Esercitazione 8

Metodi Numerici per la Soluzione di Equazioni Differenziali Ordinarie del Primo Ordine

Metodi numerici per la soluzione del problema di Cauchy

Dato un generico problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y) & t_0 < t \leq t_{max}, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

i metodi numerici utilizzati per risolvere il problema (1) si basano sulla seguente strategia:

1. stabilire un passo di avanzamento temporale h;
2. suddividere l'intervallo temporale $[t_0, t_{max}]$ in un numero N_h di sottointervalli $N_h = (t_{max} - t_0)/h$ di egual ampiezza h;
3. per ogni istante temporale discreto $t_n = t_0 + n\,h$, per $n = 0, \ldots, N_h$, si calcola il valore incognito u_n che *approssima* la soluzione di (1) $y_n = y(t_n)$.

L'insieme dei valori $\{u_0 = y_0, u_1, \ldots, u_{N_h}\}$ rappresenta la soluzione numerica di (1).

Metodi di Eulero in avanti, Eulero all'indietro, Crank-Nicolson e Heun

- Il metodo di *Eulero in avanti* calcola la soluzione numerica $\{u_n\}$ di (1) con il seguente algoritmo:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n) & n = 0, \ldots, N_h - 1, \\ u_0 = y_0, \end{cases}$$

  Osserviamo che tale metodo è esplicito e ad un passo in quanto, ad ogni passo temporale, la soluzione numerica u_{n+1} dipende soltanto dalla soluzione al passo temporale precedente u_n.

- Il metodo di *Eulero all'indietro* calcola invece la soluzione numerica $\{u_n\}$ di (1) con il seguente algoritmo:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1}) & n = 0, \ldots, N_h - 1, \\ u_0 = y_0, \end{cases}$$

  Tale metodo è implicito e ad un passo, in quanto, ad ogni passo temporale, la soluzione numerica u_{n+1} dipende dalla stessa soluzione incognita u_{n+1}, oltre che da u_n. Quindi se $f(t,y)$ è una funzione non lineare nel secondo argomento, ad ogni istante temporale, si deve risolvere un'equazione non lineare nell'icognita u_{n+1}. Infatti, u_{n+1} è lo zero della funzione

$$F_{EI,n}(w) = w - u_n - hf(t_{n+1}, w) \qquad \text{per } n = 0, \ldots, N_h - 1. \tag{2}$$

  Utilizzando il *metodo di Newton* per risolvere questa equazione non lineare per ogni $n = 0, \ldots, N_h - 1$, scriviamo allora:

$$\begin{cases} w^{(0)} = u_n, \\ w^{(k+1)} = w^{(k)} - \dfrac{F_{EI,n}(w^{(k)})}{F'_{EI,n}(w^{(k)})} & \text{per } k = 0, 1, \ldots \text{ fino a criterio d'arresto soddisfatto,} \\ u_{n+1} = w^{(k+1)}, \end{cases} \tag{3}$$

dove $F'_{EI,n}(w) = 1 - h\frac{\partial f}{\partial y}(t_{n+1}, w)$. Notiamo quindi che per costruire le iterate del metodo di Newton, sarà necessario fornire in input alla funzione l'espressione di $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$.

Alternativamente è possibile utilizzare il metodo delle *iterazioni di punto fisso* per risolvere l'equazione non lineare (2), introducendo la funzione di iterazione seguente

$$\phi_{EI,n}(w) = u_n + hf(t_{n+1}, w) \qquad \text{per } n = 0, \dots, N_h - 1.$$

Considerando il metodo delle iterazioni di punto fisso, applichiamo dunque, per ogni $n = 0, \dots, N_h - 1$:

$$\begin{cases} w^{(0)} = u_n, \\ w^{(k+1)} = \phi_{EI,n}(w^{(k)}) & \text{per } k = 0, 1, \dots \text{ fino a criterio d'arresto soddisfatto,} \\ u_{n+1} = w^{(k+1)}. \end{cases} \tag{4}$$

Le proprietà di convergenza locali del metodo delle iterazioni di punto fisso dipenderanno dunque da $\phi'_{EI,n}(w) = h\frac{\partial f}{\partial y}(t_{n+1}, w)$.

- Il metodo di *Crank-Nicolson* calcola la soluzione numerica $\{u_n\}$ di (1) con il seguente algoritmo:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})\right] & n = 0, \dots, N_h - 1, \\ u_0 = y_0. \end{cases}$$

Osserviamo che anche tale metodo è implicito in quanto, ad ogni passo temporale la soluzione numerica u_{n+1} dipende dalla stessa soluzione incognita u_{n+1}. Analogamente a quanto visto per il metodo di Eulero all'indietro, ad ogni istante temporale si deve risolvere un'equazione non lineare:

$$F_{CN,n}(w) = w - u_n - \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, w)\right] \qquad \text{per } n = 0, \dots, N_h - 1.$$

È possibile utilizzare il *metodo di Newton* analogamente a (3), utilizzando $F_{CN,n}(w)$ e $F'_{CN,n}(w) = 1 - \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(t_{n+1}, w)$, oppure il metodo delle *iterazioni di punto fisso* (4) con la funzione di iterazione:

$$\phi_{CN,n}(w) = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, w)\right] \qquad \text{per } n = 0, \dots, N_h - 1.$$

- Il metodo di *Heun* calcola la soluzione numerica $\{u_n\}$ di (1) con il seguente algoritmo:

$$\begin{cases} u^*_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n), \\ u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f\left(t_{n+1}, u^*_{n+1}\right)\right] & n = 0, \dots, N_h - 1, \\ u_0 = y_0. \end{cases}$$

Osserviamo che anche tale metodo è esplicito in quanto, ad ogni passo temporale, la soluzione numerica u_{n+1} soltanto dalla soluzione al passo temporale precedente u_n.

Esercizio 1

Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = \cos(2y(t)) & 0 < t \leq 6 \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Qui la funzione $f(t, y) = \cos(2y)$. La soluzione esatta nell'intervallo limitato $t \in [0, 6]$ è

$$y(t) = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{e^{4t} - 1}{e^{4t} + 1}\right) \qquad \text{per } t \geq 0.$$

1. Rappresentare graficamente la soluzione esatta nell'intervallo considerato.

2. Implementare i metodi di Eulero in avanti, Eulero all'indietro, Crank-Nicolson e Heun nelle funzioni Matlab® di cui si riporta l'intestazione:

```
function [t_h,u_h] = eulero_avanti(f,t_max,y_0,h)
function [t_h,u_h,iter_nwt] = eulero_indietro(f,df,t_max,y_0,h)
function [t_h,u_h,iter_nwt] = crank_nicolson(f,df,t_max,y_0,h)
function [t_h,u_h] = heun(f,t_max,y_0,h)
```

   Si consideri in particolare il *metodo di Newton* per i metodi impliciti di Eulero all'indietro e Crank-Nicolson con un criterio d'arresto basato sulla differenza tra iterate successive.

   Tutti i metodi richiedono in input la funzione `f` che descrive il problema di Cauchy definita come anonymous function (`f = @(t,y) ...`), l'istante finale `t_max` dell'intervallo temporale di soluzione (l'istante iniziale è sempre $t_0 = 0$), il dato iniziale del problema di Cauchy `y_0` e il passo di discretizzazione temporale `h`. Tutti i metodi restituiscono in output il vettore `t_h` degli istanti temporali e il vettore `u_h` contenente la soluzione numerica del problema di Cauchy.

   Per i soli metodi impliciti è necessario fornire in input l'espressione della funzione `df` (definita come anonymous function `df = @(t,y) ...`) che contiene l'espressione di $\frac{\partial}{\partial y} f(t, y)$, necessaria per utilizzare il metodo di Newton. I metodi impliciti restituiscono in output anche il vettore `iter_nwt` che contiene il numero di iterazioni che il metodo di Newton compie per risolvere l'equazione non lineare ad ogni istante temporale.

3. Risolvere numericamente il problema (5) utilizzando le funzioni `eulero_avanti`, `eulero_indietro`, `crank_nicolson` e `heun` con un passo di discretizzazione temporale $h = 0.5$.

   Rappresentare sullo stesso grafico le soluzioni numeriche ottenute e confrontarle con la soluzione esatta.

4. Risolvere numericamente il problema con i quattro metodi precedenti utilizzando i passi di discretizzazione temporale: $h = [0.4,\ 0.2,\ 0.1,\ 0.05,\ 0.025,\ 0.0125]$. Al variare di h, si valuti per ogni metodo il massimo modulo dell'errore compiuto approssimando la soluzione esatta $y_n = y(t_n)$ con la soluzione numerica u_n:

$$e_h = \max_{t_n \in [t_0, t_{max}]} |y_n - u_n|.$$

5. Riportare, su un grafico in scala logaritmica su entrambi gli assi, l'andamento di e_h al variare di h per i quattro metodi considerati. Verificare che ci sia accordo con gli ordini di convergenza teorici dei metodi; ricordiamo che se $y \in C^2([t_0, t_f])$ i metodi di Eulero sono accurati di ordine $p = 1$, mentre se $y \in C^3([t_0, t_f])$ i metodi di Crank-Nicolson e Heun sono accurati di ordine $p = 2$.

6. Si ripeta il punto 2 implementando gli algoritmi dei metodi di Eulero all'indietro e Crank-Nicolson usando ora il metodo delle *iterazioni di punto fisso* per risolvere le equazioni non lineari a ogni passo temporale. Si considerino le seguenti intestazioni:

```
function [t_h,u_h,iter_ptofis] = eulero_indietro_ptofis(f,t_max,y_0,h)
function [t_h,u_h,iter_ptofis] = crank_nicolson_ptofis(f,t_max,y_0,h)
```

   La funzione di iterazione corrispondente ai due metodi ($\phi_{EI,n}(w)$ e $\phi_{CN,n}(w)$) andrà definita all'interno delle funzioni come anonymous function `phi = @(w) ...`). Le funzioni restituiscono in output anche il vettore `iter_ptofis` che contiene il numero di iterazioni che il metodo delle iterazioni di punto fisso compie per risolvere l'equazione non lineare ad ogni istante temporale.

7. Si ripeta il punto 3 utilizzando le funzioni `eulero_indietro_ptofis` e `crank_nicolson_ptofis` implementate al punto 6.

8. Si utilizzi opportunamente la funzione Matlab® `ode23` per risolvere il problema (5). Si rappresenti su un grafico la soluzione numerica ottenuta.

Esercizio 2

Si consideri il problema di Cauchy lineare (problema modello):

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y & t > 0 \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{6}$$

1. Risolvere il problema (6) nel caso $\lambda = -2$ con i metodi di Eulero in avanti e di Eulero all'indietro. Scegliere come istante finale $t_{max} = 10$, dato inziale $y_0 = 1$ e utilizzare il passo di discretizzazione temporale $h = 0.1$. Rappresentare sullo stesso grafico le soluzioni numeriche ottenute e confrontarle con la soluzione esatta:

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t} \qquad \text{per } t \geq 0.$$

2. Si ripeta il punto precedente ora con $h = 0.9$ e $h = 1.1$. Cosa si osserva? Si motivi il risultato ottenuto.

Esercizio 3

Si consideri il problema di Cauchy lineare:

$$\begin{cases} y'(t) = \cos(t)\, e^{-t/2} - \dfrac{1}{2} y(t) & 0 < t \leq 10, \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

dove $f(t, y) = \cos(t)\, e^{-t/2} - \frac{1}{2} y$ è lineare nel secondo argomento y. La soluzione esatta di tale problema è :

$$y(t) = \sin(t) \exp(-t/2) \qquad \text{per } t \geq 0.$$

Si desidera risolvere tale problema tramite i metodi di Eulero implicito e di Crank-Nicolson. Essendo la funzione $f(t, y)$ lineare rispetto ad y, si può scrivere nella forma $f(t, y) = a(t)y(t) + b(t)$. In tal caso, anche per i metodi impliciti, è possibile ottenere una formulazione esplicita manipolando le equazioni; infatti, scrivendo il passo di aggiornamento, mediante alcuni calcoli, si può ricavare un'espressione esplicita rispetto a u_{n+1}. Nel caso di Eulero implicito, per $f(t, y) = a(t)y(t) + b(t)$, abbiamo:

$$u_{n+1} = u_n + h \left[a(t_{n+1}) u_{n+1} + b(t_{n+1}) \right],$$

da cui:

$$u_{n+1} = \frac{1}{1 - h\, a(t_{n+1})} \left[u_n + h\, b(t_{n+1}) \right].$$

Invece, nel caso di Crank-Nicolson, abbiamo:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2} \left[a(t_n) u_n + b(t_n) + a(t_{n+1}) u_{n+1} + b(t_{n+1}) \right],$$

da cui:

$$u_{n+1} = \frac{1}{1 - \frac{h}{2}\, a(t_{n+1})} \left[\left(1 + \frac{h}{2}\, a(t_n) \right) u_n + \frac{h}{2} \left(b(t_n) + b(t_{n+1}) \right) \right].$$

1. Si scriva la formulazione dei due metodi applicati al problema in esame. Sfruttando la linearità della funzione $f(t, y)$ rispetto al secondo argomento, riportare la forma esplicita di entrambi gli schemi.

2. Si rappresenti con Matlab® la soluzione esatta $y(t)$ nell'intervallo $[0, 10]$.
3. Si implementino i metodi di Eulero implicito e di Crank-Nicolson per il problema in esame, sfruttando la formulazione ottenuta per la funzione $f(t, y)$ lineare nel secondo argomento. Si risolva numericamente il problema con un passo $h = 0.2$ e si confrontino graficamente le soluzioni approssimate con la soluzione esatta.

Esercizio 4

tratto dall'ESAME del 21/06/2023

Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = 7y(t)^2\ t^3 & 0 < t \leq 0.5, \\ y(0) = 1, \end{cases} \tag{8}$$

ammette la soluzione esatta $y_{ex}(t) = -4/(7x^4 - 4)$. La si approssimi con il metodo di Crank-Nicolson (con Newton come solutore non lineare) e si scelga l'affermazione corretta:

- scegliendo $h = 4/256$, la soluzione numerica è qualitativamente equivalente a quella esatta e le iterazioni di Newton convergono sempre entro 3 passi;
- scegliendo $h = 4/64$, la soluzione numerica presenta un massimo in $x = 0.5$ del valore di circa 1.25;
- il metodo di Newton non converge per $h = 4/64$ e restituisce un risultato molto inaccurato;
- scegliendo $h = 4/256$, la soluzione numerica ha un minimo pari a 0.85 circa;
- scegliendo $h = 4/256$, il metodo di Newton va sostituito con uno schema di punto fisso per migliorare le capacitÃ di convergenza ed evitare oscillazioni spurie.