Informe del Problema 2: Análisis de Extremos Locales y Globales

Marco Alejandro Ram ırez - Juan Sebastian Sanchez

18 de marzo de 2025

1. Formulación Matemática

El problema se centra en la función:

$$f(x) = x^5 - 8x^3 + 10x + 6, \tag{1}$$

definida en el intervalo $[-3, 3]$. Se requiere encontrar los extremos locales de la función y determinar, entre ellos, el máximo y el mínimo global.

Para ello se han calculado analíticamente las derivadas:

- Primera derivada:
$$f'(x) = 5x^4 - 24x^2 + 10, \tag{2}$$
la cual se utiliza para encontrar los puntos críticos al resolver $f'(x) = 0$.
- Segunda derivada:
$$f''(x) = 20x^3 - 48x, \tag{3}$$
que permite clasificar cada punto crítico. Si $f''(x) > 0$ el punto es un mínimo local y si $f''(x) < 0$ es un máximo local.

La estrategia consiste en aplicar el método de Newton-Raphson sobre $f'(x)$ con la iteración:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}, \tag{4}$$

utilizando distintos puntos iniciales en el intervalo $[-3, 3]$. Además, se consideran los extremos del intervalo como candidatos a extremos globales.

2. Descripción de la Implementación

Se implementó el algoritmo en Python siguiendo los siguientes pasos:

1. Definir la función $f(x)$ junto con sus primeras dos derivadas $f'(x)$ y $f''(x)$.
2. Implementar el método de Newton-Raphson que itera hasta alcanzar una tolerancia definida o un número máximo de iteraciones.
3. Ejecutar el método para varios valores iniciales en el intervalo $[-3, 3]$ para hallar distintos puntos críticos.

4. Eliminar los duplicados (diferentes x_0 pueden converger al mismo punto) y clasificar cada punto crítico en función del signo de $f''(x)$.
5. Considerar también los extremos del intervalo ($x = -3$ y $x = 3$) para determinar el mínimo y máximo global.
6. Graficar la función, marcando los puntos críticos (en negro) y resaltando el mínimo y el máximo global (en rojo).

3. Análisis de Resultados

Se obtuvieron los siguientes resultados en la ejecución del método de Newton-Raphson:
Resultados de Newton-Raphson para diferentes x_0:

```
x0 = -3.00 -> x* = -2.083044, f(x*) = 18.258776, iter = 6
x0 = -2.50 -> x* = -2.083044, f(x*) = 18.258776, iter = 5
x0 = -2.00 -> x* = -2.083044, f(x*) = 18.258776, iter = 4
x0 = -1.50 -> x* =  2.083044, f(x*) = -6.258776, iter = 6
x0 = -1.00 -> x* = -0.678917, f(x*) =  1.570047, iter = 3
x0 = -0.50 -> x* = -0.678917, f(x*) =  1.570047, iter = 3
x0 =  0.50 -> x* =  0.678917, f(x*) = 10.429953, iter = 3
x0 =  1.00 -> x* =  0.678917, f(x*) = 10.429953, iter = 3
x0 =  1.50 -> x* = -2.083044, f(x*) = 18.258776, iter = 6
x0 =  2.00 -> x* =  2.083044, f(x*) = -6.258776, iter = 4
x0 =  2.50 -> x* =  2.083044, f(x*) = -6.258776, iter = 5
x0 =  3.00 -> x* =  2.083044, f(x*) = -6.258776, iter = 6
```

Puntos críticos encontrados:

- $x = -2{,}083044$, $f(x) = 18{,}258776 \rightarrow$ **máximo local**.
- $x = 2{,}083044$, $f(x) = -6{,}258776 \rightarrow$ **mínimo local**.
- $x = -0{,}678917$, $f(x) = 1{,}570047 \rightarrow$ **mínimo local**.
- $x = 0{,}678917$, $f(x) = 10{,}429953 \rightarrow$ **máximo local**.

Puntos extremos del intervalo $[-3, 3]$:

- $x = -3{,}000000$, $f(x) = -51{,}000000 \rightarrow$ **endpoint**.
- $x = 3{,}000000$, $f(x) = 63{,}000000 \rightarrow$ **endpoint**.

De entre todos los candidatos, se concluye:

- **Mínimo global**: $x = -3{,}000000$, $f(x) = -51{,}000000$.
- **Máximo global**: $x = 3{,}000000$, $f(x) = 63{,}000000$.

Se observa que, aunque se han identificado varios puntos críticos en el interior del intervalo, los valores extremos globales corresponden a los endpoints del intervalo $[-3, 3]$. Esto indica que, en este caso, la función alcanza sus valores extremos en los límites del rango considerado.

4. Conclusiones y Observaciones

- El método de Newton-Raphson permitió identificar correctamente varios puntos críticos a partir de distintos valores iniciales. Sin embargo, la convergencia depende fuertemente del punto inicial elegido.
- La clasificación de los puntos críticos mediante la segunda derivada mostró la existencia de mínimos y máximos locales en el interior del intervalo.
- Al incluir los endpoints del intervalo, se determinó que el **máximo global** es $f(3) = 63$ y el **mínimo global** es $f(-3) = -51$. Esto resalta la importancia de considerar los extremos del dominio en problemas de optimización sobre intervalos cerrados.
- El análisis de iteraciones mostró variaciones en el número de iteraciones requeridas, lo cual es relevante para evaluar la eficiencia del método en diferentes zonas del dominio.

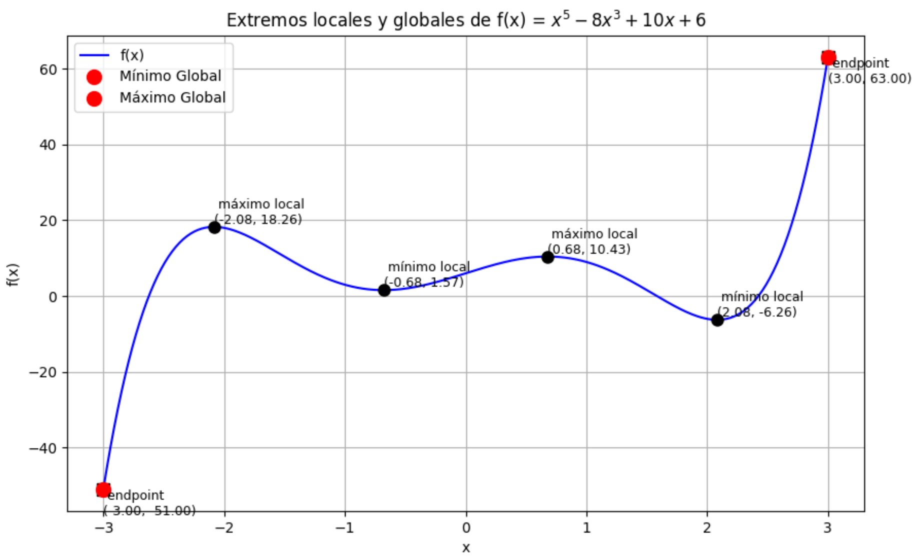

Figura 1: Gráfica de $f(x) = x^5 - 8x^3 + 10x + 6$ en el intervalo $[-3, 3]$ mostrando los puntos críticos y los extremos globales.