Esercitazione 9 – Soluzione

Esercizio 1

1. Procediamo calcolando le soluzioni particolari $U_i(x,y)$, rispettivamente:

$$U_1(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_{1,n}}{\sinh(2\pi n)} \sin(n\,x) \sinh(n\,(2\pi - y)),$$

con $A_{1,n} = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi g_1(x) \sin(n\,x)\,dx = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \sin(2x)\sin(n\,x)\,dx$ per $n = 1, 2, \ldots$;

$$U_2(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_{2,n}}{\sinh(2\pi n)} \sin(n\,x) \sinh(n\,y),$$

con $A_{2,n} = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi g_2(x)\sin(n\,x)\,dx = 0$ per $n = 1, 2, \ldots$;

$$U_3(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_{3,n}}{\sinh(n\pi/2)} \sinh(n/2\,(\pi - x)) \sin(n/2\,y),$$

con $A_{3,n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g_3(y)\sin(n/2\,y)\,dy = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\sin(y)\sin(n/2\,y)\,dy$ per $n = 1, 2, \ldots$;

$$U_4(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_{4,n}}{\sinh(n\pi/2)} \sinh(n/2\,x) \sin(n/2\,y),$$

con $A_{4,n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g_4(y)\sin(n/2\,y)\,dy = 0$ per $n = 1, 2, \ldots$.

Dato che $\displaystyle\int_0^D \sin\left(\frac{n\pi}{D}s\right)\sin\left(\frac{m\pi}{D}s\right) = \frac{D}{2}\,\delta_{nm}$, risulta evidente che $A_{1,1} = 0$, $A_{1,2} = 1$ e $A_{1,n} = 0$ per ogni $n = 3, 4, \ldots$, da cui:

$$U_1(x,y) = \frac{1}{\sinh(4\pi)} \sin(2\,x) \sinh(2\,(2\pi - y)).$$

Inoltre $A_{2,n} = 0$ per ogni $n = 1, 2, \ldots$, da cui $U_2(x,y) = 0$. In maniera simile, $A_{3,1} = 0$, $A_{3,2} = \dfrac{1}{3}$ e $A_{3,n} = 0$ per ogni $n = 3, 4, \ldots$, da cui abbiamo:

$$U_3(x,y) = \frac{1}{3\sinh(\pi)} \sinh(\pi - x) \sin(y).$$

Infine, $A_{4,n} = 0$ per ogni $n = 1, 2, \ldots$, da cui $U_4(x,y) = 0$. La soluzione in separazione delle variabili è pertanto:

$$U(x,y) = \sum_{i=1}^{4} U_i(x,y) = \frac{1}{\sinh(4\pi)} \sin(2\,x)\sinh(2\,(2\pi - y)) + \frac{1}{3\sinh(\pi)} \sinh(\pi - x)\sin(y).$$

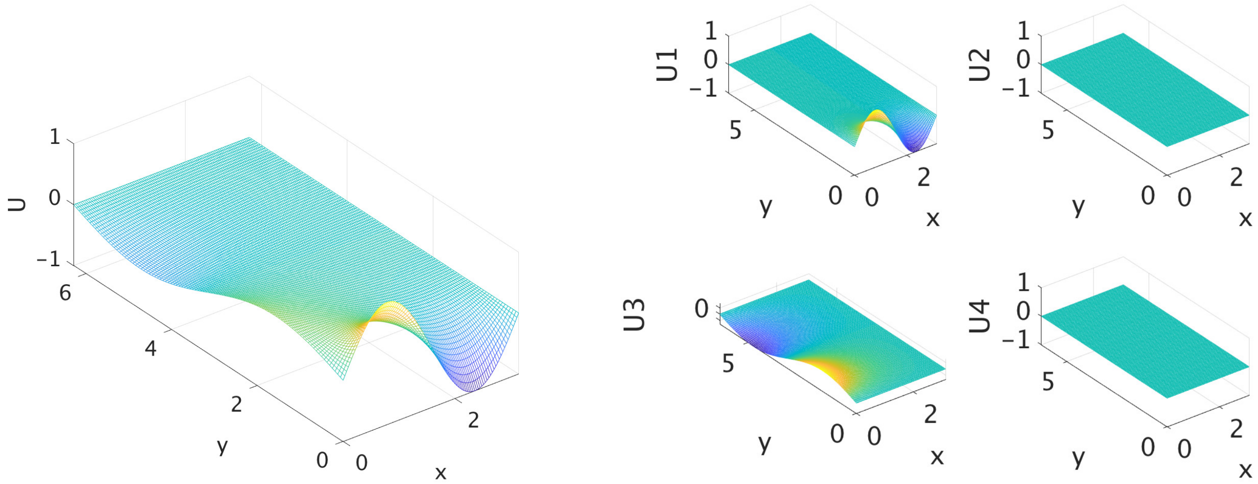

Figura 1: Esercizio 1.1: soluzione $U(x, y)$ (a sinistra) e soluzioni particolari $U_i(x, y)$ (a destra)

2. Abbiamo ora $U_1(x, y) = U_2(x, y) = 0$, mentre

$$U_3(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_{3,n}}{\sinh(n\pi)} \sinh(n(\pi - x)) \sin(n\, y),$$

con $A_{3,n} = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi g_3(y) \sin(n\, y)\, dy = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi \sin(y) \sin(n\, y)\, dy = \delta_{1n}$ per $n = 1, 2, \ldots$;

$$U_4(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_{4,n}}{\sinh(n\pi)} \sinh(n\, x) \sin(n\, y),$$

con $A_{4,n} = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi g_4(y) \sin(n\, y)\, dy = -\dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi \sin(y) \sin(n\, y)\, dy = -\delta_{1n}$ per $n = 1, 2, \ldots$. Otteniamo dunque:

$$U(x, y) = \frac{1}{\sinh(\pi)} [\sinh(\pi - x) - \sinh(x)] \sin(y).$$

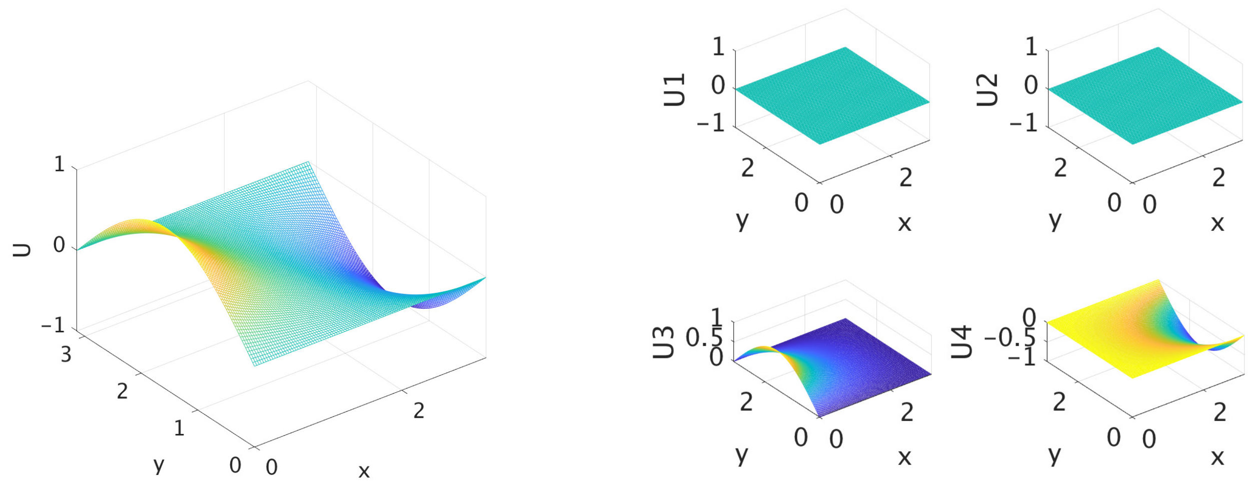

Figura 2: Esercizio 1.2: soluzione $U(x, y)$ (a sinistra) e soluzioni particolari $U_i(x, y)$ (a destra)

3. Abbiamo:

$$U_1(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_{1,n}}{\sinh(n\pi)} \sin(n\pi\, x) \sinh(n\pi\,(1-y)),$$

con $A_{1,n} = 2\int_0^1 g_1(x)\sin(n\pi\, x)\, dx = 2\int_{1/3}^{2/3} \sin(n\pi\, x)\, dx = \frac{2}{n\pi}\left(\cos(n\pi/3) - \cos(2n\pi/3)\right)$ per $n = 1, 2, \ldots$; ovvero $A_{1,1} = \frac{2}{\pi}$, $A_{1,2} = 0$, $A_{1,3} = -\frac{4}{3\pi}$, $A_{1,4} = 0$, $A_{1,5} = \frac{2}{5\pi}$, etc. Dato che $g_2 = g_3 = g_4 = 0$, la soluzione in separazione delle variabili è:

$$\begin{aligned} U(x,y) = U_1(x,y) \quad = \quad & \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sinh(\pi)} \sin(\pi\, x) \sinh(\pi\,(1-y)) \\ & -\frac{4}{3\pi}\frac{1}{\sinh(3\pi)} \sin(3\pi\, x) \sinh(3\pi\,(1-y)) \\ & +\frac{2}{5\pi}\frac{1}{\sinh(5\pi)} \sin(5\pi\, x) \sinh(5\pi\,(1-y)) + \ldots \end{aligned}$$

Osserviamo che il dato e la soluzione non sono qualitativamente ben rappresentati per $N_{max} = 10$; al contrario, per $N_{max} = 50$, la rappresentazione della soluzione approssimata migliora sensibilmente (Figura 4).

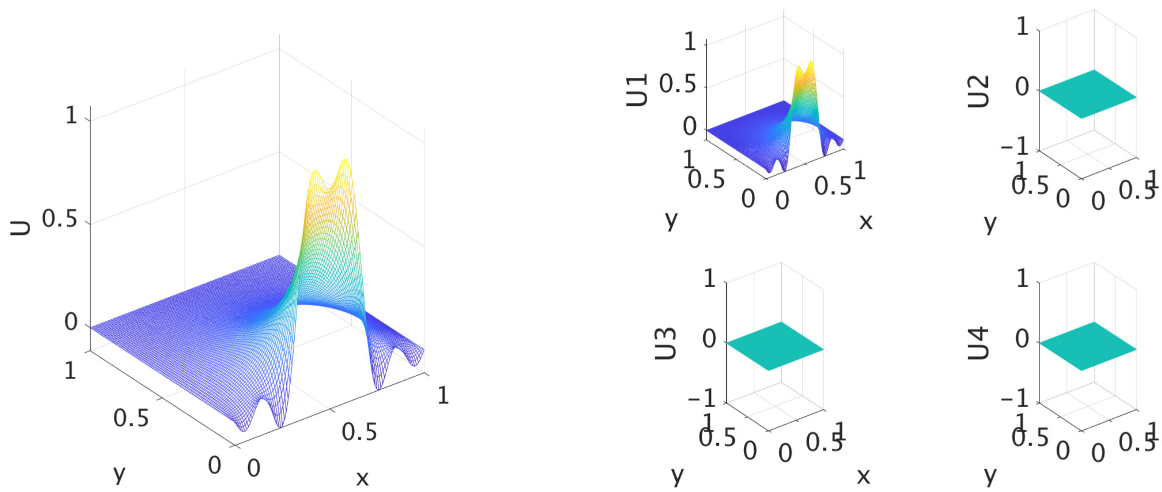

Figura 3: Esercizio 1.3: soluzione $U(x,y)$ (a sinistra) e soluzioni particolari $U_i(x,y)$ (a destra) per $N_{max} = 10$

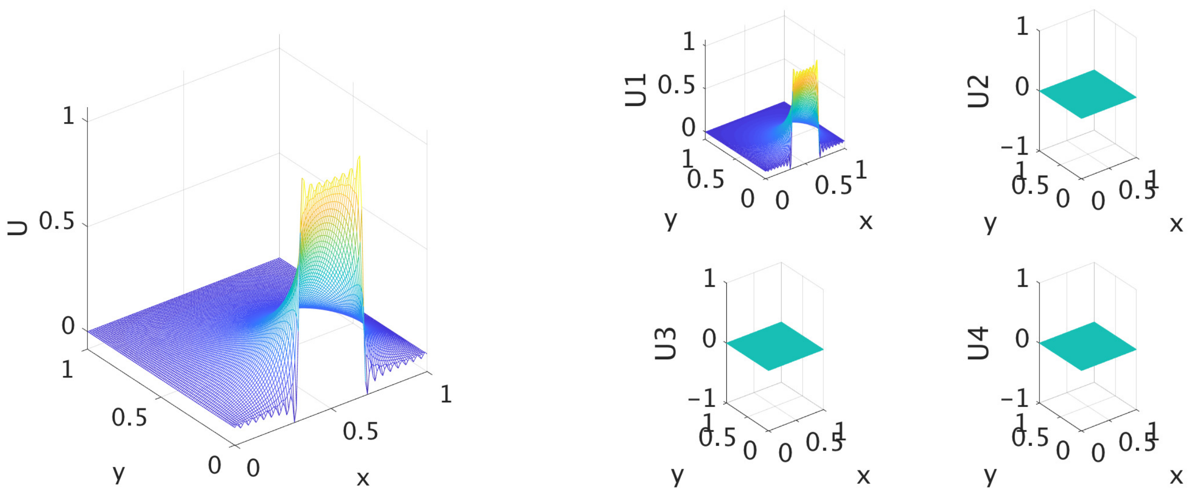

Figura 4: Esercizio 1.3: soluzione $U(x, y)$ (a sinistra) e soluzioni particolari $U_i(x, y)$ (a destra) per $N_{max} = 50$

4. Osserviamo che in questo caso la soluzione esatta è $u(x, y) = x + y$. Determiniamo la soluzione in separazione delle variabili, osservando che il dato di Dirichlet è rappresentabile come serie di Fourier (infinita) di soli seni su ciascun bordo Γ_i. Abbiamo:

$$U_1(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_{1,n}}{\sinh(n\pi)} \sin(n\pi\, x) \sinh(n\pi\,(1-y)),$$

con $A_{1,n} = 2\int_0^1 g_1(x) \sin(n\pi\, x)\, dx = 2\int_0^1 x \sin(n\pi\, x)\, dx = -\frac{2}{n\pi}\cos(n\pi)$ per $n = 1, 2, \ldots$;

$$U_2(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_{2,n}}{\sinh(n\pi)} \sin(n\pi\, x) \sinh(n\pi\, y),$$

con $A_{2,n} = 2\int_0^1 g_2(x) \sin(n\pi\, x)\, dx = 2\int_0^1 (x+1) \sin(n\pi\, x)\, dx = -\frac{2}{n\pi}(2\cos(n\pi) - 1)$ per $n = 1, 2, \ldots$;

$$U_3(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_{3,n}}{\sinh(n\pi)} \sinh(n\pi\,(1-x)) \sin(n\pi\, y),$$

con $A_{3,n} = 2\int_0^1 g_3(y) \sin(n\pi\, y)\, dy = 2\int_0^1 y \sin(n\pi\, y)\, dy = -\frac{2}{n\pi}\cos(n\pi)$ per $n = 1, 2, \ldots$;

$$U_4(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_{4,n}}{\sinh(n\pi)} \sinh(n\pi\, x) \sin(n\pi\, y),$$

con $A_{4,n} = 2\int_0^1 g_4(y) \sin(n\pi\, y)\, dy = 2\int_0^1 (1+y) \sin(n\pi\, y)\, dy = -\frac{2}{n\pi}(2\cos(n\pi) - 1)$ per $n = 1, 2, \ldots$. Infine, otteniamo la soluzione come:

$$U(x, y) = \sum_{i=1}^{4} U_i(x, y).$$

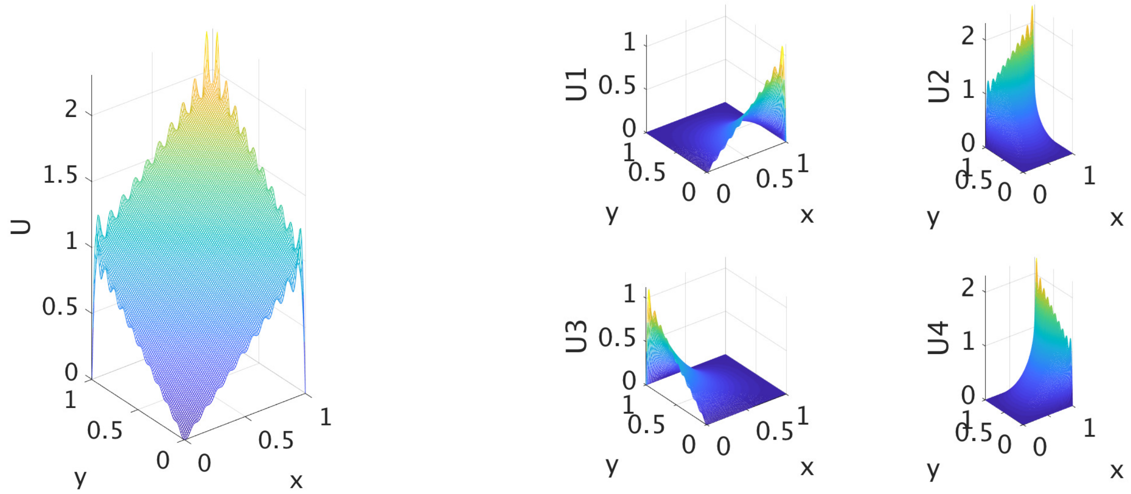

Figura 5: Esercizio 1.4: soluzione $U(x, y)$ (a sinistra) e soluzioni particolari $U_i(x, y)$ (a destra) per $N_{max} = 20$

Esercizio 2

1. Dato che si tratta di un problema di Laplace, la soluzione $u(x, y)$ ammette valori massimo e minimo sul bordo $\partial\Omega$, ovvero: $\min_{\partial\Omega} u \leq u(\mathbf{x}) \leq \max_{\partial\Omega} u$ per ogni $\mathbf{x} \in \Omega$. Siccome sono considerate condizioni di Dirichlet su tutti i bordi, abbiamo per quanto riguarda il valore minimo:

$$
\begin{aligned}
\min_{\partial\Omega} u &= \min\left\{\min_{\Gamma_1} g_1, \min_{\overline{\Gamma}_2} g_2, \min_{\overline{\Gamma}_3} g_3, \min_{\overline{\Gamma}_4} g_4\right\} \\
&= \min\left\{\min_{x\in[0,\pi]} \sin(2x), 0, \min_{y\in[0,2\pi]} \frac{1}{3}\sin(y), 0\right\} \\
&= \min\left\{-1, 0, -\frac{1}{3}, 0\right\} = -1,
\end{aligned}
$$

ed è ottenuto sul bordo Γ_1 per $x = \frac{3}{4}\pi$ e $y = 0$. Per quanto riguarda il valore massimo, abbiamo:

$$
\begin{aligned}
\max_{\partial\Omega} u &= \max\left\{\max_{\Gamma_1} g_1, \max_{\overline{\Gamma}_2} g_2, \max_{\overline{\Gamma}_3} g_3, \max_{\overline{\Gamma}_4} g_4\right\} \\
&= \max\left\{\max_{x\in[0,\pi]} \sin(2x), 0, \max_{y\in[0,2\pi]} \frac{1}{3}\sin(y), 0\right\} \\
&= \max\left\{1, 0, \frac{1}{3}, 0\right\} = 1,
\end{aligned}
$$

ed è ottenuto sempre sul bordo Γ_1 per $x = \frac{\pi}{4}$ e $y = 0$. Come si può evincere dalla Figura 1, abbiamo:

$$-1 \leq u(\mathbf{x}) \leq 1 \qquad \text{per ogni } \mathbf{x} \in \Omega.$$

2. Si tratta di un problema di Poisson con termine $f = 5 > 0$. Per questo motivo, non è possibile calcolare sia massimo che minimo della soluzione, ma soltanto il valore minimo. Tramite semplici calcoli si ottiene che $\min_{\partial\Omega} u = -e^2$, raggiunto nel punto di coordinate $(1, 0)$.

Esercizio 3

1. Imponiamo la condizione di compatibilità sui dati. Si ha:

$$\int_B f dB = \int_B (x+1) dB = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^2 (\rho\cos(\theta) + 1)\rho d\rho d\theta = 0 + 2\pi \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^2 = 4\pi,$$

in cui abbiamo sfruttato la trasformazione standard in coordinate polari. Inoltre, poiché

$$\int_{\partial B} g dS = \int_{\partial B} a dS = a \int_{\partial B} dS = a|\partial B| = a(2\pi 2) = 4\pi a,$$

si ottiene che per $a = -1$ il problema ammette (infinite) soluzioni.

2. Imponendo la condizione di compatibilità sui dati, si ha:

$$\int_{\Omega} f d\Omega = \int_{\Omega} a d\Omega = a \int_{\Omega} d\Omega = a|\Omega| = a(2 \cdot 1) = 2a,$$

$$\int_{\partial\Omega} g dS = 0 + \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3},$$

da cui $a = -4/3$ affinché il problema ammetta (infinite) soluzioni.

3. Con passaggi del tutto analoghi ai punti precedenti, si ottiene che per la scelta $a = -3/5$ il problema ammette (infinite) soluzioni.