Prof. S. Perotto — Dr. N. Ferro, E. Temellini

Esercitazione 10
Formulazione Debole per Problemi ai Limiti

Formulazione debole ed elementi di analisi funzionale

Consideriamo il caso 1D e indichiamo con $H^1(\Omega)$ su $\Omega = (0, L) \in \mathbb{R}$ lo spazio di Hilbert definito come $H^1(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) \,:\, v' \in L^2(\Omega)\}$, dotato di *norma* $\|v\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v'\|^2_{L^2(\Omega)}}$ e *seminorma* $|v|_{H^1(\Omega)} = \|v'\|_{L^2(\Omega)}$. Ricordiamo che in 1D ($\Omega \subset \mathbb{R}$), $H^1(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$. Per tali funzioni inoltre vale il risultato (di traccia) seguente per $\Omega = (0, L)$:

$$|v(0)| \leq C\,\|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad \text{e} \qquad |v(L)| \leq C\,\|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad \text{per ogni } v \in H^1(\Omega),$$

dove $C > 0$ è una costante positiva.

Definiamo inoltre lo spazio $H^1_0(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) \,:\, v(a) = v(b) = 0\}$, per un generico dominio $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$. Vale allora la *disuguaglianza di Poincarè*, ovvero esiste la costante di Poincarè $C_\Omega = \dfrac{b-a}{\sqrt{2}} > 0$ tale che:

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega\,|v|_{H^1(\Omega)} \qquad \text{per ogni } v \in H^1_0(\Omega).$$

Se $v \in H^1_0(\Omega)$, allora la norma e la seminorma $H^1(\Omega)$ sono equivalenti, infatti:

$$|v|_{H^1(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{1 + C^2_\Omega}\,|v|_{H^1(\Omega)} \qquad \text{per ogni } v \in H^1_0(\Omega).$$

I risultati precedenti valgono anche per $v \in H^1_a(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) \,:\, v(a) = 0\}$ oppure $v \in H^1_b(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) \,:\, v(b) = 0\}$.

Consideriamo un *funzionale* sullo spazio di Hilbert V, ovvero un operatore $F : V \to \mathbb{R}$.

- F è *lineare* se $F(\beta\, v + \gamma\, w) = \beta\, F(v) + \gamma\, F(w)$ per ogni $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ e per ogni $v, w \in V$.
- F è *limitato* se e solo se esiste una constante $C > 0$ tale che $|F(v)| \leq C\,\|v\|_V$ per ogni $v \in V$.
- F è *continuo* se e solo se esiste una constante $C > 0$ tale che $|F(v) - F(w)| \leq C\,\|v - w\|_V$ per ogni v, $w \in V$.

Osserviamo che se F è lineare e continuo se e solo se è limitato.

Consideriamo ora una *forma* sullo spazio di Hilbert V, ovvero un'applicazione $a : V \times V \to \mathbb{R}$.

- a è *bilineare* se: i) $a(\beta\, v + \gamma\, w, z) = \beta\, a(v, z) + \gamma\, a(w, z)$ per ogni $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ e per ogni $v, w, z \in V$; e ii) $a(v, \beta\, w + \gamma\, z) = \beta\, a(v, w) + \gamma\, a(v, z)$ per ogni $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ e per ogni $v, w, z \in V$.
- a è *simmetrica* se e solo $a(v, w) = a(w, v)$ per ogni v, $w \in V$.
- a è *continua* se e solo se esiste una constante di continuità $M > 0$ tale che:

$$|a(v, w)| \leq M\,\|v\|_V\,\|w\|_V \qquad \text{per ogni } v, w \in V.$$

- a è *coerciva* se e solo se esiste una constante di coercività $\alpha > 0$ tale che:

$$a(v, v) \geq \alpha\,\|v\|^2_V \qquad \text{per ogni } v \in V.$$

Teorema (Lemma) di Lax-Milgram. Si consideri il seguente problema in formulazione debole:

$$\text{cercare } u \in V \quad : \quad a(u,v) = F(v) \qquad \forall v \in V. \tag{1}$$

Se V è uno spazio di Hilbert dotato di norma $\|\cdot\|$ indotta dal prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$ e le seguente ipotesi sono soddisfatte:

i) $a : V \times V \to \mathbb{R}$ è una forma bilineare;

ii) $a : V \times V \to \mathbb{R}$ è una forma continua;

iii) $a : V \times V \to \mathbb{R}$ è una forma coerciva con costante di coercività $\alpha > 0$;

iv) $F : V \to \mathbb{R}$ è un funzionale lineare;

iv) $F : V \to \mathbb{R}$ è un funzionale continuo;

allora esiste un'unica soluzione $u \in V$ del problema debole (1) e vale:

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{V'},$$

dove $\|F\|_{V'} := \sup\limits_{v \in V \setminus \{0\}} \dfrac{|F(v)|}{\|v\|_V}$ è la norma duale del funzionale F.

Aspetto essenziale della formulazione debole di una EDP è l'integrazione per parti. Se per esempio ϕ e ψ sono funzioni sufficientemente regolari nel dominio aperto $\Omega = (0,L) \subset \mathbb{R}$, allora:

$$-\int_0^L \phi'(x)\,\psi(x)\,dx = -\int_0^L (\phi(x)\,\psi(x))'\,dx + \int_0^L \phi(x)\,\psi'(x)\,dx,$$

da cui

$$-\int_0^L \phi'(x)\,\psi(x)\,dx = -\phi(L)\,\psi(L) + \phi(0)\,\psi(0) + \int_0^L \phi(x)\,\psi'(x)\,dx.$$

Esercizio 1

Dati i seguenti problemi in formulazione forte, si scriva la corrispondente formulazione debole motivando la scelta degli spazi funzionali ed eventualmente la regolarità dei dati. Inoltre, utilizzando il Teorema di Lax-Milgram, si dimostri che la soluzione debole esiste ed è unica.

1.
$$\begin{cases} -\mu_0\,u''(x) + \beta_0\,u'(x) + \sigma_0\,u(x) = f(x) & x \in (0,L), \\ u(0) = u(L) = 0, \end{cases}$$

dove $\mu_0 > 0$, $\beta_0 \in \mathbb{R}$ e $\sigma_0 \geq 0$.

2.
$$\begin{cases} -(\mu(x)\,u'(x))' + \beta_0\,u'(x) = 0 & x \in (0,L), \\ u(0) = g_1, \\ u(L) = g_2, \end{cases}$$

dove $\mu(x) \geq \mu_0 > 0$ per ogni $x \in (0,L)$, mentre $g_1,\, g_2 \in \mathbb{R}$.

Dopo aver posto $\mu(x) = 1 + 2\dfrac{x}{L}$ e $\beta_0 = 7$, si forniscano le espressioni delle costanti di coercività α e di continuità M.

3.
$$\begin{cases} -\mu_0\, u''(x) + \sigma(x)\, u(x) = f(x) & x \in (0, L), \\ u(0) = g_1, \\ u(L) = g_2, \end{cases}$$

dove $\mu_0 > 0$ e $\sigma(x) \geq \sigma_0 > 0$ per ogni $x \in (0, L)$, mentre $g_1,\, g_2 \in \mathbb{R}$.

Dopo aver posto $\mu_0 = 3$ e $\sigma(x) = 5^{-x/L}$, si forniscano le espressioni delle costanti di coercività α e di continuità M.

4.
$$\begin{cases} -\mu_0\, u''(x) + \sigma_0\, u(x) = 0 & x \in (0, L), \\ +\mu_0\, u'(0) = q_1, \\ -\mu_0\, u'(L) = q_2, \end{cases}$$

dove $\mu_0 > 0$, $\sigma_0 > 0$, mentre $q_1,\, q_2 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2

Dati i seguenti problemi in formulazione forte, si scriva la corrispondente formulazione debole motivando la scelta degli spazi funzionali ed eventualmente la regolarità dei dati. Inoltre, utilizzando il Teorema di Lax-Milgram, si dimostri che la soluzione debole esiste ed è unica.

1.
$$\begin{cases} -\big(\mu(x)\, u'(x)\big)' = 0 & x \in (0, L), \\ u(0) = 0, \\ -\mu(L)\, u'(L) = \gamma_2\, u(L) + q_2, \end{cases}$$

dove $\mu(x) \geq \mu_0 > 0$, $\sigma_0 > 0$, $\gamma_2 \geq 0$, mentre $q_2 \in \mathbb{R}$.

2.
$$\begin{cases} -\mu_0\, u''(x) + \sigma(x)\, u(x) = 0 & x \in (0, L), \\ +\mu_0\, u'(0) = q_1, \\ -\mu_0\, u'(L) = \gamma_2\, u(L) + q_2, \end{cases}$$

dove $\mu_0 > 0$, $\sigma(x) \geq \sigma_0 > 0$, con $\sigma(x) \in L^\infty(\Omega)$, $\gamma_2 \geq 0$, mentre $q_2 \in \mathbb{R}$.

3.
$$\begin{cases} -\mu_0\, u''(x) + \sigma_0\, u(x) = 0 & x \in (0, L), \\ +\mu_0\, u'(0) = q_1, \\ u(L) = g_2, \end{cases}$$

dove $\mu_0 > 0$, $\sigma_0 > 0$, mentre $q_1, g_2 \in \mathbb{R}$.

4.
$$\begin{cases} -\mu_0\, u''(x) + \beta_0\, u'(x) = f_0 & x \in (0, L), \\ u(0) = 0, \\ -\mu_0\, u'(L) = 0, \end{cases}$$

dove $\mu_0 > 0$, $\beta_0 \geq 0$, mentre $f_0 \in \mathbb{R}$.

5. Si ripeta il caso proposto al punto 4 con $\beta_0 < 0$. Per quali valori di β_0 la forma bilineare associata al problema in formulazione debole è coerciva?

6.
$$\begin{cases} -\mu_0\, u''(x) + \beta(x)\, u'(x) + \sigma_0\, u(x) = f_0 & x \in (0, L), \\ u(0) = 0, \\ -\mu_0\, u'(L) = 0, \end{cases}$$

dove $\mu_0 > 0$, $\beta(x) = \sigma_0\, x$ per ogni $x \in (0, L)$, mentre $\sigma_0 > 0$ e $f_0 \in \mathbb{R}$.