Esercitazione 4
Soluzione di Equazioni Non Lineari

Metodo delle iterazioni di punto fisso

Consideriamo il problema: data una funzione $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$, trovare $\alpha \in [a, b]$ tale che:

$$\alpha = \phi(\alpha).$$

Se un tale α esiste, viene detto *punto fisso* di ϕ. Se la funzione di iterazione è sufficientemente regolare e $|\phi'(\alpha)| < 1$ la successione definita da

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}), \quad k \geq 0 \tag{1}$$

converge ad α per ogni scelta del dato iniziale $x^{(0)}$ in un intorno opportuno di α. Tale successione soddisfa la condizione di convergenza

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{x^{(k)} - \alpha} = \phi'(\alpha), \tag{2}$$

ovvero (per k grande) l'errore al passo $(k+1)$ è uguale all'errore al passo k moltiplicato per una costante $\phi'(\alpha)$ il cui valore assoluto è minore di 1 (ordine di convergenza uguale almeno ad 1, o convergenza almeno *lineare*).

In maniera del tutto generale si può dimostrare che se le derivate i-esime della funzione ϕ valutate in α si annullano per $i = 1, \cdots, p$ con $p \geq 1$ e $\phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$, allora il metodo di punto fisso ha ordine $(p + 1)$ e vale:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{(x^{(k)} - \alpha)^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p + 1)!}. \tag{3}$$

Ad esempio, se $\phi'(\alpha) = 0$, (ma $\phi''(\alpha) \neq 0$) il metodo di punto fisso è convergente di ordine 2.

Le iterazioni di punto fisso possono servire anche per il calcolo degli zeri di una funzione $f(x)$. In generale, la funzione di iterazione ϕ deve essere scelta in modo tale che

$$\phi(\alpha) = \alpha \text{ ogni volta che } f(\alpha) = 0.$$

La scelta di ϕ ovviamente non è unica. Si può ricorrere infatti a manipolazioni algebriche differenti di f per ottenere delle possibili funzioni di iterazione ϕ. Ad esempio, ogni funzione della forma $\phi(x) = x + F(f(x))$ è una funzione di iterazione ammissibile, purchè F sia una funzione continua tale che $F(0) = 0$.

Una semplice implementazione dell'algoritmo di punto fisso è scaricabile da WeBeep. Spesso può essere interessante visualizzare le iterate successive dell'algoritmo di punto fisso; anzichè visualizzare i valori generati $x^{(k)}$ al variare dell'indice k, si preferisce costruire un grafico formato da una linea spezzata che congiunge i punti di coordinate:

$$\Big(x^{(k)}, \phi(x^{(k)})\Big) \longrightarrow \Big(x^{(k+1)}, x^{(k+1)}\Big) \longrightarrow \Big(x^{(k+1)}, \phi(x^{(k+1)})\Big) \cdots, \ k \geq 0.$$

Il grafico così ottenuto consente di distinguere immediatamente i punti fissi attrattori dai punti fissi repulsori.

Metodo di Newton per equazioni non lineari

Il metodo di Newton per la ricerca dello zero α di un'equazione non lineare $f(x) = 0$ è un metodo iterativo che necessita della conoscenza della derivata prima $f'(x)$ della funzione $f(x)$.

Dato $x^{(0)}$, dato iniziale, la formula della generica iterazione k del metodo di Newton si esprime come:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \quad \text{se } f'(x^{(k)}) \neq 0,\ k \geq 0. \tag{4}$$

Nel caso in cui α sia uno zero semplice di f $(f'(\alpha) \neq 0)$ il metodo di Newton converge quadraticamente. Se invece la molteplicità è maggiore di uno, il metodo di Newton converge linearmente.

Detta m la molteplicità dello zero α, la convergenza quadratica può essere recuperata modificando la formula generale del metodo di Newton nel modo seguente:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - m\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \quad \text{se } f'(x^{(k)}) \neq 0,\ k \geq 0. \tag{5}$$

Il metodo (5) si chiama *Newton modificato.*

Per arrestare il metodo di Newton si utilizza generalmente il criterio seguente: ad ogni iterazione k si valuta se la differenza tra due iterate successive è inferiore ad una certa soglia ε:

$$|x^{(k)} - x^{(k-1)}| < \varepsilon \tag{6}$$

Metodo di Newton per sistemi di equazioni non lineari

Si consideri il sistema di equazioni non lineari composto da n funzioni non lineari in n incognite:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Chiamando $\mathbf{F} \equiv (f_1, \ldots, f_n)^T$ e $\mathbf{x} \equiv (x_1, \ldots, x_n)^T$, il problema può essere riscritto nella forma:

$$\text{data } \mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \text{trovare } \mathbf{x}^\star \in \mathbb{R}^n \text{ tale che } \mathbf{F}(\mathbf{x}^\star) = \mathbf{0}. \tag{7}$$

Al fine di estendere il metodo di Newton al caso di un sistema, si costruisca la *matrice Jacobiana* $\mathbf{J_F}$ della funzione vettoriale $\mathbf{F}$, le cui componenti sono

$$(\mathbf{J_F})_{ij} \equiv \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Con questa notazione, il metodo di Newton per sistemi di equazioni non lineari diventa:

$$\begin{array}{ll} \text{Dato} & \mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n,\ \text{per } k = 0, \ldots,\ \text{fino a convergenza} \\ \text{risolvere} & \mathbf{J_F}(\mathbf{x}^{(k)})\delta\mathbf{x}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \text{porre} & \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \delta\mathbf{x}^{(k)} \end{array}$$

Per quanto riguarda l'aspetto implementativo del metodo, si noti che, ad ogni passo, esso richiede:

1. la costruzione di un vettore colonna di dimensione n, tramite valutazione di $\mathbf{F}$ nel punto $\mathbf{x}^{(k)}$;
2. la costruzione di una matrice $n \times n$, tramite valutazione della matrice jacobiana $\mathbf{J_F}$ nel punto $\mathbf{x}^{(k)}$;
3. la soluzione di un sistema lineare di matrice $\mathbf{J_F}(\mathbf{x}^{(k)})$ e termine noto $-\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$;

4. l'aggiornamento della soluzione.

L'algoritmo giunge a convergenza quando la norma euclidea dell'incremento $\delta\mathbf{x}^{(k)}$ è minore di una tolleranza ε fissata a priori:

$$\|\delta\mathbf{x}^{(k)}\| < \varepsilon$$

Come nel caso scalare, la convergenza del metodo dipende dalla scelta del dato iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$. Inoltre, ad ogni passo, la matrice $\mathbf{J_F}(\mathbf{x}^{(k)})$ deve essere non singolare. Si osservi anche che il costo richiesto per la risoluzione del sistema lineare può essere eccessivamente elevato per n grande, e che $\mathbf{J_F}(\mathbf{x}^{(k)})$ può essere mal condizionata, rendendo difficile ottenere una soluzione accurata.

Esercizio 1

Si consideri la funzione $f(x) = \cos^2(2x) - x^2$.

1. Si disegni la funzione e si individuino graficamente i punti in cui $f(x) = 0$.
2. Si verifichi teoricamente per quale intervallo di valori della costante A il metodo di punto fisso per la ricerca degli zeri di $f(x)$ con funzione di iterazione:
$$\phi(x) = x + Af(x)$$
può convergere allo zero $\alpha > 0$ per una scelta opportuna del dato iniziale (criterio di convergenza locale).
3. Si utilizzi la `function` `ptofis.m` con $A = 0.1$ e $x^{(0)} = 0.1$ per ottenere un valore dello zero α, scegliendo come tolleranza 10^{-10}.
Si usi il valore dello zero α così ottenuto per verificare i risultati teorici sulla convergenza del metodo: considerando la stima per A ottenuta al punto precedente, si facciano due scelte differenti per A, una che garantisca convergenza e una per cui il metodo diverge.
4. Si trovi lo zero della funzione f usando in successione le `function` `bisection.m` e `ptofisso.m` per
   (a) stimare la guess iniziale $x^{(0)}$ tramite 6 iterazioni dell'algoritmo di bisezione;
   (b) applicare il metodo di punto fisso usando come initial guess l'output dell'algoritmo di bisezione.
5. Stimare l'ordine di convergenza del metodo di punto fisso al variare di A utilizzando la funzione `stimap.m`, verificando l'affidabilità delle stime teoriche.
6. Fornire un valore di A tale da ottenere un metodo del secondo ordine.
7. Ricordando che il metodo di Newton può essere riletto come metodo di punto fisso, implementarlo utilizzando la `function` `ptofis.m`. Si vari la guess iniziale e si valuti se si ha convergenza o meno allo zero α positivo, in modo da determinare sperimentalmente gli intervalli in cui scegliere il dato iniziale perchè il metodo converga.

Esercizio 2

Vogliamo risolvere il problema della ricerca degli zeri dell'equazione non lineare $f(x) = 0$, dove f è definita da:

$$f(x) = x^3 - (2+e)x^2 + (2e+1)x + (1-e) - \cosh(x-1), \quad x \in [0.5, 6.5] \tag{8}$$

1. Disegnare i grafici della funzione f e f' nell'intervallo $[0.5, 6.5]$ ed evidenziare le radici della funzione. (Suggerimento: utilizzare il comando `grid on`).

2. Dai grafici di f e di f' discutere le proprietà di convergenza del metodo di Newton per tutti gli zeri, valutando l'opportunità di applicare il metodo di Newton modificato. Noto il valore esatto dello zero $\alpha_1 = 1$ si valuti la molteplicità dello zero.

3. Implementare il metodo di Newton per la risoluzione del problema della ricerca degli zeri di una funzione non lineare f.
   L'intestazione della funzione `newton.m` deve essere:

   ```
   function [xvect,it]=newton(x0,nmax,toll,fun,dfun,mol)
   ```

   La funzione prende in ingresso il dato iniziale $x^{(0)}$, il numero massimo di iterazioni, il valore della tolleranza ε necessario per il criterio d'arresto, la funzione f di cui si stanno ricercando gli zeri, la sua derivata f' e per ultimo il valore della molteplicitá dello zero.
   In uscita la funzione restituisce il vettore `xvect` contenente tutte le iterate calcolate (l'ultima componente sará perció la soluzione) e il numero di iterazioni effettuate.

4. Risolvere il problema della ricerca degli zeri della funzione $f(x)$ definita in (8), utilizzando la funzione `newton.m` implementata al punto precedente. Si ponga la tolleranza pari a 10^{-6} e si fissi un numero massimo di iterazioni a scelta. Si utilizzi per il calcolo di ogni zero un opportuno dato iniziale `x0`, sulla base delle osservazioni fatte ai punti precedenti, eventualmente ricorrendo all'algoritmo di bisezione.
   Nel caso dello zero $\alpha_1 = 1$ si risolva il problema sia con il metodo di Newton classico (`mol`$= 1$), sia con il metodo di Newton modificato (`mol` fissato opportunamente). Si riportino su un grafico in scala semilogaritmica gli andamenti degli errori in funzione del numero di iterazioni in entrambi i casi.

5. Stimare l'ordine di convergenza dei due metodi (Newton classico e Newton modificato nel caso $\alpha_1 = 1$) mediante la funzione Matlab® `stimap.m` fornita.

Esercizio 3 - Homework

Consideriamo il sistema non lineare seguente nella forma $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, dove

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ F_2(x_1, x_2) = \sin(x_1\pi/2) + x_2^3 = 0 \end{cases}$$

1. Scrivere la anonymous function Matlab® che preso in input un generico vettore `x`, restituisce un vettore contenente la valutazione di $\mathbf{F}$ in `x`.
   La sintassi sarà: `F = @(x) [ ... ; ... ]`.

2. Scrivere la anonymous function Matlab® che preso in input un generico vettore `x`, restituisce la matrice Jacobiana $\mathbf{J_F}$ contente la valutazione dello Jacobiano della funzione $\mathbf{F}$ in `x`.
   La sintassi sarà `JF = @(x) [ ... , ... ; ... , ... ]`.

3. Implementare il metodo di Newton per la risoluzione della ricerca degli zeri di un sistema non lineare $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.
   L'intestazione della funzione `newtonsys.m` deve essere:

   ```
   function [x, R, niter] = newtonsys(F, JF, x0, tol, nmax)
   ```

   La funzione prende in ingresso la funzione `F` che restituisce la valutazione di $\mathbf{F}$, la funzione `JF` che restituisce la valutazione dello Jacobiano della funzione $\mathbf{F}$, il dato iniziale `x0`, il valore della tolleranza necessario per valutare il criterio d'arresto e il numero massimo di iterazioni.
   In uscita la funzione restituisce il vettore `x` contenente la soluzione del sistema non lineare, il valore del residuo valutato in corrispondenza della soluzione finale e il numero delle iterazioni effettuate.

4. Partendo dal dato iniziale `x0 = [1; 1]`, prendendo come tolleranza `tol = 1e-5` e numero di iterazioni massime `nmax = 10`, risolvere il problema $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ usando la funzione `newtonsys.m` implementata al punto precedente.

Esercizio 4 - Homework

La perdita di carico distribuita lungo una condotta di lunghezza L e diametro D è data da $\Delta H_m = JL$, dove J viene detta cadente ed è definita, nel caso di condotte cilindriche a sezioni circolari, dalla formula di Darcy-Weissbach

$$J = J(\lambda) = \lambda \frac{V^2}{2gD},$$

con V la velocità media della corrente e λ l'**indice della resistenza ridotta**. Tale indice dipende dalla scabrezza relativa della tubazione, indicata con r/D, e dal numero di Reynolds, Re.

Per il calcolo di λ è possibile consultare dei grafici tabulati, chiamati **Abaco di Moody**, o utilizzare la **formula di Colebrook-White**:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log_{10}\left(\frac{2.51}{Re}\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{3.71}\frac{r}{D}\right),$$

nel caso di regime turbolento con $Re > 4000$.

Tale equazione può essere risolta in maniera approssimata con un opportuno metodo di punto fisso. In particolare, si sceglie la seguente funzione di iterazione ϕ

$$\lambda_{k+1} = \phi(\lambda_k) = \left[-2\log_{10}\left(\frac{2.51}{Re}\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} + \frac{1}{3.71}\frac{r}{D}\right)\right]^{-2},$$

con guess iniziale $\lambda_0 = \left[-2\log_{10}\left(\frac{1}{3.71}\frac{r}{D}\right)\right]^{-2}$ e differenza tra iterate successive come criterio di arresto.

Si completi il programma `Test_Moody_tocomplete.m` per la creazione di alcune curve che costituiscono l'Abaco di Moody, al variare di scabrezza relativa e numero di Reynolds.

Esercizio 5 - Homework

Si consideri l'equazione non lineare $f(x) = 0$, in cui f è definita come:

$$f(x) = \arctan\left(7\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + \sin\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3\right), \quad x \in [-1, 6]. \tag{9}$$

1. Si disegni il grafico della funzione f nell'intervallo $[-1, 6]$.
2. Si verifichi che l'unico zero α della funzione f è semplice e si utilizzi la funzione `newton.m` per approssimarlo. Si assuma una tolleranza pari a 10^{-10} e dato iniziale `x0` $= 1.5$. Successivamente si ripeta tale calcolo partendo da `x0` $= 4$. Sapendo che $\alpha = \pi/2$, si calcolino gli errori assoluti nei due casi e si motivino i risultati ottenuti. Si stimino inoltre gli ordini di convergenza mediante la funzione `stimap.m` giá fornita.

Esercizio 6 - Homework

Ripetere l'Esercizio 3 considerando come sistema non lineare

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, x_3) = -\dfrac{1}{81}\cos x_1 - x_1 + \dfrac{1}{9}x_2^2 + \dfrac{1}{3}\sin x_3 = 0 \\ F_2(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{1}{3}\sin x_1 - x_2 + \dfrac{1}{3}\cos x_3 = 0 \\ F_3(x_1, x_2, x_3) = -\dfrac{1}{9}\cos x_1 + \dfrac{1}{3}x_2 + \dfrac{1}{6}\sin x_3 - x_3 = 0\,. \end{cases}$$

avente come soluzione il vettore `x=[0;1/3;0]`, partendo dal dato iniziale `x0 = [1;1;1]`, considerando come tolleranza `tol = 1e-10` e numero di iterazioni massime `nmax = 10`.

Esercizio 7 - Homework

tratto dall'ESAME del 01/09/2023

Si approssimi lo zero α della funzione $f = x^3 - 2x^2 + e^x - 5$ sull'intervallo $I = [0, 3]$ con il metodo di Newton, dopo aver scelto `x0 = 2.75` come guess iniziale, `toll = 1e-6` per il criterio di arresto e `nmax = 200` come numero massimo di iterazioni. Si scelga l'affermazione corretta:

- la radice α ha molteplicità 2 e lo schema converge in 25 iterazioni;
- la radice α ha molteplicità 1 e lo schema converge in 6 iterazioni;
- la funzione f ha 3 radici nell'intervallo I e lo schema oscilla tra i 3 valori, senza convergere;
- la radice α ha molteplicità 1 e lo schema converge in 25 iterazioni;
- la radice α ha molteplicità 2 e lo schema converge in 5 iterazioni.