METODI ANALITICI E NUMERICI PER L'INGEGNERIA — A.A. 2024 – 2025
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica — Politecnico di Milano
Prof. S. Perotto — Dr. N. Ferro, E. Temellini

Esercitazione 7

La Trasformata di Laplace per la Soluzione di Equazioni Differenziali Ordinarie

Trasformata e Antitrasformata di Laplace

La trasformata (unilatera) di Laplace di una funzione $f(t)$ definita per $t \geq 0$ è

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

per $s \in \mathbb{C}$. Ricordiamo alcune trasformate fondamentali.
ATTENZIONE! Per convenzione le funzioni della prima colonna sono poste a zero per $t < 0$; ad esempio, la trasformata della funzione $f(t) = 1$ è in realtà la trasformata della funzione di Heaviside $\mathcal{H}(t)$.

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$
1	$\frac{1}{s}$
$t^n, \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$\mathcal{H}(t-a)f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$(f * g)(t)$	$F(s)G(s)$

Ricordiamo inoltre che se $f(t)$ e $g(t)$ sono due funzioni che ammettono trasformate di Laplace $F(s)$ e $G(s)$, rispettivamente, allora

$$\mathcal{L}[f(t) + g(t)](s) = F(s) + G(s) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}[cf](s) = cF(s) \qquad \forall c \in \mathbb{R},$$

per ogni s tali che $F(s)$ e $G(s)$ sono entrambe definite (*linearità della trasformata*). Analogamente, risulta lineare anche l'antitrasformata:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s) + G(s)](t) = f(t) + g(t) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}^{-1}[cF(s)](t) = cf(t) \qquad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Osservazione. Il pacchetto `syms` di Matlab® consente di calcolare semplici trasformate e antitrasformate di Laplace, in particolare utilizzando opportunamente le funzioni `laplace` e `ilaplace`.

Esercizio 1

Si determini la trasformata di Laplace $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ delle seguenti funzioni $f(t)$, definite per $t \geq 0$.

1. $f(t) = 5e^{-2t} - e^{-t}\cos(4t)$;
2. $f(t) = (t - \sqrt{5})^2\, H(t - \sqrt{5})$;
3. $f(t) = e^{-3t}\sin^2(t)$;
4. $f(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{t}{a} & \text{per } 0 \leq t < a, \\ 0 & \text{per } t \geq a, \end{cases}$, dove $a \in \mathbb{R}$ e $a > 0$.

Esercizio 2

Si determini l'antitrasformata di Laplace $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$ delle seguenti funzioni $F(s)$.

1. $F(s) = \dfrac{3s+1}{(s^2+1)(s-1)}$;
2. $F(s) = e^{-7s}\,\dfrac{s}{s^2+9}$;
3. $F(s) = \dfrac{-5s^2+2s-239}{s^3+3s^2+49s+147}$.

Esercizio 3

Si risolvano, utilizzando opportunamente la traformata e l'antitrasformata di Laplace, le seguenti Equazioni Differenziali Ordinarie:

1. $\begin{cases} y'(t) = -3y(t) + e^{-2t} & t > 0, \\ y(0) = 5. \end{cases}$
2. $\begin{cases} y'(t) = -2y(t) + 2\pi \cos\left(\dfrac{\pi}{2}t\right) e^{-2t} + 8H(t-4) & t > 0, \\ y(0) = 4. \end{cases}$
3. $\begin{cases} y'(t) = 2\,(y(t) * \cos(t)) + e^{-t} - \sin(t) & t > 0, \\ y(0) = 0. \end{cases}$
4. $\begin{cases} x'(t) = -x(t) - 2y(t) + te^{-t} & t > 0, \\ y'(t) = -2x(t) - 4y(t) & t > 0, \\ x(0) = 0 \quad \text{e} \quad y(0) = 1. \end{cases}$
5. $\begin{cases} y''(t) = -2y(t) + \mathcal{H}(t-3) - \mathcal{H}(t-4) & t > 0, \\ y'(0) = 0, \\ y(0) = 0. \end{cases}$
6. $\begin{cases} 4y''(t) + 4y'(t) + y(t) = 1 & t > 0, \\ y'(0) = -1, \\ y(0) = 1. \end{cases}$
7. $\begin{cases} y''(t) = -y'(t) - y(t) + e^{-t}\mathcal{H}(t-2) & t > 0, \\ y'(0) = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$
8. $\begin{cases} x''(t) = -x'(t) - x(t) - y(t) & t > 0, \\ y''(t) = x'(t) & t > 0, \\ x'(0) = y'(0) = 0, \\ x(0) = 0, \qquad y(0) = 1. \end{cases}$