Esercitazione 2
Soluzione di Sistemi di Equazioni Lineari: Metodi Iterativi

I metodi di Richardson

La generica iterata di un metodo iterativo per la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ si può scrivere come:

$$P\left(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\right) = \mathbf{r}^{(k)}, \qquad k > 0,$$

dove la matrice P non singolare è detta *precondizionatore* e $\mathbf{x}^{(0)}$ è l'iterata iniziale assegnata. È possibile generalizzare questo metodo tramite l'introduzione di un parametro di accelerazione α_k:

$$P\left(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\right) = \alpha_k \mathbf{r}^{(k)}, \qquad k \geq 0, \text{ con } \alpha_k \neq 0.$$

Lo scopo di α_k è migliorare le proprietà di convergenza della successione $\left\{x^{(k)}\right\}$. Il metodo si definisce *stazionario* nel caso in cui $\alpha_k = \alpha$, con α costante assegnata, *dinamico* nel caso in cui α_k cambi ad ogni iterazione.

L'algoritmo del metodo di Richardson è il seguente: scelta P non singolare, assegnato $\mathbf{x}^{(0)}$, si ponga $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)}$ e per $k = 0, 1, \ldots$ (fino a un criterio d'arresto soddisfatto)

risolvere $P\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)}$ (tramite un metodo diretto)
calcolare il parametro di accelerazione $\alpha_k \neq 0$
$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{z}^{(k)}$
$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{k} - \alpha_k A\mathbf{z}^{(k)}$.

Nel caso del metodo di Richardson stazionario $\alpha_k = \alpha \neq 0$ è assegnato a priori.

Le proprietà di convergenza del metodo di Richardson stazionario dipende dalla corrispondente matrice di iterazione $B_\alpha = I - \alpha P^{-1}A$; ovvero la convergenza del metodo è garantita per ogni scelta di $\mathbf{x}^{(0)}$ se e solo se $\rho(B_\alpha) < 1$.

Se $\alpha = 1$ e $P = D$, la matrice diagonale estratta da A, allora il metodo di Richardson stazionario coincide con il metodo di *Jacobi*. Se invece $\alpha = 1$ e $P = D - E$, la matrice triangolare inferiore estratta da A, otteniamo il metodo di *Gauss–Seidel*.

Se A e P sono entrambe simmetriche e definite positive, il metodo di Richardson *stazionario* converge per ogni possibile scelta di $\mathbf{x}^{(0)}$ se solo se

$$0 < \alpha < 2/\lambda_{max},$$

dove $\lambda_{max}(> 0)$ è l'autovalore massimo di $P^{-1}A$. Inoltre il raggio spettrale $\rho(B_\alpha)$ della matrice di iterazione $B_\alpha = I - \alpha P^{-1}A$ è minimo quando

$$\alpha = \alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}}$$

essendo λ_{min} l'autovalore minimo di $P^{-1}A$.

Criteri d'arresto

Tipicamente le iterazioni dei metodi vengono arrestate:

- quando la norma del residuo normalizzato è inferiore ad una certa tolleranza data:
$$\frac{\|\mathbf{r}^{(k)}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq \varepsilon_1;$$
- oppure quando la differenza tra iterate successive è inferiore ad una certa tolleranza data:
$$\left\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\right\| \leq \varepsilon_2.$$

Nell'implementazione dei metodi iterativi è sempre opportuno verificare che il numero massimo di iterazioni non sia stato raggiunto.

Esercizio 1

Si consideri il problema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è pentadiagonale:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & & & & \\ -1 & 4 & -1 & -1 & & & \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ & & & -1 & -1 & 4 & -1 \\ & & & & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ \vdots \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Si vuole risolvere tale problema con il metodo di Richardson, soddisfacendo una tolleranza di 10^{-5}, a partire dal vettore soluzione iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (0, \ldots, 0)^T$.

1. Utilizzando uno script si creino la matrice A (con $n = 50$), il termine noto $\mathbf{b}$ ed il vettore soluzione iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$.

2. Si verifichi che la matrice A sia simmetrica e definita positiva e se ne calcoli il numero di condizionamento $K_2(A)$ (*con e senza utilizzare il comando* `cond`).

3. Si implementi la funzione `richardson.m` in grado di applicare il metodo di *Richardson precondizionato stazionario* ad un generico sistema lineare. La funzione deve avere la seguente intestazione:

   ```
   [x, k] = richardson(A, b, P, x0, tol, nmax, alpha),
   ```

   dove `A` è la matrice del sistema lineare, `b` è il termine noto, `P` è il precondizionatore, `x0` è il vettore iniziale, `tol` è la tolleranza (per il criterio di arresto del residuo normalizzato), `nmax` è il numero massimo di iterazioni ed `alpha` è il valore del parametro di accelerazione; in uscita la funzione restituisce la soluzione ottenuta `x` ed il numero di iterazioni svolte `k`.

4. Si risolva il sistema lineare (1) con il metodo di Richardson stazionario non precondizionato ($P = I$), utilizzando i seguenti parametri di accelerazione: $\alpha = 0.2$, $\alpha = 0.33$ ed $\alpha = \alpha_{opt} = 2/(\lambda_{min} + \lambda_{max})$ (parametro di accelerazione ottimale) dove λ_{min} e λ_{max} sono rispettivamente l'autovalore minimo e l'autovalore massimo della matrice A. Per ciascun valore di α si calcoli il raggio spettrale della matrice di iterazione ($B_\alpha = I - \alpha A$) e si risolva il sistema tramite funzione `richardson.m` riportando a video il numero di iterazioni eseguite. Si utilizzino `nmax` $= 10000$ e `tol` $= 10^{-6}$.

5. Si consideri il metodo di *Jacobi* per risolvere il sistema lineare (1). Prima di applicare l'algoritmo del metodo se ne determinino le proprietà di convergenza. Si utilizzi poi la funzione `richardson.m` per risolvere il sistema lineare usando i dati precedenti. Si riporti il numero di iterazioni eseguite.

6. Si ripeta il punto 5 considerando il metodo di *Gauss–Seidel*.

7. Si consideri il seguente precondizionatore tridiagonale:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

   Si risolva il sistema lineare con il metodo di Richardson stazionario utilizzando come precondizionatore la matrice P, dopo aver verificato che sia simmetrica e definita positiva, e come parametro di accelerazione α_{opt}. Si calcolino il raggio spettrale della matrice di iterazione ed il numero di condizionamento spettrale di $P^{-1}A$. Si risolva il sistema utilizzando la funzione `richardson.m` riportando a schermo il numero di iterazioni eseguite.

Esercizio 2

tratto dall'ESAME del 21/06/2023

Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con A data dai comandi

```
n = 120;
d0 = 5*ones(n,1);
d1 = -2*ones(n-2,1);
A = diag(d0) + diag(d1, -2) + diag(d1, +2);
```

e **b** tale che `xex = ones(n, 1)` sia la soluzione esatta. Si approssimi la soluzione del sistema con il metodo di Jacobi, utilizzando opportunamente la function `richardson.m`, e fissando `x0 = zeros(n, 1)` come guess iniziale, `nmax` $= 300$ come numero massimo di iterazioni, e `tol` $= 1e-4$ per la tolleranza sul criterio di arresto. Si scelga la risposta esatta:

- il metodo converge in circa 285 iterazioni;
- il metodo converge oscillando perché il raggio spettrale di A vale 1;
- il metodo non converge perché il raggio spettrale della matrice di iterazione vale circa 2.5;
- il metodo converge in circa 40 iterazioni;
- il metodo converge solo se precondizionato con la matrice di Gauss-Seidel.