Esercitazione 5
Approssimazione di Funzioni e Dati

Approssimazione di funzioni e dati

Interpolazione polinomiale (di Lagrange)

I polinomi vengono rappresentati in Matlab® come degli array. In particolare, un generico polinomio di grado n, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ corrisponde ad un array (riga) di $n+1$ elementi

`p=[`$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$`]`.

Supponendo di avere le $n+1$ coppie di dati $\{(x_i, y_i)\}$, per $i = 0, ..., n$, con nodi x_i distinti, il polinomio interpolatore di Lagrange Π_n associato a queste coppie può essere calcolato tramite il comando Matlab® `polyfit`. In particolare, il comando

```
p = polyfit(x,y,n)
```

restituisce i coefficienti di Π_n in `p`, dove `x=[`$x_0, ..., x_n$`]` e `y=[`$y_0, ..., y_n$`]`. Una volta calcolato `p`, il polinomio Π_n può essere valutato in un generico punto `z` tramite il comando

```
pz = polyval(p,z).
```

Il parametro di input `z` può essere uno scalare, o in generale una matrice. In quest'ultimo caso, la valutazione viene eseguita elemento per elemento. Ad esempio, la valutazione del polinomio $p(x) = x^2 - 1$ nei punti 1 e 2, potrà essere eseguita in Matlab® con il comando `polyval([1 0 -1],[1 2])`, che restituirà come output il vettore `[0 3]`.

In questa esercitazione metteremo anche a confronto differenti metodi di approssimazione di funzioni, in particolare: l'interpolazione polinomiale di Lagrange, l'interpolazione lineare a tratti e l'approssimazione nel senso dei minimi quadrati.

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

Nel caso in cui si voglia approssimare nel senso dei minimi quadrati un insieme di coppie $\{(x_i, y_i)\}$, $i = 0, ..., n$, con x_i distinti, i comandi da utilizzare sono ancora `polyfit` e `polyval`. Infatti, dato un numero $m < n$, il comando

```
p = polyfit(x,y,m)
```

restituisce il polinomio approssimante di grado m nel senso dei minimi quadrati, associato ai punti assegnati. Il funzionamento di `polyval` è invece del tutto analogo al caso precedente.

Interpolante lineare a tratti

La funzione approssimante *non* è un polinomio, ma un polinomio *a tratti*. Al contrario dei polinomi, le due fasi di interpolazione e valutazione, che prima erano distinte, ora risultano accorpate nel comando Matlab® nel caso dell'interpolazione lineare a tratti; infatti

```
pz = interp1(x,y,z)
```

genera il polinomio lineare a tratti Π_1^H interpolante le coppie corrispondenti ai vettori `x=[`$x_0, \ldots, x_n$`]` e `y=[`$y_0, \ldots, y_n$`]`, e lo valuta in `z`, fornendo il risultato della valutazione nel punto `pz`.

Esercizio 1

1. Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{x}{2}\cos(x)$$
nell'intervallo $[-2, 6]$ e se ne disegni il grafico.

2. Si costruisca il polinomio interpolante di Lagrange $\Pi_n f$ di grado $n = 2, 4, 6$ relativo ad una distribuzione di nodi equispaziati e se ne disegni il grafico insieme a quello della funzione $f(x)$.

3. Si rappresenti graficamente l'andamento dell'errore $\varepsilon(x) = |f(x) - \Pi_n f(x)|$ e si calcoli la norma infinito per $n = 2, 4, 6$, ovvero
$$\| \varepsilon \|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - \Pi_n f(x)|.$$
Aumentando il grado del polinomio n si riesce ad approssimare meglio la funzione?

4. Si calcoli ora il polinomio interpolante composito lineare $\Pi_1^H f$ su $n = 4, 8, 16, 32, 64$ sottointervalli di $[a, b] = [-2, 6]$ di uguale ampiezza $H = (b - a)/n$ (si utilizzi la funzione Matlab® `interp1`) e se ne disegni il grafico insieme a quello della funzione $f(x)$.

5. Si calcoli l'errore in norma infinito $\varepsilon_H = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - \Pi_1^H f|$ in ciascun valore di H di cui al punto 4 e se ne visualizzi l'andamento in funzione di H su un grafico in scala logaritmica su entrambi gli assi. Verificare graficamente che ci sia accordo con la stima teorica dell'errore:
$$\varepsilon_H \leq \frac{H^2}{8} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

6. Nel solo caso $n = 4$, si costruisca un'approssimazione nel senso dei minimi quadrati di grado $m = 2$ della funzione $f(x)$ (si utilizzino opportunamente le funzioni Matlab® `polyfit` e `polyval`).

Esercizio 2

Si consideri ora il problema dell'approssimazione della funzione di Runge:
$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2},$$
mediante un'interpolazione polinomiale di Lagrange nell'intervallo $I = [-5,\ 5]$.

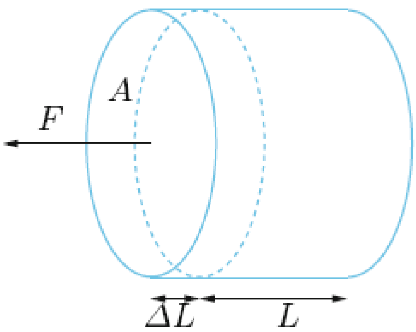
1. Si costruiscano i polinomi interpolanti $\Pi_n f$ di grado $n = 5,\ 10$ della funzione f considerando nodi equispaziati sull'intervallo I. Per ciascun valore di n si rappresenti graficamente l'andamento di $\Pi_n f$ e dell'errore $\varepsilon(x) = |f(x) - \Pi_n f(x)|$.

2. Si ripeta il punto precedente utilizzando i nodi di Chebyshev–Gauss–Lobatto per la determinazione dei polinomi interpolanti di Lagrange di grado n. Si ricordi che tali nodi possono essere ottenuti sull'intervallo $\hat{I} = [-1, 1]$ nel seguente modo :
$$\hat{x}_i = -\cos\left(\frac{\pi i}{n}\right), \quad i = 0, ..., n\,,$$
ed essere riportati sul generico intervallo $I = [a, b]$ tramite la trasformazione:
$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\,\hat{x}_i.$$

Esercizio 3 - Homework

Nella tabella qui sotto riportata vengono elencati i risultati di un esperimento eseguito per individuare il legame tra lo *sforzo* σ e la relativa *deformazione* ε di un campione di un tessuto biologico, in particolare di un disco intervertebrale rappresentato nella figura qui sotto riportata.

test	σ [MPa]	ε [cm/cm]
1	0.00	0.00
2	0.06	0.08
3	0.14	0.14
4	0.25	0.20
5	0.31	0.23
6	0.47	0.25
7	0.60	0.28
8	0.70	0.29



$$\sigma = F/A$$
$$\epsilon = \Delta L/L$$

A partire da questi dati (utilizzando opportune tecniche di approssimazione) si vuole stimare la deformazione ε del tessuto in corrispondenza dei valori di sforzo per cui non si ha a disposizione un dato sperimentale.

Le funzioni interpolanti da utilizzare sono le seguenti:

- l'interpolazione polinomiale di Lagrange (`polyfit` e `polyval`);
- l'interpolazione polinomiale composita lineare (`interp1`);
- l'interpolazione polinomiale ai minimi quadrati di grado 1, 2, 4 (`polyfit` e `polyval`).

In particolare, si chiede di:

1. rappresentare graficamente le singole funzioni interpolanti ed approssimanti a confronto con i dati sperimentali;
2. confrontare, in un unico grafico, i dati sperimentali con tutte le interpolanti (per l'approssimante ai minimi quadrati si consideri solo il polinomio di grado 4);
3. valutare, per ogni interpolante ed approssimante la deformazione ε in corrispondenza di $\sigma = 0.40$ MPa e $\sigma = 0.75$ MPa; si commentino i risultati ottenuti.

Esercizio 4

tratto dall'ESAME del 12/07/2023

Si vuole approssimare la funzione $f(x) = (9 - (x-3)^2)\cos(4x)$ sull'intervallo $I = [2, 4]$. Si scelga l'affermazione corretta:

- l'interpolazione Lagrangiana non presenta il fenomeno di Runge se si selezionano $n = 10$ nodi equispaziati;
- per $n = 10$ nodi equispaziati, l'interpolazione lineare composita restituisce una soluzione nei fatti indistinguibile dalla soluzione esatta;
- la scelta di $n = 3$ nodi equispaziati per l'interpolazione Lagrangiana permette di riprodurre esattamente minimi e massimi della funzione su I;
- la presenza del coseno rende l'interpolazione Lagrangiana sempre instabile agli estremi, con oscillazioni spurie che aumentano all'aumentare del numero di nodi;

- con $n = 18$ nodi equispaziati, è preferibile non usare l'interpolazione Lagrangiana, ma quella lineare composita perché presenta maggiore regolarità globale.