\, w, z) &= \int_0^L \mu_0\, (\beta\, v + \gamma\, w)'\, z'\, dx + \int_0^L \beta_0\, (\beta\, v + \gamma\, w)'\, z\, dx + \int_0^L \sigma_0\, (\beta\, v + \gamma\, w)\, z\, dx \\ &= \beta \left[\mu_0 \int_0^L v'\, z'\, dx + \beta_0 \int_0^L v'\, z\, dx + \sigma_0 \int_0^L v\, z\, dx\right] \\ &\qquad + \gamma \left[\mu_0 \int_0^L w'\, z'\, dx + \beta_0 \int_0^L w'\, z\, dx + \sigma_0 \int_0^L w\, z\, dx\right] \\ &= \beta\, a(v, z) + \gamma\, a(w, z), \end{aligned}$$

dato che $(\beta\, v + \gamma\, w)' = \beta\, v' + \gamma\, w'$. In maniera analoga e sfruttando le stesse proprietà di linearità dell'operatore di derivazione e dell'integrale, si mostra che $a(v, \beta\, w + \gamma\, z) = \beta\, a(v, w) + \gamma\, a(v, z)$ per ogni $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ e per ogni $v, w, z \in V$. Dunque la forma $a : V \times V \to \mathbb{R}$ è bilineare.

ii) ($a : V \times V \to \mathbb{R}$ è continua). Mostriamo che $|a(u, v)| \leq M\, \|u\|_V\, \|v\|_V$ per ogni $u, v \in V$, con $M > 0$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left|\mu_0 \int_0^L u'\, v'\, dx + \beta_0 \int_0^L u'\, v\, dx + \sigma_0 \int_0^L u\, v\, dx\right| \\ &\leq \left|\mu_0 \int_0^L u'\, v'\, dx\right| + \left|\beta_0 \int_0^L u'\, v\, dx\right| + \left|\sigma_0 \int_0^L u\, v\, dx\right| \\ &\leq \mu_0\, \|u'\|_{L^2(\Omega)}\, \|v'\|_{L^2(\Omega)} + |\beta_0|\, \|u'\|_{L^2(\Omega)}\, \|v\|_{L^2(\Omega)} + \sigma_0\, \|u\|_{L^2(\Omega)}\, \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \mu_0\, \|u\|_{H^1(\Omega)|}\, \|v\|_{H^1(\Omega)} + |\beta_0|\, \|u\|_{H^1(\Omega)}\, \|v\|_{H^1(\Omega)} + \sigma_0\, \|u\|_{H^1(\Omega)}\, \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq (\mu_0 + |\beta_0| + \sigma_0)\, \|u\|_{H^1(\Omega)}\, \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq M\, \|u\|_V\, \|v\|_V \qquad \text{per ogni } u, v \in V, \end{aligned}$$

con costante di continuità $M = (\mu_0 + |\beta_0| + \sigma_0)$; abbiamo sfruttato la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e il fatto che $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$ e $\|v'\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$ per ogni $v \in H^1(\Omega)$ e dunque per ogni $v \in V$.

iii) ($a : V \times V \to \mathbb{R}$ è coerciva). Mostriamo che $a(v, v) \geq \alpha\, \|v\|_V^2$ per ogni $v \in V$, con $\alpha > 0$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \mu_0 \int_0^L (v')^2\, dx + \beta_0 \int_0^L v'\, v\, dx + \sigma_0 \int_0^L v^2\, dx \\ &= \mu_0\, \|v'\|^2_{L^2(\Omega)} + \beta_0 \int_0^L v'\, v\, dx + \sigma_0\, \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \mu_0\, \|v'\|^2_{L^2(\Omega)} + \sigma_0\, \|v\|^2_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

dato che $\displaystyle\int_0^L v'\, v\, dx = \int_0^L \frac{1}{2}\, (v^2)'\, dx = \frac{1}{2}\, [v^2(L) - v^2(0)] = 0$, essendo $v \in V = H^1_0(\Omega)$. Osserviamo che, essendo $v \in V = H^1_0(\Omega)$, vale la disuguaglianza di Poincarè, ovvero $\|v'\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \dfrac{1}{1 + C_\Omega^2}\, \|v\|^2_{H^1(\Omega)}$ per ogni $v \in H^1_0(\Omega)$, con $C_\Omega = \dfrac{L}{\sqrt{2}}$, essendo in tal caso $\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega^2\, \|v'\|^2_{L^2(\Omega)}$ e quindi la norma e la seminorma H^1 equivalenti. Dunque:

$$a(v, v) = \mu_0\, \|v'\|^2_{L^2(\Omega)} + \sigma_0\, \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \frac{\mu_0}{1 + C_\Omega^2}\, \|v\|^2_{H^1(\Omega)} = \alpha\, \|v\|_V^2 \qquad \text{per ogni } v \in V,$$

essendo per definizione $\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \geq 0$ e $\sigma_0 \geq 0$, con $\alpha = \dfrac{\mu_0}{1 + C_\Omega^2} = \dfrac{\mu_0}{1 + L^2/2}$. La forma $a : V \times V \to \mathbb{R}$ è dunque coerciva[1].

[1] Solo nel caso $\sigma_0 > 0$ avremmo potuto scrivere che $a(v, v) \geq \min\{\mu_0, \sigma_0\} \left(\|v'\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)}\right)$, ovvero $a(v, v) \geq \alpha\, \|v\|_V^2$ per ogni $v \in V$, con $\alpha = \min\{\mu_0, \sigma_0\} > 0$, sfruttando la definizione di norma H^1.

iv) ($F : V \to \mathbb{R}$ è lineare). Mostriamo che $F(\beta\, v + \gamma\, w) = \beta\, F(v) + \gamma\, F(w)$ per ogni $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ e per ogni $v, w \in V$. Abbiamo:

$$F(\beta\, v + \gamma\, w) = \int_0^L f\,(\beta\, v + \gamma\, w)\, dx = \beta \int_0^L f\, v\, dx + \gamma \int_0^L f\, w\, dx = \beta\, F(v) + \gamma\, F(w),$$

per la linearità dell'integrale. Dunque $F : V \to \mathbb{R}$ è un funzionale lineare.

v) ($F : V \to \mathbb{R}$ è continuo). Dato che F è un funzionale lineare, esso è continuo se è anche limitato. Mostriamo dunque che F è limitato, ovvero esiste una costante $C > 0$ tale che $|F(v)| \le C\, \|v\|_V$ per ogni $v \in V$. Assumendo $f \in L^2(\Omega)$ e usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, abbiamo:

$$\begin{aligned} |F(v)| &\le \|f\|_{L^2(\Omega)}\, \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le \|f\|_{L^2(\Omega)}\, \|v\|_{H^1(\Omega)} = C\, \|v\|_V \qquad \text{per ogni } v \in V, \end{aligned}$$

dove $C = \|f\|_{L^2(\Omega)}$. Dunque F è limitato ed, essendo lineare, anche continuo.

Dato che tutte le ipotesi del Teorema di Lax-Milgram sono soddisfatte, la soluzione $u \in V$ del problema debole esiste ed è unica, inoltre:

$$\|u\|_V \le \frac{1}{\alpha}\, \|F\|_{V'} = \frac{1 + L^2/2}{\mu_0}\, \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

2. Si tratta di un'equazione differenziale di diffusione-trasporto con condizioni di Dirichlet non omogenee. Inoltre, il coefficiente di diffusione $\mu(x)$ è in realtà una funzione dello spazio.

   Introduciamo una funzione di rilevamento $R_g(x)$ del dato al bordo, ovvero $R_g \in H^1(\Omega)$, con $\Omega = (0, L)$, tale che $R_g(0) = g_1$ e $R_g(L) = g_2$; una scelta possibile per la funzione rilvamento è $R_g(x) = g_1 + (g_2 - g_1)\, \dfrac{x}{L}$. Scegliendo lo spazio $H^1(\Omega)$ in cui cercare la soluzione u, scriviamo:

$$u(x) = u_0(x) + R_g(x),$$

   dove, essendo u, $R_g \in H^1(\Omega)$, anche $u_0 \in H^1(\Omega)$; inoltre, dato che $u(0) = R_g(0) = g_1$ e $u(L) = R_g(L) = g_2$, allora $u_0(0) = u_0(L) = 0$. Scriveremo un problema debole nella soluzione omogenea $u_0 \in V = H^1_0(\Omega)$, in cui sceglieremo anche le funzioni test v. Scelta la funzione rilevamento R_g e risolto il problema in u_0, sarà poi possibile determinare $u(x)$, come $u = u_0 + R_g$.

   Presa l'equazione differenziale, moltiplicando a sinistra e a destra dell'uguale per la funzione test $v \in V$ e integrando, abbiamo:

$$-\int_0^L (\mu\, u')'\, v\, dx + \int_0^L \beta_0\, u'\, v\, dx = 0,$$

   da cui, applicando l'integrale per parti al primo termine a sinistra dell'uguale, otteniamo:

$$\int_0^L \mu\, u'\, v'\, dx - \big[\mu(x)\, u'(x)\, v(x)\big]_{x=0}^L + \int_0^L \beta_0\, u'\, v\, dx = 0,$$

   che deve valere per ogni $v \in V$. Ricordando che $V = H^1_0(\Omega)$, abbiamo dunque che $v(0) = v(L) = 0$ e quindi la precedente diventa:

$$\int_0^L \mu\, u'\, v'\, dx + \int_0^L \beta_0\, u'\, v\, dx = 0.$$

   Sostituiamo nella precedente $u = u_0 + R_g$, da cui otteniamo:

$$\int_0^L \mu\, (u_0 + R_g)'\, v'\, dx + \int_0^L \beta_0\, (u_0 + R_g)'\, v\, dx = 0$$

e

$$\int_0^L \mu\, u_0'\, v'\, dx + \int_0^L \beta_0\, u_0'\, v\, dx = -\left(\int_0^L \mu\, R_g'\, v'\, dx + \int_0^L \beta_0\, R_g'\, v\, dx \right).$$

Il problema in formulazione debole si scrive quindi come:

$$\text{trovare } u_0 \in V \,:\, a(u_0, v) = F(v) \qquad \text{per ogni } v \in V,$$

dove:

- $V = H_0^1(\Omega)$;
- $a \,:\, V \times V \to \mathbb{R}$ è la forma espressa come $a(u_0, v) = \int_0^L \mu\, u_0'\, v'\, dx + \beta_0 \int_0^L u_0'\, v\, dx$, dato che β_0 è costante;
- $F \,:\, V \to \mathbb{R}$ è il funzionale espresso come $F(v) = -a(R_g, v) = -\int_0^L \mu\, R_g'\, v'\, dx - \beta_0 \int_0^L R_g'\, v\, dx$.

La soluzione $u \in H^1(\Omega)$ sarà poi ottenuta come $u = u_0 + R_g$ dopo aver risolto il problema debole precedente.

Mostriamo, usando il Teorema di Lax-Milgram, che la soluzione $u_0 \in V$ del problema debole esiste ed è unica. Ricordiamo che $V = H_0^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert. Procediamo ora verificando che le ipotesi i)–v) sono soddisfatte.

i) ($a \,:\, V \times V \to \mathbb{R}$ è bilineare). Si mostra la bilinearità della forma in maniera del tutto analoga a quanto visto in precedenza.

ii) ($a \,:\, V \times V \to \mathbb{R}$ è continua). Mostriamo che $|a(w,v)| \leq M\, \|w\|_V\, \|v\|_V$ per ogni $w, v \in V$, con $M > 0$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
|a(w,v)| &\leq \left| \int_0^L \mu\, w'\, v'\, dx \right| + \left| \beta_0 \int_0^L w'\, v\, dx \right| \\
&\leq \int_0^L \left| \mu\, w'\, v' \right| \, dx + |\beta_0| \left| \int_0^L w'\, v\, dx \right| \\
&\leq \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)}\, \|w'\, v'\|_{L^1(\Omega)} + |\beta_0|\, \|w'\|_{L^2(\Omega)}\, \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)}\, \|w'\|_{L^2(\Omega)|}\, \|v'\|_{L^2(\Omega)} + |\beta_0|\, \|w'\|_{L^2(\Omega)}\, \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \big(\|\mu\|_{L^\infty(\Omega)} + |\beta_0| \big)\, \|w\|_{H^1(\Omega)}\, \|v\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq M\, \|w\|_V\, \|v\|_V \qquad \text{per ogni } w, v \in V,
\end{aligned}$$

con costante di continuità $M = \big(\|\mu\|_{L^\infty(\Omega)} + |\beta_0| \big)$; avendo scelto $\mu \in L^\infty(\Omega)$, abbiamo usato la disuguaglianza di Hölder per stimare il primo termine, ovvero $\|\mu\, w'\, v'\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)}\, \|w'\, v'\|_{L^1(\Omega)}$. Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, abbiamo poi ottenuto che $\|w'\, v'\|_{L^1(\Omega)} \leq \|w'\|_{L^2(\Omega)|}\, \|v'\|_{L^2(\Omega)}$; infine, abbiamo sfruttato il fatto che $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$ e $\|v'\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$ per ogni $v \in H^1(\Omega)$ e dunque per ogni $v \in V$.

iii) ($a \,:\, V \times V \to \mathbb{R}$ è coerciva). Mostriamo che $a(v,v) \geq \alpha\, \|v\|_V^2$ per ogni $v \in V$, con $\alpha > 0$. Abbiamo:

$$a(v,v) = \int_0^L \mu\, (v')^2\, dx + \beta_0 \int_0^L v'\, v\, dx = \int_0^L \mu\, (v')^2\, dx,$$

dato che $\int_0^L v'\, v\, dx = \int_0^L \frac{1}{2}\, (v^2)'\, dx = \frac{1}{2}\, [v^2(L) - v^2(0)] = 0$, essendo $v \in V = H_0^1(\Omega)$. Siccome $\mu(x) \geq \mu_0 > 0$ per ogni $x \in (0, L)$, allora abbiamo:

$$a(v,v) \geq \int_0^L \mu_0\, (v')^2\, dx = \mu_0\, \|v'\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Essendo $v \in V = H_0^1(\Omega)$, vale la disuguaglianza di Poincarè, ovvero abbiamo $\|v'\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \dfrac{1}{1+C_\Omega^2}\,\|v\|^2_{H^1(\Omega)}$ per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$, con $C_\Omega = \dfrac{L}{\sqrt{2}}$. Dunque otteniamo:

$$a(v,v) \geq \frac{\mu_0}{1+C_\Omega^2}\,\|v\|^2_{H^1(\Omega)} = \alpha\,\|v\|^2_V \qquad \text{per ogni } v \in V,$$

con $\alpha = \dfrac{\mu_0}{1+C_\Omega^2} = \dfrac{\mu_0}{1+L^2/2} > 0$. La forma $a : V \times V \to \mathbb{R}$ è quindi coerciva.

iv) ($F : V \to \mathbb{R}$ è lineare). Dato che $F(v) = -a(R_g, v)$, la forma $a(R_g, v)$ è bilineare e dunque lineare nel secondo argomento v, allora F è lineare. È anche possibile dimostrarlo applicando la definizione.

v) ($F : V \to \mathbb{R}$ è continuo). Dato che F è un funzionale lineare, esso è continuo se è anche limitato. Mostriamo dunque che F è limitato, ovvero esiste una costante $C > 0$ tale che $|F(v)| \leq C\,\|v\|_V$ per ogni $v \in V$. Possiamo già osservare che, essendo $F(v) = -a(R_g, v)$ e la forma a continua, lo sarà anche il funzionale F. Infatti:

$$|F(v)| = |a(R_g, v)| \leq M\,\|R_g\|_{H^1(\Omega)}\,\|v\|_V = C\,\|v\|_V \qquad \text{per ogni } v \in V,$$

dove $C = M\,\|R_g\|_{H^1(\Omega)}$, essendo M la costante di continuità della forma a. Dunque F è limitato ed, essendo lineare, anche continuo.

Dato che tutte le ipotesi del Teorema di Lax-Milgram sono soddisfatte, la soluzione $u_0 \in V$ del problema debole esiste ed è unica, inoltre:

$$\|u_0\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\,\|F\|_{V'} \leq \frac{1}{\alpha}\,C = \frac{M}{\alpha}\,\|R_g\|_{H^1(\Omega)} = \frac{1+L^2/2}{\mu_0}\,\big(\|\mu\|_{L^\infty(\Omega)} + |\beta_0|\big)\,\|R_g\|_{H^1(\Omega)}.$$

Considerando i dati $\mu(x) = 1 + 2\dfrac{x}{L}$ e $\beta_0 = 7$, abbiamo $\mu_0 = \min\limits_{x \in (0,L)} \mu(x) = 1$ e $\|\mu\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup\limits_{x \in (0,L)} |\mu(x)| = 3$. Dunque, otteniamo $M = \big(\|\mu\|_{L^\infty(\Omega)} + |\beta_0|\big) = 10$ e $\alpha = \dfrac{1}{1+L^2/2}$.

3. Si tratta di un'equazione differenziale di diffusione-reazione con condizioni di Dirichlet non omogenee. Inoltre, il coefficiente di reazione $\sigma(x)$ è una funzione dello spazio.

   Introduciamo una funzione di rilevamento del dato al bordo, ovvero $R_g \in H^1(\Omega)$, con $\Omega = (0, L)$, tale che $R_g(0) = g_1$ e $R_g(L) = g_2$; una scelta possibile è $R_g(x) = g_1 + (g_2 - g_1)\,\dfrac{x}{L}$. Ancora una volta, scegliendo lo spazio $H^1(\Omega)$ in cui cercare la soluzione u, scriviamo:

$$u(x) = u_0(x) + R_g(x),$$

   dove, essendo u, $R_g \in H^1(\Omega)$, anche $u_0 \in H^1(\Omega)$; inoltre, dato che $u(0) = R_g(0) = g_1$ e $u(L) = R_g(L) = g_2$, allora $u_0(0) = u_0(L) = 0$. Scriveremo un problema debole nella soluzione omogenea $u_0 \in V = H_0^1(\Omega)$, in cui sceglieremo anche le funzioni test v. Scelta R_g e risolto il problema debole in u_0, sarà poi possibile determinare $u(x)$ come $u = u_0 + R_g$.

   Presa l'equazione differenziale, moltiplicando a sinistra e a destra dell'uguale per la funzione test $v \in V$ e integrando, abbiamo:

$$-\int_0^L \mu_0\, u''\, v\, dx + \int_0^L \sigma\, u\, v\, dx = \int_0^L f\, v\, dx, ,$$

   da cui, applicando l'integrale per parti al primo termine a sinistra dell'uguale, otteniamo:

$$\int_0^L \mu_0\, u'\, v'\, dx - \big[\mu_0\, u'(x)\, v(x)\big]_{x=0}^L + \int_0^L \sigma\, u\, v\, dx = \int_0^L f\, v\, dx,$$

che deve valere per ogni $v \in V$. Ricordando che $V = H^1_0(\Omega)$, abbiamo dunque che $v(0) = v(L) = 0$ e quindi la precedente diventa:

$$\int_0^L \mu_0\, u'\, v'\, dx + \int_0^L \sigma\, u\, v\, dx = \int_0^L f\, v\, dx.$$

Sostituiamo nella precedente $u = u_0 + R_g$, da cui otteniamo:

$$\int_0^L \mu_0\, (u_0 + R_g)'\, v'\, dx + \int_0^L \sigma\, (u_0 + R_g)\, v\, dx = \int_0^L f\, v\, dx,$$

e

$$\int_0^L \mu_0\, u_0'\, v'\, dx + \int_0^L \sigma\, u_0\, v\, dx = \int_0^L f\, v\, dx - \left(\int_0^L \mu_0\, R_g'\, v'\, dx + \int_0^L \sigma\, R_g\, v\, dx \right).$$

Il problema in formulazione debole si scrive quindi come:

$$\text{trovare } u_0 \in V \,:\, a(u_0, v) = F(v) \qquad \text{per ogni } v \in V,$$

dove:

- $V = H^1_0(\Omega)$;
- $a \,:\, V \times V \to \mathbb{R}$ è la forma espressa come $a(u_0, v) = \mu_0 \displaystyle\int_0^L u_0'\, v'\, dx + \int_0^L \sigma\, u_0\, v\, dx$, dato che μ_0 è costante;
- $F \,:\, V \to \mathbb{R}$ è il funzionale espresso come $F(v) = \displaystyle\int_0^L f\, v\, dx - a(R_g, v) = \int_0^L f\, v\, dx - \mu_0 \int_0^L R_g'\, v'\, dx - \int_0^L \sigma\, R_g\, v\, dx$.

La soluzione $u \in H^1(\Omega)$ sarà poi ottenuta come $u = u_0 + R_g$ dopo aver risolto il problema debole precedente.

Mostriamo, tramite il Teorema di Lax-Milgram, che la soluzione $u_0 \in V$ del problema debole esiste ed è unica. Ricordiamo che $V = H^1_0(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert. Verifichiamo che le ipotesi i)–v) sono soddisfatte.

i) ($a \,:\, V \times V \to \mathbb{R}$ è bilineare). Si mostra la bilinearità della forma in maniera del tutto analoga a quanto visto finora.

ii) ($a \,:\, V \times V \to \mathbb{R}$ è continua). Mostriamo che $|a(w, v)| \leq M\, \|w\|_V\, \|v\|_V$ per ogni $w, v \in V$, con $M > 0$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
|a(w,v)| &\leq \left| \mu_0 \int_0^L w'\, v'\, dx \right| + \left| \int_0^L \sigma\, w\, v\, dx \right| \\
&\leq \mu_0 \left| \int_0^L w'\, v'\, dx \right| + \int_0^L |\sigma\, w\, v|\, dx \\
&\leq \mu_0\, \|w'\|_{L^2(\Omega)|}\, \|v'\|_{L^2(\Omega)} + \|\sigma\|_{L^\infty(\Omega)}\, \|w\, v\|_{L^1(\Omega)} \\
&\leq \mu_0\, \|w'\|_{L^2(\Omega)|}\, \|v'\|_{L^2(\Omega)} + \|\sigma\|_{L^\infty(\Omega)}\, \|w\|_{L^2(\Omega)}\, \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left(\mu_0 + \|\sigma\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \|w\|_{H^1(\Omega)}\, \|v\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq M\, \|w\|_V\, \|v\|_V \qquad \text{per ogni } w, v \in V,
\end{aligned}$$

con costante di continuità $M = \left(\mu_0 + \|\sigma\|_{L^\infty(\Omega)}\right)$; avendo scelto $\sigma \in L^\infty(\Omega)$, abbiamo usato la disuguaglianza di Holder per stimare il secondo termine, ovvero $\|\sigma\, w\, v\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\sigma\|_{L^\infty(\Omega)}\, \|w\, v\|_{L^1(\Omega)}$. Abbiamo poi sfruttato la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz $\|w\, v\|_{L^1(\Omega)} \leq \|w\|_{L^2(\Omega)}\, \|v\|_{L^2(\Omega)}$, e allo stesso modo il fatto che, per tali funzioni, $\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq \|w\|_{H^1(\Omega)}$ e $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$. Per quanto riguarda il primo termine, abbiamo invece proceduto come per l'esercizio precedente.

iii) ($a : V \times V \to \mathbb{R}$ è coerciva). Mostriamo che $a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2$ per ogni $v \in V$, con $\alpha > 0$. Abbiamo:

$$a(v,v) = \mu_0 \int_0^L \mu\,(v')^2\,dx + \int_0^L \sigma\,v\,v\,dx = \int_0^L \mu\,(v')^2\,dx.$$

Siccome $\sigma(x) \geq \sigma_0 > 0$ per ogni $x \in (0,L)$, allora abbiamo:

$$a(v,v) \geq \mu_0 \int_0^L (v')^2\,dx + \sigma_0 \int_0^L (v)^2\,dx = \mu_0 \|v'\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sigma_0 \|v\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Abbiamo ora due possibilità per mostrare la coercività della forma.

* Essendo $v \in V = H_0^1(\Omega)$, vale la disuguaglianza di Poincarè, ovvero $\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \dfrac{1}{1+C_\Omega^2} \|v\|_{H^1(\Omega)}^2$ per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$, con $C_\Omega = \dfrac{L}{\sqrt{2}}$. Dunque, essendo $\sigma_0 \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 0$ per ogni $v \in V$, otteniamo:

$$a(v,v) \geq \frac{\mu_0}{1+C_\Omega^2} \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \alpha_1 \|v\|_V^2 \qquad \text{per ogni } v \in V,$$

  con $\alpha_1 = \dfrac{\mu_0}{1+C_\Omega^2} = \dfrac{\mu_0}{1+L^2/2} > 0$. La forma $a : V \times V \to \mathbb{R}$ è quindi coerciva con costante α_1 seguendo questo approccio.

* Siccome $\sigma_0 > 0$ (strettamente), allora:

$$\begin{aligned} a(v,v) &\geq \mu_0 \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sigma_0 \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq \min\{\mu_0, \sigma_0\} \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) = \alpha_2 \|v\|_V^2 \qquad \text{per ogni } v \in V, \end{aligned}$$

  essendo $\alpha_2 = \min\{\mu_0, \sigma_0\}$ e $\left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) = \|v\|_{H^1(\Omega)}^2$. Dunque si trova che la forma $a : V \times V \to \mathbb{R}$ è coerciva con costante $\alpha_2 > 0$ anche seguendo questo approccio.

Osserviamo che se $\mu_0 > 0$ ma molto "piccolo", le costanti α_1 e $\alpha_2 > 0$ saranno molto vicine a zero, mentre se $\sigma_0 > 0$ è molto "piccolo", la costante $\alpha_2 > 0$ sarà molto vicina a zero.

iv) ($F : V \to \mathbb{R}$ è lineare). Dato che $F(v) = \int_0^L f\,v\,dx - a(R_g, v)$, il funzionale $\int_0^L f\,v\,dx$ è lineare, la forma $a(R_g, v)$ è bilineare e dunque lineare nel secondo argomento v, allora F è lineare. È anche possibile dimostrarlo applicando la definizione.

v) ($F : V \to \mathbb{R}$ è continuo). Dato che F è un funzionale lineare, esso è continuo se è anche limitato. Mostriamo dunque che F è limitato, ovvero esiste una costante $C > 0$ tale che $|F(v)| \leq C \|v\|_V$ per ogni $v \in V$. Osserviamo che, essendo $F(v) = \int_0^L f\,v\,dx - a(R_g, v)$, il funzionale $\int_0^L f\,v\,dx$ limitato e la forma a continua, lo sarà anche il funzionale F. Infatti, procedendo come negli Esercizi 1.1 e 1.2, abbiamo:

$$|F(v)| = \left| \int_0^L f\,v\,dx - a(R_g, v) \right| \leq \left| \int_0^L f\,v\,dx \right| + |a(R_g, v)| \leq C \|v\|_V \qquad \text{per ogni } v \in V,$$

dove $C = \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + M \|R_g\|_{H^1(\Omega)} \right)$, essendo M la costante di continuità della forma a. Dunque F è lineare e limitato, dunque anche continuo.

Dato che tutte le ipotesi del Teorema di Lax-Milgram sono soddisfatte, la soluzione $u_0 \in V$ del problema debole esiste ed è unica, inoltre:

$$\|u_0\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{V'} \leq \frac{1}{\alpha} C = \frac{1+L^2/2}{\mu_0} \left[\|f\|_{L^2(\Omega)} + \left(\mu_0 + \|\sigma\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \|R_g\|_{H^1(\Omega)} \right],$$

nel caso $\alpha = \alpha_1$ per esempio.

Considerando i dati $\mu_0 = 3$ e $\sigma = 5^{-x/L}$, abbiamo $\sigma_0 = 1/5$ e $\|\sigma\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$. Quindi: $M = 3 + 1 = 4$, $\alpha_1 = \dfrac{3}{1 + L^2/2}$ e $\alpha_2 = 1/5$.

4. Si tratta di un'equazione differenziale di diffusione-reazione con condizioni al contorno di Neumann. Scegliamo dunque lo spazio funzionale $V = H^1(\Omega)$, con $\Omega = (0, L)$, in cui cercare la soluzione debole u e scegliere le funzioni test v in modo di dare significato agli integrali che compariranno nella formulazione debole.

   Presa l'equazione differenziale, moltiplicando a sinistra e a destra dell'uguale per la funzione test $v \in V$ e integrando, abbiamo:

$$-\int_0^L \mu_0\, u''\, v\, dx + \int_0^L \sigma_0\, u\, v\, dx = 0,$$

   da cui, applicando l'integrale per parti al primo termine a sinistra dell'uguale, otteniamo:

$$\int_0^L \mu_0\, u'\, v'\, dx - \big[\mu_0\, u'(x)\, v(x)\big]_{x=0}^{L} + \int_0^L \sigma_0\, u\, v\, dx = 0,$$

   che deve valere per ogni $v \in V$. Ricordando che abbiamo le condizioni al contorno di Neumann $\mu_0\, u'(0) = q_1$ e $-\mu_0\, u'(L) = q_2$, la precedente diventa:

$$\int_0^L \mu_0\, u'\, v'\, dx + \int_0^L \sigma_0\, u\, v\, dx = -q_1\, v(0) - q_2\, v(L).$$

   Il problema in formulazione debole si scrive quindi come:

$$\text{trovare } u \in V \;:\; a(u, v) = F(v) \qquad \text{per ogni } v \in V,$$

   dove:

   - $V = H^1(\Omega)$;
   - $a : V \times V \to \mathbb{R}$ è la forma espressa come $a(u, v) = \mu_0 \int_0^L u'\, v'\, dx + \sigma_0 \int_0^L u\, v\, dx$, dato che μ_0 e σ_0 sono costanti;
   - $F : V \to \mathbb{R}$ è il funzionale espresso come $F(v) = -q_1\, v(0) - q_2\, v(L)$.

   Mostriamo, usando il Teorema di Lax-Milgram, che la soluzione $u \in V$ del problema debole esiste ed è unica; ricordiamo che $V = H^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert. Procediamo ora verificando che le ipotesi i)–v) sono soddisfatte.

   i) ($a : V \times V \to \mathbb{R}$ è bilineare). Si verifica che la forma $a : V \times V \to \mathbb{R}$ è bilineare procedendo come precedentemente.

   ii) ($a : V \times V \to \mathbb{R}$ è continua). La forma è continua, infatti si mostra facilmente che $|a(u, v)| \leq M\, \|u\|_V\, \|v\|_V$ per ogni $u, v \in V$, con con costante di continuità $M = (\mu_0 + \sigma_0)$.

   iii) ($a : V \times V \to \mathbb{R}$ è coerciva). Mostriamo che $a(v, v) \geq \alpha\, \|v\|_V^2$ per ogni $v \in V$, con $\alpha > 0$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \mu_0 \int_0^L (v')^2\, dx + \sigma_0 \int_0^L v^2\, dx \\ &= \mu_0\, \|v'\|^2_{L^2(\Omega)} + \sigma_0\, \|v\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

   Dunque:

$$a(v, v) \geq \min\{\mu_0, \sigma_0\}\, \|v\|_V^2 = \alpha\, \|v\|_V^2 \qquad \text{per ogni } v \in V,$$

   avendo sfruttato la definizione di norma H^1 ed essendo $\alpha = \min\{\mu_0, \sigma_0\} > 0$, per $\mu_0 > 0$ e $\sigma_0 > 0$.

iv) ($F : V \to \mathbb{R}$ è lineare). Mostriamo che $F(\beta\, v + \gamma\, w) = \beta\, F(v) + \gamma\, F(w)$ per ogni $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ e per ogni $v, w \in V$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} F(\beta\, v + \gamma\, w) &= -q_1\, (\beta\, v(0) + \gamma\, w(0)) - q_2\, (\beta\, v(L) + \gamma\, w(L)) \\ &= \beta\, (-q_1\, v(0) - q_2\, v(L)) + \gamma\, (-q_1\, w(0) - q_2\, w(L)) = \beta\, F(v) + \gamma\, F(w). \end{aligned}$$

Dunque $F : V \to \mathbb{R}$ è un funzionale lineare.

v) ($F : V \to \mathbb{R}$ è continuo). Dato che F è un funzionale lineare, esso è continuo se è anche limitato. Mostriamo che F è limitato, ovvero esiste una costante $C > 0$ tale che $|F(v)| \leq C\, \|v\|_V$ per ogni $v \in V$. Dato che $v \in V = H^1(\Omega)$, possiamo usare il Teorema di traccia per cui esiste una costante $\widetilde{C} > 0$ tale che:

$$|v(0)| \leq \widetilde{C}\, \|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad \text{e} \qquad |v(L)| \leq \widetilde{C}\, \|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad \text{per ogni } v \in H^1(\Omega).$$

Abbiamo, usando il risultato precedente:

$$|F(v)| \leq |q_1|\, |v(0)| + |q_2|\, |v(L)| \leq \widetilde{C}\, (|q_1| + |q_2|)\, \|v\|_V = C\, \|v\|_V \qquad \text{per ogni } v \in V,$$

dove $C = \widetilde{C}\, (|q_1| + |q_2|)$. Dunque F è limitato ed, essendo lineare, anche continuo.

Dato che tutte le ipotesi del Teorema di Lax-Milgram sono soddisfatte, la soluzione $u \in V$ del problema debole esiste ed è unica, inoltre:

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\, \|F\|_{V'} = \frac{\widetilde{C}\, (|q_1| + |q_2|)}{\min\{\mu_0, \sigma_0\}}.$$

Esercizio 2

1. Si tratta di un'equazione differenziale del secondo ordine con condizioni al contorno miste di Dirichlet omogeneo e Robin. Scegliamo lo spazio funzionale $V = H^1_S(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v(0) = 0\}$, con $\Omega = (0, L)$, in cui cercare la soluzione debole u e scegliere le funzioni test v in modo di dare significato agli integrali che compariranno nella formulazione debole e garantire che $u(0) = 0$.

   Presa l'equazione differenziale, moltiplicando a sinistra e a destra dell'uguale per la funzione test $v \in V$ e integrando, abbiamo:

   $$-\int_0^L \mu\, u''\, v\, dx = 0,$$

   da cui, applicando l'integrale per parti al primo termine a sinistra dell'uguale, otteniamo:

   $$\int_0^L \mu\, u'\, v'\, dx - \big[\mu(x)\, u'(x)\, v(x)\big]_{x=0}^{L} = 0,$$

   che deve valere per ogni $v \in V$. Ricordando che $V = H^1_S(\Omega)$, e dunque che $v(0) = 0$, e $-\mu(L)\, u'(L) = \gamma_2\, u(L) + q_2$, la precedente diventa:

   $$\int_0^L \mu\, u'\, v'\, dx + \gamma_2\, u(L)\, v(L) = -q_2\, v(L).$$

   Il problema in formulazione debole si scrive quindi come:

   $$\text{trovare } u \in V : a(u, v) = F(v) \qquad \text{per ogni } v \in V,$$

   dove:

   - $V = H^1_S(\Omega)$;

- $a : V \times V \to \mathbb{R}$ è la forma espressa come $a(u,v) = \displaystyle\int_0^L \mu\, u'\, v'\, dx + \gamma_2\, u(L)\, v(L)$;
- $F : V \to \mathbb{R}$ è il funzionale espresso come $F(v) = -q_2\, v(L)$.

Mostriamo, usando il Teorema di Lax-Milgram, che la soluzione $u \in V$ del problema debole esiste ed è unica. Ricordiamo che la prima ipotesi, ovvero che $V = H^1_S(\Omega)$ sia uno spazio di Hilbert, è già soddisfatta per definizione di tale spazio. Procediamo ora verificando che le ipotesi i)–v) sono soddisfatte.

i) ($a : V \times V \to \mathbb{R}$ è bilineare). Mostriamo che $a(\beta\, v + \gamma\, w, z) = \beta\, a(v,z) + \gamma\, a(w,z)$ per ogni $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ e per ogni $v, w, z \in V$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} a(\beta\, v + \gamma\, w, z) &= \int_0^L \mu\, (\beta\, v + \gamma\, w)'\, z'\, dx + \gamma_2\, \left[\beta\, v(L) + \gamma\, w(L)\right]\, z(L) \\ &= \beta \left[\int_0^L \mu\, v'\, z'\, dx + \gamma_2\, v(L)\, z(L)\right] + \gamma \left[\int_0^L \mu\, w'\, z'\, dx + \gamma_2\, w(L)\, z(L)\right] \\ &= \beta\, a(v,z) + \gamma\, a(w,z), \end{aligned}$$

dato che $(\beta\, v + \gamma\, w)' = \beta\, v' + \gamma\, w'$. In maniera analoga e sfruttando le stesse proprietà di linearità dell'operatore di derivazione e dell'integrale, si mostra che $a(v, \beta\, w + \gamma\, z) = \beta\, a(v,w) + \gamma\, a(v,z)$ per ogni $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ e per ogni $v, w, z \in V$. Dunque la forma $a : V \times V \to \mathbb{R}$ è bilineare.

ii) ($a : V \times V \to \mathbb{R}$ è continua). Mostriamo che $|a(u,v)| \leq M\, \|u\|_V\, \|v\|_V$ per ogni $u, v \in V$, con $M > 0$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &= \left|\int_0^L \mu\, u'\, v'\, dx + \gamma_2\, u(L)\, v(L)\right| \\ &\leq \int_0^L \left|\mu\, u'\, v'\right|\, dx + \gamma_2\, |u(L)\, v(L)| \\ &\leq \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)}\, \|u'\, v'\|_{L^1(\Omega)} + \gamma_2\, |u(L)|\, |v(L)| \\ &\leq \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)}\, \|u'\|_{L^2(\Omega)}\, \|v'\|_{L^2(\Omega)} + \gamma_2\, |u(L)|\, |v(L)| \\ &\leq \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)}\, \|u\|_{H^1(\Omega)|}\, \|v\|_{H^1(\Omega)} + \gamma_2\, \widetilde{C}^2\, \|u\|_{H^1(\Omega)}\, \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq M\, \|u\|_V\, \|v\|_V \qquad \text{per ogni } u, v \in V, \end{aligned}$$

con costante di continuità $M = (\|\mu\|_{L^\infty(\Omega)} + \gamma_2\, \widetilde{C}^2)$. Abbiamo sfruttato per la prima parte le disuguaglianze di Hölder (assumendo $\mu \in L^\infty(\Omega)$) e di Cauchy-Schwarz, oltre al fatto che $\|v'\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$ per ogni $v \in H^1(\Omega)$ e dunque per ogni $v \in V$. Per la seconda parte, abbiamo usato il Teorema di traccia, ovvero esiste una costante $\widetilde{C} > 0$ tale che:

$$|v(L)| \leq \widetilde{C}\, \|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad \text{per ogni } v \in H^1(\Omega).$$

iii) ($a : V \times V \to \mathbb{R}$ è coerciva). Mostriamo che $a(v,v) \geq \alpha\, \|v\|_V^2$ per ogni $v \in V$, con $\alpha > 0$. Abbiamo:

$$a(v,v) = \int_0^L \mu\, (v')^2\, dx + \gamma_2\, (v(L))^2 \geq \mu_0\, \|v'\|_{L^2(\Omega)} + \gamma_2\, (v(L))^2 \geq \mu_0\, \|v'\|_{L^2(\Omega)},$$

essendo $\gamma_2\, (v(L))^2 \geq 0$ e inoltre $\mu(x) \geq \mu_0 > 0$. Osserviamo ora che, essendo $v \in V = H^1_S(\Omega)$, vale la disuguaglianza di Poincarè, ovvero $\|v'\|_{L^2(\Omega)} \geq \dfrac{1}{1 + C_\Omega^2}\, \|v\|^2_{H^1(\Omega)}$ per ogni

$v \in H^1_S(\Omega)$, con $C_\Omega > 0$, essendo in tal caso $\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C^2_\Omega \, \|v'\|_{L^2(\Omega)}$ e quindi la norma e la seminorma H^1 sono equivalenti. Dunque:

$$a(v,v) \geq \frac{\mu_0}{1+C^2_\Omega} \, \|v\|^2_{H^1(\Omega)} = \alpha \, \|v\|^2_V \qquad \text{per ogni } v \in V,$$

con $\alpha = \dfrac{\mu_0}{1+C^2_\Omega}$. La forma $a : V \times V \to \mathbb{R}$ è dunque coerciva.

iv) ($F : V \to \mathbb{R}$ è lineare). Mostriamo che $F(\beta\, v + \gamma\, w) = \beta\, F(v) + \gamma\, F(w)$ per ogni $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ e per ogni $v, w \in V$. Abbiamo:

$$F(\beta\, v + \gamma\, w) = -q_2\,(\beta\, v(L) + \gamma\, w(L)) = \beta\,(-q_2\, v(L)) + \gamma\,(-q_2\, w(L)) = \beta\, F(v) + \gamma\, F(w).$$

Dunque $F : V \to \mathbb{R}$ è un funzionale lineare.

v) ($F : V \to \mathbb{R}$ è continuo). Dato che F è un funzionale lineare, esso è continuo se è anche limitato. Mostriamo dunque che F è limitato, ovvero esiste una costante $C > 0$ tale che $|F(v)| \leq C\, \|v\|_V$ per ogni $v \in V$. Abbiamo:

$$|F(v)| = |q_2|\, |v(L)| \leq |q_2|\, \widetilde{C}\, \|v\|_{H^1(\Omega)} = C\, \|v\|_V \qquad \text{per ogni } v \in V,$$

dove, avendo sfruttato la disuguaglianza del Teorema di traccia, $C = |q_2|\, \widetilde{C}$. Dunque F è limitato ed, essendo lineare, anche continuo.

Dato che tutte le ipotesi del Teorema di Lax-Milgram sono soddisfatte, la soluzione $u \in V$ del problema debole esiste ed è unica, inoltre:

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\, \|F\|_{V'} = \frac{C}{\alpha} = \frac{1+C^2_\Omega}{\mu_0}\, |q_2|\, \widetilde{C}.$$

2. Si tratta di un'equazione di diffusione-reazione con condizioni al contorno miste di Neumann e Robin. Scegliamo lo spazio funzionale $V = H^1(\Omega)$, con $\Omega = (0, L)$, in cui cercare la soluzione debole u e scegliere le funzioni test v in modo di dare significato agli integrali che compariranno nella formulazione debole.

   Presa l'equazione differenziale, moltiplicando a sinistra e a destra dell'uguale per la funzione test $v \in V$ e integrando, abbiamo:

$$-\int_0^L \mu_0\, u''\, v\, dx + \int_0^L \sigma\, u\, v\, dx = 0,$$

   da cui, applicando l'integrale per parti al primo termine a sinistra dell'uguale, otteniamo:

$$\int_0^L \mu_0\, u'\, v'\, dx - \left[\mu_0\, u'(x)\, v(x)\right]_{x=0}^L + \int_0^L \sigma\, u\, v\, dx = 0,$$

   che deve valere per ogni $v \in V$. Ricordando che $\mu_0\, u'(0) = q_1$ e $-\mu_0\, u'(L) = \gamma_2\, u(L) + q_2$, la precedente diventa:

$$\int_0^L \mu_0\, u'\, v'\, dx + \int_0^L \sigma\, u\, v\, dx + \gamma_2\, u(L)\, v(L) = -q_1\, v(0) - q_2\, v(L).$$

   Il problema in formulazione debole si scrive quindi come:

$$\text{trovare } u \in V : a(u,v) = F(v) \qquad \text{per ogni } v \in V,$$

   dove:

- $V = H^1(\Omega)$;
- $a : V \times V \to \mathbb{R}$ è la forma espressa come $a(u,v) = \mu_0 \int_0^L u'\, v'\, dx + \int_0^L \sigma\, u\, v\, dx + \gamma_2\, u(L)\, v(L)$, essendo il coefficiente μ_0 costante;
- $F : V \to \mathbb{R}$ è il funzionale espresso come $F(v) = -q_1\, v(0) - q_2\, v(L)$.

Mostriamo, usando il Teorema di Lax-Milgram, che la soluzione $u \in V$ del problema debole esiste ed è unica. Ricordiamo che la prima ipotesi, ovvero che $V = H^1(\Omega)$ sia uno spazio di Hilbert, è già soddisfatta per definizione. Verifichiamo ora che le ipotesi i)–v) sono soddisfatte.

i) ($a : V \times V \to \mathbb{R}$ è bilineare). Si dimostra analogamente a quanto visto in precedenza.

ii) ($a : V \times V \to \mathbb{R}$ è continua). Mostriamo che $|a(u,v)| \leq M\, \|u\|_V\, \|v\|_V$ per ogni $u, v \in V$, con $M > 0$. Abbiamo:

$$
\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left| \mu_0 \int_0^L u'\, v'\, dx + \int_0^L \sigma\, u\, v\, dx + \gamma_2\, u(L)\, v(L) \right| \\
&\leq \mu_0 \left| \int_0^L u'\, v'\, dx \right| + \int_0^L |\sigma\, u\, v|\, dx + \gamma_2\, |u(L)\, v(L)| \\
&\leq \mu_0\, \|u\|_{H^1(\Omega)|}\, \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|\sigma\|_{L^\infty(\Omega)}\, \|u\|_{H^1(\Omega)|}\, \|v\|_{H^1(\Omega)} + \gamma_2\, \widetilde{C}^2\, \|u\|_{H^1(\Omega)}\, \|v\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq M\, \|u\|_V\, \|v\|_V \qquad \text{per ogni } u, v \in V,
\end{aligned}
$$

con costante di continuità $M = (\mu_0 + \|\sigma\|_{L^\infty(\Omega)} + \gamma_2\, \widetilde{C}^2)$. Abbiamo sfruttato le disuguaglianze di Hölder (assumendo $\sigma \in L^\infty(\Omega)$) e di Cauchy-Schwarz, oltre al fatto che $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$ e $\|v'\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$ per ogni $v \in H^1(\Omega)$, e infine il Teorema di traccia.

iii) ($a : V \times V \to \mathbb{R}$ è coerciva). Mostriamo che $a(v,v) \geq \alpha\, \|v\|_V^2$ per ogni $v \in V$, con $\alpha > 0$. Abbiamo:

$$
\begin{aligned}
a(v,v) &= \mu_0 \int_0^L (v')^2\, dx + \int_0^L \sigma\, v^2\, dx + \gamma_2\, (v(L))^2 \\
&\geq \mu_0\, \|v'\|_{L^2(\Omega)} + \sigma_0\, \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma_2\, (v(L))^2 \\
&\geq \min\{\mu_0, \sigma_0\}\, \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \alpha\, \|v\|_V^2 \qquad \text{per ogni } v \in V,
\end{aligned}
$$

con $\alpha = \min\{\mu_0, \sigma_0\} > 0$, essendo $\sigma(x) \geq \sigma_0 > 0$ per $x \in \Omega$ e $\gamma_2\, (v(L))^2 \geq 0$. La forma $a : V \times V \to \mathbb{R}$ è dunque coerciva.

iv) ($F : V \to \mathbb{R}$ è lineare). Si dimostra analogamente a quanto visto in precedenza.

v) ($F : V \to \mathbb{R}$ è continuo). Sfruttando il Teorema di traccia, abbiamo:

$$
|F(v)| \leq |q_1|\, |v(0)| + |q_2|\, |v(L)| \leq C\, \|v\|_V \qquad \text{per ogni } v \in V,
$$

dove $C = (|q_1| + |q_2|)\, \widetilde{C}$. Dunque F è limitato ed, essendo lineare, anche continuo.

Dato che tutte le ipotesi del Teorema di Lax-Milgram sono soddisfatte, la soluzione $u \in V$ del problema debole esiste ed è unica, inoltre:

$$
\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\, \|F\|_{V'} = \frac{C}{\alpha} = \frac{(|q_1| + |q_2|)\, \widetilde{C}}{\min\{\mu_0, \sigma_0\}}.
$$

3. Si tratta di un'equazione di diffusione-reazione con condizioni al contorno miste di Neumann e Dirichlet non omogeneo. Introduciamo una funzione di rilevamento R_g tale che $R_g \in H^1(\Omega)$ e $R_g(L) = g_2$, ad esempio possiamo scegliere semplicemente $R_g = g_2$. Cerchiamo la soluzione $u \in H^1(\Omega)$ decomponendola come:

$$u(x) = u_0(x) + R_g(x),$$

dove $u_0 \in H^1_D(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v(L) = 0\}$; ovvero $u_0(L) = 0$ e $u(L) = R_g(L) = g_2$. Scriveremo dunque un problema debole nella soluzione omogenea $u_0 \in V = H^1_D(\Omega)$, in cui sceglieremo anche le funzioni test $v \in V$. Scelta R_g e risolto il problema debole in u_0, sarà poi possibile determinare $u(x)$ come $u = u_0 + R_g$.

Scegliamo lo spazio funzionale $V = H^1_D(\Omega)$, con $\Omega = (0, L)$, in cui cercare la soluzione debole u e scegliere le funzioni test v in modo di dare significato agli integrali che compariranno nella formulazione debole.

Presa l'equazione differenziale, moltiplicando a sinistra e a destra dell'uguale per la funzione test $v \in V$ e integrando, abbiamo:

$$-\int_0^L \mu_0\, u''\, v\, dx + \int_0^L \sigma_0\, u\, v\, dx = 0,$$

da cui, applicando l'integrale per parti al primo termine a sinistra dell'uguale, otteniamo:

$$\int_0^L \mu_0\, u'\, v'\, dx - \big[\mu_0\, u'(x)\, v(x)\big]_{x=0}^L + \int_0^L \sigma_0\, u\, v\, dx = 0,$$

che deve valere per ogni $v \in V$. Ricordando che $\mu_0\, u'(0) = q_1$ e $v \in H^1_D(\Omega)$ (ovvero $v(L) = 0$), la precedente diventa:

$$\int_0^L \mu_0\, u'\, v'\, dx + \int_0^L \sigma_0\, u\, v\, dx = -q_1\, v(0).$$

Ricordiamo ora che $u = u_0 + R_g$, da cui:

$$\int_0^L \mu_0\, (u_0 + R_g)'\, v'\, dx + \int_0^L \sigma_0\, (u_0 + R_g)\, v\, dx = -q_1\, v(0),$$

ovvero

$$\int_0^L \mu_0\, u_0'\, v'\, dx + \int_0^L \sigma_0\, u_0\, v\, dx = -q_1\, v(0) - \int_0^L \mu_0\, R_g'\, v'\, dx - \int_0^L \sigma_0\, R_g\, v\, dx.$$

Il problema in formulazione debole si scrive quindi come:

$$\text{trovare } u_0 \in V \,:\, a(u_0, v) = F(v) \qquad \text{per ogni } v \in V,$$

dove:

- $V = H^1_D(\Omega)$;
- $a : V \times V \to \mathbb{R}$ è la forma espressa come $a(u, v) = \mu_0 \int_0^L u'\, v'\, dx + \sigma_0 \int_0^L u\, v\, dx$, essendo i coefficienti μ_0 e σ_0 costanti;
- $F : V \to \mathbb{R}$ è il funzionale espresso come $F(v) = -q_1\, v(0) - a(R_g, v)$.

Mostriamo, usando il Teorema di Lax-Milgram, che la soluzione $u_0 \in V$ del problema debole esiste ed è unica. Ricordiamo che la prima ipotesi, ovvero che $V = H^1_D(\Omega)$ sia uno spazio di Hilbert, è già soddisfatta per definizione. Verifichiamo ora che le ipotesi i)–v) sono soddisfatte.

i) ($a : V \times V \to \mathbb{R}$ è bilineare). Si dimostra analogamente a quanto già visto.

ii) ($a : V \times V \to \mathbb{R}$ è continua). Mostriamo che $|a(w,v)| \leq M \|w\|_V \|v\|_V$ per ogni $w, v \in V$, con $M > 0$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} |a(w,v)| &= \left| \mu_0 \int_0^L w'\, v'\, dx + \sigma_0 \int_0^L w\, v\, dx \right| \\ &\leq \mu_0 \|w\|_{H^1(\Omega)|} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \sigma_0 \|w\|_{H^1(\Omega)|} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq M \|w\|_V \|v\|_V \qquad \text{per ogni } w, v \in V, \end{aligned}$$

con costante di continuità $M = (\mu_0 + \sigma_0)$. Abbiamo sfruttato la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, oltre al fatto che $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$ e $\|v'\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$ per ogni $v \in H^1(\Omega)$.

iii) ($a : V \times V \to \mathbb{R}$ è coerciva). Mostriamo che $a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2$ per ogni $v \in V$, con $\alpha > 0$. Abbiamo:

$$a(v,v) = \mu_0 \int_0^L (v')^2\, dx + \sigma_0 \int_0^L v^2\, dx = \mu_0 \|v'\|_{L^2(\Omega)} + \sigma_0 \|v\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Abbiamo due possibilità per dimostrare la coercività della forma bilineare.

* Siccome $\sigma_0 \|v\|_{L^2(\Omega)} \geq 0$ e $v \in V = H_D^1(\Omega)$, sfruttiamo la disuguaglianza di Poincarè, ottendendo:

$$a(v,v) \geq \mu_0 \|v'\|_{L^2(\Omega)} \geq \frac{\mu_0}{1 + C_\Omega^2} \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \alpha_1 \|v\|_V^2 \qquad \text{per ogni } v \in V,$$

dove appunto $\alpha_1 = \dfrac{\mu_0}{1 + C_\Omega^2} > 0$.

* Alternativamente, siccome μ_0 e $\sigma_0 > 0$, abbiamo:

$$a(v,v) \geq \min\{\mu_0, \sigma_0\} \left(\|v'\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) = \alpha_2 \|v\|_V^2 \qquad \text{per ogni } v \in V,$$

dove $\alpha_2 = \min\{\mu_0, \sigma_0\} > 0$.

La forma $a : V \times V \to \mathbb{R}$ è dunque coerciva.

iv) ($F : V \to \mathbb{R}$ è lineare). Si dimostra sfruttando inoltre la linearità della forma $a(R_g, v)$ nel secondo argomento (che discende dalla sua bilinearità).

v) ($F : V \to \mathbb{R}$ è continuo). Si dimostra analogamente a quanto visto (usando il Teorema di traccia con costante $\widetilde{C} > 0$) e sfruttando la continuità della forma $a(u_0, v)$. Infatti:

$$\begin{aligned} |F(v)| &\leq |q_1\, v(0)| + |a(R_g, v)| \\ &\leq |q_1|\, \widetilde{C} \|v\|_{H^1(\Omega)} + M \|R_g\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} = C \|v\|_V \qquad \text{per ogni } v \in V, \end{aligned}$$

dove $C = \left(|q_1|\, \widetilde{C} + M \|R_g\|_{H^1(\Omega)} \right) = \left(|q_1|\, \widetilde{C} + (\mu_0 + \sigma_0) \|R_g\|_{H^1(\Omega)} \right) > 0$. Dunque F è limitato ed, essendo lineare, anche continuo.

Dato che tutte le ipotesi del Teorema di Lax-Milgram sono soddisfatte, la soluzione $u_0 \in V$ del problema debole esiste ed è unica, considerando la costante di coercività α_1, abbiamo:

$$\|u_0\|_V \leq \frac{C}{\alpha_1} = \frac{|q_1|\, \widetilde{C} + (\mu_0 + \sigma_0) \|R_g\|_{H^1(\Omega)}}{\mu_0} (1 + C_\Omega^2);$$

invece usando α_2, si ottiene:

$$\|u_0\|_V \leq \frac{C}{\alpha_2} = \frac{|q_1|\, \widetilde{C} + (\mu_0 + \sigma_0) \|R_g\|_{H^1(\Omega)}}{\min\{\mu_0, \sigma_0\}}.$$

4. Si tratta di un'equazione di diffusione-trasporto con condizioni al contorno miste di Dirichlet omogeneo e Neumann. Scegliamo lo spazio funzionale $V = H^1_S(\Omega) := \big\{v \in H^1(\Omega) \,:\, v(0) = 0\big\}$, con $\Omega = (0, L)$, in cui cercare la soluzione debole u e scegliere le funzioni test v in modo di dare significato agli integrali che compariranno nella formulazione debole e garantire che $u(0) = 0$.

   Presa l'equazione differenziale, moltiplicando a sinistra e a destra dell'uguale per la funzione test $v \in V$ e integrando, abbiamo:

$$-\int_0^L \mu_0\, u''\, v\, dx + \int_0^L \beta_0\, u'\, v\, dx = \int_0^L f_0\, v\, dx,$$

   da cui, applicando l'integrale per parti al primo termine a sinistra dell'uguale, otteniamo:

$$\int_0^L \mu_0\, u'\, v'\, dx - \big[\mu_0\, u'(x)\, v(x)\big]_{x=0}^{L} + \int_0^L \beta_0\, u'\, v\, dx = \int_0^L f_0\, v\, dx,$$

   che deve valere per ogni $v \in V$. Ricordando che $V = H^1_S(\Omega)$, e dunque che $v(0) = 0$, e $-\mu_0\, u'(L) = 0$, la precedente diventa:

$$\int_0^L \mu_0\, u'\, v'\, dx + \int_0^L \beta_0\, u'\, v\, dx = \int_0^L f_0\, v\, dx.$$

   Il problema in formulazione debole si scrive quindi come:

$$\text{trovare } u \in V \,:\, a(u, v) = F(v) \qquad \text{per ogni } v \in V,$$

   dove:

   - $V = H^1_S(\Omega)$;
   - $a \,:\, V \times V \to \mathbb{R}$ è la forma espressa come $a(u, v) = \mu_0 \displaystyle\int_0^L u'\, v'\, dx + \beta_0 \int_0^L u'\, v\, dx$, dato che μ_0 e β_0 sono costanti;
   - $F \,:\, V \to \mathbb{R}$ è il funzionale espresso come $F(v) = f_0 \displaystyle\int_0^L v\, dx$, essendo f_0 costante.

   Mostriamo, usando il Teorema di Lax-Milgram, che la soluzione $u \in V$ del problema debole esiste ed è unica. Ricordiamo che la prima ipotesi, ovvero che $V = H^1_S(\Omega)$ sia uno spazio di Hilbert, è già soddisfatta per definizione di tale spazio. Procediamo ora verificando che le ipotesi i)–v) sono soddisfatte.

   i) ($a \,:\, V \times V \to \mathbb{R}$ è bilineare). La forma $a \,:\, V \times V \to \mathbb{R}$ è bilineare in analogia a quanto fatto in precedenza.

   ii) ($a \,:\, V \times V \to \mathbb{R}$ è continua). Mostriamo che $|a(u, v)| \leq M \,\|u\|_V \,\|v\|_V$ per ogni $u, v \in V$, con $M > 0$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &= \left|\mu_0 \int_0^L u'\, v'\, dx + \beta_0 \int_0^L u'\, v\, dx\right| \\ &\leq \mu_0\, \|u'\|_{L^2(\Omega)}\, \|v'\|_{L^2(\Omega)} + \beta_0\, \|u'\|_{L^2(\Omega)}\, \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \mu_0\, \|u\|_{H^1(\Omega)}\, \|v\|_{H^1(\Omega)} + \beta_0\, \|u\|_{H^1(\Omega)}\, \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq M\, \|u\|_V\, \|v\|_V \qquad \text{per ogni } u, v \in V, \end{aligned}$$

   con costante di continuità $M = (\mu_0 + \beta_0)$. Abbiamo sfruttato il fatto che $\beta_0 \geq 0$, la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, oltre al fatto che $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$ e $\|v'\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$ per ogni $v \in H^1(\Omega)$ e dunque per ogni $v \in V$.

iii) ($a : V \times V \to \mathbb{R}$ è coerciva). Mostriamo che $a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2$ per ogni $v \in V$, con $\alpha > 0$. Abbiamo:

$$a(v,v) = \mu_0 \int_0^L (v')^2 \, dx + \beta_0 \int_0^L v' \, v \, dx;$$

dato che $\displaystyle\int_0^L v' \, v \, dx = \int_0^L \frac{(v^2)'}{2} \, dx = \frac{1}{2} v^2(L) - \frac{1}{2} v^2(0) = \frac{1}{2} v^2(L)$, essendo $v \in H_S^1(\Omega)$, otteniamo:

$$a(v,v) = \mu_0 \int_0^L (v')^2 \, dx + \frac{1}{2} \, \beta_0 \, v^2(L).$$

Visto che $\beta_0 \geq 0$ e dunque $\dfrac{1}{2} \, \beta_0 \, v^2(L) \geq 0$ per ogni $v \in V$, otteniamo:

$$a(v,v) \geq \mu_0 \, \|v'\|_{L^2(\Omega)}.$$

Di nuovo, essendo $v \in V = H_S^1(\Omega)$, vale la disuguaglianza di Poincarè, ovvero $\|v'\|_{L^2(\Omega)} \geq \dfrac{1}{1 + C_\Omega^2} \, \|v\|_{H^1(\Omega)}^2$ per ogni $v \in H_S^1(\Omega)$, con $C_\Omega > 0$. Dunque:

$$a(v,v) \geq \frac{\mu_0}{1 + C_\Omega^2} \, \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \alpha \, \|v\|_V^2 \qquad \text{per ogni } v \in V,$$

con $\alpha = \dfrac{\mu_0}{1 + C_\Omega^2}$. La forma $a : V \times V \to \mathbb{R}$ è quindi coerciva.

iv) ($F : V \to \mathbb{R}$ è lineare). Mostriamo che $F(\beta \, v + \gamma \, w) = \beta \, F(v) + \gamma \, F(w)$ per ogni $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ e per ogni $v, w \in V$. Abbiamo:

$$F(\beta \, v + \gamma \, w) = f_0 \int_0^L (\beta \, v + \gamma \, w) \, dx = \beta \, f_0 \int_0^L v \, dx + \gamma \, f_0 \int_0^L w \, dx = \beta \, F(v) + \gamma \, F(w).$$

Dunque $F : V \to \mathbb{R}$ è un funzionale lineare.

v) ($F : V \to \mathbb{R}$ è continuo). Dato che F è un funzionale lineare, esso è continuo se è anche limitato. Mostriamo dunque che F è limitato, ovvero esiste una costante $C > 0$ tale che $|F(v)| \leq C \, \|v\|_V$ per ogni $v \in V$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} |F(v)| &\leq |f_0| \int_0^L |v| \, dx \leq |f_0| \, \|v\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq |f_0| \, \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq |f_0| \, \|v\|_{H^1(\Omega)} = C \, \|v\|_V \qquad \text{per ogni } v \in V, \end{aligned}$$

dove $C = |f_0|$, avendo sfruttato il fatto che $v \in H^1(\Omega)$ e dunque $v \in L^2(\Omega)$ e anche $v \in L^2(\Omega)$. Dunque F è limitato ed, essendo lineare, anche continuo.

Dato che tutte le ipotesi del Teorema di Lax-Milgram sono soddisfatte, la soluzione $u \in V$ del problema debole esiste ed è unica, inoltre:

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \, \|F\|_{V'} = \frac{C}{\alpha} = \frac{1 + C_\Omega^2}{\mu_0} \, |f_0|.$$

5. Si definisce il problema in formulazione debole come nell'Esercizio 2.4. Per lo studio della buona posizione tramite il Teorema di Lax-Milgram, si procede come nell'Esercizio 2.4 usando $|\beta_0|$ al posto di β_0. Più attenzione deve essere dedicata allo studio della coercività della forma bilineare $a(u,v)$. Infatti, abbiamo:

$$a(v,v) = \mu_0 \int_0^L (v')^2 \, dx - \frac{1}{2} \, |\beta_0| \, v^2(L),$$

essendo $\beta_0 < 0$. Dato che $v \in V \subset H^1(\Omega)$, vale il Teorema di traccia, ovvero esiste una costante $\widetilde{C} > 0$ tale che

$$|v(L)| \leq \widetilde{C}\, \|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad \text{per ogni } v \in H^1(\Omega).$$

Dunque, otteniamo:

$$a(v,v) \geq \mu_0\, \|v'\|_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\, |\beta_0|\, \widetilde{C}^2\, \|v\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Dato che $v \in V = H^1_S(\Omega)$, vale la disuguaglianza di Poincarè, ovvero $\|v'\|_{L^2(\Omega)} \geq \dfrac{1}{1+C^2_\Omega}\, \|v\|^2_{H^1(\Omega)}$ per ogni $v \in H^1_S(\Omega)$, con $C_\Omega > 0$. Otteniamo:

$$a(v,v) \geq \left(\frac{\mu_0}{1+C^2_\Omega} - \frac{1}{2}\, |\beta_0|\, \widetilde{C}^2 \right) \|v\|^2_{H^1(\Omega)} = \alpha\, \|v\|^2_V \qquad \text{per ogni } v \in V.$$

Affinchè la forma sia coerciva, la precedente deve essere verificata per $\alpha > 0$, da cui deduciamo la seguente condizione:

$$|\beta_0| < \frac{2\mu_0}{(1+C^2_\Omega)\, \widetilde{C}^2}.$$

6. Si tratta di un'equazione di diffusione-trasporto-reazione con condizioni al contorno miste di Dirichlet omogeneo e Neumann. Scegliamo lo spazio funzionale $V = H^1_S(\Omega) := \big\{ v \in H^1(\Omega) \,:\, v(0) = 0 \big\}$, con $\Omega = (0, L)$, in cui cercare la soluzione debole u e scegliere le funzioni test v in modo di dare significato agli integrali che compariranno nella formulazione debole e garantire che $u(0) = 0$.

   Presa l'equazione differenziale, moltiplicando a sinistra e a destra dell'uguale per la funzione test $v \in V$ e integrando, abbiamo:

$$-\int_0^L \mu_0\, u''\, v\, dx + \int_0^L \beta\, u'\, v\, dx + \int_0^L \sigma_0\, u\, v\, dx = \int_0^L f_0\, v\, dx,$$

   da cui, applicando l'integrale per parti al primo termine a sinistra dell'uguale, otteniamo:

$$\int_0^L \mu_0\, u'\, v'\, dx - \big[\mu_0\, u'(x)\, v(x)\big]^L_{x=0} + \int_0^L \beta\, u'\, v\, dx + \int_0^L \sigma_0\, u\, v\, dx = \int_0^L f_0\, v\, dx,$$

   che deve valere per ogni $v \in V$. Ricordando che $V = H^1_S(\Omega)$, e dunque che $v(0) = 0$, e $-\mu_0\, u'(L) = 0$, la precedente diventa:

$$\int_0^L \mu_0\, u'\, v'\, dx + \int_0^L \beta\, u'\, v\, dx + \int_0^L \sigma_0\, u'\, v\, dx = \int_0^L f_0\, v\, dx.$$

   Il problema in formulazione debole si scrive quindi come:

$$\text{trovare } u \in V \,:\, a(u,v) = F(v) \qquad \text{per ogni } v \in V,$$

   dove:

   - $V = H^1_S(\Omega)$;
   - $a \,:\, V \times V \to \mathbb{R}$ è la forma espressa come $a(u,v) = \mu_0 \displaystyle\int_0^L u'\, v'\, dx + \int_0^L \beta\, u'\, v\, dx + {} +\sigma_0 \int_0^L u\, v\, dx$, dato che μ_0 e σ_0 sono costanti;
   - $F \,:\, V \to \mathbb{R}$ è il funzionale espresso come $F(v) = f_0 \displaystyle\int_0^L v\, dx$, essendo f_0 costante.

Ancora una volta, la scelta dello spazio funzionale V e il fatto che $\beta(x) = \sigma_0\, x \in L^\infty(\Omega)$ conferisce senso agli integrali nella forma $a(u, v)$ e nel funzionale $F(v)$.

Mostriamo, usando il Teorema di Lax-Milgram, che la soluzione $u \in V$ del problema debole esiste ed è unica. Ricordiamo che la prima ipotesi, ovvero che $V = H^1_S(\Omega)$ sia uno spazio di Hilbert, è già soddisfatta per definizione di tale spazio. Procediamo ora verificando che le ipotesi i)–v) sono soddisfatte.

i) ($a : V \times V \to \mathbb{R}$ è bilineare). La forma $a : V \times V \to \mathbb{R}$ è bilineare in analogia a quanto già visto.

ii) ($a : V \times V \to \mathbb{R}$ è continua). Mostriamo che $|a(u, v)| \leq M\, \|u\|_V\, \|v\|_V$ per ogni $u, v \in V$, con $M > 0$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left|\mu_0 \int_0^L u'\, v'\, dx + \int_0^L \beta\, u'\, v\, dx + \sigma_0 \int_0^L u\, v\, dx\right| \\
&\leq \mu_0 \left|\int_0^L u'\, v'\, dx\right| + \int_0^L \left|\beta\, u'\, v\right|\, dx + \sigma_0 \left|\int_0^L u\, v\, dx\right| \\
&\leq \mu_0\, \|u'\|_{L^2(\Omega)}\, \|v'\|_{L^2(\Omega)} + \|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}\, \|u'\|_{L^2(\Omega)}\, \|v\|_{L^2(\Omega)} + \sigma_0\, \|u\|_{L^2(\Omega)}\, \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \mu_0\, \|u\|_{H^1(\Omega)}\, \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}\, \|u\|_{H^1(\Omega)}\, \|v\|_{H^1(\Omega)} + \sigma_0\, \|u\|_{H^1(\Omega)}\, \|v\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq M\, \|u\|_V\, \|v\|_V \qquad \text{per ogni } u, v \in V,
\end{aligned}$$

con costante di continuità $M = (\mu_0 + \|\beta\|_{L^\infty(\Omega)} + \sigma_0) = (\mu_0 + \sigma_0\, L + \sigma_0)$. Abbiamo sfruttato il fatto che μ_0, $\sigma_0 > 0$, le disuguaglianze di Cauchy-Schwarz e di Hölder, oltre al fatto che $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$ e $\|v'\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$ per ogni $v \in H^1(\Omega)$ e dunque per ogni $v \in V$.

iii) ($a : V \times V \to \mathbb{R}$ è coerciva). Mostriamo che $a(v, v) \geq \alpha\, \|v\|^2_V$ per ogni $v \in V$, con $\alpha > 0$. Abbiamo:

$$a(v,v) = \mu_0 \int_0^L (v')^2\, dx + \int_0^L \beta\, v'\, v\, dx + \sigma_0 \int_0^L v^2\, dx.$$

Utilizzando l'integrale per parti, abbiamo che $\displaystyle\int_0^L \beta\, v'\, v\, dx = \int_0^L \beta \frac{(v^2)'}{2}\, dx = \int_0^L \left(\beta\, \frac{v^2}{2}\right)'\, dx - \int_0^L \beta'\, \frac{v^2}{2}\, dx = \frac{1}{2}\beta(L)\, v^2(L) - \frac{1}{2}\beta(0) v^2(0) - \int_0^L \beta'\, \frac{v^2}{2}\, dx = \frac{1}{2}\beta(L)\, v^2(L) - \int_0^L \beta'\, \frac{v^2}{2}\, dx$, essendo $v \in H^1_S(\Omega)$. Otteniamo dunque:

$$\begin{aligned}
a(v,v) &= \mu_0 \int_0^L (v')^2\, dx + \frac{1}{2}\, \beta(L)\, v^2(L) - \int_0^L \beta'\, \frac{v^2}{2}\, dx + \sigma_0 \int_0^L v^2\, dx \\
&= \mu_0\, \|v'\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\, \beta(L)\, v^2(L) + \int_0^L \left(\sigma_0 - \frac{1}{2}\beta'\right)\, v^2\, dx.
\end{aligned}$$

In questo caso specifico abbiamo $\beta(x) = \sigma_0\, x$ per $x \in (0, L)$, dunque $\beta(L) = \sigma_0\, L > 0$ e $\beta'(x) = \sigma_0 > 0$, essendo $\sigma_0 > 0$. Dunque si ottiene che:

$$a(v,v) = \mu_0\, \|v'\|_{L^2(\Omega)} + \frac{\sigma_0\, L}{2}\, v^2(L) + \frac{\sigma_0}{2} \int_0^L v^2\, dx \geq \mu_0\, \|v'\|_{L^2(\Omega)} + \frac{\sigma_0}{2}\, \|v\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Abbiamo due possibilità per dimostrare la coercività della forma bilineare.

* Siccome $\sigma_0\, \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \geq 0$ e $v \in V = H^1_D(\Omega)$, sfruttiamo la disuguaglianza di Poincarè, ottendendo:

$$a(v,v) \geq \mu_0\, \|v'\|_{L^2(\Omega)} \geq \frac{\mu_0}{1 + C^2_\Omega}\, \|v\|^2_{H^1(\Omega)} = \alpha_1\, \|v\|^2_V \qquad \text{per ogni } v \in V,$$

dove appunto $\alpha_1 = \dfrac{\mu_0}{1 + C^2_\Omega} > 0$.

* Alternativamente, siccome μ_0 e $\sigma_0 > 0$, abbiamo:

$$a(v,v) \geq \min\left\{\mu_0, \frac{\sigma_0}{2}\right\} \left(\|v'\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)}\right) = \alpha_2 \, \|v\|^2_V \qquad \text{per ogni } v \in V,$$

dove $\alpha_2 = \min\left\{\mu_0, \frac{\sigma_0}{2}\right\} > 0$.

La forma $a : V \times V \to \mathbb{R}$ è dunque coerciva.

iv) ($F : V \to \mathbb{R}$ è lineare). Si dimostra facilmente.

v) ($F : V \to \mathbb{R}$ è continuo). Si dimostra analogamente a quanto visto in precedenza. Abbiamo:

$$|F(v)| \quad \leq \quad |f_0| \, \|v\|_{L^1(\Omega)} \leq |f_0| \, \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq |f_0| \, \|v\|_{H^1(\Omega)} = C \, \|v\|_V \qquad \text{per ogni } v \in V,$$

dove $C = |f_0|$, avendo sfruttato il fatto che $v \in H^1(\Omega)$ e dunque $v \in L^2(\Omega)$ e anche $v \in L^2(\Omega)$. Dunque F è limitato ed, essendo lineare, anche continuo.

Dato che tutte le ipotesi del Teorema di Lax-Milgram sono soddisfatte, la soluzione $u \in V$ del problema debole esiste ed è unica, considerando la costante di coercività α_1, abbiamo:

$$\|u\|_V \leq \frac{C}{\alpha_1} = \frac{|f_0|}{\mu_0} \, (1 + C_\Omega^2);$$

invece usando α_2, si ottiene:

$$\|u\|_V \leq \frac{C}{\alpha_2} = \frac{|f_0|}{\min\{\mu_0, \sigma_0/2\}}.$$