Optimización del Transporte de Recursos en Aviones

Marco Alejandro Ramírez - Juan Sebastian Sanchez

March 6, 2025

1 Problema aviones

I. Preprocesamiento de datos

Los recursos están representados en términos de su peso (en kilos) y volumen (en metros cúbicos). Se permite que los recursos divisibles sean transportados en fracciones, modeladas mediante variables continuas x_{ij}.

Para los equipos médicos, que deben transportarse en unidades enteras de 300 kg, se introduce la variable entera y_{equipos} con la restricción que asegura que sea múltiplo de 300 kg.

II. Conjuntos

- $i \in R$, que representa los recursos disponibles.
- $j \in A$, que representa los aviones disponibles.

III. Parámetros

- peso_j : Capacidad máxima de peso (kilos) del avión j.
- volumen_j : Capacidad de volumen del avión j (m^3).
- peso_i : Cantidad total disponible del recurso i (kilos).
- volumen_i : Volumen ocupado por una unidad del recurso i (m^3).
- valor_i : Valor asignado al recurso i.

IV. Variables de Decisión

- x_{ij}: Cantidad del recurso i transportado en el avión j.
- y_{equipos}: Número de equipos médicos transportados (variable entera).
- $y_{\text{medicos}}, y_{\text{agua}}$: Variables binarias que indican si un avión transporta equipos médicos o agua potable.

V. Función Objetivo El objetivo es maximizar el valor total de los recursos transportados:

$$\max \sum_{i \in R} \sum_{j \in A} \left(\frac{x_{ij}}{\text{peso}_i} \right) \cdot \text{valor}_i$$

Se debe hacer esta regla de 3 dado que, si llevamos la mitad del total de agua que podemos llevar, vamos a tener la mitad del valor que nos da todo el agua.

VI. Restricciones

1. Capacidad de Peso de los Aviones

$$\sum_{i \in R} x_{ij} \leq \text{peso}_j, \quad \forall j \in A$$

Garantiza que el peso total transportado en cada avión no exceda su capacidad.

2. Capacidad de Volumen de los Aviones

$$\sum_{i \in R} \left(\frac{x_{ij}}{\text{peso}_i} \cdot \text{volumen}_i \right) \leq \text{volumen}_j, \quad \forall j \in A$$

Asegura que los recursos no excedan el volumen máximo de cada avión.

3. Disponibilidad de Recursos

$$\sum_{j \in A} x_{ij} \leq \text{peso}_i, \quad \forall i \in R$$

Impide que se transporten más recursos de los disponibles.

4. Seguridad de Medicamentos

$$x_{2,1} = 0$$

Se prohíbe el transporte de medicinas en el avión 1.

5. Compatibilidad entre Recursos

$$y_{\text{medicos},j} + y_{\text{agua},j} \leq 1, \quad \forall j \in A$$

Evita que los equipos médicos y el agua potable sean transportados en el mismo avión.

6. Condiciones para Activar Variables Binarias Se define un parámetro grande M, calculado como el cuadrado del mayor peso entre todos los aviones:

$$M = \sum_{j \in \mathrm{A}} \left(\text{peso}_j\right)^2$$

A continuación, se imponen restricciones auxiliares para garantizar que si un avión transporta equipos médicos o agua potable, la variable binaria correspondiente se active:

$$(\sum_{i \in \mathrm{R}} x_{3,j}) \leq M \cdot y_{\text{medicos},j}, \quad \forall j \in \mathrm{A}$$

$$(\sum_{i \in \mathrm{R}} x_{4,j}) \leq M \cdot y_{\text{agua},j}, \quad \forall j \in \mathrm{A}$$

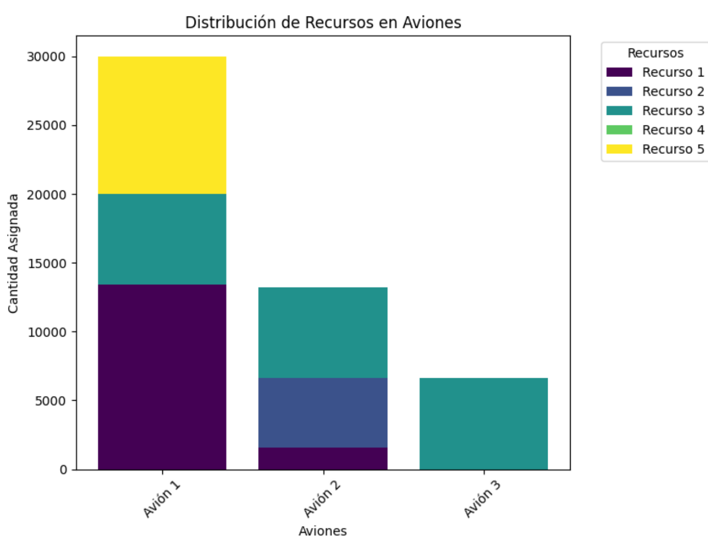
Estas restricciones aseguran que si un avión j transporta equipos médicos ($x_{3,j} > 0$), entonces $y_{\text{medicos},j} = 1$. De lo contrario, esta variable permanecerá en cero. Lo mismo aplica para el caso del agua potable con $y_{\text{agua},j}$.

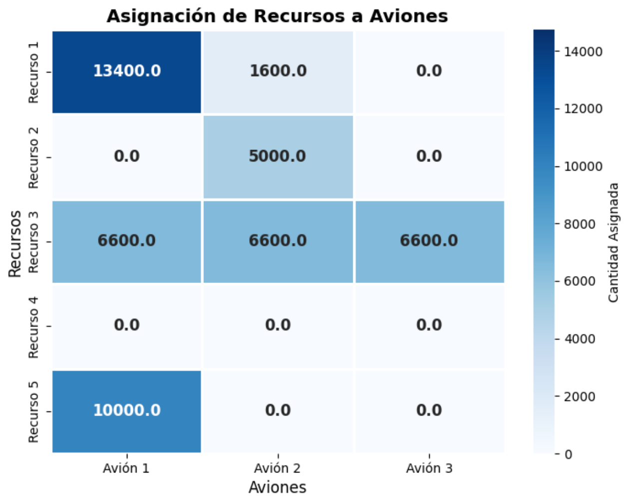
VII. Tipo de problema

Nuestro problema es LP ya que las funciones y restricciones son ecuaciones lineales y nuestras variables de decisión son números reales.

VIII. Análisis de Resultados

El modelo proporciona una asignación óptima de recursos a los aviones, asegurando que se maximice el valor transportado sin violar restricciones.





IX. Recomendaciones:

- La restricción de no llevar medicinas en el avión 1 no afecta la utilidad total del modelo
- Primero se llena el primer avión, luego el segundo, y así sucesivamente.
- Dado que divide las cargas de los equipos medicos, no es posible llevar agua en ningún avión

2 Problema de Transporte

I. Preprocesamiento de datos

Se tienen dos orígenes y seis destinos, con una cantidad inicial de oferta y demanda en toneladas. Se modelan las cantidades transportadas como variables continuas x_{ij}. Para evaluar los efectos de redistribuir 50 toneladas de oferta de Medellín a Bogotá, se compararán los resultados con y sin este ajuste. Si no hay una ruta entre las diferentes ciudades, se asume un costo de transporte infinito.

II. Conjuntos

- $i \in O$, que representa los orígenes (Bogotá, Medellín).
- $j \in D$, que representa los destinos (Cali, Barranquilla, Bucaramanga, Cartagena, Cúcuta, Pereira).

III. Parámetros

- $Oferta_i$: Cantidad de toneladas disponibles en el origen i.
- $Demanda_j$: Cantidad de toneladas requeridas en el destino j.
- $Costo_{ij}$: Costo de transportar una tonelada desde el origen i hasta el destino j.

IV. Variables de Decisión

- x_{ij}: Cantidad de toneladas transportadas desde el origen i hasta el destino j. Este valor es un entero positivo.

V. Función Objetivo

Minimizar el costo total del transporte:

$$\min \sum_{i \in O} \sum_{j \in D} x_{ij} \cdot \text{Costo}_{ij}$$

VI. Restricciones

1. Restricción de Oferta

$$\sum_{j \in D} x_{ij} \leq \text{Oferta}_i, \quad \forall i \in O$$

Garantiza que no se transporten más toneladas de las disponibles en cada origen.

2. Restricción de Demanda

$$\sum_{i \in O} x_{ij} \geq \text{Demanda}_j, \quad \forall j \in D$$

Asegura que cada destino reciba al menos la cantidad de carga requerida.

VII. Tipo de problema

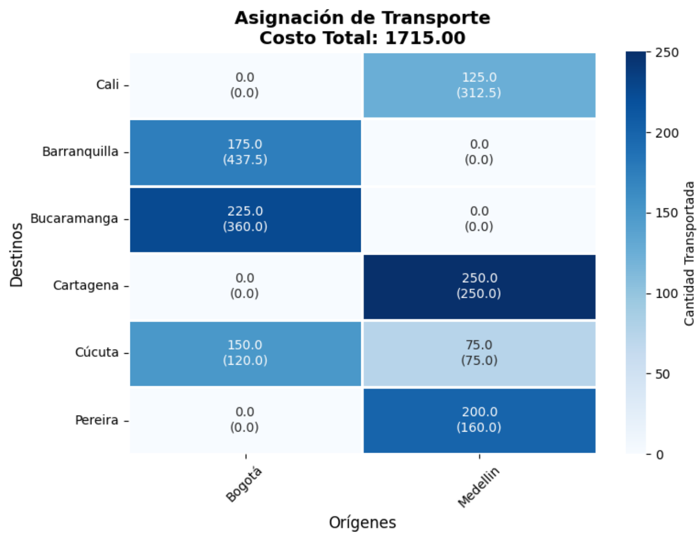
Nuestro problema es MIP ya que las funciones y restricciones son ecuaciones lineales y nuestra variable de decisión es un número entero positivo.

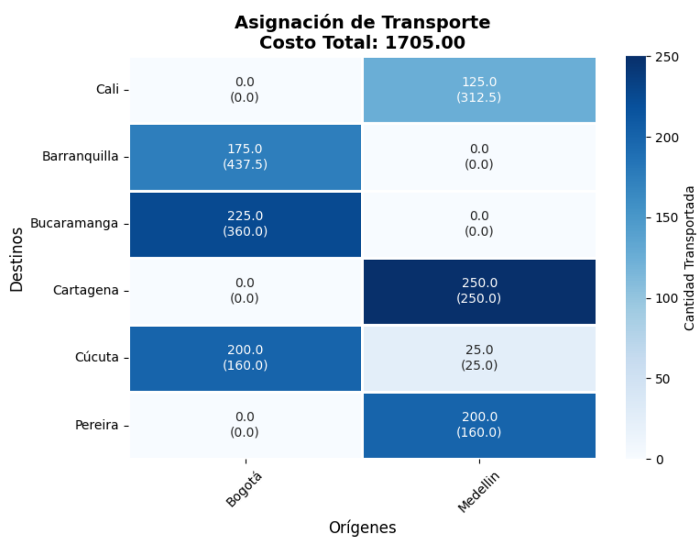
VIII. Análisis de Resultados

Se resuelve el problema de transporte en dos escenarios:

- **Escenario 1 (original):** Distribución inicial de oferta sin cambios.
- **Escenario 2 (ajustado):** Se transfieren 50 toneladas de oferta de Medellín a Bogotá.

Los resultados obtenidos incluyen la comparación de costos totales y la redistribución óptima de las cargas.





IX. Conclusiones

- La redistribución de oferta modifica la asignación óptima de cargas y puede reducir costos si Bogotá tiene mejores conexiones logísticas.
- Si Medellín tenía costos de transporte más bajos hacia ciertos destinos, la redistribución puede aumentar el costo total.
- En este ejemplo específico podemos ver que este cambio disminuyó el precio total del transporte debido a que para Cúcuta, Bogotá tiene un menor costo de transporte por tolenada, por lo cual, al aumentar su capacidad, se disminuyó en 10$ el costo total de transporte.

3 Covertura completa minimizando reinas

I. Introducción

El problema a solucionar consiste en colocar W reinas en un tablero de ajedrez $N \times N$ de manera que todas las casillas estén cubiertas por las reinas, minimizando el número W de reinas.

II. Parametros

El tamaño del tablero que se quiere llenar (se usa de ejemplo 8x8 y 10x10), y se denota como N.

III. Conjuntos

- $i, j \in \{1, \ldots, N\}$: Representan las filas y columnas del tablero.

IV. Variables de Decisión

- Una matriz NxN en la cual, cada i, $x_{ij} \in \{0, 1\}$: Variable binaria que indica si hay una reina en la posición (i, j).

V. Función Objetivo

Dado que queremos minimizar el número de reinas en el tablero, la función objetivo es:

$$Min(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_{ij})$$

Esto asegura que el modelo minimizara el número de reinas para haber cuidado las $N \times N$ reinas.

VI. Restricciones

1. Debe haber al menos una reina que controle cada casilla Entonces lo que hay que hacer es, la sumatoria de reinas que toquen cada todas i, j celdas debe ser mayor de 1 (mínimo una reina debe alcanzar cada celda) y el modelo matematico es:

$$\sum_{k \in \{1,\ldots,N\}} x_{ik}$$
$$+$$
$$\sum_{k \in \{1,\ldots,N\}} x_{kj}$$
$$+$$
$$\sum_{k \in \{-min(i,j),\ldots,N-max(i,j)\} | 0<=i+k<N \wedge 0<=j+k<N} x_{i+k,j+k}$$

$$+ \sum_{k \in \{-min(N-1-i,j),\ldots,min(i+1,N-j)\} | 0<=i-k<N \wedge 0<=j+k<N} x_{i-k,j+k}$$

$$\geq 1$$

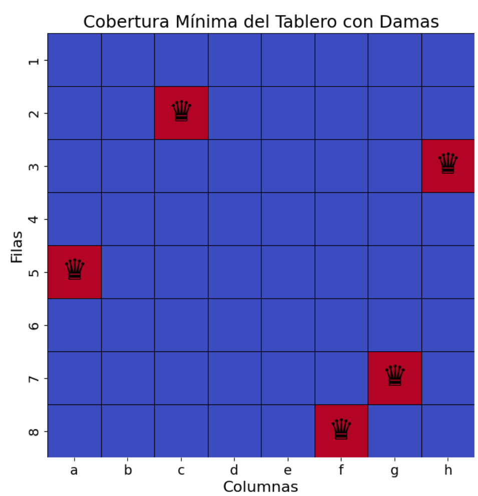
$$\forall i \in \{1, \ldots, N\}, \forall j \in \{1, \ldots, N\}$$

VII. Tipo de problema

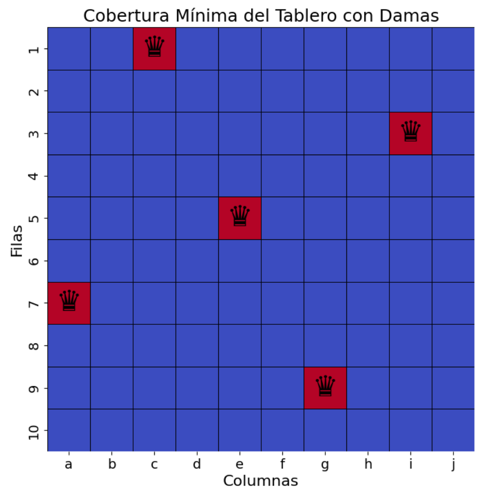
Nuestro problema es MIP ya que las funciones y restricciones son ecuaciones lineales y nuestra variable de decisión es binaria.

VIII. Resultados

El modelo proporciona una solución óptima en la que las N reinas se colocan sin atacarse entre sí. A continuación, se muestran representaciones gráficas de la solución obtenida.



Esta es la solución para un tablero 8x8.



Esta es la solución para un tablero 10x10.

IX. Observaciones:

- Se cumple que, cada casilla es alcanzable por al menos una reina.
- Minimiza el número de reinas necesarias para alcanzar la primera observación.
- La solución es válida y garantiza cada casilla es alcanzable por al menos una reina.

4 Ruta de Mínimo Costo en una Red de Nodos Móviles Inalámbricos

I. Preprocesamiento de Datos

Se tienen 7 nodos con posiciones dadas en coordenadas (X, Y). Un enlace entre dos nodos existe si la distancia euclidiana entre ellos es menor o igual a 20 unidades, y el costo de cada enlace es igual a dicha distancia. Si la distancia es mayor a 20 unidades, el enlace se marca como inexistente (costo infinito). Necesitamos calcular la matriz de costos.

La distancia euclidiana entre dos nodos i y j se define como:

$$d_{ij} = \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2}$$

II. Conjuntos

- N: Conjunto de nodos, donde $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

- A: Conjunto de enlaces entre nodos (i, j)

III. Parámetros

- C_{ij}: Costo del enlace entre los nodos i y j, definido como $C_{ij} = d_{ij}$ si $d_{ij} \leq 20$, de lo contrario es infinito.

IV. Variables de Decisión

- x_{ij}: Variable binaria que indica si el enlace (i, j) es parte de la ruta óptima.

V. Función Objetivo

Minimizar la distancia total recorrida entre el nodo 4 y el nodo 6:

$$\min \sum_{(i,j)\in A} C_{ij} x_{ij}$$

VI. Restricciones

1. Restricción de Flujo

$$\sum_{j\in N} x_{ij} - \sum_{j\in N} x_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = 4 \\ -1, & \text{si } i = 6 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

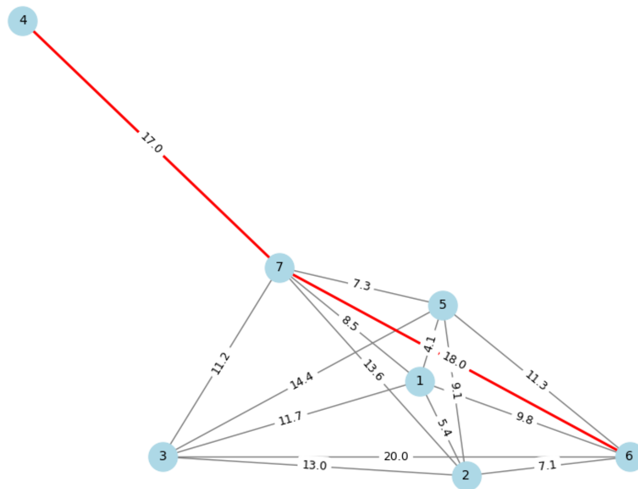
Asegura que el flujo comienza en el nodo 4 y termina en el nodo 6. Además, de los nodos intermedios siempre debe salir un enlace.

VII. Tipo de problema

Nuestro problema es MIP ya que las funciones y restricciones son ecuaciones lineales y nuestras variable de decisión es binaria.

VIII. Análisis de Resultados

Se ejecuta el modelo para encontrar la ruta de menor costo entre los nodos 4 y 6.



- La ruta seleccionada garantiza que existe una conexión continua desde el nodo 4 hasta el nodo 6, sin saltos ni interrupciones.
- Se verificó que la ruta elegida efectivamente minimiza la suma total de los costos de los enlaces utilizados, cumpliendo con la restricción de minimización impuesta en el modelo.
- Podemos analizar otras posibles rutas y notamos que sus costos totales son mayores comparados con la solución obtenida.

IX. Conclusiones

- El preprocesamiento de datos es crucial para definir correctamente los enlaces y evitar cálculos innecesarios.
- Este es crucial para eliminar enlaces innecesarios para simplificar la resolución del problema y mejorar la eficiencia.

5 Formulación del Problema del Viajante para Equipos de Inspección de Infraestructura en Colombia

En este problema, se busca optimizar la ruta de inspección de un equipo (o salesman) que debe visitar todas las localidades asignadas, minimizando el costo total de desplazamiento.

I. Preprocesamiento de Datos

- **Lectura de la Matriz de Costos:** Se importa un archivo CSV que contiene la matriz de costos (o distancias) entre cada par de localidades. La función `leer_matriz_csv()` procesa el archivo, convierte cada elemento a tipo numérico y descarta la primera fila (encabezado), obteniéndose la matriz $[C_{ij}]$.

- **Determinación del Número de Nodos:** A partir de la matriz leída se define el número de localidades, denotado por N.

II. Conjuntos

- **Conjunto de Nodos:**

  $$N = \{1, 2, \ldots, n\}$$

  donde cada elemento representa una localidad a inspeccionar.

- **Conjunto de Enlaces:** Se consideran todos los pares ordenados (i, j) con $i, j \in N$ y $i \neq j$, representando los posibles trayectos directos entre localidades.

III. Parámetros

- **Costo de Viaje:** Para cada par de localidades (i, j) se define:

  $$C_{ij} = \text{costo (o distancia) de viajar desde la localidad } i \text{ a la localidad } j,$$

  extraído directamente de la matriz de costos obtenida en el preprocesamiento.

IV. Variables de Decisión

- **Variables Binarias:**

  $$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si se viaja directamente de la localidad } i \text{ a la localidad } j \\ 0, & \text{No se usa esa arista} \end{cases}$$

  para todo $i, j \in N$, con $i \neq j$.

- **Variables Continuas (MTZ):**

  $$u_i \geq 0, \quad \forall i \in N.$$

  Estas variables se utilizan en las restricciones de eliminación de subrutas (modelo Miller-Tucker-Zemlin).

V. Función Objetivo

El objetivo es minimizar el costo total del desplazamiento:

$$\min \sum_{i \in N} \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} C_{ij}\, x_{ij}.$$

VI. Restricciones

1. **Restricción de Salida de Cada Localidad:** Cada localidad debe ser salida exactamente una vez:

$$\sum_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in N.$$

2. **Restricción de Entrada a Cada Localidad:** Cada localidad debe ser visitada (entrada) exactamente una vez:

$$\sum_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} x_{ji} = 1, \quad \forall i \in N.$$

3. **Restricción de Eliminación de Subrutas (MTZ):** Para evitar la formación de ciclos subóptimos que no incluyan todas las localidades, se imponen las siguientes restricciones:

$$u_i - u_j + n\, x_{ij} \leq n - 1, \quad \forall i, j \in N,\ i \neq j,\ i \neq 1,\ j \neq 1.$$

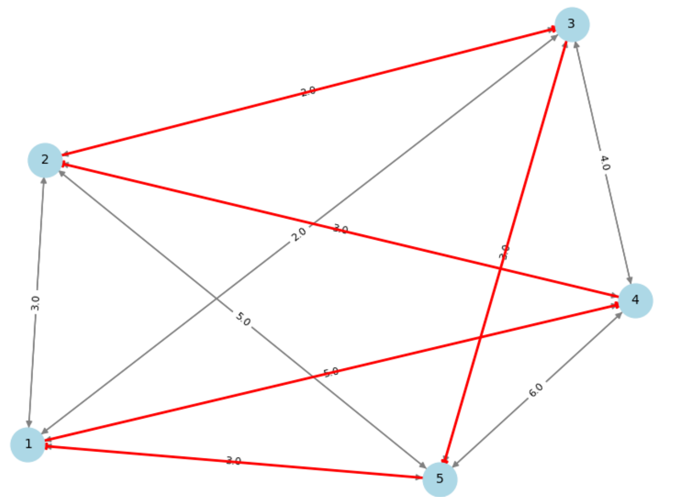
Con esta formulación se garantiza que la solución forma un único ciclo que recorre todas las localidades, iniciando y finalizando en la localidad 1 (el punto de partida y regreso).

Esto asegura que, si se selecciona el enlace (i, j) (es decir, $x_{ij} = 1$), se impone el orden: $u_j \geq u_i + 1$. Esto evita la formación de subciclos que no incluyan al nodo 1, forzando a la solución a ser un único ciclo que recorra todas las localidades, iniciando y finalizando en el nodo 1.

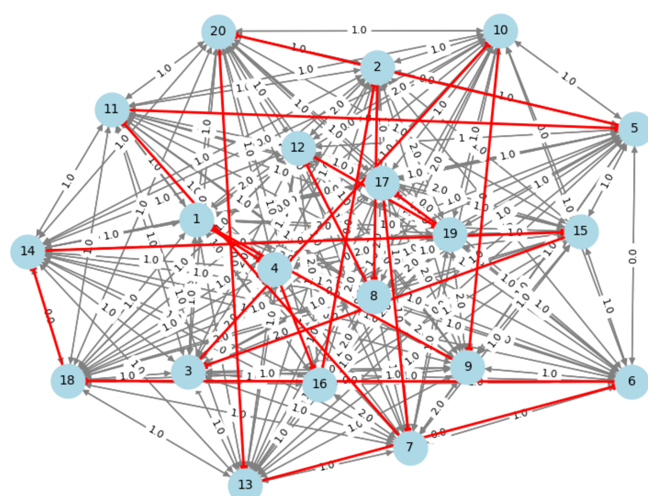
VII.Tipo de problema

Nuestro problema es MIP ya que las funciones y restricciones son ecuaciones lineales y nuestras variables de decisión son números enteros.

VIII. Analisis de resultados



Esta es la solución para un grafo de 5 nodos



Esta es la solución para un grafo de 20 nodos

Cambios Realizados para Adaptar la Implementación al mTSP

Se introdujeron las siguientes modificaciones respecto a la implementación original del TSP para que el modelo soporte múltiples equipos (mTSP):

- **Incorporación del Parámetro K:** Se añadió la variable K, que representa el número de equipos de inspección. Esto implica que en el depósito (nodo 1) deben iniciar y finalizar exactamente K rutas.

- **Ajuste de las Restricciones de Visita en el Depósito:** En lugar de exigir una única salida y entrada en el depósito, se modificó para que:

$$\sum_{\substack{j \in N \\ j \neq 1}} x_{1,j} = K \quad \text{y} \quad \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq 1}} x_{j,1} = K.$$

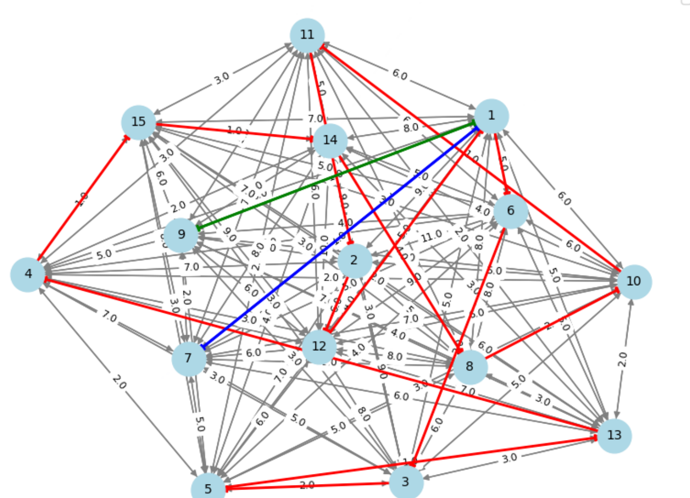
- **Reconfiguración de los Límites de la Variable Auxiliar u:** Para el depósito (nodo 1), se fijó el valor de u_1 en $(0, 0)$, mientras que para los demás nodos se ajustaron los límites a $(1, N - K)$. Esto permite un ordenamiento coherente en la solución y es fundamental para la eliminación de subtours en el contexto de múltiples rutas.

- **Modificación de la Restricción MTZ:** Se actualizó la formulación de la restricción MTZ utilizando el coeficiente $M = N - K$ en lugar de N:

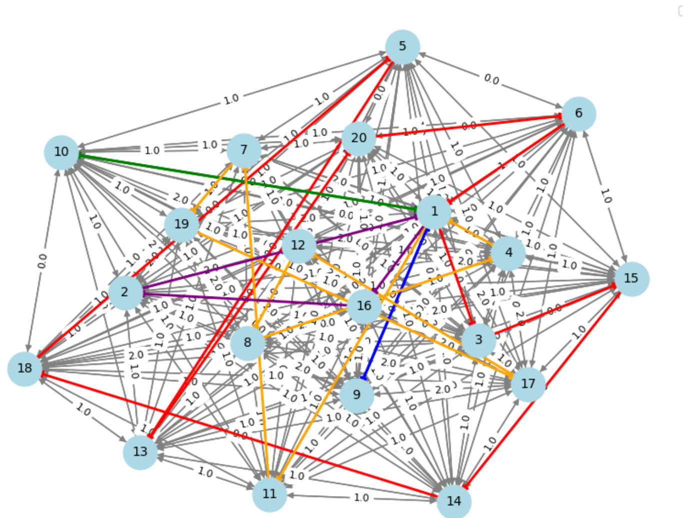
$$u_i - u_j + M\, x_{ij} \leq M - 1, \quad \forall i, j \in N,\ i \neq j,\ i \neq 1,\ j \neq 1.$$

  Esto adapta la eliminación de subrutas a la nueva configuración de los límites de u y al hecho de que existen múltiples rutas.

- **Extracción y Visualización de Múltiples Rutas:** Se modificó el algoritmo de extracción de la solución para identificar cada ciclo o ruta que parte del depósito, permitiendo asignar y visualizar la ruta correspondiente a cada equipo.



Esta es la solución para un grafo de 15 nodos con 3 equipos



Esta es la solución para un grafo de 20 nodos con 5 equipos