Informe del Problema 3: Newton-Raphson Multidimensional

Marco Alejandro Ramirez - Juan Sebastian Sanchez

19 de marzo de 2025

1. Formulación Matemática de los Problemas

Parte A: Función de Rosenbrock (3D)

Consideramos la función de Rosenbrock:

$$f(x,y) = (x-1)^2 + 100\,(y-x^2)^2.$$

El objetivo es encontrar el mínimo de la función, el cual se conoce teóricamente en el punto $(1,1)$.

Gradiente:

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 2(x-1) - 400x\,(y-x^2) \\ 200\,(y-x^2) \end{bmatrix}.$$

Hessiana:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 2 - 400y + 1200x^2 & -400x \\ -400x & 200 \end{bmatrix}.$$

Parte B: Función en $\mathbb{R}^4$

1. **Definición de la función, gradiente y Hessiana:**
   La función en $\mathbb{R}^4$ se define como:
   $$f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2.$$
   Su gradiente es:
   $$\nabla f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2(x-1) \\ 2(y-2) \\ 2(z-3) \end{bmatrix},$$
   y su Hessiana es:
   $$H(x,y,z) = 2I_3.$$

2. **Formulación del algoritmo de Newton-Raphson en $\mathbb{R}^4$:**
   Se implementó el método iterativo:
   $$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha\, H(\mathbf{x}_k)^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_k),$$
   utilizando operaciones básicas de NumPy.

3. **Criterio de parada:**
   La iteración se detiene cuando la norma del gradiente es menor que una tolerancia definida, es decir, $\|\nabla f(\mathbf{x}_k)\| < \epsilon$.

4. **Almacenamiento y análisis de la convergencia:**
   Se almacenó la trayectoria iterativa y se representó la convergencia mediante una gráfica que muestra la norma del gradiente versus el número de iteraciones. Por tratarse de una función cuadrática con Hessiana constante, la aproximación cuadrática es exacta y el método converge en una única iteración.

2. Análisis de Resultados

Parte A: Función de Rosenbrock (3D)

El método de Newton-Raphson, aplicado con el punto inicial $(0, 10)$, logró converger hacia una solución aproximada cercana al mínimo teórico en $(1, 1)$. La trayectoria iterativa, graficada sobre la superficie de Rosenbrock en color azul, muestra cómo el algoritmo se acerca al mínimo. El mínimo final se destaca en color rojo, evidenciando la convergencia del método.

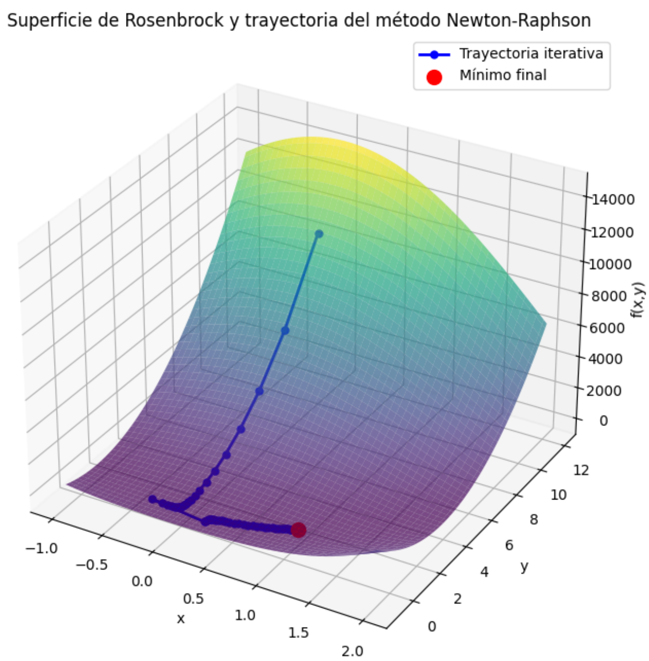

Figura 1: Superficie de Rosenbrock y trayectoria iterativa (en azul) con el mínimo final resaltado en rojo.

Parte B: Función en $\mathbb{R}^4$

Para la función en $\mathbb{R}^4$, partiendo del punto inicial $(0, 0, 0)$, el método converge en una única iteración al mínimo global $(1, 2, 3)$. Esto se debe a que la función es cuadrática, es decir:

$$f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2,$$

con gradiente lineal

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2(x-1) \\ 2(y-2) \\ 2(z-3) \end{bmatrix},$$

y una Hessiana constante

$$H(x, y, z) = 2I_3.$$

La iteración del método es:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - H^{-1}\nabla f(\mathbf{x}_k).$$

Dado que $H^{-1} = \frac{1}{2}I_3$, se tiene:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \frac{1}{2} \cdot 2(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*) = \mathbf{x}_k - (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*,$$

donde $\mathbf{x}^* = (1, 2, 3)$ es el mínimo global. Por ello, el método alcanza la solución en una única iteración y la gráfica de convergencia muestra solo ese paso.

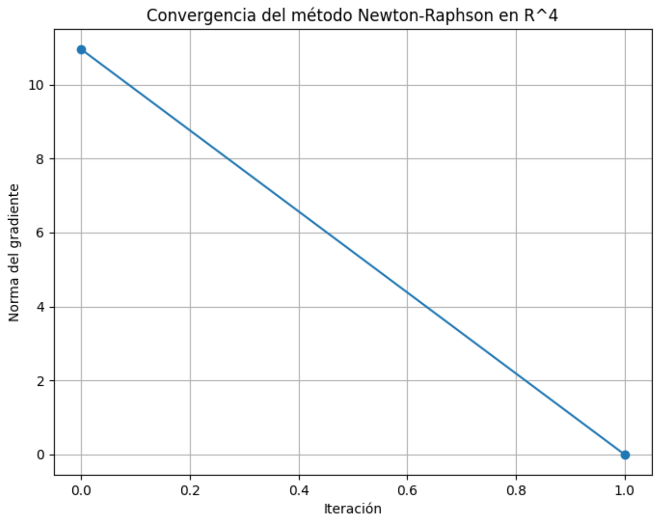

Figura 2: Convergencia del método Newton-Raphson en $\mathbb{R}^4$: Norma del gradiente vs. Iteraciones.

3. Conclusiones y Observaciones

- La implementación del método de Newton-Raphson en espacios multidimensionales (2D y 3D) fue exitosa para encontrar mínimos de funciones no lineales.
- En la Parte A, la función de Rosenbrock presentó una trayectoria iterativa que converge hacia el mínimo teórico $(1, 1)$, lo que se evidenció claramente en la gráfica 3D.
- En la Parte B, la función en $\mathbb{R}^4$ es cuadrática con una Hessiana constante, lo que garantiza que el método de Newton-Raphson converge en un único paso. Esto se debe a que la aproximación cuadrática es exacta para funciones de esta naturaleza, permitiendo alcanzar la solución global de forma inmediata.
- La elección del punto inicial y del factor de convergencia α es crucial para el rendimiento del método en problemas más complejos, ya que en funciones no cuadráticas la convergencia podría requerir múltiples iteraciones.
- La representación gráfica tanto de la trayectoria iterativa sobre la superficie como de la convergencia del gradiente es fundamental para analizar y comprender el comportamiento del algoritmo.