METODI ANALITICI E NUMERICI PER L'INGEGNERIA — A.A. 2024 – 2025
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica — Politecnico di Milano
Prof. S. Perotto — Dr. N. Ferro, E. Temellini

Esercitazione 6
Integrazione Numerica

Esercizio 1

Si vuole calcolare numericamente il volume V del solido di rotazione in Figura 1, la cui sezione nel piano (x, y) è definita dalla funzione:

$$f(x) = \cosh\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

nell'intervallo $0 \leq x \leq 0.8$. L'espressione analitica di V è

$$V = \int_0^{0.8} \pi f^2(x)dx = \pi\left(\frac{\sinh(1) + \sinh(3/5)}{4} + \frac{2}{5}\right).$$

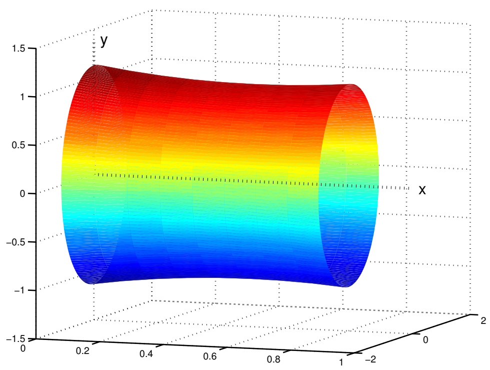

Figura 1: Solido di rotazione.

1. Disegnare il grafico della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[0, 0.8]$.

2. Scrivere la funzione `pmedcomp.m` che implementa la formula di *quadratura del punto medio composita su intervalli equispaziati.* La funzione `pmedcomp.m` prende in input:

   - gli estremi di integrazione `a,b`;
   - il numero di sottointervalli `N` in cui si vuole suddividere il dominio di integrazione;
   - la funzione `fun` da integrare (function handle);

   e restituisce in uscita il valore approssimato dell'integrale. L'intestazione di `pmedcomp.m` sarà quindi:

   ```
   function I = pmedcomp(a,b,N,fun)
   ```

3. Scrivere la funzione `trapcomp.m` che implementa la formula di *quadratura del trapezio composita su intervalli equispaziati.* L'intestazione della funzione sarà:

   ```
   function I = trapcomp(a,b,N,fun),
   ```

   dove gli input sono gli stessi del punto 2.

4. Scrivere la funzione `simpcomp.m` che implementa la formula di *quadratura di Simpson composita su intervalli equispaziati*. L'intestazione sarà:

```
function I = simpcomp(a,b,N,fun).
```

dove gli input sono gli stessi del punto 2.

5. Utilizzando le tre funzioni scritte ai punti precedenti, calcolare il valore approssimato V_N del volume del solido di rotazione per $N = 1, \ldots, 20$ suddivisioni uniformi dell'intervallo $[0, 0.8]$. Riportare su un grafico l'andamento del valore dell'integrale approssimato V_N in funzione di N.

6. Conoscendo il valore esatto V del volume, si indichi con $E_N = |V - V_N|$ il valore assoluto dell'errore nel calcolo dell'integrale. Partendo dai valori di V_N trovati al punto precedente al variare dell'ampiezza dei sottointervalli, riportare su un grafico, con entrambi gli assi in scala logaritmica, l'andamento dell'errore utilizzando le formule di quadratura implementate. Verificare che ci sia accordo con i risultati teorici per ciascuno dei tre metodi utilizzati.

7. Per ciascuna delle tre formule considerate, fornire una stima del numero minimo N di sottointervalli per cui $E_N \leq toll$, con $toll = 10^{-5}$, e verificare sperimentalmente tali risultati.
Suggerimento: il numero N verrà trovato usando le seguenti formule per una funzione g "sufficientemente" regolare:

$$
\begin{aligned}
|I(g) - I^c_{pm}(g)| &\leq \frac{b-a}{24}\left(\frac{b-a}{N}\right)^2 \max_{x\in[a,\,b]} |g''(x)| \leq toll, \\
|I(g) - I^c_{t}(g)| &\leq \frac{b-a}{12}\left(\frac{b-a}{N}\right)^2 \max_{x\in[a,\,b]} |g''(x)| \leq toll, \\
|I(g) - I^c_{s}(g)| &\leq \frac{b-a}{16\cdot 180}\left(\frac{b-a}{N}\right)^4 \max_{x\in[a,\,b]} |g^{(4)}(x)| \leq toll.
\end{aligned}
$$

Esercizio 2

Si vuole calcolare numericamente l'integrale:

$$I(f) = \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \frac{x}{2\pi}\sin(x)\,\mathrm{d}x = -1. \tag{1}$$

1. Disegnare il grafico della funzione integranda $f(x) = \dfrac{x}{2\pi}\sin(x)$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

2. Approssimare l'integrale (1), utilizzando le funzioni `pmedcomp.m`, `trapcomp.m` e `simpcomp.m`. In particolare si calcolino gli integrali approssimati I_N, per $N = 1, \ldots, 20$ suddivisioni uniformi dell'intervallo $[0, 2\pi]$ (per $N = 1$ otteniamo le formule semplici). Riportare su un grafico l'andamento del valore dell'integrale approssimato I_N in funzione di N.

3. Conoscendo il valore esatto I dell'integrale (1), si indichi con $E_N = |I - I_N|$ il valore assoluto dell'errore nel calcolo dell'integrale. Riportare su un grafico, con entrambi gli assi in scala logaritmica, l'andamento dell'errore al variare dell'ampiezza H dei sottointervalli utilizzando le formule di quadratura implementate. Verificare che ci sia accordo con i risultati teorici per ciascuno dei tre metodi utilizzati.

4. Per la formula di quadratura del punto medio composita, fornire, utilizzando l'espressione teorica dell'errore di quadratura, una stima del numero minimo N di sottointervalli tale per cui si abbia: $E_N \leq toll$, con $toll = 10^{-5}$, e verificare sperimentalmente tali risultati.

Esercizio 3

tratto dall'ESAME del 21/06/2023

L'integrale definito della funzione $f(x) = -x + x^3 \cos(x)$ sull'intervallo $I = [0, \pi/2]$ è approssimato con una formula di Simpson composita su N sottointervalli. Si scelga l'affermazione esatta:

- è opportuno scegliere $N = 1$ sottointervalli per limitare l'onere computazionale;
- per la scelta di $N = 5$ e $N = 50$ sottointervalli, la formula restituisce un risultato identico;
- il polinomio integrando è di grado 3 e l'errore di quadratura è esattamente 0;
- per la scelta di $N = 25$ sottointervalli, l'integrale approssimato vale circa -0.7827;
- per la scelta di $N = 20$ sottointervalli, l'integrale approssimato vale circa 0.7728.